

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úlohy se čtyřmi středy trojúhelníka řešené analyticky i synteticky

Tasks with four triangle centres solved with analytic and synthetic approach

Jan Pavlata

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Tělesná výchova a sport
se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním bakalářské práce na téma „Úlohy se čtyřmi středy trojúhelníka řešené analyticky i synteticky“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Libochovicích dne 11. července 2022

Jan Pavlata

Na tomto místě bych velice rád poděkoval vedoucímu práce panu JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za jeho čas, cenné rady a velice ochotný a vstřícný přístup v průběhu celého psaní bakalářské práce.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se věnuje úlohám trojúhelníka a jeho nejznámějším čtyřem středům: těžišti, ortocentru a středům kružnic opsané a vepsané. Úlohy jsou řešeny převážně analytickou metodou, která se prolíná s metodou syntetickou. Práce předkládá několik efektivních a mnohdy vlastních způsobů, jak řešit různé úlohy, jsou-li zadány tříprvkovými kombinacemi vrcholů a středů. U úloh tohoto typu také nalezneme nástroje, jak generovat celočíselná zadání s celočíselným řešením. Vyvrcholením tříbodových úloh jsou řešení kombinací vrchol, střed kružnice vepsané a jeden ze zbylých středů, jejichž řešení jsem v žádné literatuře nenalezl. V práci dále diskutujeme existenci a počet řešení v závislosti na poloze středu vůči pevně daným dvěma vrcholům, a navíc rozlišujeme, kdy výsledkem je trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, nebo tupoúhlý. Speciálně pak také odvozujeme, kdy výsledkem bude trojúhelník rovnoramenný nebo rovnostranný. Výsledky ilustrujeme dostatkem obrázků. Při řešení úloh a zkoumání vlastností těchto středů narazíme i na nepříliš známé, a přitom pozoruhodné jevy, jako je např. ortocentrický systém nebo Ponceletovo porisma.

KLÍČOVÁ SLOVA

trojúhelník, středy trojúhelníka, analytická geometrie

ABSTRACT

This bachelor's thesis is devoted to the tasks of the triangle and its four most famous centres: the centroid, the orthocenter, incentre and circumcentre. The tasks are mainly solved by the analytical method, which is combined with the synthetic method. The work presents several effective and often unique ways to solve problems if they are specified by three-element combinations of vertices and centres. In this bachelor's thesis, we will also find tools to generate integer tasks of this type. The pinnacle of three-point problems is the solution of the combination of the vertex, the incentre and one of the remaining centers, the solution of which I could not find in the literature. In the thesis, we discuss the existence and number of solutions depending on the position of the center relative to the fixed two vertices, and we also distinguish when the result is an acute-angled, right-angled, or obtuse-angled triangle. In particular, we also derive when the result will be an isosceles or equilateral triangle. We illustrate everything with plenty of pictures. When solving problems and investigating the properties of these centers, we come across not very well-known and yet remarkable phenomena, such as the orthocentric system or the Poncelet porism.

KEYWORDS

triangle, triangle centres, analytic geometry

Obsah

Úvod	1
Seznam použitého značení	3
1 Čtyři středy trojúhelníka: důkazy existence a příklady	4
1.1 Těžiště	5
1.1.1 Důkazy existence těžiště	6
1.1.2 Příklad	11
1.2 Ortocentrum	13
1.2.1 Důkazy existence ortocentra	13
1.2.2 Příklad	14
1.3 Střed kružnice opsané	16
1.3.1 Důkaz existence středu kružnice opsané	17
1.3.2 Příklad	18
1.4 Střed kružnice vepsané	21
1.4.1 Důkaz existence středu kružnice vepsané	21
1.4.2 Příklad	25
1.5 Eulerova přímka	30
2 Úlohy se dvěma vrcholy a jedním středem nebo vrcholem Eulerovou přímkou	33
2.1 Úloha ABT	34
2.1.1 Příklad	34
2.1.2 Diskuze řešení	35
2.1.3 ABT : rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky	35
2.1.4 ABT : ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky	38
2.1.5 Generování celočíselných zadání	40
2.1.6 Další úlohy	40

2.2	Úloha ABV	41
2.2.1	Příklad.....	41
2.2.2	Diskuze řešení	42
2.2.3	Ortocentrický systém.....	44
2.2.4	ABV : rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky.....	46
2.2.5	ABV : ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky	50
2.2.6	Generování celočíselných zadání	52
2.2.7	Další úlohy.....	54
2.3	Úloha ABS	55
2.3.1	Příklad.....	55
2.3.2	Diskuze řešení	55
2.3.3	ABS : rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky	56
2.3.4	Generování celočíselných zadání	57
2.4	Úloha ABU	59
2.4.1	Příklad.....	59
2.4.2	Diskuze Řešení	61
2.4.3	ABU : rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky	61
2.4.4	Další úlohy.....	66
2.5	Úloha Ae (ASTV)	67
2.5.1	Příklad.....	67
2.5.2	Diskuze řešení	71
2.5.3	Další úlohy.....	73
3	Úlohy s vrcholem, středem kružnice vepsané a jedním dalším středem	74
3.1	Úloha AUS	75
3.1.1	Další úlohy.....	79

3.2	Úloha AUV	80
3.2.1	Příklad 1	80
3.2.2	Příklad 2	81
	Závěr	85
	Seznam použitých informačních zdrojů	86

Úvod

Problematika trojúhelníka a jeho středů nabízí mnoho prostoru pro nejrůznější úlohy a již se jí zabývala řada autorů. Jedním z nejvýznamnějších byl Euler, který toto téma řešil synteticky, přičemž náhodou objevil i tzv. Eulerovu přímku (Euler, 1767, Sandifer, 2009). Trojúhelník je jedním z centrálních objektů planimetrie a žáci se s ním seznamují již na základní škole. Učí se trojúhelníky klasifikovat dle délek stran a velikostí úhlů, a zároveň je zkonstruovat pomocí těchto parametrů. Velice zajímavá tematika středů trojúhelníka, které se bude věnovat tato práce, však dle mého názoru příliš často ve školách probírána není.

V této práci se budeme zabývat několika tradičními i netradičními problémy, které se týkají trojúhelníka a jeho nejznámějších čtyř středů (triangle centres, americkou angličtinou triangle centers), také nazývaných klasické středy trojúhelníka. Těmito středy jsou těžiště, ortocentrum, střed kružnice vepsané a střed kružnice opsané.

Cílem této práce je systematicky řešit úlohy zadané tříbodovými kombinacemi vrcholů a středů trojúhelníka a zároveň hledat efektivní způsoby řešení těchto úloh. V práci převažuje analytická metoda řešení, která se volně prolíná s metodou syntetickou. Tato práce má z části sloužit i jako pomocný materiál pro učitele středních škol ve výuce této problematiky. Práce je rozdělena do tří kapitol, které na sebe navazují logicky i obtížností.

V první části si tyto středy představíme, synteticky i analyticky dokážeme jejich existenci, a na ilustračních příkladech ukážeme konstrukční i početní způsob, jak tyto středy nalézt.

V části druhé budeme pracovat s úlohami, kde jsou zadány dva vrcholy a jeden střed. Ukážeme několik způsobů, jak nalézt třetí z vrcholů. Také budeme diskutovat existenci a počet řešení v závislosti na poloze středu vůči dvěma pevně daným vrcholům, a navíc rozlišovat, kdy je výsledkem trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý. Dále se budeme ptát, pro jakou polohu středu vzhledem k pevně daným bodům vznikají trojúhelníky rovnoramenné a speciálně rovnostranné.

V třetí části se přesuneme na nejtěžší tříprvková zadání trojúhelníka, která nejsou v žádné autorovi známé literatuře řešena. Těmito úlohami jsou zadání trojúhelníka pomocí jednoho z vrcholů, středu kružnice vepsané a jednoho ze zbylých středů. Jednou z motivací, na

základě které jsem se rozhodl pro téma této práce, byl článek vedoucího mé práce „Triangle in teaching geometry - few unusual problems“ (2020), ve kterém autor právě tento typ úloh zmiňuje (s. 41) jako úlohy s doposud neznámým řešením. Tento článek zároveň navrhuje přístupy, jak pojmout výuku středů trojúhelníka.

V tuzemské literatuře řeší podobné typy úloh např. Švrček (2004) syntetickou metodou. Ten však úlohy zadává pomocí stran, těžnic, výšek, či poloměrů kružnic vepsaných a opsaných, a neposkytuje řešení úloh zadaných význačnými body. Dále lze zmínit práci Tušky (2018), ve které diskutuje počet a existenci řešení některých tříbodových úloh taktéž synteticky. V neposlední řadě je třeba zmínit práce Pecla (2005, 2009), který řeší různá tříprvková zadání trojúhelníka analyticky.

Toto téma jsem si vybral, neboť jsem chtěl ukázat velmi pěkné úlohy, které se v rámci geometrie trojúhelníka a jeho středů dají řešit. Práce obsahuje z velké části vlastní výpočty a také originální úlohy, které jsem v žádné literatuře nedohledal. Proto jsem přesvědčen, že by tato práce mohla být přínosem.

V práci budu úlohy koncipovat tak, aby zadání a především hledané body byly celočíselné. Když budou žáci pracovat pouze s celými čísly, případně s hezkými racionálními čísly, odstraníme tím z úloh numerickou náročnost a žáci se budou moci soustředit pouze na proces řešení.

Seznam použitého značení

Označení	
A, B, C	vrcholy trojúhelníka ABC
a, b, c	strany trojúhelníka ABC , tj. úsečky BC, CA, AB , přímky BC, CA, AB
S_a, S_b, S_c	středy stran trojúhelníka
t_a, t_b, t_c	těžnice na strany (po řadě) BC, CA, AB
v_a, v_b, v_c	výšky na strany (po řadě) BC, CA, AB
o_a, o_b, o_c	osy stran BC, CA, AB
$o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$	osy úhlů CAB, ABC, BCA
T	těžiště
V	ortocentrum
S	střed kružnice opsané
U	střed kružnice vepsané
α, β, γ	úhly CAB, ABC, BCA
k_o	kružnice opsaná trojúhelníku
k_v	kružnice vepsaná trojúhelníku
r	poloměr kružnice opsané
ρ	poloměr kružnice vepsané
$A[a_1; a_2]$	Souřadnice bodu A

1 Čtyři středy trojúhelníka: důkazy existence a příklady

V této kapitole se seznámíme s uvedenými čtyřmi význačnými body trojúhelníka a dokážeme jejich existenci. Pro úplnost by bylo vhodné dokázat i jednoznačnost. Jelikož však všechny čtyři středy, se kterými budeme pracovat, jsou definovány jako společný průsečík tří přímk, můžeme rovnou prohlásit, že takový bod může existovat vždy nejvýše jeden. Hledání těchto středů konstrukčně (synteticky) spadá do učiva matematiky základních škol. Analytické výpočty těchto středů by pak měly být předmětem studia matematiky středních škol. V této práci si ukážeme, jak je nalézt synteticky i analyticky.

Definice: *Trojúhelník* je množina všech bodů, které leží zároveň v polorovinách ABC , BCA i CAB (je tedy průnikem těchto tří polorovin) (Pomykalová, 1996, s. 22).

Z této definice vyplývá, že trojúhelník je část roviny. V kontextu této práce však budeme klást důraz zejména na body, kterými je trojúhelník určen, o nichž mluví úvodní věta kapitoly.

Věta: Tři různé body A, B, C , které neleží v přímce, určují trojúhelník ABC .

Touto větou, která pro nás bude velmi důležitá, uvádí Pomykalová (1996, s. 22) téma trojúhelník v učebnici planimetrie. Body A, B, C budeme nazývat vrcholy trojúhelníka. Tři body, které neleží v přímce, budeme často nazývat nekolineární, naopak tři body ležící v přímce budeme označovat jako kolineární. Výše uvedenou větu bychom tedy mohli vyslovit také takto: Třemi nekolineárními body je určen trojúhelník. S podmínkou, že nějaké body jsou či nejsou kolineární, se budeme velmi často setkávat v diskuzích řešených příkladů se čtyřmi klasickými středy.

Pojem „střed trojúhelníka“ budeme intuitivně chápat jako význačný bod trojúhelníka, který je vrcholy trojúhelníka jednoznačně určen. V anglickojazyčných textech jsou tyto body nazývány *triangle centres* (např. Kimberling, 1994).

Tato práce se věnuje čtyřem, dle mého názoru nejznámějším, středům trojúhelníka, které uměli zkonstruovat již staří Řekové (Math Open Reference, 2011). Tyto čtyři středy je relativně snadné zkonstruovat a jsou mnohdy vykládány již v rámci učiva základní školy. Těmito středy jsou *těžiště* (angl. název *centroid*, *barycenter*, *center of gravity*), ortocentrum (orthocentre), střed *kružnice opsané* (*circumcentre*) a střed kružnice vepsané (*incentre*).

Univerzita v Evansville k roku 2022 eviduje několik desítek tisíc středů trojúhelníka, které jsou také číselně standardizovány v některých výpočetních softwarech, což zjednodušuje jejich praktickou aplikaci. Například software Geogebra umožňuje tyto standardizované středy pro vrcholy zadané souřadnicemi nalézt. V zadání příkazu jsou prvními třemi parametry názvy vrcholů a čtvrtým parametrem číslo reprezentující hledaný střed. Například příkaz `StredTrojuhelniku(A, B, C, 1)` přiřadí trojúhelníku určenému body A, B, C střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku.

Pojem střed může být z počátku matoucí. V případě našich bodů se totiž vůbec nemusí jednat o vnitřní body trojúhelníka. Těžiště a střed kružnice vepsané jsou vždy vnitřním bodem trojúhelníka. Ortocentrum a střed kružnice opsané jsou vnitřním bodem trojúhelníka právě tehdy, když je daný trojúhelník ostroúhlý a vnějším bodem trojúhelníka, pokud je trojúhelník tupoúhlý. Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak ortocentrum splývá s vrcholem pravého úhlu a střed kružnice opsané se středem přepony trojúhelníka. (Pomykalová, 1997, 27-28)

Stranami a, b, c obecně rozumíme po řadě úsečky BC, CA, CB . V této práci však budeme a, b, c značit i přímkami, na nichž úsečky BC, CA, CB leží. Pokud budeme značením a, b, c myslet velikost těchto stran, pak to v textu explicitně uvedeme.

1.1 Těžiště

Těžiště bývá první ze 4 klasických středů, se kterým se žáci setkávají. Těžiště je pro žáky nejspíš nejsnáze uchopitelný střed, neboť ho mohou sami pozorovat, např. při balancování vystřiženého trojúhelníka na prstu. Poté přejdou k hledání tohoto středu konstrukcí. Odtud se dostáváme k pojmu těžnice.

Definice: Těžnicí nazveme úsečku, která spojuje vrchol trojúhelníka a střed protilehlé strany.

Úmluva: V této práci budeme těžnicí nazývat i přímkou procházející vrcholem a středem protilehlé strany.

Že se takovéto úsečky protínají v jednom bodě, kterým je těžiště už tak jasné není.

Věta: Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě zvaném těžiště trojúhelníka (Pomykalová, 1996, s. 26).

1.1.1 Důkazy existence těžiště

Nejprve uvedeme jeden z klasických syntetických důkazů a následně přidáme dva početní důkazy.

(a) syntetický

Důkaz: Označme písmenem X průsečík těžnic t_a a t_b . Trojúhelníky S_bS_aC a ABC jsou podobné a platí $|S_bS_a| = \frac{1}{2}|AB|$, tedy koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$. Navíc trojúhelníky S_aS_bX a ABX jsou také podobné s koeficientem $\frac{1}{2}$ díky shodnosti vnitřních úhlů ($|\angle AXB| = |\angle S_aXS_b|$ podle věty o vrcholových úhlech, $|\angle XAB| = |\angle XS_aS_b|$ a $|\angle XBA| = |\angle XS_bS_a|$ podle věty o střídavých úhlech). Odtud získáváme:

$$(1) |AX| = 2|S_aX| \text{ a } |BX| = 2|S_bX|.$$

Tím jsme dokázali, že tyto 2 těžnice se protínají v bodě, který obě z nich dělí v poměru 1 : 2 a leží blíže ke straně. Zopakujme nyní celou situaci s jinými dvojicemi podobných trojúhelníků. Trojúhelník S_cS_bA je podobný trojúhelníku BCA s koeficientem $\frac{1}{2}$ a trojúhelník S_bS_cT je podobný trojúhelníku BCT . Pro jejich průsečík Y platí:

$$(2) |BY| = 2|S_bY| \text{ a } |CY| = 2|S_cY|.$$

Vzhledem k tomu, že bod X i bod Y dělí úsečku BS_b shodně v poměru 1 : 2 (z rovnosti (1) $|BX| = 2|S_bX|$ a z rovnosti (2) $|BY| = 2|S_bY|$), musí platit $X = Y$.

Z toho plyne, že X , resp. Y jsou průsečíkem všech tří těžnic. Tento průsečík nazveme těžiště a budeme jej značit T .

(b) souřadnicový

Tento důkaz není náročný myšlenkově, nýbrž numericky. Oproti (c) vektorový důkazu (který si za chvíli představíme), využívá elementárnějších nástrojů, proto jej uvádíme.

Důkaz: Vyjádřeme dvě z těžnic parametricky. Např. těžnice t_a je určena bodem $A[a_1; a_2]$ a směrovým vektorem $\overrightarrow{AS_a} = (s_{a_1} - a_1; s_{a_2} - a_2) = \left(\frac{b_1+c_1}{2} - a_1; \frac{b_2+c_2}{2} - a_2\right)$. Získáváme tak:

$$t_a: x = a_1 + k \cdot \left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1\right),$$

$$y = a_2 + k \cdot \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right).$$

Obdobným postupem získáváme pro těžnici t_b parametrické vyjádření:

$$t_b: x = b_1 + l \cdot \left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1 \right),$$

$$y = b_2 + l \cdot \left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 \right).$$

Chceme-li najít průsečík těchto dvou přímek, musíme nalézt taková k, l , pro která se x -souřadnice t_a rovná x -souřadnici t_b , a totéž pro y -souřadnice t_a a t_b . Jinými slovy, musíme vyřešit tuto soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých k, l :

$$(1) a_1 + k \cdot \left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1 \right) = b_1 + l \cdot \left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1 \right),$$

$$(2) a_2 + k \cdot \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right) = b_2 + l \cdot \left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 \right).$$

Vyjádřeme k z rovnice (1):

$$k = \frac{2b_1 - 2a_1 + l(a_1 + c_1 - 2b_1)}{(b_1 + c_1 - 2a_1)},$$

a dosazením za k do rovnice (2) obdržíme rovnost:

$$a_2 + \left[\frac{2b_1 - 2a_1 + l(a_1 + c_1 - 2b_1)}{(b_1 + c_1 - 2a_1)} \right] \cdot \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right) = b_2 + l \cdot \left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 \right).$$

Nyní je třeba pár řádků výpočtu, které přenechávám čtenáři. Jedná se o počítání s velmi dlouhými výrazy, proto doporučuji tuto úlohu jako procvičení úprav výrazů. Po delší práci bychom se měli dopracovat k výrazu:

$$l = \frac{2}{3} \cdot \frac{(b_1a_2 - c_1a_2 - b_1c_2 - a_1b_2 + a_1c_2 + c_1b_2)}{(b_1a_2 - c_1a_2 - b_1c_2 - a_1b_2 + a_1c_2 + c_1b_2)}.$$

Povšimněme si, že výrazy v závorkách v čitateli a jmenovateli jsou naprosto shodné, můžeme je proto vzájemně zkrátit a získáváme výsledek:

$$l = \frac{2}{3}.$$

Jedná se o poměrně překvapivý výsledek vzhledem k cestě, která k němu vedla. Hledaný průsečík tedy získáme dosazením $\frac{2}{3}$ za l do parametrického vyjádření t_b :

$$T: x = b_1 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1 \right),$$

$$y = b_2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 \right).$$

Úpravami vzorce získáváme vzorec pro souřadnice T v závislosti na souřadnicích ABC :

$$T \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right].$$

Dopočtem k zjišťujeme, že $k = l = \frac{2}{3}$, a dosazením k do t_a můžeme ověřit, že námi získané souřadnice T jsou správné.

Nyní proces opakujeme s jinou dvojicí těžnic a obdobným postupem dojdeme k výsledku, že jejich průsečík má stejné souřadnice jako průsečík předchozích dvou. Tím je dokázáno, že se všechny těžnice protínají v právě jednom bodě, jehož souřadnice jsou aritmetickým průměrem vrcholů.

Nejen, že jsme dokázali existenci těžiště, ale získali jsme vzorec, díky kterému ihned ze zadaných souřadnic vrcholů A, B, C spočítáme souřadnice T .

(c) vektorový

Nyní si ukažme vektorový důkaz, který není tak početně náročný, ale využívá pokročilejších metod, než důkaz souřadnicový.

Důkaz: Popíšme těžnici t_a jako množinu bodů. Výchozím bodem zvolme vrchol A a posouvajme jej po úsečce AS_a pomocí vektoru $\overrightarrow{AS_a}$:

$$t_a = \{A + k \cdot \overrightarrow{AS_a}\}; k \in \langle 0,1 \rangle.$$

Stejným způsobem popíšme těžnici t_b :

$$t_b = \{B + l \cdot \overrightarrow{BS_b}\}; l \in \langle 0,1 \rangle.$$

Víme, že v trojúhelníku nemůže nastat, že by těžnice byly rovnoběžné, proto určitě existuje jejich průsečík. Chceme-li ho nalézt, musíme najít taková k, l , pro která platí:

$$A + k \cdot \overrightarrow{AS_a} = B + l \cdot \overrightarrow{BS_b}.$$

Upravme rovnici tak, abychom získali rovnost dvou vektorů. V prvním kroku nahradíme vektor $\overrightarrow{AS_a}$ součtem vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, bod B nahradíme přičtením vektoru $\overrightarrow{AB}$ k bodu A, a vektor $\overrightarrow{BS_b}$ nahradíme součtem vektorů $\overrightarrow{BA}$ a $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$:

$$A + k \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right) = A + \overrightarrow{AB} + l \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right).$$

Všimněme si, že můžeme od obou stran rovnice odečíst A. Nahrazením vektoru $\overrightarrow{BA}$ vektorem $-\overrightarrow{AB}$ a vektoru $\overrightarrow{AC}$ součtem vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BC}$ získáváme rovnost:

$$k \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right) = l \cdot \left[-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \right].$$

Převedením na jednu stranu seskupením koeficientů u daných vektorů obdržíme:

$$\left(k + \frac{1}{2}l - 1 \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l \right) \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Pro dokončení důkazu budeme potřebovat následující definice.

Definice: Vektor $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární kombinace vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. (Kočandrlé, Boček, 1995, s. 37)

Definice: Pokud existuje pouze triviální lineární kombinace vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, pak vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazveme lineárně nezávislými (Novotná, Trch, 1989, s. 37).

Triviální lineární kombinací myslíme takovou kombinaci, že všechny její koeficienty jsou rovny nule. Pro lineárně nezávislé vektory $\vec{u}, \vec{v}$ tedy platí, že pokud $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} = \vec{0}$, pak $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Jinými slovy, dva vektory jsou lineárně závislé, pokud je jeden násobkem druhého. Geometrická interpretace lineární závislosti dvou vektorů je taková, že určují stejný směr. V našem případě jsou vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BC}$ určitě lineárně nezávislé, neboť přímky AB, BC nemohou být rovnoběžné, pokud mají tvořit trojúhelník. Získáváme tedy podmínku, že koeficienty vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BC}$ musí být nulové. V našem případě tedy:

$$k + \frac{1}{2}l - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l = 0.$$

Dorešením této soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých získáváme řešení:

$$k = l = \frac{2}{3}.$$

Dosazením do původního předpisu libovolné z těžnic t_a, t_b dostaneme souřadnice průsečíku těchto těžnic, tedy těžiště. Zvolme např. předpis t_a :

$$T = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AS_a}.$$

Již zde si můžeme všimnout, že průsečík těžnic leží ve dvou třetinách úsečky AS_a blíže k bodu S_a , tím je dokázáno, že těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2.

Přepsáním vektoru $\overrightarrow{AS_a}$ na rozdíl souřadnic daných bodů a vyjádřením S_a pomocí vrcholů B, C získáváme:

$$T = A + \frac{2}{3}(S_a - A) = A + \frac{2}{3}\left(\frac{B + C}{2} - A\right).$$

Po úpravách dostáváme vzorec:

$$T = \frac{A + B + C}{3}.$$

Chceme-li ověřit správnost výsledku, stačí dosadit za l $\frac{2}{3}$ do druhé rovnosti $T = B + l \cdot \overrightarrow{BS_b}$ a dospějeme ke stejnému výsledku.

Opět opakujeme postup pro jinou dvojici těžnic a získáváme stejné vyjádření T . Tím je dokázáno, že se všechny těžnice protínají v právě jednom bodě.

Pozn. Tento vzorec pro výpočet těžiště lze odvodit rychleji. V následujícím odvození však využijeme faktu, že těžiště dělí těžnice v poměru 1:2, tedy leží ve dvou třetinách AS_c, BS_b a CS_c . Zapišme tuto skutečnost např. pro těžnici t_c pomocí vektorů: $\frac{\overrightarrow{S_cT}}{\overrightarrow{TC}} = \frac{1}{2}$. Přepišme vektory pomocí bodů: $\frac{(T-S_c)}{(C-T)} = \frac{1}{2}$. Vyjádřeme ze vzorce těžiště: $T = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}S_c$. Bod S_c ale

není nic jiného než aritmetický průměr vrcholů A a B , proto $T = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3} \cdot \frac{A+B}{2}$, z čehož získáváme výslednou rovnost $T = \frac{A+B+C}{3}$.

1.1.2 Příklad

Určete souřadnice těžiště $\triangle ABC$, známe-li $A[-3; 2]$, $B[1; 0]$ a $C[5; 4]$.

Ukažme dva způsoby, jak nalézt těžiště. První z nich bude kopírovat konstrukční řešení úlohy:

(a) konstrukční řešení

Postup konstrukce

1. $S_c; S_c \in AB \wedge |S_c A| = |S_c B|$
2. $t_c; t_c = \overleftrightarrow{S_c C}$
3. $S_b; S_b \in CA \wedge |S_b C| = |S_b A|$
4. $t_b; t_b = \overleftrightarrow{S_b B}$
5. $T; T \in t_c \cap t_b$

Výpočet

1. $S_c = \frac{A+B}{2} = [3,5; -0,5]$
2. $t_c: x - 2y + 3 = 0$
3. $S_b = \frac{C+A}{2} = [2; 4]$
4. $t_b: x - 1 = 0$
5. $T[1,2]$

Místo t_c , resp. t_b lze použít přímkou t_a :

$$t_a; t_a = \overleftrightarrow{S_a A}$$

$$t_a: y - 2 = 0$$

Pozn.: Jak jsme zmínili již dříve, těžnice je definována jako úsečka. My s ní ve výpočtech pro jednoduchost pracujeme jako s přímkou, což výsledek nikterak neovlivní.

(b) řešení užitím vzorce

V souřadnicovém důkazu těžiště jsme odvodili vzorec pro T . Aplikací na náš příklad získáváme:

$$T \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right],$$

$$T \left[\frac{-3 + 1 + 5}{3}; \frac{2 + 0 + 4}{3} \right],$$

$$\underline{T = [1; 2]}.$$

Přestože zde není konstrukční řešení příliš složité, výpočet vzorcem je rozhodně rychlejší volbou.

1.2 Ortocentrum

Nyní se zaměříme na druhý z významných středů trojúhelníka. Ortocentrum je velmi zajímavým středem a v kapitole 2.2 odhalíme několik, mnohdy překvapivých, vlastností, které tento bod má.

Definice: Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku, se nazývá výška trojúhelníku. (Pomykalová, 1996, s. 27).

Úmluva: V této práci budeme výškou rozumět i přímkou, která prochází vrcholem a patou kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbylými vrcholy trojúhelníka.

Věta: Všechny tři výšky se protínají v jediném bodě V , tzv. průsečíku výšek, kterému se také říká ortocentrum.

1.2.1 Důkazy existence ortocentra

(a) syntetický

Důkaz: Vedme vrcholem A rovnoběžku ke straně BC , vrcholem B rovnoběžku k AC a vrcholem C rovnoběžku k AB . Původní trojúhelník se tak stává trojúhelníkem příčkovým k nově vzniklému trojúhelníku. Osy stran nově vzniklého trojúhelníka jsou shodné s přímkami, na nichž leží výšky původního trojúhelníka. Osy stran se vždy protínají, jak dokážeme v příští kapitole, proto se musí protínat i přímky, na nichž leží výšky.

(b) početní

Důkaz: Necht' je dán trojúhelník ABC , kde $A[a_1; a_2], B[b_1; b_2], C[c_1; c_2]$. Pomocí normálových vektorů a dopočítání konstanty vyjádříme rovnice výšek v_c a v_b :

$$v_c: (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y - (b_1 - a_1)c_1 - (b_2 - a_2)c_2 = 0,$$

$$v_b: (c_1 - a_1)x + (c_2 - a_2)y - (c_1 - a_1)b_1 - (c_2 - a_2)b_2 = 0.$$

Bod V , který je průsečíkem těchto dvou přímek, musí splňovat obě rovnice. Dokažme, že tento průsečík leží i na přímce v_a , tedy splňuje i její rovnici:

$$v_a: (c_1 - b_1)x + (c_2 - b_2)y - (c_1 - b_1)a_1 - (c_2 - b_2)a_2 = 0.$$

Nesouvisejí spolu rovnice v_c a v_b ? Zkusme je od sebe odečíst. Splňují-li totiž souřadnice bodu V rovnice v_c i v_b , musejí splňovat i rozdíl těchto rovnic:

$$v_b - v_c: (c_1 - a_1 - b_1 + a_1)x + (c_2 - a_2 - b_2 + a_2)y - b_1c_1 + a_1c_1 - b_2c_2 + a_2c_2 + b_1c_1 - a_1b_1 + b_2c_2 - a_2b_2 = 0$$

Úpravou této rovnice zjišťujeme, že $v_a = v_b - v_c$. Z toho, že V splňuje rovnici $v_b - v_c$, tedy plyne, že splňuje i rovnici v_a , a tím pádem na této přímce leží. Ukázali jsme tedy, že všechny tři výšky se protínají v jediném bodě V .

1.2.2 Příklad

Nalezněte souřadnice ortocentra, známe-li: $A[0; 0]$, $B[4; 3]$, $C[-2; 6]$.

(a) konstrukční řešení

Postup konstrukce

1. $v_c; C \in v_c \wedge v_c \perp AB$
2. $v_b; B \in v_b \wedge v_b \perp AC$
3. $V \in v_c \cap v_b$

Výpočet

1. $v_c: 4x + 3y - 10 = 0$
2. $v_b: -x + 3y - 5 = 0$
3. $V[1; 2]$

Místo v_c , resp. v_b lze použít v_a .

$$v_a; A \in v_a \wedge v_a \perp BC$$

$$v_a: 2x - y = 0$$

(b) řešení pomocí skalárních součinů

Přejdeme k druhému způsobu řešení úlohy ABV a tím je řešení pomocí skalárních součinů.

To využívá skutečnost, že skalární součin kolmých vektorů je roven nule. Musí platit:

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AV} &= 0, & (2) \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BV} &= 0, & (3) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CV} &= 0, \\ \overrightarrow{BC} &= (-6; 3), & \overrightarrow{AC} &= (-2; 6), & \overrightarrow{AB} &= (4; 3), \\ \overrightarrow{AV} &= (v_1; v_2), & \overrightarrow{BV} &= (v_1 - 4; v_2 - 3), & \overrightarrow{CV} &= (v_1 + 2; v_2 - 6). \end{aligned}$$

Získáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -6 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2, \\ (2) \quad & -2 \cdot (v_1 - 4) + 6 \cdot (v_2 - 3) = 0, \end{aligned}$$

$$(3) \ 4 \cdot (v_1 + 2) + 3 \cdot (v_2 - 6) = 0.$$

Tyto rovnice jsou lineárně závislé, proto nám k výpočtu postačí dvě z nich. Lineární závislost snadno ověříme například odečtením rovnosti (1) od rovnosti (2), čímž získáme rovnost (3). Dořešením soustavy spočteme $v_1 = 1, v_2 = 2$. Ortocentrum má souřadnice:

$$\underline{V[1; 2]}.$$

1.3 Střed kružnice opsané

Definice: Osa úsečky je množina bodů, které mají od krajních bodů této úsečky stejnou vzdálenost.

Víme, že touto množinou je kolmice k úsečce AB vedená jejím středem. Nicméně podložme tuto skutečnost syntetickým a následně analytickým zdůvodněním.

Hledejme tedy všechny body X , pro které platí $|AX| = |BX|$. Chceme-li nalézt tuto množinu vycházíme z faktu, že střed této úsečky danou vlastnost má. Dále tuto vlastnost mají všechny body X , které spolu s body A, B tvoří rovnoramenný trojúhelník takový, že $|AX| = |BX|$. Pokud bychom narýsovali všechny takové trojúhelníky, body X by zaplnily celou přímku $o; S \in o \wedge o \perp AB$. Osa úsečky je tedy zřejmě kolmice k úsečce AB procházející středem této úsečky.

Ukažme si nyní analyticky, že kolmice procházející středem úsečky AB je množina bodů stejně vzdálených od bodů A, B . Tento důkaz není nijak náročný ani dlouhý a mohl by být pro žáky zajímavým.

Nechť jsou dány body $A[a_1; a_2], B[b_1; b_2]$. Osa úsečky je množina bodů $X[x; y]$, pro které platí $|AX| = |BX|$. Zapišme tuto skutečnost pomocí souřadnic:

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}.$$

Umocněním a odečtením shodných členů od obou stran rovnice získáváme rovnost:

$$-2xa_1 + a_1^2 - 2ya_2 + a_2^2 = -2xb_1 + b_1^2 - 2yb_2 + b_2^2.$$

Úpravou zjišťujeme, že se jedná o přímku, jejíž obecný tvar je:

$$2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 0.$$

Tvrdíme, že touto množinou je právě přímka, procházející středem úsečky AB , která je na ni navíc kolmá. Pojďme se tedy podívat na obecný tvar této přímky. Do obecné rovnice o_c použijeme směrový vektor přímky $\overrightarrow{AB}$:

$$(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y + c = 0.$$

Tato přímka má navíc procházet bodem $S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$, proto $c = \frac{a_1^2-b_1^2}{2} + \frac{a_2^2-b_2^2}{2}$. Obecná rovnice o_c má tedy tvar:

$$(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y + \frac{a_1^2 - b_1^2}{2} + \frac{a_2^2 - b_2^2}{2} = 0.$$

Vidíme, že vynásobíme-li rovnici dvěma, získáváme stejnou přímku jako při výpočtu z definice. Tato přímka je tedy skutečně osou úsečky AB .

Nyní přidejme k těmto bodům další, který s nimi není kolineární (který spolu s nimi určuje trojúhelník), a ptejme se, co bude množinou bodů stejně vzdálených od těchto tří bodů. Tato otázka nás přirozeně přivede k následující větě.

Věta: Osy stran trojúhelníku se protínají v jednom bodě, a to ve středu kružnice trojúhelníku opsané (Pomykalová, 1996, s. 27).

Tento střed budeme značit S a poloměr kružnice opsané budeme značit r .

Odpověď na naši otázku tedy zní, že množinou bodů stejně vzdálených od tří nekolineárních bodů je právě jeden bod. Pojdme ale tuto skutečnost dokázat.

1.3.1 Důkaz existence středu kružnice opsané

Důkaz: Chceme-li, aby kružnice procházela všemi třemi vrcholy, musí platit, že mají od jejího středu S shodnou vzdálenost. Vyjádřeme tuto skutečnost pomocí rovností velikosti úseček:

$$(1) |SA| = |SB|, \quad (2) |SB| = |SC|, \quad (3) |SA| = |SC|.$$

Z (1) získáváme podmínku, že S leží na ose úsečky AB . Z (2) získáváme podmínku, že S leží na ose úsečky BC . Vrcholy A, B, C jsou nekolineární, a proto jsou tyto osy určité různoběžné a mají průsečík S . Rovnost (3) plyne z (1) a (2), a tak máme dokázáno, že osa úsečky AC jejich průsečíkem také prochází.

Pozn.: U důkazu existence ortocentra jsme se odvolávali na existenci středu kružnice opsané. Existenci středu kružnice opsané jsme dokázali naprosto nezávisle na existenci ortocentra, proto se nejedná o důkaz kruhem.

1.3.2 Příklad

Nalezněte střed kružnice opsané, známe-li: $A[0; 0]$, $B[7; -1]$, $C[4; 8]$.

(a) konstrukční řešení

Postup konstrukce

1. $S_c; S_c \in AB \wedge |S_c A| = |S_c B|$
2. $o_c; S_c \in o_c \wedge o_c \perp AB$
3. $S_b; S_b \in CA \wedge |S_b C| = |S_b A|$
4. $o_b; S_b \in o_b \wedge o_b \perp CA$
5. $S; S \in o_c \cap o_b$

Výpočet

1. $S_c = \frac{A+B}{2} = \left[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right]$
2. $o_c: 7x - y - 25 = 0$
3. $S_b = \frac{C+A}{2} = [2; 4]$
4. $o_c: x + 2y - 10 = 0$
5. $S[4; 3]$

Místo S_c a o_c či S_b a o_b lze použít S_a a o_a :

$$S_a; S_a \in BC \wedge |S_a B| = |S_a C|$$

$$S_a = \frac{B+C}{2} = \left[\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right]$$

$$o_a; S_a \in o_a \wedge o_a \perp BC$$

$$o_a: x - 3y + 5 = 0$$

(b) řešení pomocí vzdálenosti bodů

Zadané vrcholy ABC určují kružnici. Střed této kružnice musí mít stejnou vzdálenost od všech vrcholů, proto platí $|SA| = |SB| = |SC|$. Obecně tedy platí:

$$\sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(s_1 - b_1)^2 + (s_2 - b_2)^2} = \sqrt{(s_1 - c_1)^2 + (s_2 - c_2)^2}.$$

Vytvořme z dané podmínky dvě rovnice. První z rovnic vyjadřuje rovnost $|SA| = |SB|$ a druhá $|SA| = |SC|$:

$$(1) \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(s_1 - b_1)^2 + (s_2 - b_2)^2},$$

$$(2) \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(s_1 - c_1)^2 + (s_2 - c_2)^2}.$$

Aplikací na náš příklad získáváme:

$$(1) \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{(s_1 - 7)^2 + (s_2 + 1)^2},$$

$$(2) \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{(s_1 - 4)^2 + (s_2 - 8)^2}.$$

Na první pohled se zdá, že tento způsob výpočtu nemůže být příliš efektivní. Umocněním stran a úpravou rovnic však obdržíme:

$$(1) s_1^2 + s_2^2 = s_1^2 - 14s_1 + 49 + 2s_2 + 1,$$

$$(2) s_1^2 + s_2^2 = s_1^2 - 8s_1 + 16 - 16s_2 + 64.$$

Zde už ovšem vidíme, že druhé mocniny se nám vždy v obou rovnicích odečtou, a my tak řešíme snadnou soustavu rovnic:

$$-7s_1 + s_2 + 25 = 0,$$

$$-s_1 - 2s_2 + 10 = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic získáváme $s_1 = 4, s_2 = 3$. Střed kružnice opsané má souřadnice:

$$\underline{S[4; 3]}.$$

(c) řešení pomocí obecné rovnice kružnice

Kružnice opsaná prochází všemi vrcholy trojúhelníka, proto musí souřadnice vrcholů A, B, C splňovat rovnici:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0,$$

kde m, n jsou souřadnice hledaného středu S . Tuto rovnici nazýváme obecná rovnice kružnice. Dosazením prvních a druhých souřadnic vrcholů za x a y získáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$A \in k: p = 0,$$

$$B \in k: 50 - 14m + 2n + p = 0,$$

$$C \in k: 80 - 8m - 16n + p = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic získáváme $m = 4, n = 3, p = 0$. Spočetli jsme tak nejen souřadnice středu:

$$\underline{S[4; 3]},$$

ale i obecnou rovnici kružnice opsané trojúhelníka ABC :

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0.$$

Chceme-li rovnici středovou, stačí využít doplnění na čtverec:

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 0,$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

1.4 Střed kružnice vepsané

Definice: Osa vnitřního úhlu trojúhelníka BAC je množina bodů, které mají od polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ stejnou vzdálenost.

Syntetický důkaz, že touto množinou je právě přímka, dělicí úhel BAC na dva stejně velké naleznete zde (MKS, 2017, s. 17-18).

Definice pomocí polopřímek je zde nutná. Pokud bychom totiž hledali množinu bodů stejně vzdálených od přímek AB a AC , získáme navíc k ose úhlu BAC ještě přímku na ni kolmou procházející bodem A .

Věta: Osy vnitřních úhlů se protínají v jednom bodě, a to středu kružnice trojúhelníku vepsané (Pomykalová, 1996, s. 27).

Motivací k nalezení středu kružnice vepsané je hledání kružnice, pro kterou jsou všechny tři strany tečnou. Chceme-li, aby se kružnice dotýkala všech stran trojúhelníka, a zároveň byla celá uvnitř trojúhelníka, pak její střed musí mít shodnou vzdálenost od všech stran. Střed kružnice vepsané musí tedy ležet na ose úhlu CAB (aby byl stejně vzdálen od stran b a c), a zároveň na ose úhlu ABC , (aby byl stejně vzdálen od stran b a a). Odtud již plyne (jak ukážeme v syntetickém důkazu), že leží i na ose BCA (je stejně vzdálen od stran a a b).

1.4.1 Důkaz existence středu kružnice vepsané

Nejprve představíme klasický syntetický důkaz a poté vektorový, díky kterému získáme vzorec, který nám bude užitečný v řešení úloh.

(a) syntetický

Důkaz: Necht' se osy vnitřních úhlů ABC a BCA protínají v bodě U . Tento bod určitě musí existovat, neboť v opačném případě by body A, B, C netvořili trojúhelník. Označme paty kolmic z bodu U ke stranám BC, CA a AB po řadě A_0, B_0 a C_0 . Z věty 5 platí:

- (1) $|UC_0| = |UA_0|$, neboť U leží na ose úhlu ABC , a
- (2) $|UA_0| = |UB_0|$, neboť U leží na ose úhlu BAC .

Z rovností (1) a (2) přímo plyne i rovnost:

- (3) $|UC_0| = |UB_0|$.

Z předchozí věty tedy I leží i na ose úhlu CAB a osy všech vnitřních úhlu se protínají v bodě I .

Nyní přejdeme k důkazu vektorovému. Z něj získáme nejen existenci středu kružnice vepsané, ale i vzorec pro výpočet jeho souřadnic, který budeme užívat v příkladech.

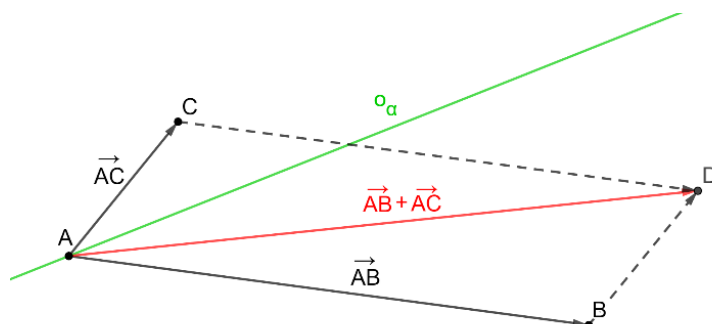
(a) vektorový

Důkaz: Vektorový důkaz bude veden podobně jako u těžiště. Zapišme osy o_α úhlů BAC a o_β úhlu ABC jako množiny bodů:

$$(1) o_\alpha = \{A + k \cdot \overrightarrow{s_{o_\alpha}}\}, k \in \mathbb{R},$$

$$(2) o_\beta = \{B + l \cdot \overrightarrow{s_{o_\beta}}\}, l \in \mathbb{R},$$

kde $\overrightarrow{s_{o_\alpha}}, \overrightarrow{s_{o_\beta}}$ jsou směrové vektory os o_α, o_β . Prvním nápadem, jak tyto směrové vektory nalézt, by mohlo být sečíst vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Součet těchto vektorů ovšem obecně neudává směr osy úhlu BAC (viz Obrázek 1).



Obrázek 1: Doplnění vektorů na rovnoběžník

Je totiž třeba dané vektory vydělit jejich velikostí, aby oba měly shodnou (jednotkovou) velikost. Jinými slovy, je třeba vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ normalizovat. Směrové vektory os úhlů můžeme nahradit takto:

$$(1) o_\alpha = \left\{ A + k \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) \right\}, k \in \mathbb{R},$$

$$(2) o_\beta = \left\{ B + l \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \right) \right\}, l \in \mathbb{R}.$$

Velikosti vektorů $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ označme pro zjednodušení po řadě c, a, b (neboť velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ není nic jiného než velikost úsečky c , atd.). Hledaný bod U je prvkem obou množin. Proto budeme opět hledat koeficienty k, l tak, aby:

$$A + k \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right) = B + l \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right).$$

Odečtením B od obou stran získáváme na levé straně $A - B$, což není nic jiného než vektor $\overrightarrow{BA}$. Dále od obou stran odečteme výraz $k \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right)$ a získáváme:

$$\overrightarrow{BA} = l \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right) - k \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right).$$

Chtěli bychom se dostat do situace, kde máme pouze lineární kombinaci dvou vektorů. Vyjádříme například vektor $\overrightarrow{BA}$ pomocí zbylých dvou. Dále využijme pravidla, že vektor $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ a vektor $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$. Tím obdržíme rovnost:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = l \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{c} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right) + \overrightarrow{BC} - k \cdot \left(\frac{-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}}{c} - \frac{\overrightarrow{CA}}{b} \right).$$

Seskupením koeficientů u vektorů $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ dostáváme rovnost:

$$\left[l \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + k \cdot \frac{1}{c} - 1 \right] \overrightarrow{BC} + \left[k \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \right) + l \cdot \frac{1}{c} - 1 \right] \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$$

Vektory $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ jsou určitě lineárně nezávislé. Podle definice lineárně nezávislých vektorů musí platit:

$$(1) \quad l \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + k \cdot \frac{1}{c} - 1 = 0,$$

$$(2) \quad k \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \right) + l \cdot \frac{1}{c} - 1 = 0.$$

Je tedy třeba dořešit soustavu rovnic o neznámých k, l . Odečtením druhé rovnice od první získáváme vztah:

$$l \cdot \frac{1}{a} - k \cdot \frac{1}{b} = 0.$$

Odtud již snadno vyjádříme např. l a dosadíme do jedné z rovnic. Úpravami poté zjišťujeme:

$$k = \frac{bc}{a + b + c}.$$

Dosazením do (1) nalezneme souřadnice bodu U :

$$U = A + \frac{bc}{a + b + c} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right).$$

Přepíšme vektory na rozdíly bodů a dořešme:

$$U = A + \frac{bc}{a + b + c} \cdot \left(\frac{B - A}{c} + \frac{C - A}{b} \right),$$

$$U = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}.$$

Opět lze výsledek ověřit dopočítáním l .

Nyní vyberme jinou dvojici os a obdobným postupem získáváme stejný vzorec, čímž je existence středu kružnice vepsané dokázána.

Vidíme, že podobně jako u těžiště získáváme kromě důkazu existence i vzorec, díky kterému můžeme znatelně rychleji dopočítat souřadnice vrcholu U , známe-li A, B, C . Využití vzorce si ukážeme v řešení užitím vzorce postupu.

1.4.2 Příklad

Nalezněte souřadnice středu kružnice vepsané, známe-li: $A[0; 0]$, $B[4; -4]$, $C[3; 3]$.

(a) konstrukční řešení

Postup konstrukce

1. o_α ; o_α je osa úhlu CAB
2. o_β ; o_β je osa úhlu ABC
3. U ; $U \in o_\alpha \cap o_\beta$

Výpočet

1. $o_\alpha: y = 0$
2. $o_\beta: 2x + y - 4 = 0$
3. $U[2; 0]$

Místo o_α , resp. o_β lze použít o_γ :

o_γ ; o_γ je osa úhlu BCA

$$o_\gamma: 3x - y - 6 = 0$$

Zatímco u konstrukčních řešení T, V, S jsme postup neuváděli, neboť byl elementární, zde výpočty zdůvodňeme. Jako směrový vektor o_α nelze použít $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, neboť nemají stejnou velikost (jak jsme již zmiňovali ve *Důkaz: Vektorový důkaz existence středu kružnice vepsané.*) Směrový vektor o_α najdeme součtem normalizovaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$, tedy:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s_{o_\alpha}} &= \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(4; -4)}{4\sqrt{2}} + \frac{(3; 3)}{3\sqrt{2}}, \\ \overrightarrow{s_{o_\alpha}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2}; 0) \parallel (1; 0).\end{aligned}$$

Do obecné rovnice o_α použijme normálový vektor k $\overrightarrow{s_{o_\alpha}}$, a jelikož $A \in o_\alpha$ získáváme:

$$o_\alpha: y = 0.$$

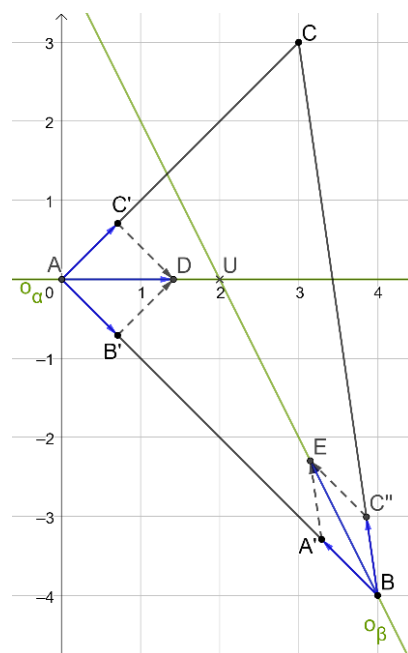
Stejně tak popíšeme osu o_β :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s_{o_\beta}} &= \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(-4; 4)}{4\sqrt{2}} + \frac{(-1; -7)}{5\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}; \frac{7\sqrt{2}}{10}\right), \\ \overrightarrow{s_{o_\beta}} &= \frac{-6\sqrt{2}}{10}; \frac{12\sqrt{2}}{10} \parallel (-1; 2),\end{aligned}$$

$$o_\beta: 2x + y - 4 = 0.$$

Nyní už jen najdeme průsečík o_α a o_β . Zjistíme, že $x = 2$ a $y = 0$, odkud:

$$\underline{U[2; 0]}.$$



Obrázek 2: Ilustrace využití normovaných vektorů k výpočtu U

(b) řešení užitím vzorce

Ve vektorovém důkazu existence středu kružnice opsané jsme odvodili vzorec **Chyba!**
Nenalezen zdroj odkazů. Aplikací na náš příklad získáváme:

$$U \left[\frac{a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1}{a + b + c}; \frac{a \cdot a_2 + b \cdot b_2 + c \cdot c_2}{a + b + c} \right],$$

$$U \left[\frac{5\sqrt{2} \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot 4 + 4\sqrt{2} \cdot 3}{5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}; \frac{5\sqrt{2} \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot (-4) + 4\sqrt{2} \cdot 3}{5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}} \right],$$

$$U \left[\frac{24\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}; \frac{0}{12\sqrt{2}} \right],$$

$$\underline{U[2; 0]}.$$

Tento vzorec se ukazuje jako velmi silný nástroj, neboť konstrukční řešení tohoto příkladu je poměrně pracné. Jeho přínos oceníme především u numericky náročnějších příkladů.

(c) řešení pomocí vzdálenosti bodu od přímky

Poslední ze způsobů, který si představíme, bude náročný, neboť se nám postupně rozvětví na několik případů. Budeme totiž hledat bod, který má od všech stran trojúhelníka stejnou vzdálenost. Takové body ovšem existují 4, proto v závěru musíme vybrat bod uvnitř trojúhelníka, a ten bude středem kružnice vepsané. Ostatní 3 body budou středy kružnic trojúhelníků připsaných.

Střed kružnice vepsané má shodnou vzdálenost od vrcholů A, B, C . Musí tedy platit:

$$|Ua| = |Ub| = |Uc|.$$

Využijme vzorec vzdálenosti bodu od přímky:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vypišme si pro přehlednost obecné rovnice přímek a, b, c :

$$a: 7x + y - 24 = 0$$

$$b: x - y = 0$$

$$c: x + y = 0$$

Pracujme s podmínkami:

$$(1) |Ub| = |Uc|,$$

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}},$$

$$(2) |Ua| = |Ub|.$$

$$\frac{|7x + y - 24|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}.$$

Řešme podmínku (1). Jmenovatele můžeme vypustit a získáváme rovnost dvou absolutních hodnot. Zde se nám situace rozpadá na dva případy:

Případ I.

Výrazy $x - y$ a $x + y$ jsou oba nezáporné nebo jsou oba záporné.

$$x - y = x + y,$$

$$\underline{y = 0}.$$

Dosazením do podmínky (2) získáváme:

$$|7x - 24| = 5|x|.$$

Zde musíme opět rozdělit situaci na dva případy:

Výrazy $7x - 24$ a x jsou oba nezáporné nebo jsou oba záporné:

$$7x - 24 = 5x,$$

$$\underline{x = 12}.$$

Výrazy $7x - 24$ a x mají opačná znaménka:

$$24 - 7x = 5x,$$

$$\underline{x = 2}.$$

Našli jsme první dva body, které mají od přímk a, b, c stejnou vzdálenost:

$$\underline{X_1[12; 0]}, \underline{X_2[2; 0]}.$$

Případ II.

Výrazy $x - y$ a $x + y$ mají opačná znaménka. Pak:

$$-x + y = x + y,$$

$$\underline{x = 0}.$$

Dosazením do podmínky (2) získáváme:

$$|y - 24| = 5| - y|.$$

Opět musíme rozdělit situaci na dva případy:

Výrazy $y - 24$ a $-y$ jsou oba nezáporné nebo jsou oba záporné. Pak:

$$y - 24 = -5y,$$

$$\underline{y = 4}.$$

Výrazy $y - 24$ a $-y$ mají opačná znaménka. Pak:

$$y - 24 = 5y,$$

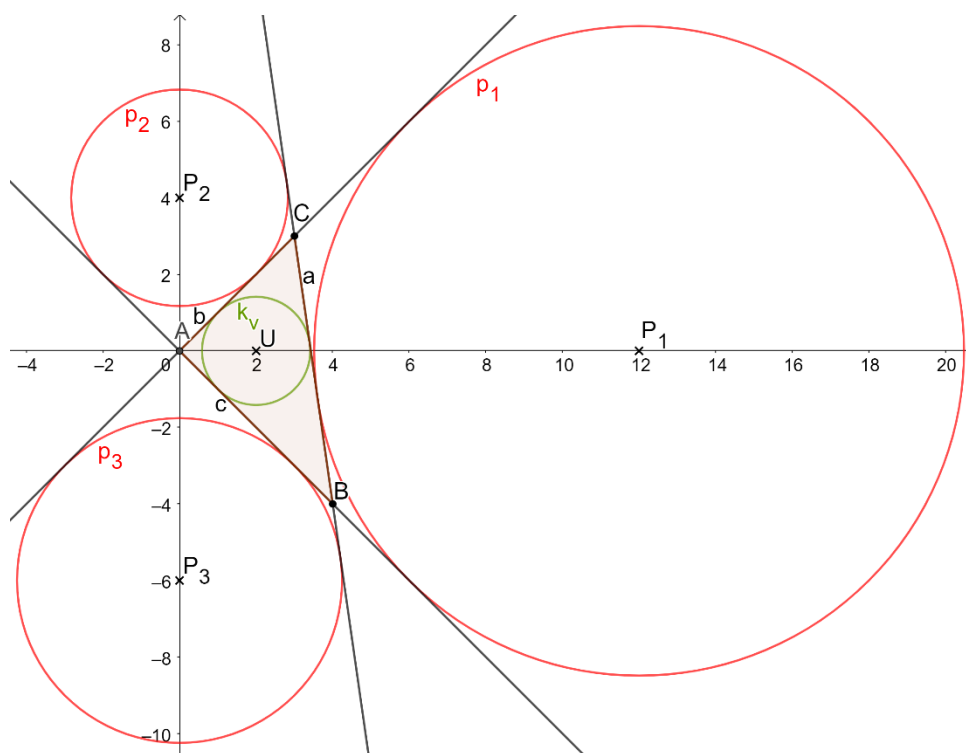
$$\underline{y = -6}.$$

Třetím a čtvrtým bodem majícím stejnou vzdálenost od přímk a, b, c jsou body:

$$\underline{X_3[0; 4]}, \underline{X_4[0; -6]}.$$

Nyní již např. z obrázku určíme, které ze středů X_1, X_2, X_3, X_4 patří kružnicím připsaným, a který kružnici vepsané. Zjistíme, že středem kružnice vepsané je X_2 , proto:

$U[2; 0]$.



Obrázek 3: Kružnice vepsaná a kružnice připsané

1.5 Eulerova přímka

Za jeden z významných milníků v rámci geometrie trojúhelníka lze považovat Eulerovu přímku (Euler line), která popisuje vztah mezi třemi námi zkoumanými středy trojúhelníka. Leonhard Euler na ni v práci z roku 1767 (*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*) přišel náhodou. V úvodu připomíná čtyři obzvláště důležité body, středy trojúhelníka, které jsou základem naší práce.

Jedním z hlavních východisek této práce je, že je možné jednoznačně určit trojúhelník, pokud známe tyto středy trojúhelníka, a zároveň se jedná o čtyři různé body. A pokud jsou 2 z těchto středů shodné, jsou potom shodné všechny 4 uvedené středy, které v takovém případě určují nekonečně mnoho rovnostranných trojúhelníků (Sandifer, 2009, s. 1-2).

Věta (O Eulerově přímce): Střed kružnice opsané, těžiště a ortocentrum leží na jedné přímce (nebo splývají v jeden bod) a platí $|TV| = 2|TS|$. Této přímce se říká Eulerova přímka (MKS, 2017, s. 14).

Tato věta je samozřejmě pravdivá, ale ještě trochu ji upřesněme. Podívejme se na Obrázek 4. Obě trojice bodů splňují podmínku $|TV| = 2|TS|$. Vlevo je vyobrazené správné pořadí, v jakém se nacházejí středy na Eulerově přímce v trojúhelníku, a vpravo je nesprávné pořadí. Pojdme tedy dokázat, že pořadí, které je vyobrazeno na obrázku vlevo, je jediné možné.



Obrázek 4: Správné a nesprávné pořadí středů na Eulerově přímce

K nalezení Eulerovy přímky půjdeme následující cestou:

1. Dokážeme existenci těžiště pomocí stejnolehlosti se středem v těžišti.
2. Ukážeme, že obrazem ortocentra v dané stejnolehlosti je střed kružnice opsané.

Důkazy jsou inspirovány (Pomykalová, 1997, s. 169-170).

1. Existence těžiště

Důkaz: Chceme dokázat, že všechny tři těžnice trojúhelníka jsou vždy konkurentní. Pojmenujme středy stran BC, AC a AB po řadě S_a, S_b a S_c . Uvažujme stejnolehlost, která zobrazí bod A na S_a a bod B na S_b , a střed této stejnolehlosti pojmenujme T . $S_a S_b$ je střední

příčka $\triangle ABC$ a proto platí $|S_a S_b| = \frac{1}{2} |AB|$. To nám říká, že koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2}$. S_a leží na opačné polopřímce k $\overrightarrow{TA}$, proto musíme zvolit koeficient záporný. Označme tuto stejnolehlost $H\left(T; -\frac{1}{2}\right)$. Ve stejnolehlosti $H\left(T; -\frac{1}{2}\right)$ se úsečka BC zobrazí na střední příčku $\triangle ABC$ $S_b S_c$, a úsečka AC na střední příčku $\triangle ABC$ $S_a S_c$. Úsečka BC a AC mají společný bod C a příčky $S_b S_c$ a $S_a S_c$ mají společný bod S_c . Z toho plyne, že obrazem bodu C v této stejnolehlosti musí být bod S_c , a že T leží na všech třech těžnicích.

Pozn.: Z tohoto důkazu neplyne pouze existence těžiště, ale také důležitá vlastnost těžiště. Těžiště totiž dělí těžnice v poměru 1:2, což můžeme snadno vyčíst ze stejnolehlosti, kterou jsme použili v důkazu. Z důkazu dále plyne, že obrazem $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti $H\left(T; -\frac{1}{2}\right)$ je jeho příčkový $\triangle S_a S_b S_c$.

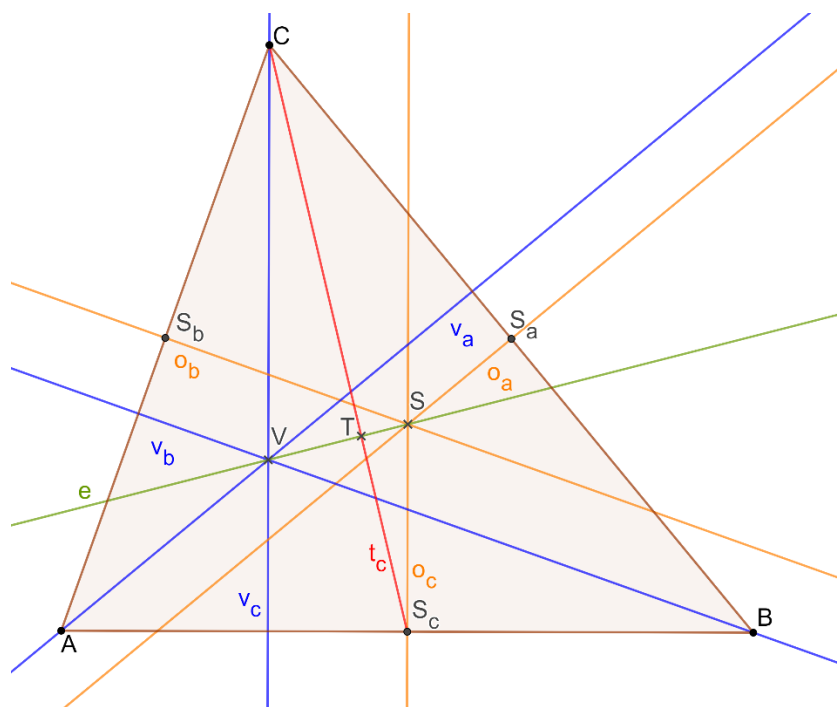
2. Existence ortocentra

Uvažujme stejnou stejnolehlost jako při důkazu existence těžiště $H\left(T; -\frac{1}{2}\right)$, kde T je těžiště trojúhelníka. Již víme, že v této stejnolehlosti je obrazem bodu C bod S_c , střed strany AB . Vzorem osy strany AB tak musí být přímka procházející bodem C rovnoběžná s touto osou, tedy přímka, v níž leží výška v_c . Obdobně vzorem osy strany BC je přímka, v níž leží výška v_a , a vzorem osy strany AC je přímka v_b . Z důkazu existence středu kružnice opsané víme, že osy stran trojúhelníka se vždy protínají v jednom bodě, kterým je střed kružnice opsané. Z toho plyne, že i vzory těchto tří os, výšky v_a, v_b, v_c , se protínají v jednom bodě. Tím je dokázáno, že ortocentrum v trojúhelníku vždy existuje.

Dokázali jsme tedy, že středy T, V, S existují. Z těchto důkazů ale plyne ještě jedna velmi zajímavá skutečnost. Tyto tři středy leží vždy na jedné přímce, neboť S je obrazem V ve stejnolehlosti se středem T . Z koeficientu stejnolehlosti $\frac{1}{2}$ navíc plyne, že $|TV| = 2|TS|$. Navíc díky znaménku koeficientu stejnolehlosti známe i pořadí bodů, v jakém leží na této přímce. Můžeme tak situaci zapsat vektorově:

$$\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{TV}} = \frac{1}{2}.$$

Této provázanosti S, T a V budeme využívat v úlohách, kde je zadán jeden vrchol a dva z těchto tří středů. Analyticky se dají zbylé vrcholy nalézt i bez znalosti třetího ze středů Eulerovy přímky. Ke konstrukci však potřebujeme znát polohu všech tří středů, proto je tento vztah mezi S, T a V důležitý.



Obrázek 5: Eulerova přímka

2 Úlohy se dvěma vrcholy a jedním středem nebo vrcholem Eulerovou přímkou

V následujících podkapitolách 2.1-2.4 budeme řešit úlohy, kde budou zadány 2 vrcholy a jeden ze středů trojúhelníka. Poslední podkapitolou 2.5 bude úloha, kde známe 1 vrchol, a 2, resp. 3 středy Eulerovy přímky. Podkapitoly 2.1-2.4 nám nabídnou 4 různá zadání, která budeme pojmenovávat dle bodů, které máme v zadání k dispozici. Tedy např. ABT představuje úlohu, kde známe polohu vrcholů A a B a polohu těžiště. Uvedme krátce typy podkapitol, které se objeví u úloh tohoto druhu.

Ve všech případech nejprve ukážeme různé metody výpočtu třetího vrcholu na konkrétním příkladu. První metodou budeme vždy kopírovat konstrukční postup, neboť to je zřejmě první způsob řešení, který žáky napadne. Tuto metodu budeme nazývat „konstrukční řešení“. Poté ukážeme další způsoby, využívající analytickou geometrii, které nám, mnohdy znatelně, usnadní práci.

Dále se přesuneme k diskuzi řešení. V této části budeme diskutovat existenci a počet řešení v závislosti na poloze zadaných prvků.

V podkapitolách $A, B, \{T, V, S, U\}$: rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky, resp. $A, B, \{T, V, S, U\}$: ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky budeme hledat k pevně daným vrcholům A, B množiny, na kterých musí ležet daný střed, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný či rovnostranný, resp. ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky.

Další kapitola, generování celočíselných zadání, může být nápomocna učitelům dvojím způsobem. Budeme v ní hledat celočíselná zadání, která mají i celočíselné řešení. Primárně je určena k vytváření pěkných cvičení a testů pro žáky, neboť pokud žáky nelimituje numerická složitost příkladů, mohou se soustředit pouze na způsob řešení. Sekundárně může být žákům přímo zadána úloha k zamyšlení, jak zadat dané prvky trojúhelníka, aby hledaný vrchol trojúhelníka byl celočíselný. Odvození tvorby celočíselných zadání bude prováděno vždy s jedním bodem pevně daným v počátku. Dané zadání lze vždy posunout, otočit, zobrazit osovou souměrností, apod., čímž generujeme další a další zadání.

2.1 Úloha ABT

Jako první z úloh, kde máme zadány dva vrcholy a jeden střed, si představíme úlohu ABT .

Ukažme nejprve na konkrétním příkladu dvě metody výpočtu.

2.1.1 Příklad

Nalezněte souřadnice vrcholu C , známe-li: $A[-2; -3]$, $B[2; -1]$, $T[1; 0]$.

(a) konstrukční řešení

Ukažme si nyní způsob vycházející z konstrukčního řešení. Stačí si totiž vzpomenout, že těžiště dělí těžnici v poměru 2:1. Stačí nám tak nalézt střed úsečky c a vektor $\overrightarrow{S_c T}$.

Souřadnice vrcholu C pak získáme přičtením trojnásobku vektoru $\overrightarrow{S_c T}$ k S_c (v postupu konstrukce je tento trojnásobek vektoru reprezentován kružnicí k).

Postup konstrukce

1. $S_c; S_c \in AB \wedge |S_c A| = |S_c B|$
2. $\overrightarrow{S_c T}$
3. $k(S_c; r = 3|S_c T|)$
4. $C; C \in \overrightarrow{S_c T} \cap k$

Výpočet

1. $S_c = \frac{A+B}{2} = [0; -2]$
2. $2x - y - 2 = 0$
3. $x^2 + (y + 2)^2 = 45$
4. $C[3; 4]$

(b) početní způsob řešení

V tomto způsobu využijeme vzorec odvozený v souřadnicovém a vektorovém důkazu existence těžiště $T = \frac{A+B+C}{3}$. Vyjádřeme z rovnosti C :

$$C = 3T - A - B,$$

$$C[3t_1 - a_1 - b_1; 3t_2 - a_2 - b_2],$$

$$C[3 + 2 - 2; 0 + 1 + 3],$$

$$\underline{C[3; 4]}.$$

2.1.2 Diskuze řešení

Nechť jsou dány body AB . Určeme množinu V , pro která bude trojúhelník ABC existovat.

Pro pevně dané body A, B vzniká trojúhelník právě tehdy, když T neleží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ (A, B, T nejsou kolineární). Toto tvrzení můžeme vyslovit ihned ze znalosti konstrukčního řešení úlohy ABT .

Vycházejme z rovnosti:

$$C = S_c + 3 \cdot \overrightarrow{S_c T}.$$

Bod S_c určitě leží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$. Pokud zadáme T také na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, bude vektor $\overrightarrow{S_c T}$ představovat pouze posunutí po přímce $\overleftrightarrow{AB}$, a vrchol C pak bude také ležet na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, tudíž body A, B, C nebudou tvořit trojúhelník.

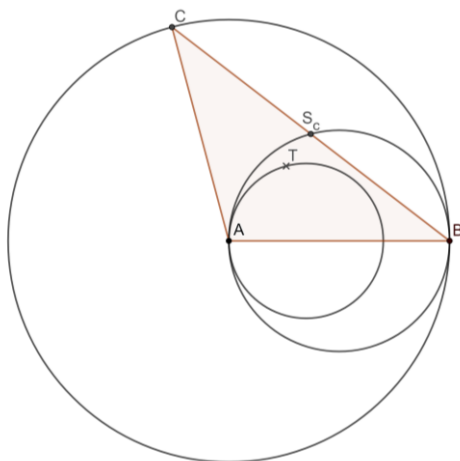
Pozn.: Zadáme-li kolineární A, B, T , vzorec $T = \frac{A+B+C}{3}$ nám nabídne výsledek, přestože se nejedná o trojúhelník. Spočtené T pak představuje jakési těžiště (působíště tíhové síly) tří stejně hmotných těles A, B, C v přímce.

2.1.3 ABT : rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky

Nechť jsou dány body AB . Určeme množinu T , pro která bude trojúhelník ABC rovnoramenný, speciálně rovnostranný.

Pro T lze úlohu vyřešit syntetickými metodami, konkrétně užitím stejnolehlosti.

Rovnost $|AC| = |BC|$ platí triviálně pro umístění T na ose úsečky AB bez bodu S_c . Je třeba si uvědomit, že pokud má platit $|AB| = |AC|$, pak vrchol C musí ležet na kružnici se středem A a poloměrem $|AB|$. S_a je pak obrazem C ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem $\frac{1}{2}$ (to je prostý důsledek toho, že S_a je středem strany BC), a bod T je obrazem bodu S_a ve stejnolehlosti se středem v bodu A a koeficientem $\frac{2}{3}$ (neboť T leží ve dvou třetinách úsečky AS_a). Složením těchto dvou stejnolehlostí získáme ihned množinu, na níž musí ležet T , aby pro trojúhelník ABC platilo $|AB| = |AC|$, (viz Obrázek 6: Řešení užitím stejnolehlosti. Obdobně můžeme vyřešit případ $|AB| = |BC|$ umístěním vrcholu C na kružnici se středem B a poloměrem $|AB|$ a následným užitím stejnolehlostí.



Obrázek 6: Řešení užitím stejnolehlosti

Proveďme i řešení užitím analytické geometrie.

Zvolme bez újmy na obecnosti $A[-1; 0], B[1; 0]$.

Rozdělme řešení na 3 části, podle toho, které 2 strany jsou stejně dlouhé:

$$1. |AC| = |BC|$$

Toto nastane právě tehdy, zadáme-li T na osu úsečky AB , tedy:

$$T \in x = 0.$$

$$2. |AB| = |AC|$$

Víme, že aby $|AB| = |AC|$, vrchol C musí ležet na kružnici k se středem A a poloměrem $r = 2$. Středová rovnice kružnice k je:

$$k: (x + 1)^2 + y^2 = 4.$$

Zapišme skutečnost, že bod C splňuje tuto rovnici:

$$(c_1 + 1)^2 + c_2^2 = 4.$$

Nyní můžeme zapsat danou množinu v souřadnicích:

$$C \left[c_1; \pm \sqrt{(1 - c_1)(3 + c_1)} \right]; c_1 \in (-3; 1).$$

Ze vzorce pro těžiště víme, že:

$$c_1 = 3t_1 - a_1 - b_1.$$

Odtud získáváme:

$$c_1 = 3 \cdot t_1 \text{ a } c_2 = 3 \cdot t_2.$$

A můžeme dosadit do středové rovnice kružnice k za c_1 a c_2 :

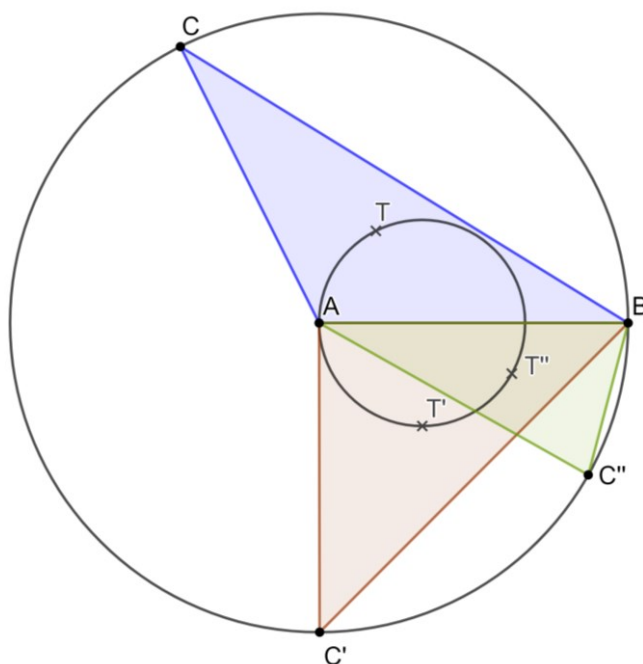
$$(3 \cdot t_1 + 1)^2 + (3 \cdot t_2)^2 = 4.$$

Po úpravách získávame rovnosť:

$$\left(t_1 + \frac{1}{3}\right)^2 + t_2^2 = \frac{4}{9}.$$

Těžiště tedy musí být ve tvaru:

$$T \left[t_1; \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3} - t_1\right)(1 + t_1)} \right]; t_1 \in \left(-1; \frac{1}{3}\right).$$



Obrázek 7: Množina T pro rovnostranné trojúhelníky ABC , kde $|AB|=|AC|$

3. $|AB| = |BC|$

Postup použitý v případě $|AB| = |AC|$ lze samozřejmě použít i nyní. My ovšem využijeme toho, že jsme body A, B zadali symetricky podle osy y . Můžeme tak kružnici, kterou jsme

získali v 2. případě zobrazit v osově souměrnosti s osou $x = 0$, a tím získáme námi hledanou množinu.

$$T \in \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 4.$$

Souřadnice T musí být proto tvaru:

$$T \left[t_1; \pm \sqrt{(1 - t_1) \left(\frac{1}{3} + t_1\right)} \right]; t_1 \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right).$$

Chceme-li zjistit, pro která T bude trojúhelník ABC rovnostranný (tedy $|AB| = |AC| = |BC|$), stačí nám nalézt průsečík těchto 3 křivek. Čtenář si snadno domyslí, že postačí nalézt průsečík libovolné dvojice z nich. Tím získáme:

$$T \in \left\{ \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \left[0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \right\}.$$

Pozn.: Tento výsledek lze také nahlédnout rovnou z toho, že v rovnostranném trojúhelníku všechny středy splývají. Výška, a tudíž i těžnice, mají v rovnostranném trojúhelníku velikost $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, a těžiště leží v jedné třetině těžnice. V našem případě platí $a = 2$, proto $T \left[0; \pm \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, tedy $T \left[0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

2.1.4 **ABT: ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky**

Nechť jsou dány body AB . Určeme množinu T , pro která bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý.

Řešení:

Zvolme bez újmy na obecnosti $A[-1; 0], B[1; 0]$.

Rozdělme situaci na 3 případy.

1. Pravý úhel při vrcholu C :

Úhel při vrcholu C je pravý právě tehdy, když C leží na Thaletově kružnici nad průměrem $\overline{AB}$ bez bodů A, B . Ze vztahu $2\overrightarrow{S_cT} = \overrightarrow{TC}$ můžeme lehce vypočítat, že T pak musí ležet na kružnici se stejným středem (S_c) a třetinovým poloměrem (v našem případě $r = \frac{1}{3}$).

2. Pravý úhel při vrcholu A :

Úhel při vrcholu A je pravý právě tehdy, když vrchol C leží na kolmici k přímce AB , a je různý od A, B :

$$C \in b: x + 1 = 0, y \neq 0,$$

$$C \in [-1; c_2]; c_2 \neq 0.$$

Vyjádřením T ze vztahu $2\overrightarrow{S_cT} = \overrightarrow{TC}$ dostáváme množinu T :

$$T = \frac{C - 2S_c}{3},$$

$$T \left[-\frac{1}{3}; t_2 \right]; t_2 \neq 0.$$

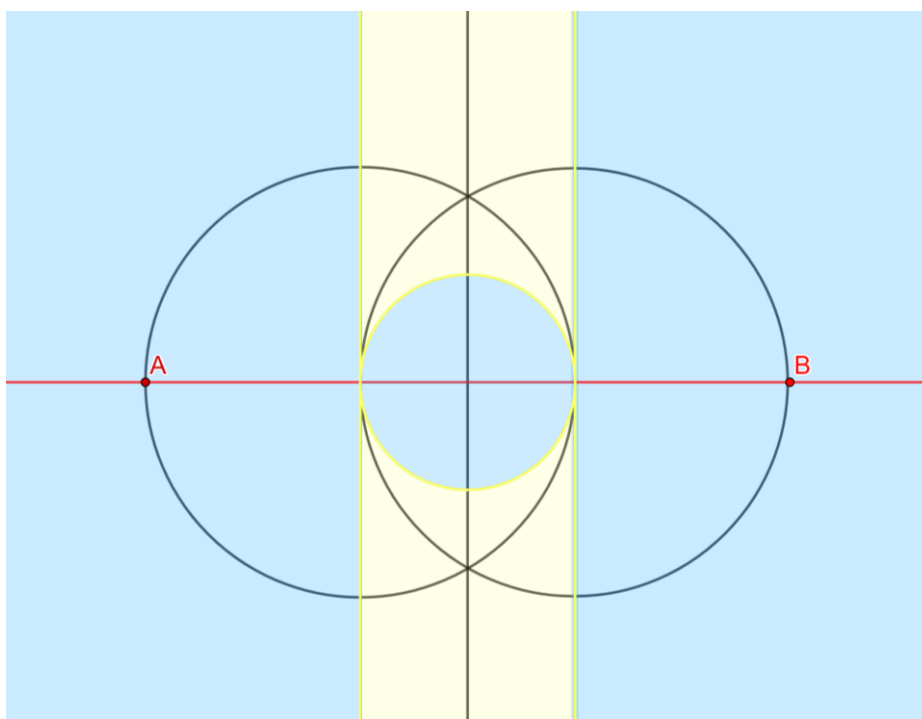
3. Pravý úhel při vrcholu B :

Tento případ vyřešíme stejným postupem jako případ 2. Získáváme tak množinu:

$$T \left[\frac{1}{3}; t_2 \right]; t_2 \neq 0.$$

Množiny T pro ostroúhlé a tupoúhlé trojúhelníky pak budou ohraničeny množinami T pravoúhlých trojúhelníků. Množinu T pro ostroúhlé trojúhelníky najdeme uvnitř pásu určeného přímkami $x + \frac{1}{3} = 0$ a $x - \frac{1}{3} = 0$ vně Thaletovy kružnice. Množinu T tupoúhlých trojúhelníků najdeme vně pásu určeného těmito přímkami a uvnitř Thaletovy kružnice.

Na Obrázek 8 můžeme vidět „mapu“ shrnující výsledky podkapitol 2.1.2, 2.1.3 a 2.1.4.



Obrázek 8: *ABT mapa*

2.1.5 Generování celočíselných zadání

Generování celočíselných zadání pro úlohu typu *ABT* je velmi jednoduché. Již v kapitole o těžišti jsme si představili vzorec $T = \frac{A+B+C}{3}$, vyjádřením vrcholu C z tohoto vzorce jsme získali rovnost $C = 3T - A - B$. Z tohoto vzorce plyne, že máme-li zadány A, B, T celočíselně, vrchol C bude také celočíselný (jako argument lze použít uzavřenost celých čísel na sčítání, resp. odčítání).

2.1.6 Další úlohy

1. Nalezněte vrchol C , známe-li: $A[0; 0], B[4; -3], T[3; 0]$. (Řešení: $C[8; 1]$)
2. Nalezněte vrchol C , známe-li: $A[-3; 2], B[2; -4], T[3; 1]$ (Řešení: $C[10; 5]$)
3. Nalezněte vrchol C , známe-li: $A[10; -2], B[13; 1], T[7; 1]$ (Řešení: $C[-2; 4]$)
4. Ověřte, že ze vzorce $T = \frac{A+B+C}{3}$ plyne, že $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 0$.

2.2 Úloha ABV

Nyní si představme možná nejzajímavější část této kapitoly. Ortocentrum je opravdu pozoruhodný střed a nabízí nám hned několik netriviálních vlastností a úloh k zamyšlení. Opět se nejprve podívejme, jak řešit příklady, máme-li zadány dva vrcholy a tento střed.

2.2.1 Příklad

Nalezněte souřadnice vrcholu C , známe-li: $A[0; 0], B[4; -3], V[3; -1]$.

Tuto úlohu najdeme např. v (Petáková, 1998, s. 111). Pojdme si ukázat 2 způsoby, jak tuto úlohu řešit. První z nich bude kopírovat konstrukční řešení a druhý bude opět využívat nástroj, který nám nabízí analytická geometrie.

(a) konstrukční řešení

Při hledání V , využijeme toho, že výška je kolmá na stranu a prochází protilehlým vrcholem. Této kolmosti využijeme i zde, akorát nyní známe výšky a hledáme k nim kolmé strany. Směrové vektory přímk $\overrightarrow{AV}$ a $\overrightarrow{BV}$ jsou normálovými vektory přímk a a b . Průsečíkem stran a a b je pak hledaný vrchol C .

Postup konstrukce

1. $a; B \in a \wedge a \perp \overrightarrow{AV}$
2. $b; A \in b \wedge b \perp \overrightarrow{BV}$
3. $C; C \in a \cap b$

Výpočet

1. $a: 3x - y - 15 = 0$
2. $b: x - 2y = 0$
3. $C = [6; 3]$

Pozn.: Místo a , resp. b lze použít přímku v_c : průsečík jedné z nich s kolmicí k $\overrightarrow{AB}$ vedenou bodem V .

$$v_c; v_c \perp \overrightarrow{AB} \wedge V \in v_c$$

$$v_c: 4x - 3y - 15 = 0$$

(b) řešení pomocí skalárního součinu

V početním řešení opět využíváme kolmosti, ale budeme pracovat pouze s kolmostí vektorů. Využijeme skutečnosti, že skalární součin vzájemně kolmých vektorů je roven 0, tedy platí:

$$\begin{aligned}(1) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AV} &= 0, & (2) \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BV} &= 0, & (3) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CV} &= 0, \\ \overrightarrow{BC} &= (c_1 - 4; c_2 + 3), & \overrightarrow{AC} &= (c_1; c_2), & \overrightarrow{AB} &= (4; -3), \\ \overrightarrow{AV} &= (3; -1), & \overrightarrow{BV} &= (-1; 2), & \overrightarrow{CV} &= (c_1 - 3; c_2 + 1).\end{aligned}$$

Z těchto podmínek získáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}(1) \quad (c_1 - 4) \cdot 3 + (c_2 + 3) \cdot (-1) &= 0, \\ (2) \quad c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 2 &= 0, \\ (3) \quad 4 \cdot (c_1 - 3) + (-3) \cdot (c_2 + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Řešením této jednoduché soustavy obdržíme $c_1 = 6$ a $c_2 = 3$, tedy

$$\underline{C[6; 3]}.$$

2.2.2 Diskuze řešení

Nechť jsou pevně dány body A, B . Diskutujme existenci a počet řešení v závislosti na poloze V .

(a) synteticky

Z konstrukčního řešení plyne, že úloha ABV není řešitelná, pokud V leží na přímce AB a současně je různé od A, B , nebo když leží na kolmicích k AB procházejících bodem A , resp. B , a je různé od bodů A , resp. B .

Uvažujme nejprve situaci, kdy V leží na přímce AB . Při konstrukci vrcholu C jsme v (a) konstrukční řešení postupovali takto:

1. $a; B \in a \wedge a \perp \overleftrightarrow{AV}$,
2. $b; A \in b \wedge b \perp \overleftrightarrow{BV}$.

Bod C byl následně průsečíkem přímek a, b . Pokud ovšem V leží na přímce AB , pak přímky AV, BV jsou totožné, a tudíž kolmice na ně musí být rovnoběžné. Rovnoběžné přímky však nemají žádný průsečík, a proto takto zadaná úloha nemá řešení.

Nyní uvažujme případ, kdy V leží např. na kolmici k AB vedené bodem A , a je různé od A . Opět provedme první dva kroky konstrukčního řešení. Tentokrát zjistíme, že průsečíkem přímek a, b je bod A . To by však znamenalo, že $A = C$, což v trojúhelníku nemůže nastat. Obdobná situace by nastala pro polohu V na kolmici k AB vedené bodem B . V takovém případě bychom dospěli k výsledku $B = C$, a to také nemůže nastat.

Ve všech ostatních případech má úloha ABV právě jedno řešení.

Podívejme se na situaci analyticky.

(b) analyticky

Zvolme bez újmy na obecnosti $A[-1; 0], B[0; 1]$ a pohyblivé $C[c_1; c_2]$ v závislosti na $V[v_1; v_2]$.

Využijeme skalárních součinů:

$$(1) \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad (v_1 + 1) \cdot (c_1 - 1) + v_2 c_2 = 0$$

$$(2) \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad (v_1 - 1) \cdot (c_1 + 1) + v_2 c_2 = 0$$

$$(3) \overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad (v_1 - c_1) \cdot 2 = 0$$

Rovnice jsou lineárně závislé, neboť jak si čtenář může ověřit:

$$(2) = (1) + (3).$$

Druhou rovnost proto můžeme při diskuzi ze soustavy vynechat.

K této soustavě rovnic je ještě třeba dodatečná podmínka pro existenci trojúhelníka, tedy že C nesmí být kolineární s A a B . Tato situace nastane právě tehdy, je-li $c_2 = 0$. Tuto skutečnost nám soustava rovnic (1), (2) a (3) neprozradí, ale je třeba ji přidat do diskuze.

Vyjádřeme C pomocí souřadnic $V[v_1; v_2]$.

Z (3) získáváme rovnou $c_1 = v_1$.

Dosadíme do (1) a získáváme $v_1^2 + v_2 c_2 - 1 = 0$.

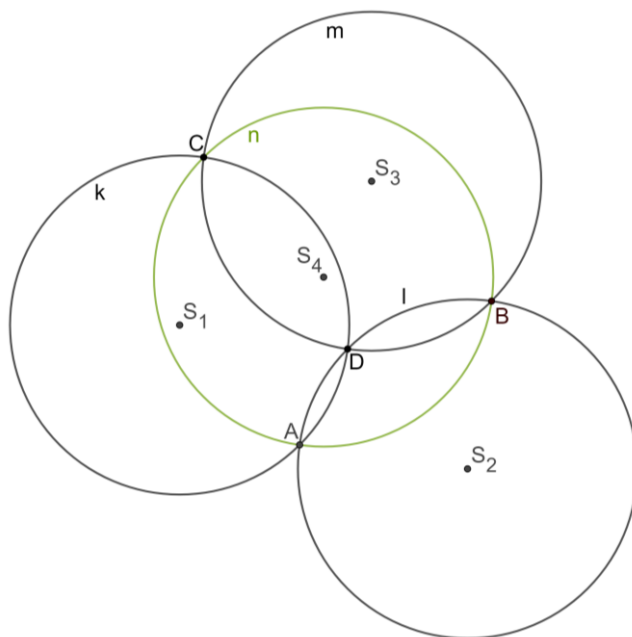
Zde se nám situace rozděluje na 3 případy:

1. $v_2 \neq 0 \wedge v_1 \neq \pm 1$, pak $C = \left[v_1, \frac{1-v_1^2}{v_2} \right]$ a úloha je určena jednoznačně a získáváme ihned i souřadnice vrcholu C ,
2. $v_2 = 0 \wedge v_1 = \pm 1$, tzn. $V = B$ nebo $V = A$, pak c_2 je libovolné reálné číslo, tedy $C = [\pm 1, k]$; $k \in \mathbb{R}$ a úloha má nekonečně mnoho řešení,
3. $(v_2 = 0 \wedge v_1 \neq \pm 1) \vee v_2 \neq 0 \wedge v_1 = \pm 1$, pak úloha nemá řešení.

2.2.3 Ortocentrický systém

Začneme tuto podkapitolu větou zdánlivě nesouvisející s ortocentrem.

Věta: Necht' $k(S_1; r)$, $l(S_2; r)$, $m(S_3; r)$ jsou kružnice procházející společným bodem D . Necht' A je průsečík k a l , B je průsečík l a m , a C je průsečík m a k ($A \notin m$, $B \notin k$, $C \notin l$). Pak existuje kružnice $n(S_4; r)$, která prochází body A, B, C (Pacheco, Soto, 2014, s. 1).



Obrázek 9: Ilustrace věty

Definice: Body A, B, C, D splňující tuto větu se nazývají ortocentrický systém (tamtéž, s. 1).

Nyní zřejmě vyvstane otázka, proč tyto body nazýváme ortocentrický systém, když body A, B, C, D vznikly jako průsečíky kružnic. Pojďme to tedy objasnit.

Coxeter and Greitzer (1967, p. 39) definují ortocentrický systém jako sadu čtyř bodů, z nichž každý je ortocentrem ke zbylým třem.

Domněnka: Znamená to tedy, že pokud máme čtyři body, z nichž jeden je ortocentrem trojúhelníka určeného zbylými třemi, pak libovolný bod z této čtveřice je ortocentrem ke zbylým třem?

Můžeme rovnou vyloučit případ, kdy dva body splývají, takové body by mohly být ortocentrem a vrcholem, nikoli však dvěma vrcholy. Ptejme se tedy, zda naše domněnka platí pro sadu čtyř různých bodů.

Důkaz

Předpokládejme např., že D je ortocentrem ABC , musí platit:

$$(1) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad (2) \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad (3) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Nyní předpokládejme, že např. C je ortocentrem. Zaměňme tedy v našich rovnicích C za O :

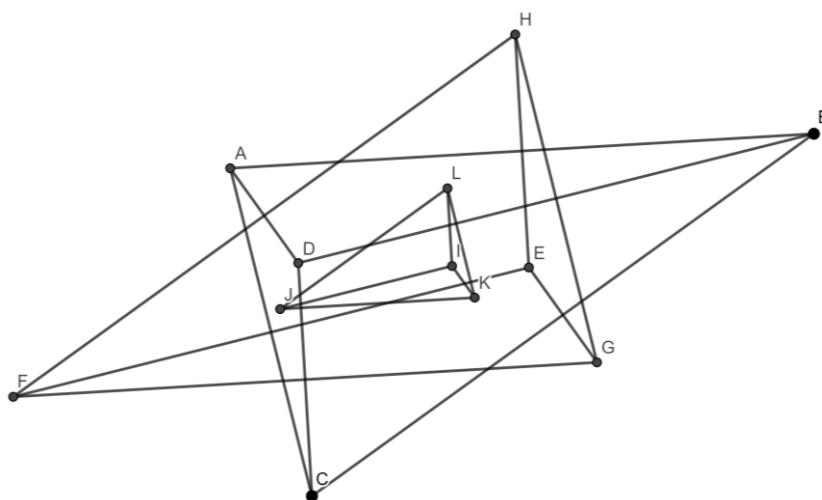
$$(1) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \qquad (2) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \qquad (3) \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Všimněme si, že tyto podmínky jsou ekvivalentní. Podmínky (1), (2) se pouze vzájemně vyměnily a zároveň se vyměnilo pořadí vektorů. To ovšem soustavu rovnic nijak nemění. Pokud platilo, že $\overrightarrow{AD}$ je kolmé k $\overrightarrow{BC}$, platí i to, že $\overrightarrow{BC}$ je kolmé k $\overrightarrow{AD}$. Podmínky (3) zůstaly stejné, neboť pokud je vektor $\overrightarrow{CD}$ kolmý k vektoru $\overrightarrow{AB}$, je i vektor opačný k $\overrightarrow{CD}$ kolmý k vektoru $\overrightarrow{AB}$. Stejně dopadne situace, kdy předpokládáme, že A , resp. B je ortocentrem. Tím je naše domněnka dokázána.

Máme-li tedy sadu 4, zdůrazněme různých, bodů v rovině, kde jeden bod je ortocentrem zbylých z nich, pak libovolný z těchto čtyř bodů je ortocentrem k zbylým třem.

Na závěr kapitoly o ortocentrickém systému uveďme jednu zajímavost.

Zajímavost: Mějme 4 body $ABCD$ tvořící ortocentrický systém. Středů opsaných kružnic trojúhelníků ABC, ACD, CBD, ADB po řadě E, F, G, H tvoří další ortocentrický systém shodný s prvním. Těžiště těchto trojúhelníků po řadě I, J, K, L tvoří také ortocentrický systém podobný původnímu s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$ (Weisstein, 2022).



Obrázek 10: Ortocentrické systémy

2.2.4 ABV: rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky

Nechť jsou dány body AB . Určete množinu V , pro která bude trojúhelník ABC rovnoramenný, speciálně rovnostranný.

Řešení:

Opět zvolme bez újmy na obecnosti $A[-1; 0], B[1; 0]$.

Využijme zde stejné myšlenky, jako když jsme hledali množinu rovnoramenných trojúhelníků v úloze ABT .

Rozdělme řešení na 3 části podle toho, které 2 strany mají stejnou velikost

1. $|AC| = |BC|$

Bod V leží na ose úsečky AB v tomto případě na přímce:

$$x = 0; y \neq 0.$$

Odtud získáváme první množinu:

$$V[0; v_2]; v_2 \neq 0.$$

2. $|AB| = |BC|$

Aby se velikost těchto úseček rovnala, musí C ležet na kružnici se středem v bodě B a poloměrem $r = |AB| = 2$, tedy:

$$C \in k: (x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Odtud získáváme:

$$C = \left[c_1; \pm\sqrt{(3-c_1)(1+c_1)} \right]; c_1 \in (-1,3).$$

Volíme otevřený interval, neboť pro $c_1 \in \{-1; 3\}$ je vrchol C kolineární s A, B a nevzniká trojúhelník.

Víme, že:

$$V \in v_c \perp \overrightarrow{AB} \wedge C \in v_c,$$

normálovým vektorem přímky v_c je tedy vektor $\overrightarrow{AB}(2; 0)$, proto:

$$v_c: 2x + c = 0.$$

Protože bod C leží na přímce v_c , tak:

$$v_c: 2x - 2c_1 = 0.$$

Obdobně pro v_b platí:

$$V \in v_b \perp \overrightarrow{AC} \wedge B \in v_b.$$

Normálovým vektorem přímky v_b je tudíž vektor:

$$\overrightarrow{AC} \left(c_1 + 1; \pm\sqrt{(3-c_1)(1+c_1)} \right).$$

Dále $B \in v_b$, proto:

$$v_b: (c_1 + 1)x \pm \sqrt{(3-c_1)(1+c_1)} \cdot y - c_1 - 1 = 0.$$

Vyjádříme z v_c c_1 ($c_1 = x$) a dosadíme do v_b :

$$x^2 + x \pm \sqrt{(3-x)(1+x)} \cdot y - x - 1 = 0.$$

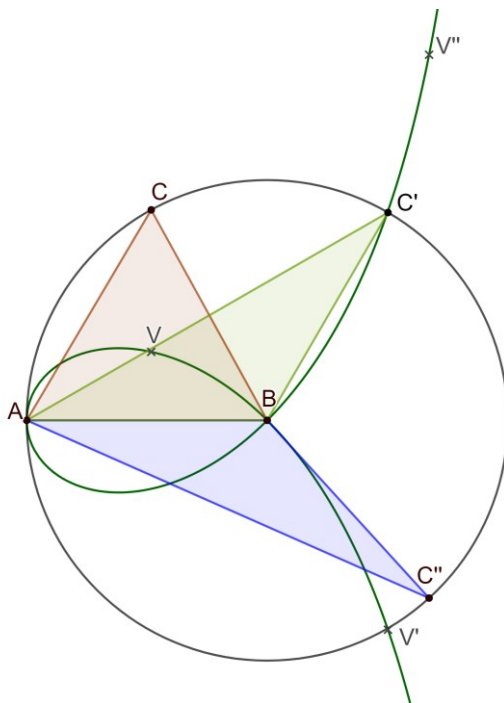
Úpravou této rovnice získáme křivku, na které musí ležet V , aby $|AB| = |BC|$:

$$v: y = \pm(1-x) \sqrt{\frac{1+x}{3-x}}.$$

Bod V tedy můžeme zapsat ve tvaru:

$$V = \left[v_1; \pm(1-v_1) \sqrt{\frac{1+v_1}{3-v_1}} \right]; v_1 \in (-1,3).$$

Tuto křivku s několika příklady trojúhelníků, kde $|AB| = |BC|$, vidíme na Obrázek 11: Množina V rovnostranných trojúhelníků ABC , kde $|AB| = |BC|$.



Obrázek 11: Množina V rovnostranných trojúhelníků ABC , kde $|AB| = |BC|$

Zajímavost: Můžeme si všimnout, že námi nalezená křivka připomíná křivku zvanou *Descartesův list* (*Descartes folium*); nazvěme ji d . Tato křivka má „smyčku“ v prvním kvadrantu a její osou symetrie je přímka $x - y = 0$. Bohužel otočíme-li zmíněnou křivku tak, aby osou souměrnosti smyčky byla přímka $y = 0$ jako v našem případě, zjišťujeme, že naše křivka předpis Descartesova listu nesplňuje.

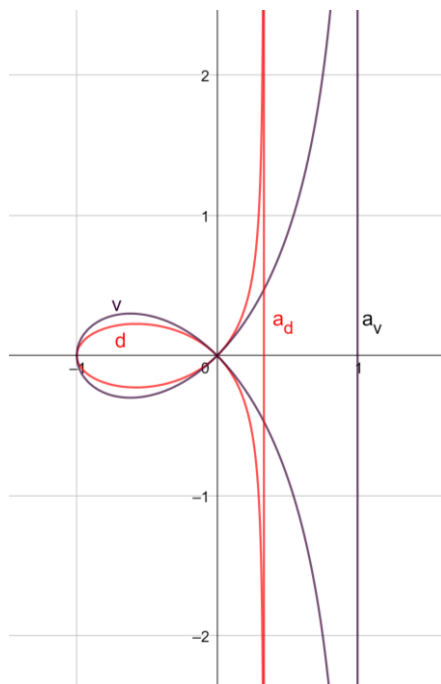
Přepočítáme-li tuto úlohu pro A v počátku $A[0; 0]$ a $B[0; 1]$, zjišťujeme, že tentokrát má křivka (nazvěme ji v) předpis:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Descartesův list má pro stejné průsečíky s osou x předpis:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-3x}}.$$

Vidíme, že čítec nám naši domněnku kazí. Naše křivka má asymptotu $x - 1 = 0$ a Descartesův list má asymptotu $x - \frac{1}{3}$. Můžeme alespoň prohlásit, že jsme našli křivku podobnou Descartesovu listu.



Obrázek 12: Porovnání křivky V rovnostranných trojúhelníků ABC a Descartesova listu

$$3. |AB| = |AC|$$

Obdobným postupem jako u případu 2. získáváme další křivku:

$$y = \pm(1+x) \sqrt{\frac{1-x}{3+x}},$$

a V tedy musí být ve tvaru:

$$V = \left[v_1; \pm(1+v_1) \sqrt{\frac{1-v_1}{3+v_1}} \right]; v_1 \in (-1; 3).$$

Pokud platí tyto tři podmínky současně, tedy $|AB| = |BC| = |CA|$, získáváme množinu V rovnostranných trojúhelníků. Pro námi zvolené A, B nastává v případě:

$$V \in \left\{ \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3} \right], \left[0; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \right\}.$$

2.2.5 *ABV*: ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky

Nechť jsou dány body AB . Určete množinu V , pro která bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý.

Pracujme opět pro konzistenci s $A[-1; 0]$, $B[1; 0]$.

Úkolem této úlohy bude k předem zadaným bodům A, B nalézt oblast pro V tak, aby výsledný trojúhelník ABC byl ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý.

Najdeme nejprve množinu pravoúhlých trojúhelníků. Víme, že v pravoúhlém trojúhelníku splývá ortocentrum s bodem, při kterém je pravý úhel. Pro pravý úhel při vrcholech A , resp. B získáváme triviálně:

$$V = A[-1; 0] \text{ nebo } V = B[1; 0].$$

Při vrcholu C bude pravý úhel právě tehdy, když bude C ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $\overline{AB}$ bez bodů A, B .

Dohromady tedy pravoúhlý trojúhelník k pevně daným bodům AB dostaneme právě tehdy, umístíme-li V na Thaletovu kružnici nad průměrem $\overline{AB}$. Tato kružnice má předpis:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Souřadnice ortocentra tak musí být tvaru:

$$V[v_1; \sqrt{(1-v_1)(1+v_1)}]; v_1 \in (-1; 1).$$

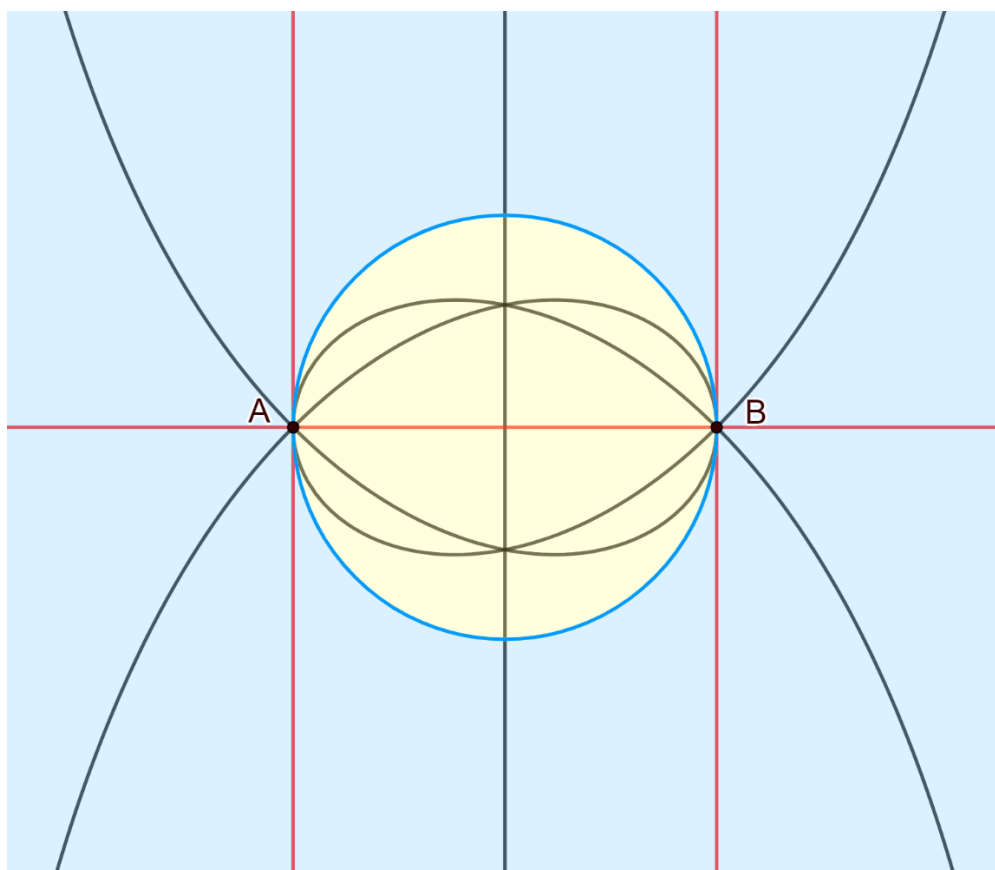
Bude-li V uvnitř Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{AB}$, trojúhelník ABC bude ostroúhlý. Tuto množinu už v souřadnicích zapsat nelze, protože se nejedná o křivku, ale část roviny. Zapišme proto množinu takto:

$$v_1^2 + v_2^2 < 1; v_1 \in (-1; 1) \wedge v_2 \neq 0.$$

Bude-li V vně Thaletovy kružnice, trojúhelník ABC bude tupoúhlý. Tuto množinu můžeme zapsat takto:

$$v_1^2 + v_2^2 > 1; v_1 \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \wedge v_2 \neq 0.$$

Na Obrázek 13 můžeme vidět mapu shrnující výsledky podkapitol 2.2.2, 2.2.4 a 2.2.5.



Obrázek 13: Mapa ABV

2.2.6 Generování celočíselných zadání

Zatímco generování zadání ABT tak, aby hledaný vrchol C byl celočíselný, bylo velmi jednoduché, u úlohy ABV bude situace trochu složitější. Popišme nyní systém, jak generovat celočíselná zadání ABV , a tím pádem (jak víme ze znalosti ortocentrického systému) i celočíselná zadání úloh na hledání ortocentra trojúhelníka ABC . Využijme opět kolmosti stran a k nim příslušných výšek, a umístíme vrchol A do počátku $A[0; 0]$.

Víme, že:

$$(1) \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad v_1(c_1 - b_1) + v_2(c_2 - b_2) = 0$$

$$(2) \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad (v_1 - b_1)c_1 + (v_2 - b_2)c_2 = 0$$

$$(3) \overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad (v_1 - c_1)b_1 + (v_2 - c_2)b_2 = 0$$

Vyjádřeme c_1 a c_2 pomocí ostatních proměnných. Z kapitoly 2.2.2 víme, že výše uvedené rovnosti jsou lineárně závislé, a proto stačí pracovat se dvěma z nich:

$$c_1 = \frac{(v_1 b_1 + v_2 b_2)(v_2 - b_2)}{(v_2 b_1 - v_1 b_2)},$$

$$c_2 = \frac{(v_1 b_1 + v_2 b_2)(b_1 - v_1)}{(v_2 b_1 - v_1 b_2)}.$$

Z vyjádření složek c_1 a c_2 plyne, že vrchol C bude celočíselný právě tehdy, když:

$$(a) (v_2 b_1 - v_1 b_2) \text{ dělí } (v_1 b_1 + v_2 b_2),$$

nebo

$$(b) (v_2 b_1 - v_1 b_2) \text{ dělí } (v_2 - b_2), \text{ a současně } (v_2 b_1 - v_1 b_2) \text{ dělí } (b_1 - v_1).$$

Podmínku (a) můžeme zapsat takto:

$$k \cdot (v_2 b_1 - v_1 b_2) = (v_1 b_1 + v_2 b_2); k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Upravme rovnost do tvaru:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{k v_1 + v_2}{k v_2 - v_1}; k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Nyní můžeme libovolně umístit V , a poté volbou k získáváme poměr, ve kterém musí být složky vrcholu B , aby hledaný vrchol C vycházel celočíselně.

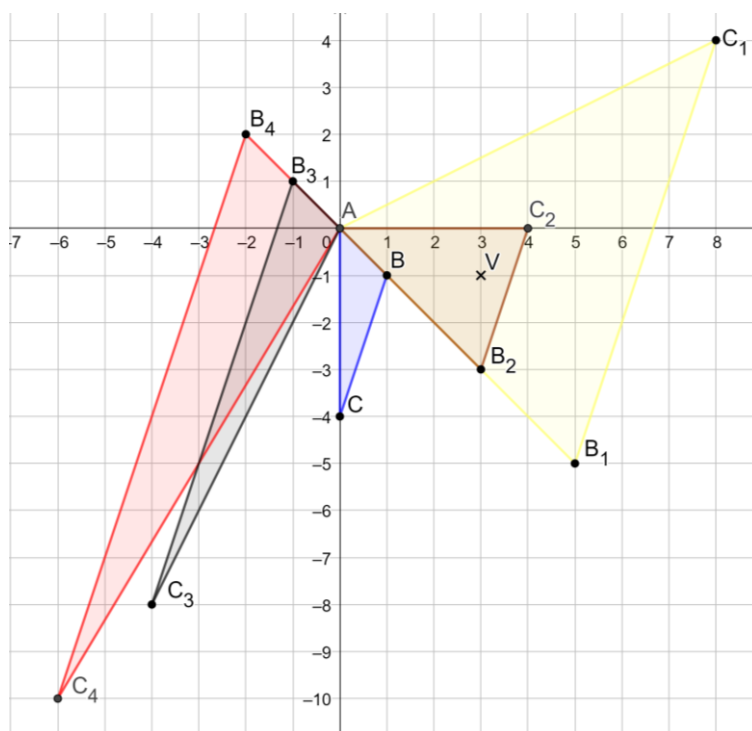
Zvolme například $V[3; -1]$. Poté musí pro souřadnice vrcholu B platit:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3k - 1}{-k - 3}; k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Volbou k získáváme nekonečně mnoho vrcholů B tak, že C je celočíselné. Například pro $k = 2$ dostáváme:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{-5} = \frac{1}{-1}.$$

Volbou souřadnic B v tomto poměru tedy jistě dostáváme celočíselné C . Několik takových příkladů si ukážeme na Obrázek 14. Posouváním bodu B po mřížových bodech přímky $x + y = 0$ bychom celočíselných trojúhelníků vygenerovali nekonečně mnoho. Nyní můžeme změnit k a získat nový poměr pro b_1, b_2 . Např. volbou $k = 3$ získáváme vztah $\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{-3}$. Volbou jiného V bychom získali jiný poměr pro souřadnice b_1, b_2 v závislosti na k , a opět bychom mohli vytvořit novou nekonečnou množinu celočíselných trojúhelníků.



Obrázek 14: Celočíselné trojúhelníky pro $V[3;-1]$, $k=2$

Jak už ovšem víme, body V a B můžeme zaměnit, a pak tedy pro libovolně zvolené B získáváme poměr, ve kterém musí být složky ortocentra, aby C vyšlo celočíselně. Navíc můžeme bod V prohlásit za vrchol C , čímž získáme vztah:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{kc_1 + c_2}{kc_2 - c_1}.$$

V tomto případě tak zvolením C a k získáváme množinu takových B , že trojúhelník ABC má celočíselné ortocentrum.

Podmínka (b) není tak dobrým generátorem, resp. její rozbor je složitější a generování není tak jasně vidět jako v podmínce (a).

2.2.7 Další úlohy

1. Nalezněte vrchol C , $A[0; 0]$, $B[8; -9]$, $V[5; -2]$. (Řešení: $C[14; 6]$)
2. Nalezněte vrchol C , $A[0; 0]$, $B[5; -2]$, $V[7; 3]$. (Řešení: Nemá řešení)
3. Nalezněte vrchol C , $A[-2; 6]$, $B[4; -3]$, $V[5; -1]$. (Řešení: $C[8; 1]$)
4. Ověřte, zda body $O[0; 0]$, $P[-4; -2]$, $Q[5; -5]$ a $R[1; 3]$ tvoří ortocentrický systém.
(Řešení: Ano)

2.3 Úloha ABS

Kapitola ABS se od zbylých úloh zadaných dvěma vrcholy a středem podstatně liší. Řešení ostatních úloh, pokud existuje, je vždy jednoznačné (až na případ ABV , kdy $V = A$ nebo $V = B$, kdy je řešení nekonečně mnoho). Pokud existuje nějaké řešení úlohy ABS, pak jich existuje nekonečně mnoho.

2.3.1 Příklad

Nalezněte souřadnice vrcholu C , známe-li: $A[4; -3], B[3; -4], S[0; 0]$.

Tato úloha se od předchozích zásadně liší, neboť nemá jednoznačné řešení. Je to způsobeno tím, že u předchozích příkladů volíme obě souřadnice středu k k vrcholům A, B libovolně, až na zakázané přímky. V tomto případě máme umístění S značně omezeno. Konkrétně, aby úloha měla řešení, musí S ležet na ose úsečky AB . Žáci by měli sami přijít na to, že zadání splňuje libovolné $C \in k_o$, a úloha má tudíž nekonečně mnoho řešení:

$$k_o: x^2 + y^2 = 25.$$

Řešením jsou pak vrcholy C o souřadnicích:

$$\underline{\left[c_1; \pm \sqrt{25 - c_1^2} \right]; c_1 \in (-5; 5)}.$$

2.3.2 Diskuze řešení

Nechť jsou pevně dány body A, B . Diskutujme existenci a počet řešení v závislosti na poloze S .

Aby úloha měla řešení, střed kružnice opsané musí být stejně vzdálen od vrcholu A jako od vrcholu B . Musí tedy platit $|SA| = |SB|$. To nastává právě tehdy, když střed kružnice opsané leží na ose úsečky AB . V případě, že S na této ose leží, úloha má nekonečně mnoho řešení, neboť C mohou zvolit kdekoliv na kružnici se středem S a poloměrem $|SA|$, resp. $|SB|$. Pokud S zvolíme mimo osu úsečky AB , úloha nebude mít řešení.

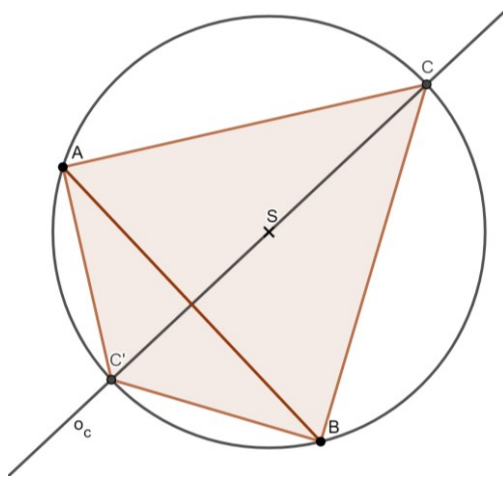
2.3.3 ABS: rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky

Nechť jsou dány body A, B . Určete množinu S , pro která bude existovat trojúhelník ABC rovnoramenný, speciálně rovnostranný.

Nyní nebudeme hledat polohu S , pro které bude trojúhelník ABC rovnoramenný, speciálně rovnostranný, ale pro které polohy S lze takový trojúhelník nalézt. Tento rozdíl opět plyne z nejednoznačnosti řešení. Nelze pro nějakou polohu S říci, že trojúhelník ABC bude rovnoramenný, lze ale říci, zda takový trojúhelník bude pro danou polohu S existovat.

Rovnoramenný

Uvažujme pouze situaci, kdy má úloha řešení, tedy S leží na ose úsečky AB . Snadno si rozmyslíme, že pokud má úloha řešení, pak z něj lze vybrat rovnoramenný trojúhelník. Stačí totiž umístit vrchol C také na osu AB a získáváme trojúhelník, kde platí $|AC| = |BC|$ (viz obr 6). Trojúhelník, pro nějž platí $|AB| = |BC|$ nebo $|AB| = |AC|$ už ovšem vždy existovat nebude. Pokud totiž umístíme S přímo do středu úsečky AB , je $|AB|$ průměrem kružnice opsané a nelze vést jinou úsečku stejné velikosti bodem A nebo B tak, aby druhý koncový bod úsečky ležel na kružnici. Ve všech ostatních případech lze nalézt rovnoramenný trojúhelník s libovolnou dvojicí shodných stran.



Obrázek 15: ABS rovnostranný

Rovnostranný

Rovnostranný trojúhelník už najdeme vzácněji. Aby bylo možné pro zadané AB vybrat z množiny řešení rovnostranný trojúhelník, bod S musí být ve správné vzdálenosti od strany AB . Jak tuto vzdálenost nalézt? Víme, že v rovnostranném trojúhelníku všechny středy

splývají. Ba co víc, splývají i osy stran s výškami. Můžeme tak zjišťovat např. kde musí ležet V a tím zjistit, kde musí ležet S .

Velikost výšky v rovnostranném trojúhelníku je rovna $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Spočítáme ji z Pythagorovy věty:

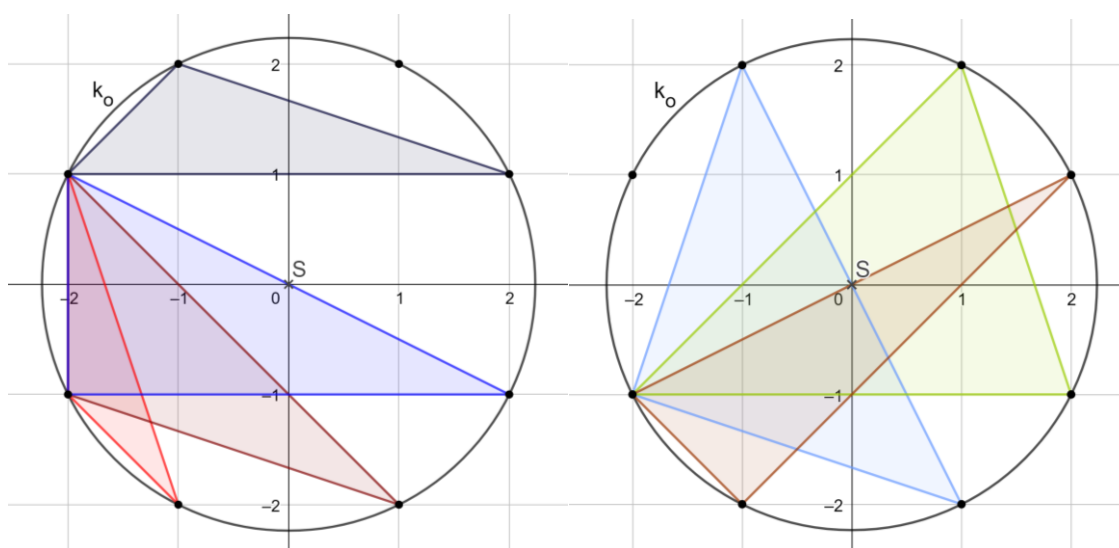
$$v_c = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Těžiště, a tedy i ortocentrum, leží v jedné třetině těžnice, jeho vzdálenost, a tedy i vzdálenost S od úsečky AB , je v rovnostranném trojúhelníku $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} |AB|$.

2.3.4 Generování celočíselných zadání

Opět přejdeme ke generování celočíselných zadání. Zde je zamyšlení nad problémem velmi pěkné.

Umístíme střed kružnice opsané do počátku $S[0; 0]$ a sledujme, kolika celočíselnými body prochází kružnice s tímto středem v závislosti na velikosti jejího poloměru. Začneme s poloměrem $r = 1$. Vidíme, že taková kružnice prochází pouze čtyřmi celočíselnými body ($[1; 0]$, $[0; 1]$, $[-1; 0]$, $[0; -1]$). Z těchto bodů lze vytvořit pouze pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, proto pro nás taková kružnice není při tvorbě zadání zajímavá. Pojdme tedy dále. Kružnice s poloměrem $r = \sqrt{2}$ a $r = 2$ také prochází pouze čtyřmi celočíselnými body. Prvním zajímavým poloměrem pro tvorbu zadání je $r = \sqrt{5}$. Kružnice s takovým poloměrem totiž prochází osmi mřížovými body a lze pomocí ní generovat velké množství různorodých trojúhelníků (viz Obrázek 16). Všechny 7 vyobrazených trojúhelníků lze navíc vytvořit z daných mřížových bodů čtyřmi způsoby. To tedy čítá 28 různých celočíselných zadání jen pro $S[0; 0]$. My však navíc můžeme trojúhelníky posouvat o libovolný celočíselný vektor v rovině, čímž získáme další a další celočíselná zadání. Dalším dobrým generátorem je například poloměr $r = 5$.



Obrázek 16: Množina trojúhelníků generovaných k_0 s poloměrem $\sqrt{5}$

2.4 Úloha ABU

Poslední úlohou typu 2 vrcholy, jeden střed je úloha ABU. Problematika této úlohy je zřejmě nejtěžší, proto ji zařazujeme až na konec kapitoly 2. Rozbory rovnoramenných, rovnostranných, resp. ostroúhlých, pravoúhlých a tupoúhlých trojúhelníků nebudeme dělat do takových detailů, pouze si ukážeme správná řešení.

2.4.1 Příklad

Nalezněte souřadnice vrcholu C , známe-li: $A[0; 0]$, $B[16; 0]$, $U[1; 3]$.

(a) Konstrukční řešení

Postup konstrukce

1. $p; U \in p \wedge p \perp AB$
2. $P; P \in p \cap AB$
3. $k_v; k_v(U; |UP|)$
4. $S_{AU}; S_{AU} \in AU \wedge |S_{AU}A| = |S_{AU}U|$
5. $l; l(S_{AU}; |S_{AU}A|)$
6. $T_1; T_1 \in k_v \cap l$
7. $t_1; t_1 = \overleftrightarrow{AT_1}$ (t_1 je tečna ke k_v)
8. $S_{BU}; S_{BU} \in BU \wedge |S_{BU}B| = |S_{BU}U|$
9. $m; m(S_{BU}; |S_{BU}B|)$
10. $T_2; T_2 \in k_v \cap m$
11. $t_2; t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ (t_2 je tečna ke k_v)
12. $C; C \in t_1 \cap t_2$

Výpočet

1. $p: x - 1 = 0$
2. $P[1; 0]$
3. $k_v: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
4. $S_{AU} \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$
5. $l: \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = 2,5$
6. $T_1 \left[-\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right]$
7. $t_1: 3x + 4y = 0$
8. $S_{BU} \left[\frac{17}{2}; \frac{3}{2} \right]$
9. $m: \left(x - \frac{17}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{117}{2}$
10. $T_2 \left[\frac{28}{13}; \frac{75}{13} \right]$
11. $t_2: 5x + 12y - 80 = 0$
12. $C[-20; 15]$

(b) Analytické řešení

V tomto řešení budeme využívat nástroje analytické geometrie. Tyto nástroje však budeme volit na základě znalosti konstrukčního postupu.

Nalezněme poloměr k_v jako vzdálenost $|Uc|$. Snadno zjistíme ze vzorce pro vzdálenost bodu od přímky, že $|Uc| = 3$, proto:

$$k_v: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Tečny ke k_v mají předpis:

$$t: (x - 1)(x_0 - 1) + (y - 3)(y_0 - 3) = 9,$$

kde bod $T[x_0; y_0]$ je bod dotyku. Nalezněme nejprve tečnu ke k_v procházející bodem A .

Dosaďme A do rovnice tečny. Tím získáme vzájemný vztah souřadnic x_0, y_0 :

$$A \in t: -1(x_0 - 1) - 3(y_0 - 3) = 9,$$

$$x_0 = 1 - 3y_0.$$

Jelikož platí i $T \in k_v$, souřadnice bodu T musí splňovat její předpis:

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 3)^2 = 9.$$

dosazením vztahu $x_0 = 1 - 3y_0$ do k_v získáváme:

$$T_1 \left[-\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right].$$

Dosazením T_1 do t získáváme rovnici pro tečnu (nazvěme ji t_1) ke k_v bodem A :

$$t_1: 3x + 4y = 0.$$

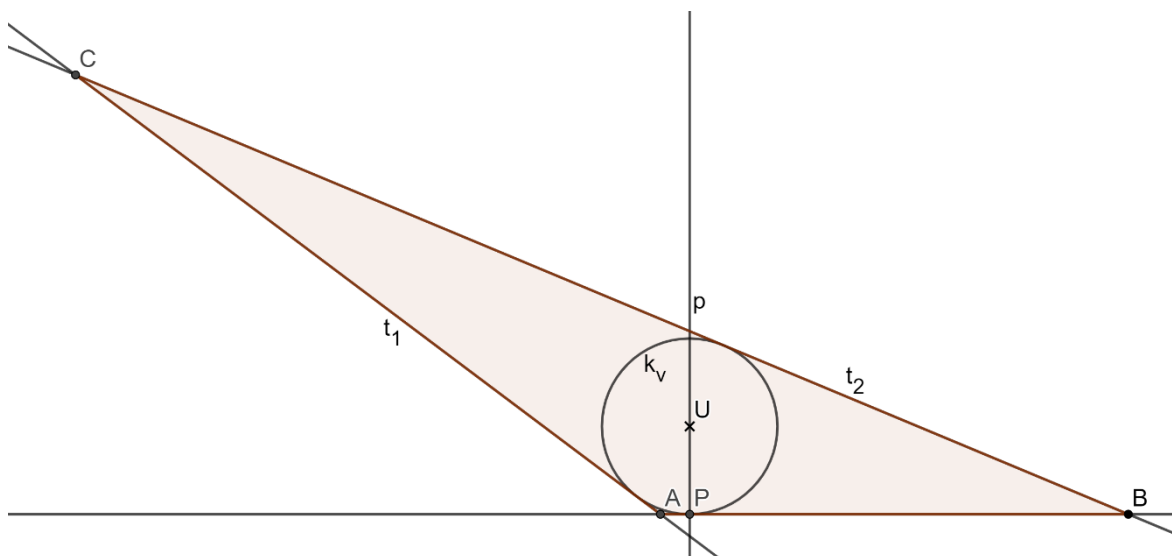
Obdobně postupujeme při hledání tečny (nazvěme ji t_2) ke k_v bodem B a obdržíme:

$$t_2: 5x + 12y - 80 = 0.$$

Nyní již stačí nalézt průsečík přímek t_1 a t_2 , čímž nalezneme souřadnice vrcholu C :

$$\underline{C[-20; 15]}.$$

Při hledání bodu dotyku vždy dostaneme dva body. Druhý z nich však nepotřebujeme, neboť se jedná o bod dotyku k_v s přímkou AB , kterou již známe.



Obrázek 17: Důležité prvky konstrukce úlohy ABU

2.4.2 Diskuze Řešení

Nechť jsou pevně dány body A, B . Diskutujeme existenci a počet řešení v závislosti na poloze U .

V tomto případě bude diskuze řešení velmi jednoduchá a povedeme ji pouze synteticky.

Aby trojúhelník ABC existoval, součet úhlů CAB a ABC musí být v intervalu $(0; \pi)$. Osy o_α, o_β tyto úhly půlí, proto se jejich součet musí pohybovat v intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$. Úhel BVA tak musí být z intervalu $(\frac{\pi}{2}; \pi)$, proto U musí ležet uvnitř Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{AB}$.

2.4.3 ABU: rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky

Nechť jsou dány body AB . Určeme množinu U , pro která bude trojúhelník ABC rovnoramenný, speciálně rovnostranný.

Najít tuto množinu pro T bylo poměrně jednoduché. Pro V již byly výpočty těžší. Výpočet této množiny pro U s body $A[-1; 0], B[1; 0]$ jsem shledal příliš obtížným, a proto si ukážeme řešení pro $A[0; 0], B[1; 0]$. Toto zadání je výhodnější, neboť pak jedna z os trojúhelníka prochází počátkem.

Řešení

Necht' tedy $A[0; 0], B[1; 0]$.

Rozdělme řešení opět na 3 případy:

1. $|AB| = |AC|$

Tato situace nastává právě tehdy, když U leží na přímce:

$$x - \frac{1}{2} = 0, y \neq 0$$

Odtud získáváme první množinu:

$$U \left[\frac{1}{2}; u_2 \right]; u_2 \neq 0.$$

2. $|AB| = |AC|$

Postupujme stejně, jako jsme postupovali při úlohách ABT a ABV . Bod C musí nyní ležet na kružnici se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$. Taková kružnice má pro námi zvolené A, B středovou rovnici:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Body C tedy musí být tvaru:

$$C \left[c_1; \pm \sqrt{1 - c_1^2} \right]; c_1 \in (-1; 1)$$

Pro jednoduchost pokračujme v řešení pouze v jedné polorovině a uvažujme C tvaru:

$$C \left[c_1; \sqrt{1 - c_1^2} \right]; c_1 \in (-1; 1).$$

Nyní najděme osy o_α a o_β . Máme jistotu, že vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ mají stejnou velikost, a proto má osa o_α směrový vektor:

$$\overrightarrow{s_{o_\alpha}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1; 0) + \left(c_1; \sqrt{1 - c_1^2} \right) = \left(1 + c_1; \sqrt{1 - c_1^2} \right).$$

Osa o_α prochází počátkem, proto můžeme ihned napsat její obecnou rovnici:

$$-\sqrt{1 - c_1^2} \cdot x + (1 + c_1)y = 0.$$

Směrový vektor $\overrightarrow{BA}$ má velikost 1, proto jej normovat nemusíme, vektor $\overrightarrow{BC}$ bohužel normovat musíme, a proto směrový vektor osy o_β je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s_{o_\beta}} &= \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = (-1; 0) + \frac{(c_1 - 1; \sqrt{1 - c_1^2})}{\sqrt{(c_1 - 1)^2 + (\sqrt{1 - c_1^2})^2}}, \\ \overrightarrow{s_{o_\beta}} &= (c_1 - 1 - \sqrt{2}\sqrt{1 - c_1}; \sqrt{1 - c_1^2}).\end{aligned}$$

Osa o_β prochází bodem B . Její obecná rovnice je tedy:

$$o_\beta: \sqrt{1 - c_1^2} \cdot x + (1 - c_1 + \sqrt{2}\sqrt{1 - c_1})y - \sqrt{1 - c_1^2} = 0.$$

Vydělením rovnice výrazem $\sqrt{1 - c_1^2}$ (to určitě můžeme, neboť víme, že $c_1 \neq \pm 1$) získáváme tvar:

$$o_\beta: x + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - c_1}}{\sqrt{1 + c_1}} \right) y - 1 = 0.$$

Vyjádříme c_1 z rovnice o_α :

$$c_1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

a dosadíme do o_β :

$$x + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \right) y - 1 = 0.$$

Úpravami nebo s pomocí softwaru WolframAlpha zjišťujeme, že na intervalu $x \in (0, 1)$, který nás zajímá, se jedná o křivku:

$$y = (x - 1)\sqrt{\frac{x}{2 - x}}.$$

Pro upřesnění, x z jiného intervalu nás nezajímají, neboť jsme v diskuzi řešení úlohy ABU ukázali, že U může pro pevně daná A, B ležet pouze uvnitř Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{AB}$. Nezapomeňme přidat „ $\pm$ “, čímž dostáváme křivku pro obě poloroviny:

$$y = \pm(x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Naším řešením jsou tedy U o souřadnicích:

$$U \left[u_1; \pm(u_1-1)\sqrt{\frac{u_1}{2-u_1}} \right]; u_1 \in (0; 1).$$

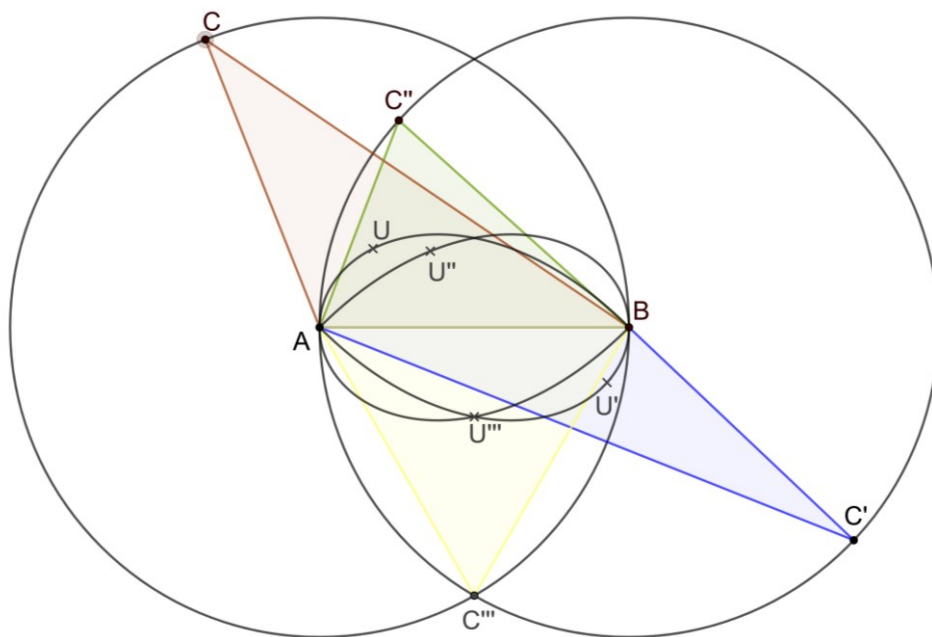
3. $|AB| = |BC|$

Stejným postupem jako v předchozím případě získáváme křivky:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Souřadnice U tedy musí být tvaru:

$$U \left[u_1; \pm u_1 \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}} \right]; u_1 \in (0; 1).$$



Obrázek 18: Množina U rovnostranných trojúhelníků ABC

Zadíváme-li se na obrázek pozorně, „smyčky“, jež jsou řešením této úlohy, připomínají smyčky křivek V , pro něž byl trojúhelník ABC rovnoramenný.

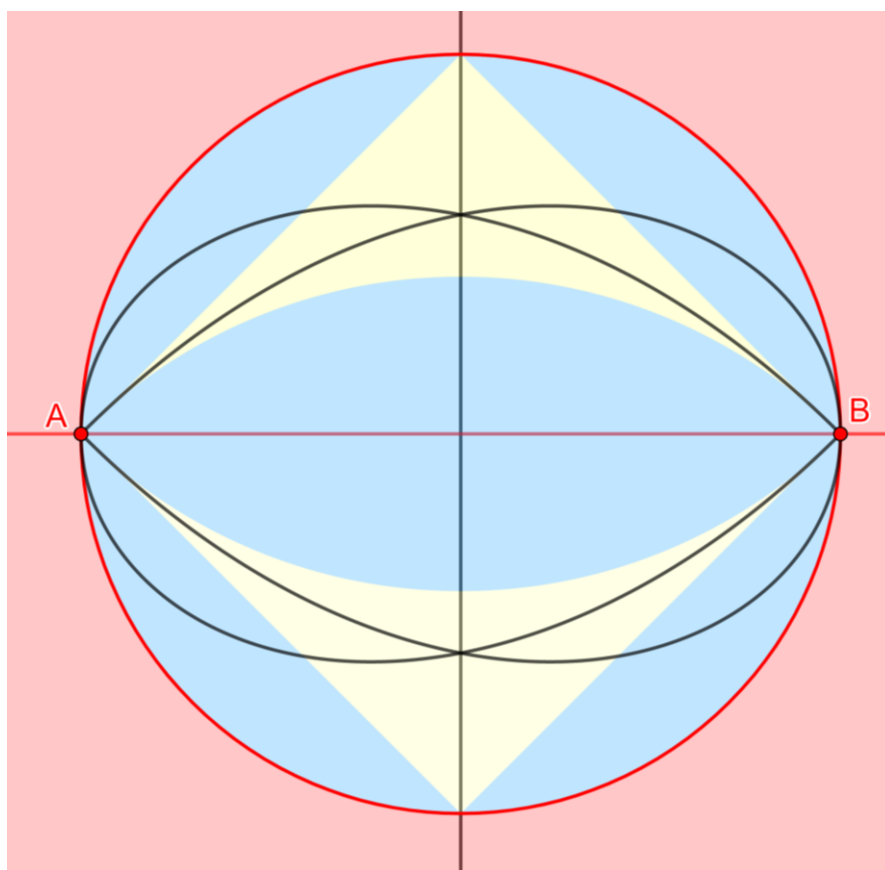
A skutečně, přepočítáme-li tyto množiny V pro pevné body $A[0; 0]$, $B[1; 0]$, pak se smyčky těchto křivek překryjí.

Smyčka V rovnoramenných trojúhelníků $|AB| = |BC|$ překryje smyčku U rovnoramenných trojúhelníků $|AB| = |AC|$. A smyčka V rovnoramenných trojúhelníků $|AB| = |AC|$ překryje smyčku U rovnoramenných trojúhelníků $|AB| = |BC|$.

Proč tomu tak je, je ovšem předmětem hlubšího zkoumání.

Množinou rovnostranných trojúhelníků jsou opět průsečíky výsledných křivek.

Na obrázku můžeme vidět mapu shrnující výsledky podkapitoly 2.4.2, 2.3.2 a diskuzi umístění U tak, aby ABC byl ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý. Tuto diskuzi přenechávám čtenáři, jako cvičení.



Obrázek 19: Mapa ABU

2.4.4 Další úlohy

1. Nalezněte vrcholy B, C , známe-li: $A[-9; -12], B[9; 12], U[-3; 6]$. (Řešení $C[-9; 12]$)

2.5 Úloha *Ae* (*ASTV*)

Velmi pěknou úlohou je zadání, kde známe jeden vrchol a dva ze tří středů Eulerovy přímky. Jak jsme ukázali v kapitole Eulerově přímce, známe-li 2 středy ležící na e ze vztahu $\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{TV}} = \frac{1}{2}$, snadno dopočítáme třetí, což budeme potřebovat ke konstrukčnímu řešení. Tím jako vždy začneme a následně přidáme několik analytických. Tato úloha propojuje vlastnosti všech tří středů T, V, S , a je tudíž vhodným završením kapitoly 2.

Hledáme-li dva vrcholy, řešení nebude jednoznačné. Z dopočítaných vrcholů můžeme totiž libovolný označit B a libovolný C a získáváme tak dvě řešení, která však určují stejný trojúhelník. My se v této práci budeme držet konvence značení proti směru hodinových ručiček v abecedním pořadí.

U všech předchozích řešení byl postup konstrukce poměrně jasný a bylo pro nás snadné převést problém do analytických výpočtů. V tomto případě je pravděpodobné, že žáci nebudou konstrukční řešení znát, proto je vhodné je nejprve motivovat k jeho nalezení a pak přejít k analytickým řešením.

2.5.1 Příklad

Nalezněte souřadnice vrcholů B, C , známe-li $A = [0,0], T = [3,1], S = [6,3]$.

Jak víme, z trojice S, T, V stačí zadat 2, neboť třetí z nich je pak jednoznačně určen a lze ho snadno dopočítat ze vztahu $\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{TV}} = \frac{1}{2}$. Získáváme tak i třetí ze středů Eulerovy přímky:

$$\underline{V[-3; -3]}$$

a můžeme přejít ke konstrukčnímu postupu.

(a) Konstrukční postup

Při konstrukčním řešení úlohy je třeba spojit několik již známých poznatků. Konkrétně, známe-li vrchol a střed kružnice opsané, známe i její poloměr ($r = |AS|$). Dále víme, že známe-li vrchol A a střed T , známe i střed strany a : S_a ($S_a = A + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AT}$). A konečně vrcholy B, C musí ležet současně na straně a , která je kolmicí k přímce AV procházející bodem S_a a současně na kružnici opsané.

Postup konstrukce

2. $k_o; k_o(S; r = |SA|)$
3. $S_a; S_a \in \overrightarrow{AT} \wedge |AS_a| = \frac{3}{2}|AT|$
4. $a; S_a \in a \wedge a \perp \overrightarrow{AV}$
5. $B, C \in k_o \cap a$

Výpočet

1. $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 45$
2. $S_a = \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$
3. $a: x + y - 6 = 0$
4. $B = [9; -3], C[0; 6]$

Konstrukci trojúhelníka pomocí zadaných A, T, V, S ukazuje např. Beran (2020, s. 38).

(b) první početní způsob (AST)

V konstrukčním řešení jsme došli k výsledku díky dopočtu V ze znalosti Eulerovy přímky. Ukažme si nyní postup čistě početní, kde využijeme pouze zadaných bodů ATS . Tento způsob může být pro žáky poněkud abstraktní, ale využívá pouze znalostí z předchozích kapitol.

Díky vztahu I. získáváme rovnice (1) a (2):

$$3 \cdot t_1 = a_1 + b_1 + c_1,$$

$$3 \cdot t_2 = a_2 + b_2 + c_2,$$

$$(1) \quad c_1 = 9 - b_1,$$

$$(2) \quad c_2 = 3 - b_2.$$

Díky tomu, že $B, C \in k_o$, získáváme rovnice (3) a (4):

$$(3) \quad (b_1 - 6)^2 + (b_2 - 3)^2 = 45,$$

$$(4) \quad (c_1 - 6)^2 + (c_2 - 3)^2 = 45.$$

Dosaďme z rovnice (1) a (2) do (4) a dořešme soustavu:

$$(3) \quad (b_1 - 6)^2 + (b_2 - 3)^2 = 45,$$

$$(4) \quad (9 - b_1 - 6)^2 + (3 - b_2 - 3)^2 = 45,$$

$$b_{1,2} = 9; 0,$$

$$b_{2,2} = -3; 6.$$

Opět není jednoznačně určeno, jaké souřadnice přiřadit vrcholu B a jaké vrcholu C . Pojmenujme body dle námi dodržované konvence:

$$\underline{B[9; -3], C[0; 6]}.$$

(c) druhý početní způsob (ATV)

Přirozenou otázkou po ukázce řešení bez dopočtu třetího středu Eulerovy přímky je, zda můžeme úlohy vyřešit, známe-li vrchol A a libovolnou dvojici z těchto 3 středů, aniž bychom znali třetí z nich. Zbývá nám tedy podívat se na úlohy ATV a ASV . Začněme nejprve úlohou ATV . Použijme stejný $\triangle$ jako v předchozí úloze. V tomto případě známe tedy

$$A = [0; 0], T = [3; 1], V = [-3; -3].$$

Využijme znalosti A a T k výpočtu S_a :

$$S_a = [4,5; 1,5].$$

Vrcholy B, C leží na přímce a , kterou získáme jako kolmici k přímce $\overleftrightarrow{AV}$ procházející bodem S_a :

$$a: x + y - 6 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že S_a je středem strany a , musí platit:

$$B = S_a + \vec{v},$$

$$C = S_a - \vec{v}.$$

Složky vektoru $\vec{v}$ označme k, i , pak:

$$B[4,5 + k; 1,5 + i],$$

$$C[4,5 - k; 1,5 - i].$$

Dosazením B resp. C do a zjišťujeme, že $i = -k$, vrcholy B a C tak můžeme zapsat ve tvaru:

$$B[4,5 + k; 1,5 - k],$$

$$C[4,5 - k; 1,5 + k].$$

Pozn.: Ve skutečnosti lze rovnou z rovnice přímky a nahlédnout vztah mezi k a i . Lépe je tento vztah vidět z tvaru $y = -x + 6$. Jelikož se jedná o lineární funkci se směrnici -1 ,

posun na y musí být opačný posunu na x . Kdyby např. $a: y = 3x + c; c \in \mathbb{R}$, pak by platilo $B[4,5 + k; 1,5 + 3k], C[4,5 - k; 1,5 - 3k]$.

Nyní využijme podmínku $\overrightarrow{VB} \perp \overrightarrow{AC}$ nebo $\overrightarrow{VC} \perp \overrightarrow{AB}$ k dopočtu neznámé k :

$$\overrightarrow{VB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$(7,5 + k)(4,5 - k) + (4,5 - k)(1,5 + k) = 0,$$

$$(4,5 - k)(9 + 2k) = 0,$$

$$k = \pm 4,5.$$

Dosazením získáváme:

$$\underline{B[9; -3]}, \underline{C[0; 6]}.$$

(d) Třetí početní způsob *ASV*

Poslední možností, jak vybrat dva středy Eulerovy přímky je kombinace S, V .

Nyní známe: $A = [0,0], S = [6,3], V = [-3, -3]$

Prvním nápadem, by mohlo být vyřešit úlohu podobně jako v prvním početním způsobu. Znamenalo by to sestavit čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Dvě z nich získáme ze středové rovnice kružnice opsané a dvě z nich ze skalárních součinů.

$$B \in k_0 \quad (b_1 - 6)^2 + (b_2 - 3)^2 = 45$$

$$C \in k_0 \quad (c_1 - 6)^2 + (c_2 - 3)^2 = 45$$

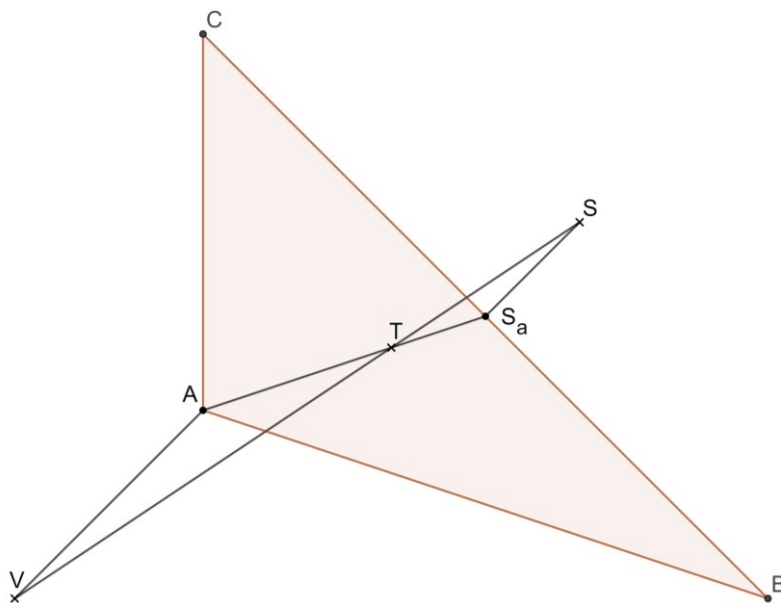
$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (c_1 - b_1) + (c_2 - b_2) = 0$$

$$\overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad (3 + b_1)c_1 + (3 + b_2)c_2 = 0$$

Problém je, že rovnice v soustavě nejsou (až na jednu) lineární a soustava by tak byla dost obtížně řešitelná.

Použijme proto jiný způsob (Pec1, 2009, s. 27). U tohoto způsobu ukážeme pouze začátek řešení, neboť od určitého místa dále bude řešení analogické jako v druhém početním způsobu.

(Pec1, 2009, s. 27) Rozmysleme si, že platí: $|AT| = 2|SaT|$, $|VT| = 2|ST|$ a $AV \parallel SaS$. Trojúhelníky AVT a S_aST jsou tedy podobné, viz Obrázek 20: Podobné trojúhelníky AVT , S_aST .



Obrázek 20: Podobné trojúhelníky AVT , S_aST

Odtud tedy jistě platí:

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{SS_a}$$

Úpravou rovnosti dostáváme vyjádření pro S_a :

$$S_a = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}A + S$$

Máme-li S_a , můžeme pokračovat stejně jako v druhý početní způsob (**ATV**).

2.5.2 Diskuze řešení

U této úlohy je velmi pěkné zamyšlení nad řešitelností, resp. počtem řešení.

První nutnou podmínkou pro existenci řešení, kterou jsme v tomto textu mnohokrát opakovali, je kolinearita bodů S, T, V a vztah, který tyto body splňují $\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{TV}} = \frac{1}{2}$. Pokud zadané středy daný vztah nesplňují, můžeme rovnou prohlásit, že úloha nemá řešení.

Naopak pokud tyto tři středy splývají, úloha bude mít řešení pro libovolné A různé od těchto tří středů.

Předpokládejme nyní, že výše zmíněná podmínka je splněná a středy T, V, S nesplývají. Umístíme BÚNO $S = [0,0]$, $T = [-1,0]$, $V = [-3,0]$ a diskutujme, pro která A bude trojúhelník ABC existovat.

Řešení

Opět nám pomůže znalost konstrukčního postupu. Vzpomeňme, že body B a C nalézáme v úloze $ATVS$ jako průsečík kolmice k $\overrightarrow{AV}$, tedy přímky a a kružnice opsané. Budou však tyto průsečíky vždy existovat? Jaký význačný bod musí ležet uvnitř k_0 , aby bylo možné trojúhelník sestavit?

Klíčem k řešení je si uvědomit, že pokud má přímka a protínat k_0 v bodech B, C , pak musí střed strany BC být vnitřním bodem k_0 , neboť jinak by byla přímka a vnější přímkou kružnice k_0 a žádné společné průsečíky by neexistovaly. Musí tudíž platit, že:

$$r = |SA| > |SS_a|.$$

Vyjádřeme si S_a pomocí souřadnic vrcholu A :

$$S_a = A + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AT},$$

$$\overrightarrow{AT} = (-1 - a_1, -a_2),$$

$$s_{a_1} = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{2},$$

$$s_{a_2} = -\frac{1}{2}a_2,$$

$$S_a \left[-\frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}a_2 \right]$$

Nyní vyjděme ze vztahu $|SA| > |SS_a|$. Ve výpočtu se ukáže výhoda umístění S do počátku:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} > \sqrt{s_{a_1}^2 + s_{a_2}^2},$$

$$a_1^2 + a_2^2 > s_{a_1}^2 + s_{a_2}^2,$$

$$a_1^2 + a_2^2 > \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a_2\right)^2.$$

Po úpravách získáváme vztah, který musí souřadnice zadaného vrcholu A splňovat, aby měla úloha řešení:

$$(a_1 - 1)^2 + a_2^2 > 4.$$

Bod A tedy musí ležet vně kružnice $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, aby zadání mělo řešení.

2.5.3 Další úlohy

1. Nalezněte vrcholy B, C , známe-li: $A = [-15; -15]$, $V = [3; -33]$, $S = [0; 0]$

(Řešení: $B[-3; -21]$, $C[21; 3]$)

2. Nalezněte vrcholy B, C , známe-li: $A = [0; 0]$, $T = [-3; 3]$, $S = [-3; 4]$

(Řešení: $B[-3; 9]$, $C[-6; 0]$, rovnoramenný trojúhelník)

3. Nalezněte vrcholy B, C , známe-li: $A = [-12; -9]$, $S = [0; 0]$, $T = [1; 2]$, $V[3; 6]$

(Řešení: $B[15; 0]$, $C[0; 15]$)

4. Určete vztah, který musí splňovat souřadnice vrcholu A pro pevně dané body $S[0; 0]$, $T[4; 3]$, $V[12; 9]$, aby trojúhelník ABC existoval.

(Řešení: $(a_1 + 4)^2 + (a_2 + 3)^2 = 100$)

3 Úlohy s vrcholem, středem kružnice vepsané a jedním dalším středem

V této kapitole se podíváme na úlohy, kde známe jeden z vrcholů, střed kružnice vepsané a jeden prvek z množiny $\{T; V; S\}$. Naším úkolem je najít vrcholy B, C , které budeme opět dle zavedené konvence označovat v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček.

Při rešerši zdrojů jsem nikde tento typ tříbodového zadání nenašel, proto bych rád v úvodu této kapitoly poznamenal, že všechna uvedená řešení jsou má vlastní, a proto rozhodně nevyklučuji, že existují jednodušší. Pokud čtenář zná nebo nalezne snazší či elegantnější řešení, budu velmi rád, pokud se mi ozve.

Máme-li zadán vrchol a 2 středy z množiny $\{T; V; S\}$, úloha je poměrně snadno řešitelná mnoha způsoby (viz kapitola 2.5). U úloh, kde je zadán vrchol, střed kružnice vepsané a jeden střed z množiny $\{T; V; S\}$, je řešení podstatně složitější.

Ukážeme si řešení úloh *AUS* a *AUV*. U úlohy *AUV* uvádím pouze analytické řešení, neboť konstrukční řešení těchto úloh mi není známo. Tato úloha není nijak triviální a pro její řešení je stěžejní umístění zadaných bodů do soustavy souřadnic.

Začneme tedy velmi pěknou úlohou *AUS*.

3.1 Úloha AUS

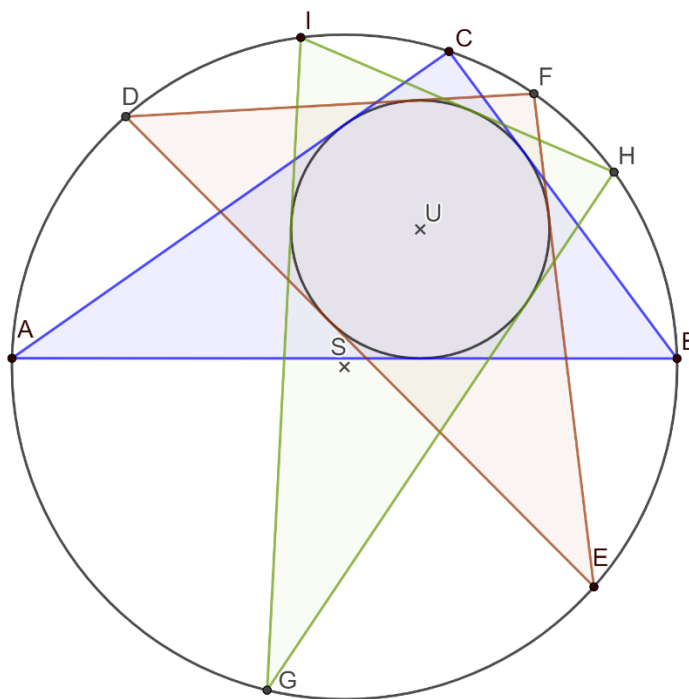
Úloha $(U; \rho), (S; r)$, tedy úloha, kde známe střed kružnice vepsané a opsané a jejich poloměry má vždy buď nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné. To je důsledkem tzv. *Ponceletova porismatu*, též *Eulerovy formule*, která má následující znění:

Ponceletovo porisma, Eulerova formule,: Necht' kružnice l se středem U a poloměrem ρ leží uvnitř kružnice k se středem S a poloměrem r . Necht' A, B, C jsou body na kružnici k takové, že přímky AB a AC se dotýkají kružnice l , potom se přímka BC dotýká l právě tehdy, když platí:

$$r^2 - |SU|^2 = 2\rho r.$$

Znění a důkaz této věty naleznete také zde (MKS, 2017, s. 60-64).

Pokud tedy zadané hodnoty r, ρ a $|SU|$ splňují výše zmíněný vztah, pak můžeme najít nekonečně mnoho trojúhelníků, pro které je l kružnicí vepsanou a k kružnicí opsanou. Můžeme totiž vybrat libovolný bod A na k , z tohoto bodu vést tečny AB a AC k l a spojením průsečíků těchto tečen s k získáváme třetí přímku BC , která je také tečnou kružnice l (viz Obrázek 21: Ponceletovo porisma).



Obrázek 21: Ponceletovo porisma

Přidáním vrcholu A na kružnici k do zadání máme již úlohu jednoznačně určenou. Ukažme si 2 způsoby řešení, které využívají vět ze Švrčkovy publikace „*Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*“. Obě věty ponechávám bez důkazu a odkazuji na zmíněnou publikaci, kde jsou obě dokázány.

Příklad

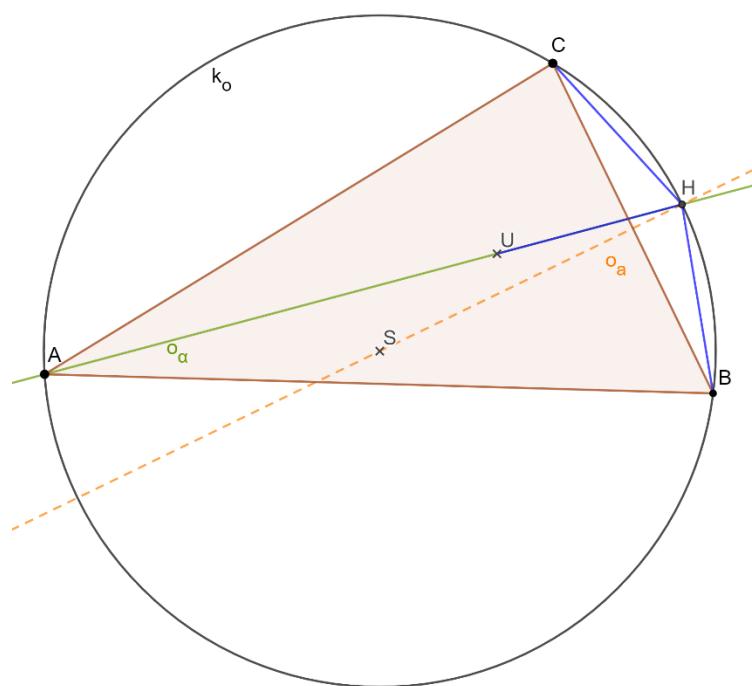
Nalezněte souřadnice vrcholů B a C , známe-li $A[-40; 30]$, $U[20; 10]$, $S[-4; -47]$.

(a) konstrukční řešení

Věta: Bud' ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom osa úhlu CAB protíná osu strany BC v bodě H , který leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. Dále platí $|HU| = |HB| = |HC|$ (Švrček, 2004, s. 40).

Tato věta je dokázána zde (Švrček, 2004, s. 41-42).

Ilustrace znění věty viz Obrázek 22.



Obrázek 22: Ilustrace Švrčkovy věty

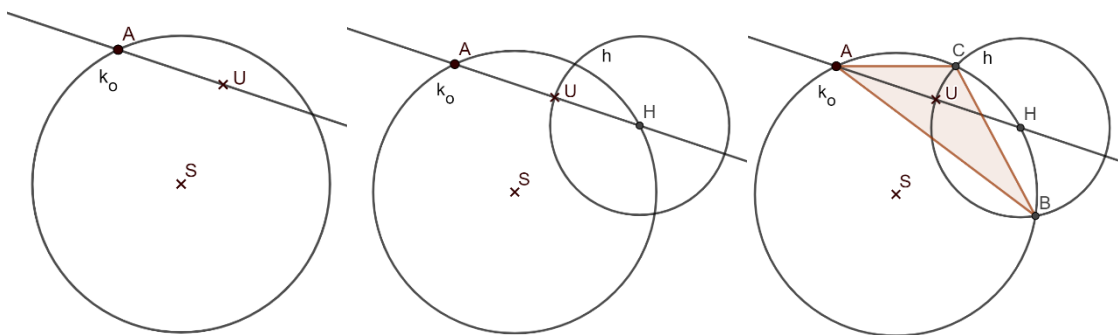
Se zadanými body AUS snadno takový bod H , o kterém mluví Eulerova věta, najdeme jako průsečík přímky AU a kružnice opsané. Vrcholy B, C pak budou průsečíkem kružnice opsané a kružnice (nazvěme ji h) se středem H o poloměru $|HU|$.

Postup konstrukce

1. $k_o; k_o(S; |SA|)$
2. $\overleftrightarrow{AU}$
3. $H; H \in k_o$
4. $h; h(H; |HU|)$
5. $B, C; B, C \in h \cap k_o$

Výpočet

1. $k_o: (x + 4)^2 + (y + 47)^2 = 7225$
2. $\overleftrightarrow{AU}: x + 3y - 50 = 0$
3. $H[71; -7]$
4. $h: (x - 71)^2 + (y + 7)^2 = 2890$
5. $B[80; -60], C[32; 30]$



Obrázek 23: Konstrukce úlohy AUS

(b) Pomocí vztahu mezi k_o a k_v

Použijme vztah, který jsme uvedli již v úvodním odstavci této kapitoly, a přidejme ještě jednu formulaci Švrčka (2004, s. 43), která danou věc formuluje poněkud konkrétněji.

(Eulerova věta) Necht' $k(S; r)$ a $l(U; \rho)$ jsou po řadě kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku. Pro vzdálenost d středů obou kružnic platí:

$$d = |SU| = r(r - 2\rho).$$

Znění a důkaz této věty jsou k dispozici zde (Švrček, 2004, s. 43-44).

Tento vztah dává do souvislosti poloměry kružnice vepsané a opsané a vzdálenost jejich středů (nazvěme ji d). Díky zadaným bodům A, S známe r a díky bodům U, S známe $|SU|$.

Ze zadání známe $|SU|$ a r , je tedy třeba dopočítat ρ a poté jsou vrcholy B, C průsečíkem k_o a tečen ke k_v .

Vyjádříme poloměr kružnice vepsané ρ ze vztahu $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$

$$\rho = \frac{r^2 - d^2}{2r}$$

Ze zadání víme, že $r = |SA| = 85$ a $d = |SU| = 15\sqrt{17}$, odtud:

$$\rho = \frac{7225 - 3825}{2 \cdot 85} = 20.$$

Díky znalosti poloměru ρ můžeme zapsat středovou rovnici k_v :

$$k_v: (x - 20)^2 + (y - 10)^2 = 400.$$

Nyní hledíme tečny ke k_v , které jsou tvaru:

$$t_{k_v}: (x - 20)(x_0 - 20) + (y - 10)(y_0 - 10) = 400,$$

$$A \in t_{k_v}: -60(x_0 - 20) + 20(y_0 - 10) = 400.$$

Jelikož body dotyku $T_1[x_{0_1}; y_{0_1}]$ a $T_2[x_{0_2}; y_{0_2}]$ leží zároveň na k_v a zároveň na t_{k_v} , najdeme je řešením této soustavy rovnic:

$$(1) (x_0 - 20)^2 + (y_0 - 10)^2 = 400,$$

$$(2) -60(x_0 - 20) + 20(y_0 - 10) = 400.$$

Z rovnice (2) získáváme vztah:

$$y_0 = 3x_0 - 30.$$

Dosazením do rovnice (1) získáváme body dotyku:

$$T_1[8; -6], T_2[20; 30].$$

Dosazením do t_{k_v} získáváme rovnice tečen:

$$t_1: y - 30 = 0,$$

$$t_2: 3x + 4y = 0.$$

Nyní stačí najít průsečíky těchto tečen s k_o , čímž získáme vrcholy B, C :

$$\underline{B[80; -60], C[32; 30]}.$$

3.1.1 Další úlohy

Nalezněte souřadnice vrcholů B a C , známe-li:

1. $A[0; 0], U[10; 0], S[10; -5]$ (Řešení: $B[20; -10], C[12; 6]$)
2. $A[0; 0], U[2; 6], S[16; 63]$ (Řešení: $B[-40; 30], C[32; 0]$)
3. $A[-3; 4], U[1; 2], S[0; 0]$ (Řešení: $B[3; -4], C[3; 4]$)

3.2 Úloha AUV

Níže uvedené řešení je mé vlastní, proto pokud čtenář přijde na snazší analytické či jakékoli konstrukční budu velmi rád, když mě kontaktuje. Pro řešení této úlohy je stěžejní umístění zadaných bodů do soustavy souřadnic.

3.2.1 Příklad 1

Začněme jednoduchou otázkou na rozehřátí. Uvažujme zadání:

Nalezněte souřadnice vrcholů B a C , známe-li: $V = A[0; 0]$, $U[u_1; 0]$; $u_1 \neq 0$.

Nejprve se zamysleme, co nám říká poloha U na ose x spolu s polohou A v počátku. Znamená to, že osa x je osou úhlu CAB . Přímky AB a AC tedy musí procházet počátkem a mít opačnou směrnici (nazvěme ji k). Přímky b, c tedy musejí mít tvar:

$$b: kx + y = 0,$$

$$c: -kx + y = 0; k \in \mathbb{R}.$$

Poloha V v počátku nám navíc prozradí, čemu se rovná k . Víme, že pokud V splyne s vrcholem trojúhelníka, pak je u tohoto vrcholu pravý úhel. k se tak dá dohledat z podmínky kolmosti přímek b, c . Zde není třeba se pouštět do složitých počtů a vidíme, že $k = 1$ (popř. lze k dopočítat z podmínky $\vec{s}_b \cdot \vec{s}_c = 0$, kde $\vec{s}_b, \vec{s}_c$ jsou směrové vektory přímek b, c).

Ze vzdálenosti bodu od přímky zjistíme, že poloměr k_v je $\rho = \frac{u_1}{\sqrt{2}}$. Středová rovnice kružnice vepsané je tvaru:

$$k_v: (x - u_1)^2 - y^2 = \frac{u_1^2}{2}.$$

Řešení nalezneme vhodně zvolenou tečnou ke k_v , která protíná přímky b, c . Průsečíky tečny s přímkami b, c budou vrcholy B, C . Rozmyslete si s pomocí Obrázek 24: Ilustrace úlohy $A=V, U$, co musí dané tečny navíc splňovat. Čím bude kružnice k_v pro trojúhelník ABC , pokud to splněno nebude?


$$A[0; 0], U[u_1; 0], V[v_1; v_2]$$

Pozn. Umístění A do počátku a U na osu x nijak neubírá zadání na obecnosti. Vždy lze totiž situaci posunout tak, aby A bylo v počátku a následně otočit se středem otočení v A tak, aby U bylo na ose x .

U leží na ose x , proto stejně jako v předchozím příkladu je osa x osou úhlu CAB . Přímky c, b jsou tedy tvaru:

$$b: -kx + y = 0; k \in \mathbb{R}.$$

$$n:x + ky + c = 0,$$

81

Vrchol B tedy leží zároveň na přímkách:

$$c: kx + y = 0,$$

$$n: x + ky - (kv_2 + v_1) = 0.$$

Vyjádříme x z c a dosadíme do n . Zjistíme, že vrchol B bude mít souřadnice:

$$\underline{B \left[\frac{kv_2 + v_1}{1 - k^2} ; -k \frac{kv_2 + v_1}{1 - k^2} \right]}.$$

Stejným způsobem vyjádříme C . Víme, že leží na přímce b a současně na přímce kolmé k c procházející bodem V . Souřadnice vrcholu C tedy jsou:

$$\underline{C \left[\frac{v_1 - kv_2}{1 - k^2} ; k \frac{v_1 - kv_2}{1 - k^2} \right]}.$$

Získali jsme tedy obecné vyjádření vrcholů B, C pro dané umístění bodů A, U, V . Nyní můžeme pokračovat ke konkrétnímu zadání.

Konkrétní zadání

Nalezněte souřadnice vrcholů B a C , známe-li: $A[0; 0], U[10; 0], V[11; 2]$.

Naším úkolem bude nyní vyjádřit stranu a . Strana a je kolmá k přímce AV , proto můžeme vektor $\overrightarrow{AV}$ použít jako normálový vektor přímky a . Dále víme, že na této přímce leží bod B . Odtud získáváme:

$$a: 11x + 2y + c = 0,$$

$$11 \cdot \frac{2k + 11}{1 - k^2} - 2 \cdot k \frac{2k + 11}{1 - k^2} + c = 0,$$

$$a: 11x + 2y + \frac{4k^2 - 121}{1 - k^2} = 0.$$

Konečně přichází na řadu opět U . Ze vztahu $|Uc| = |Ua|$ dostáváme:

$$\frac{|ku_1 + 1u_2 + 0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\left| 11u_1 + 2u_2 + \frac{4k^2 - 121}{1 - k^2} \right|}{\sqrt{11^2 + 2^2}}.$$

Dosazením souřadnic zadaného U získáváme rovnost:

$$\frac{|10k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\left|110 + \frac{4k^2-121}{1-k^2}\right|}{5\sqrt{5}}.$$

Ted' už zbývá jen vyřešit, která k splňují tuto rovnost. Zde si vzhledem k náročnosti rovnice dovolím doporučit čtenáři software *WolframAlpha*. Pokud bychom rovnici chtěli dořešit, úpravy nás dovedou k pěkné rovnici šestého řádu:

$$1264k^6 - 38568k^4 + 10047k^2 - 121 = 0.$$

Provedením substituce $t = k^2$ získá kubickou rovnici:

$$1264t^3 - 38568t^2 + 10047t - 121 = 0.$$

A tu následně dořešíme pomocí *Cardanových vzorců*. Dostáváme řešení:

$$t \in \left\{\frac{1}{79}; \frac{1}{4}; \frac{121}{4}\right\} \Rightarrow k \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{79}}; \frac{1}{\sqrt{79}}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right\}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme použít pouze kladná k , neboť opačná znaménka pouze mění přímku b na c a přímku c na b .

Dosazením k do Vyjádření pro B a C získáváme 3 řešení.

(1) Pro $k = \frac{1}{\sqrt{79}}$:

$$\underline{B\left[\frac{869+2\sqrt{79}}{78}; -\frac{2+11\sqrt{79}}{78}\right], C\left[\frac{869-2\sqrt{79}}{78}; \frac{11\sqrt{79}-2}{78}\right]},$$

tj. přibližně: $B[11,37; -1,28], C[10,91; 1,23]$,

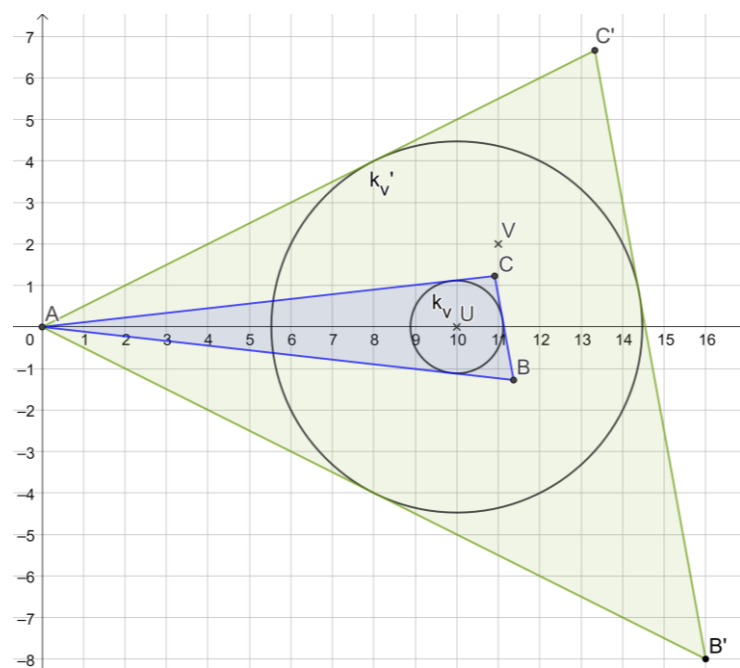
(2) pro $k = \frac{1}{2}$:

$$\underline{B'[16; -8], C'\left[\frac{40}{3}; \frac{20}{3}\right]},$$

(3) a pro $k = \frac{11}{2}$:

$$\underline{B''\left[\frac{88}{117}; \frac{-44}{117}\right], C''[0; 0]}.$$

Velmi zajímavé je, že úlohu řeší případy (1) a (2) (viz Obrázek 25: Řešení úlohy AUV), ale případ (3) nikoli. Zjišťujeme tak, že úloha *AUV* není jednoznačně určena.



Obrázek 25: Řešení úlohy AUV

Závěr

V práci se podařilo vymezené téma shrnout a přinesla více výsledků, než jsme původně doufali. Práce je do určité míry použitelná při výuce na střední škole, což bylo také jedním z vytyčených cílů.

Podařilo se odhalit důležité vlastnosti středů a několika základními způsoby dokázat jejich existenci synteticky i analyticky. Objasnili jsme konstrukční i početní způsoby, jak tyto středy trojúhelníka nalézt, jsou-li vrcholy zadány v souřadnicích. U všech tříbodových zadání jsme s výjimkou úlohy vrchol, střed kružnice vepsané, těžiště představili konstrukční i analytické řešení těchto úloh.

V druhé části byly představeny základní způsoby, jak konstrukčně i synteticky nalézt třetí vrchol trojúhelníka, známe-li dva z vrcholů a jeden střed trojúhelníka. Dále proběhla komplexní diskuze existenci a počtu řešení v závislosti na poloze středu vůči pevně daným dvěma vrcholům.

Za jeden z hlavních úspěchů práce považuji, že se podařilo nalézt řešení nejtěžších tříbodových úloh, typu vrchol, střed kružnice opsané a jeden ze zbylých středů. U úlohy vrchol, střed kružnice vepsané, střed kružnice opsané jsme našli početní, a dokonce velmi zajímavé konstrukční řešení. Překvapivým výsledkem je pak nejednoznačnost zadání vrchol, střed kružnice vepsané a ortocentrum, kdy úlohu řeší dvě různé kombinace vrcholů a vznikají tak dva různé trojúhelníky.

Téma této práce lze rozšířit hned několika směry. Mohli bychom řešit například úlohy zadané tříprvkovými kombinacemi vrcholů a středů v prostoru. To by s sebou přineslo pouze náročnější výpočty, neboť bychom měli zadány body o třech souřadnicích. Dále se nabízí podobné úlohy s jinými mnohoúhelníky.

Seznam použitých informačních zdrojů

BERAN, Filip. *Čtyři středy trojúhelníka - s pravítkem, čtverečkovaným papírem i GeoGebrou*. Praha, 2021.

BERAN, Filip. *Triangle in teaching geometry - few unusual problems*. Plzeň:

Vydavatelský servis 2020. Dostupné z:

https://2020.csgg.cz/files/Proceedings_CGG_2020_online.pdf

COXETER, H. S. M. a S. L. GREITZER. *Geometry Revisited*. Washington D.C.: Math. Assoc. Amer., 1967.

EULER, Leonhard. *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. 1767, 103-123.

Geogebra. *TriangleCenter Command* [online]. [cit. 2022-07-07]. Dostupné z:

https://wiki.geogebra.org/en/TriangleCenter_Command?fbclid=IwAR3O-M5HRVRvVmdW-OJzRWv2ts703RMTtcySSVXWy8GK5xGTNcz7Pw0TD0I

KIMBERLING, Clark. Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle. *Mathematics Magazine*. 1994, 67(3). ISSN 0025570X.

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5.

Math Open Reference. *Triangle Centers - Overview* [online]. 2011 [cit. 2022-07-07].

Dostupné z: <https://www.mathopenref.com/trianglecenters.html>

MKS. Geometrie trojúhelníka. *Matematický korespondenční seminář* [online]. 2017, 36. ročník, [cit. 2022-07-09]. Dostupné z: <https://prase.cz/archive/36/serial.pdf>

NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika*. 1989. ISBN 17-253-89.

PACHECO, Wilson a Tobias de Jesús Rosas SOTO. On orthocentric systems in Minkowski planes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*. 2014.

PECL, Jiří. *Určování trojúhelníků analytickými výpočty*. Brno, 2005.

PECL, Jiří. *Analytické výpočty trojúhelníků - tříbodové úlohy*. Brno, 2009.

- PECL, Jiří. *Analytické výpočty trojúhelníků*. Brno, 2012.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Dot. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-07-0.
- SANDIFER, Ed. *How Euler Did It: The Euler Line* [online]. MAA Online [cit. 2022-07-09]. Dostupné z: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2009-01.pdf>
- ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. 2. přeprac. vyd. Praha: Karolinum, 2004. ISBN 80-246-0814-6.
- TUŠKA, Jan. *Konstrukce trojúhelníka na základě zadaných bodů*. Praha, 2018.
- University of Evansville. *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle centers* [online]. 2022 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>
- Wolfram Alpha [online]. [cit. 2022-07-08]. Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/>

Seznam obrázků

Obrázek 1: Doplnění vektorů na rovnoběžník.....	22
Obrázek 2: Ilustrace využití normovaných vektorů k výpočtu U	26
Obrázek 3: Kružnice vepsaná a kružnice připsané.....	29
Obrázek 4: Správné a nesprávné pořadí středů na Eulerově přímce	30
Obrázek 5: Eulerova přímka.....	32
Obrázek 6: Řešení užitím stejnolehlosti	36
Obrázek 7: Množina T pro rovnostranné trojúhelníky ABC , kde $ AB = AC $	37
Obrázek 8: ABT mapa.....	40
Obrázek 9: Ilustrace věty	44
Obrázek 10: Ortocentrické systémy	46
Obrázek 11: Množina V rovnostranných trojúhelníků ABC , kde $AB = BC $	48
Obrázek 12: Porovnání křivky V rovnostranných trojúhelníků ABC a Descartesova listu.	49
Obrázek 13: Mapa ABV	51
Obrázek 14: Celočíselné trojúhelníky pro $V[3;-1]$, $k=2$	53
Obrázek 15: ABS rovnostranný.....	56
Obrázek 16: Množina trojúhelníků generovaných ko s poloměrem $\sqrt{5}$	58
Obrázek 17: Důležité prvky konstrukce úlohy ABU	61
Obrázek 18: Množina U rovnostranných trojúhelníků ABC	65
Obrázek 19: Mapa ABU	66
Obrázek 20: Podobné trojúhelníky AVT , $SaST$	71
Obrázek 21: Ponceletovo porisma.....	75
Obrázek 22: Ilustrace Švrčkovy věty.....	76
Obrázek 23: Konstrukce úlohy AUS	77
Obrázek 24: Ilustrace úlohy $A = V, U$	81
Obrázek 25: Řešení úlohy AUV	84