

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Katarína Kirešová

# **Diferenční a diferenciální rovnice v životním pojištění**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Ing. Pavel Kříž, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Chcela by som sa poďakovať svojmu vedúcemu Mgr. Ing. Pavlovi Křížovi, Ph.D. za vedenie práce, cenné pripomienky a precíznu kontrolu mojej práce. Vďaka patrí aj mojim rodičom, priateľovi Pavlovi a kamarátom za neustálu podporu počas štúdia. Špeciálne chcem poďakovať Peťovi za neskutočnú pomoc pri štúdiu, trpezlivosť pri vysvetľovaní a za všetko ostatné, vďaka čomu boli posledné roky zvládnuteľnejšie.

Názov práce: Diferenční a diferenciální rovnice v životním pojištění

Autor: Katarína Kirešová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Ing. Pavel Kříž, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Diplomová práca sa venuje výpočtu rezerv poistného životných poisnení, vyšším momentom a distribučnej funkcie budúcich platieb pomocou diferenčných a diferenciálnych rovníc. Na začiatku je zhromaždená základná teória stochastického procesu, poistného modelu, peňažného toku a rezervy. Následne sa prejde na odvodenie samotných rovníc, a to najprv všeobecne, a potom pre konkrétne štyri typy poisnenia. Ďalej sa uvedie pri každom type poisnenia aj výpočet poistného. Potom sa práca zaoberá výpočtom vyšších momentov a distribučných funkcií. Po odvodení vzorcov pre štyri typy poisnenia sa prejde na výpočet rezerv, smerodajných odchýlok a distribučných funkcií pre konkrétne hodnoty, a potom sa hodnoty porovnajú so simuláciou Monte Carlo. Záver obsahuje klady a zápory metódy v porovnaní so simuláciou.

Klíčové slova: diferenčné rovnice, diferenciálne rovnice, životné poisnenie, rezerva, Monte Carlo

Title: Difference and differential equations in life insurance

Author: Katarína Kirešová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Ing. Pavel Kříž, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The diploma thesis deals with the calculation of life insurance reserves, higher moments and the distribution function of future payments of reserves using difference and differential equations. In the beginning, the basic theory of a stochastic process, insurance model, cash flow, and reserve is summarized. After that, equations themselves are derived; first in general and then for four specific types of insurance. Subsequently, a calculation of premiums is presented for each type of insurance. The next two chapters deal with the calculation of higher moments and the distribution function. After deriving the formulas for four types of insurance, the reserves, standard deviations, and distribution functions are calculated for specific values and then they are compared with the Monte Carlo simulation. The conclusion contains pros and cons of the method compared to the simulation.

Keywords: difference equations, differential equations, life insurance, reserve, Monte Carlo

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Úvod do problematiky</b>	<b>4</b>
1.1 Stochastický proces . . . . .	4
1.2 Úroková miera . . . . .	6
1.3 Poistný model . . . . .	7
1.4 Peňažný tok . . . . .	8
1.5 Matematická rezerva . . . . .	10
<b>2 Diferenčné rovnice na výpočet rezervy</b>	<b>13</b>
2.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	13
2.2 Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	13
2.3 Dôchodkové poistenie . . . . .	14
2.4 Sirotský dôchodok . . . . .	15
<b>3 Diferenciálne rovnice na výpočet rezervy</b>	<b>16</b>
3.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	16
3.2 Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	18
3.3 Dôchodkové poistenie . . . . .	18
3.4 Sirotský dôchodok . . . . .	21
<b>4 Výpočet poistného</b>	<b>24</b>
4.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	24
4.1.1 Diskrétny čas . . . . .	24
4.1.2 Spojitý čas . . . . .	25
4.2 Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	25
4.2.1 Diskrétny čas . . . . .	25
4.2.2 Spojitý čas . . . . .	25
4.3 Dôchodkové poistenie . . . . .	26
4.3.1 Diskrétny čas . . . . .	26
4.3.2 Spojitý čas . . . . .	26
4.4 Sirotský dôchodok . . . . .	27
4.4.1 Diskrétny čas . . . . .	27
4.4.2 Spojitý čas . . . . .	27
<b>5 Rovnice pre vyššie momenty</b>	<b>28</b>
5.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	29
5.2 Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	29
5.3 Dôchodkové poistenie 2 osôb . . . . .	29
5.4 Sirotský dôchodok . . . . .	31
<b>6 Distribúcia rezervy</b>	<b>32</b>
6.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	33
6.2 Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	33
6.3 Dôchodkové poistenie 2 osôb . . . . .	33
6.4 Sirotský dôchodok . . . . .	34

<b>7</b>	<b>Príklady</b>	<b>35</b>
7.1	Prechodové sadzby . . . . .	35
7.2	Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	35
7.3	Kapitálové zmiešané poistenie . . . . .	37
7.4	Dôchodkové poistenie 2 osôb . . . . .	39
7.5	Sirotský dôchodok . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Simulácie pomocou metody Monte Carlo</b>	<b>44</b>
8.1	Kapitálové poistenie pre prípad smrti . . . . .	44
8.2	Kapitálove zmiešané poistenie . . . . .	46
8.3	Dôchodkové poistenie 2 osôb . . . . .	48
8.4	Sirotský dôchodok . . . . .	52
	<b>Záver</b>	<b>55</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>56</b>
	<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>57</b>
	<b>Zoznam použitých skratiek</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Prílohy</b>	<b>60</b>

# Úvod

Diplomová práca sa hlavne venuje vypočítaniu rezerv poistného životných poistení, ktoré ďalej budeme označovať už len ako rezervy. Najbežnejšie sa rezerva počíta ako rozdiel hodnoty budúcich záväzkov a hodnoty budúceho poistného (prospektívna metóda). V tejto práci rozoberám prístup založený na detailnej analýze stochastických procesov popisujúcich vývoj stavu poistených osôb a ich spojenie s výplatnou funkciou stanovujúcou výplatu pri rôznych udalostiach. Vďaka tomuto stochastickému prístupu dokážem zistiť nie len strednú hodnotu budúcich platieb (rezervu), ale aj ich rozptyl a distribučnú funkciu. Preto je tento prístup analytickou alternatívou k obľúbenej, avšak výpočetne náročnej metóde Monte Carlo.

V úvode tejto práce predstavím základný stochastický proces pre životné poistenie. Na to sú potrebné niektoré koncepty ako Markovove reťazce, prechodové sadzby, výplatné funkcie a ďalšie pojmy, ktoré sa používajú v predpokladoch na odvodenie diferencných a diferenciálnych rovníc. Z toho dôvodu všetky tieto pojmy uvediem a následne prejdem na samotné odvodenie, najprv diferencných rovníc.

Rovnako ako v Koller (2012) uvediem rovnice pre 3 typy poistenia. Konkrétne pre kapitálové poistenie pre prípade smrti, kapitálové zmiešané poistenie a dôchodkové poistenie dvoch osôb. Navyše, čo považujem za jeden z vlastných prínosov práce, odvodím rovnice pre sirotsky dôchodok na základe všeobecnej formule. Ďalej odvodím výpočet poistného pre spomínané štyri typy poistenia. Potom implementujem výpočet v konkrétnych príkladoch a porovnam výsledky so simuláciou Monte Carlo, ktorú som tiež sama implementovala. Navyše, nebudem skúmať len strednú hodnotu peňažného toku, ale aj vyššie momenty, dokonca distribučnú funkciu, ktorých hodnotu sa oplatí poznať pre bližšiu analýzu rizika poistenia.

Ďalej prejdem na odvodenie diferenciálnych rovníc a uvediem ich tvar pre 3 typy poistenia, ktoré explicitne vypočítam. Navyše, rovnako ako pri diskretnom čase, zo všeobecnej formule vyjadrím rovnice pre sirotsky dôchodok spolu s podrobným rozobratím jeho komponentov a uvediem taktiež výpočet poistného pre spomínané 4 typy poistenia.

Na záver zhrnieme rozdiely medzi diferencnými rovnicami a simuláciou. Príloha obsahuje zdrojové kódy všetkých výpočtov v programe Wolfram Mathematica.

# 1. Úvod do problematiky

V tejto práci bude hlavnou úlohou vypočítať rezervu pre rôzne typy životných poistení. Zameriame sa na poistenia, pri ktorých je poistná udalosť buď dožitie sa určitého veku alebo smrť. Budeme uvažovať model, kde poistený je v každom čase  $t$  v stave  $i$ , pričom môžu nastať 2 rôzne stavy - živý, mŕtvy (označíme  $*$ ,  $\dagger$ ), ktoré tvoria stavový priestor  $S$ . Stavov poisteného tvoria stochastický proces  $X$ , kde  $X_t(\omega) \in S$ . Primárnym zdrojom k tejto práci je Koller (2012).

## 1.1 Stochastický proces

**Definícia 1.** (*Stochastický proces*)

Označme  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravdepodobnostný priestor, ktorý spĺňa Kolmogorove axiomy. Ďalej nech  $(S, \mathcal{S})$  je merateľný priestor a  $T$  nech je podmnožinou  $\mathbb{R}$ . Súbor  $X_t : t \in T$  náhodných veličín

$$X_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (S, \mathcal{S}), \quad \omega \mapsto X_t(\omega)$$

sa nazýva stochastický proces na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  so stavovým priestorom  $S$ .

V celej práci budeme uvažovať, že tento stochastický proces je Markovov reťazec.

**Definícia 2.** (*Markovov reťazec*)

Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je stochastický proces na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  s konečným stavovým priestorom  $S$  a  $T \subset \mathbb{R}$ . Proces  $X$  sa nazýva Markovov reťazec, ak pre všetky

$$n \geq 1, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \in T, \quad i_1, i_2, \dots, i_{n+1} \in S,$$

kde

$$P[X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_n} = i_n] > 0$$

platí

$$P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_k, \forall k \geq n] = P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n].$$

Ďalej potrebujeme vedieť aká je pravdepodobnosť, že poistení zostane v určitom stave, prípadne zmení svoj stav. Tieto podmienené pravdepodobnosti budeme kvôli zjednodušeniu označovať  $p_{ij}(s, t)$ .

**Definícia 3.** *Pravdepodobnosť, že sa poistený dostane do stavu  $j$  v čase  $t$  za podmienky, že v čase  $s$  bol v stave  $i$  označíme  $p_{ij}(s, t)$ .*

Platí teda:

$$p_{ij}(s, t) = P[X_t = j | X_s = i],$$

kde  $s \leq t, i, j \in S$  a  $(X_t)_{t \in T}$  je stochastický proces na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Niekedy však namiesto podmienených pravdepodobností budeme poznať prechodové sadzby.

**Definícia 4.** (*Prechodové sadzby*)

Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je Markovov reťazec v spojitom čase s konečným stavovým priestorom  $S$ . Potom, ak nasledujúce limity existujú

$$\begin{aligned}\mu_i(t) &= \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \text{ pre všetky } i \in S, \\ \mu_{ij}(t) &= \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \text{ pre všetky } i \neq j \in S, \\ \mu_{ii}(t) &= -\mu_i(t) \text{ pre všetky } i \in S\end{aligned}$$

tak ich nazveme prechodovými sadzbami.

Podmienené pravdepodobnosti vieme na základe prechodových sadziieb vypočítať, ale len v prípade, že Markovov reťazec je regulárny.

**Definícia 5.** (*Regulárny Markovov reťazec*)

Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je Markovov reťazec v spojitom čase s konečným stavovým priestorom  $S$ . Potom  $(X_t)_{t \in T}$  je regulárny Markovov reťazec ak prechodné sadzby  $\mu_i(t)$  a  $\mu_{ij}(t)$  sú dobre definované a spojité vzhľadom ku  $t$ .

**Veta 1.** Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je regulárny Markovov reťazec v spojitom čase s konečným stavovým priestorom  $S$ . Potom platí:

1. Spätné diferenciálne rovnice

$$\frac{d}{ds} p_{ij}(s, t) = \mu_i(s) p_{ij}(s, t) - \sum_{k \neq i} \mu_{ik}(s) p_{kj}(s, t)$$

2. Dopredné diferenciálne rovnice

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(s, t) = -\mu_j(t) p_{ij}(s, t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) \mu_{kj}(s)$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 16. □

Niekedy sa nám bude hodiť poznať aj podmienenú pravdepodobnosť, že poistený zostane v časovom intervale  $[s, t]$  v stave  $j$ .

**Definícia 6.** Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je regulárny Markovov reťazec s konečným stavovým priestorom  $S$ . Potom definujeme podmienenú pravdepodobnosť, že poistený zostane v časovom intervale  $[s, t]$  v stave  $j$  ako

$$\bar{p}_{jj}(s, t) := P\left[\bigcap_{\xi \in [s, t]} X_\xi = j \mid X_s = j\right], \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}, s \leq t \text{ a } j \in S.$$

A ukážme si ešte ako pomocou Chapmanovo–Kolmogorovovej rovnice vypočítať podmienenú pravdepodobnosť  $p_{ik}(s, u)$ , ak poznáme pre všetky  $j \in S$  podmienené pravdepodobnosti  $p_{ij}(s, t)$  a  $p_{jk}(t, u)$ . Následne uvedieme maticovú verziu tejto rovnice.

**Veta 2.** *Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je Markovov reťazec. Pre  $s \leq t \leq u \in T$  a  $i, k \in S$ , také že  $P[X_s = i] > 0$  platí:*

$$p_{ik}(s, u) = \sum_{j \in S} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u),$$

$$P(s, u) = P(s, t) \times P(t, u).$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 11. □

## 1.2 Úroková miera

Ďalej sa zamerajme na úrokovú mieru. Záleží na jej hodnote, pretože v prípade, že zvolíme príliš vysokú príp. príliš nízku môže dôjsť k tomu, že poisťné bude príliš vysoké príp. nastane insolventnosť poisťovne. V tejto práci budeme pracovať so spojitým úročením, ktoré má rozdielnu intenzitu úročenia v čase  $t$ . Ukážeme si najprv (rovnako ako v Cipra (2010)) ako vypočítame budúcu hodnotu kapitálu pre zložené úročenie, z neho si potom odvodíme budúcu hodnotu pre spojitý úročenie s konštantnou intenzitou úročenie, potom s rozdielnou a nakoniec si odvodíme súčasnú hodnotu kapitálu pre spojitý úročenie s rozdielnou intenzitou úročenia.

Uvažujme najprv, že nás zaujíma budúca hodnota peňazí v čase  $t$  (po  $t$  úrokových obdobiach), ak sme v čase 0 mali k dispozícii sumu  $S_0$  pri zloženom úročení, čo znamená, že sa úrok pripisuje ku kapitálu každé úrokové obdobie (celkovo máme  $t$  období). Túto hodnotu vypočítame podľa vzorca:

$$S_t = S_0 \cdot (1 + i)^t,$$

kde  $i$  je úroková miera. My však chceme, aby sa počet pripisovaní úrokov za úrokové obdobie blížil k nekonečnu (spojité úročenie). Budúca hodnota sa v tomto prípade vypočíta nasledujúco:

$$S_t = S_0 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt},$$

kde  $i^{(m)}$  je nominálna úroková miera s pripisovaním úrokov  $m$  krát za úrokové obdobie, ktorá prislúcha efektívnej úrokovej miere  $i$ . Označme

$$i^{(\infty)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

úrokovú intenzitu. Potom budúcu hodnotu pri spojitom úročení môžeme ďalej upraviť

$$S_t = S_0 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = S_0 \cdot e^{\delta t}.$$

Ak sa úroková intenzita mení v čase, označíme jej hodnotu v čase  $t$  ako  $\delta(t)$ . Budúca hodnota kapitálu je v tomto prípade

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \delta(\tau) d\tau \right\} = S_s \cdot \exp \left\{ \int_s^t \delta(\tau) d\tau \right\},$$

a hodnotu peňazí v čase  $s$  môžeme vyjadriť ako

$$S_s = S_t \cdot \exp \left\{ - \int_s^t \delta(\tau) d\tau \right\}.$$

kde  $0 \leq s \leq t$  a  $S_s$  je suma peňazí, ktorú máme k dispozícii v čase  $s$ . V prípade, že chceme vypočítať súčasnú hodnotu, budeme používať diskontný faktor  $v(t)$  príp.  $v_t$  pre ktorý platí:

$$v(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \delta(\tau) d\tau \right\}, \quad v_t = \exp \left\{ - \int_t^{t+1} \delta(\tau) d\tau \right\}.$$

Pri počítaní poistného a rezervy budeme potrebovať aby  $\delta(t)$  bola funkciou ohraničených variácií. Znenie definície budeme čerpať z Cohn (1993).

**Definícia 7.** (*Funkcia ohraničených variácií*)

Nech  $I \subset \mathbb{R}$  je ohraničený interval. Pre funkciu  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$  je celková variácia na intervale  $I$  definovaná ako

$$V(f, I) = \sup \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)|,$$

kde supremum sa berie vzhľadom ku všetkým deleniám intervalu  $I$ , ktoré spĺňajú

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n.$$

Funkcia  $f$  sa nazýva funkciou ohraničených variácií na  $I$ , ak  $V(f, I)$  je konečné.

## 1.3 Poistný model

V tejto práci budeme pracovať s regulárnym poistným modelom, ktorého definícia obsahuje spomínaný Markovov reťazec a úrokové intenzity, ale aj výplatné funkcie, ktorým sa budeme teraz venovať. Výplatné funkcie nám slúžia na to, aby sme vedeli, aká suma sa poistenému v akom čase a v akom stave vypláca. Začneme definíciou výplatných funkcií, ak uvažujeme spojitý čas.

**Definícia 8.** (*Výplatné funkcie; spojitý čas*)

Sumu peňazí, ktorú poistený dostane v čase  $t$  (po odčítaní výdajov), ak v čase  $t$  zmení svoj stav z  $i$  na  $j$  označíme  $a_{ij}(t)$  a sumu peňazí, ktorú dostane do času  $t$  (opäť po odčítaní výdajov) v prípade, že do času  $t$  bol v stave  $i$  a v čase  $t$  naďalej ostane v tomto stave  $i$  označíme  $a_i(t)$ . Nazveme ich výplatné funkcie.

V diskretnom čase sa platby uskutočňujú len na začiatku alebo konci časového intervalu. Z tohto dôvodu definujeme nové funkcie  $a_i^{Pre}(t), a_{ij}^{Post}(t)$ .

**Definícia 9.** (Výplatné funkcie; diskretný čas)

Pre  $t \in \{0, 1, \dots\}$  označme  $a_i^{Pre}(t)$  sumu peňazí, ktorú poistený dostane v čase  $t$  (po odčítaní výdajov), ak v čase  $t$  je v stave  $i$  a  $a_{ij}^{Post}(t)$  sumu peňazí, ktorú dostane v čase  $t + 1$  (opäť po odčítaní výdajov) v prípade, že v čase  $t$  bol v stave  $i$  a v čase  $t + 1$  je v stave  $j$ .

Teraz už poznáme všetky potrebné definície na zavedenie pojmu regulárny poistný model.

**Definícia 10.** (Regulárny poistný model)

Regulárny poistný model obsahuje

1. regulárny Markovov reťazec  $(X_t)_{t \in T}$  so stavovým priestorom  $S$ ,
2. výplatné funkcie  $a_{ij}(t)$  a  $a_i(t)$ , pre  $i, j$  z  $S$ ,
3. zprava spojité úrokové intenzity  $\delta_i(t)$ , ktoré sú funkciami ohraničených variácií.

Pozn. Všimnime si, že výplatné funkcie môžu byť ľubovoľné, nepotrebujeme ich nijak obmedziť. Neskôr (pod definíciou 15) si ukážeme prečo.

## 1.4 Peňažný tok

Výplatné funkcie určujú peňažné toky, ktoré môžeme brať ako deterministické alebo stochastické. Vďaka nim potom odvodíme vzorce na výpočet rezervy. Keďže budeme chcieť vypočítať rezervy, ak uvažujeme spojité alebo diskretný čas, niektoré definície (tie, ktoré sa líšia) uvedieme pre oba tieto prípady.

**Definícia 11.** (Deterministická výplatná funkcia)

Deterministická výplatná funkcia  $A$  je funkciou  $A : T \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto A(t)$ , kde  $A$  je zprava spojitá a je funkciou ohraničených variácií,  $T \subset \mathbb{R}$ . Hodnota  $A(t)$  predstavuje sumu peňazí, ktorú zaplatil poisťovateľ poistenému do času  $t$ .

Hodnotu peňažného toku spočítame pomocou Riemannovo–Stieltjestovho integrálu, ktorý si najprv zadefinujeme rovnako ako v Johnsonbaugh (2002).

**Definícia 12.** (Riemann–Stieltjes integrál)

Nech  $f$  je reálna funkcie na intervale  $[a, b]$ ,  $A$  nech je zprava spojitá a nech je funkciou ohraničených variácií. Delenie intervalu  $[a, b]$  označme ako  $P$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\},$$

a množinu delení označme  $\mathcal{P}$ . Ďalej nech

$$|P| = \max_i |x_{i+1} - x_i|.$$

Potom Riemann–Stieltjes integrál

$$\int_a^b f(x) dA(x)$$

definujeme ako

$$\lim_{P \in \mathcal{P}; |P| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)[A(x_{i+1}) - A(x_i)],$$

kde  $c_i$  je ľubovoľné a nachádza sa v  $i$  – tom subintervale  $[x_i, x_{i+1}]$ .

**Definícia 13.** (Hodnota peňažného toku; spojité čas)

Nech  $A$  je deterministický peňažný tok a  $t \in \mathbb{R}$ . Potom hodnota peňažného toku  $A$  v čase  $t$  je

$$V(t, A) := \frac{1}{v(t)} \int_0^\infty v(\tau) dA(\tau),$$

kde  $v(t)$  je diskontný faktor pre ktorý platí:  $v(t) = \exp(-\int_0^t \delta(\tau) d\tau)$ .

Hodnotu budúceho peňažného toku môžeme vyjadriť ako

$$V^+(t, A) := V(t, A \times \chi_{(t, \infty)}).$$

V integrály v Definícii 13 predstavuje  $dA(\tau)$  infinitezimálny príjem/výdaj v čase tau a vynásobením  $v(\tau)$  ho diskontujeme k času 0. Keďže nás ale zaujíma hodnota v čase  $t$ , integrál ešte musíme vydeliť diskontným faktorom.

Obdobne bude vyzerat definícia pre hodnotu peňažného toku, ak uvažujeme diskrétny čas (definícia hodnoty budúceho peňažného toku sa pre diskrétny čas nezmení).

**Definícia 14.** (Hodnota peňažného toku; diskrétny čas)

Nech  $A$  je deterministický peňažný tok a  $t \in \mathbb{N}$ . Potom hodnota peňažného toku  $A$  v čase  $t$  je

$$V(t, A) := \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau=0}^{\infty} v(\tau) \Delta A(\tau),$$

kde  $\Delta A(\tau) = A(\tau + 1) - A(\tau)$ .

Peňažný tok môžeme definovať aj zo stochastického hľadiska. Potom definícia je nasledujúca.

**Definícia 15.** (Stochastický peňažný tok; spojité čas)

Stochastický peňažný tok poisťovne môžeme definovať nasledujúco:

$$\begin{aligned} dA_{ij}(t, \omega) &= a_{ij}(t) dN_{ij}(t, \omega), \\ dA_i(t, \omega) &= I_i(t, \omega) da_i(t), \\ dA(t, \omega) &= \sum_{i \in S} dA_i(t, \omega) + \sum_{(i, j) \in S \times S, i \neq j} dA_{ij}(t, \omega), \end{aligned}$$

kde  $I_j(t, \omega) = 1$ , ak  $X_t(\omega) = j$  a  $I_j(t, \omega) = 0$  inak,  $N_{ij}(t, \omega)$  značí počet skokov od  $i$  po  $j$  v časovom intervale  $(0, t)$ ,  $A_{ij}(t, \omega)$  je suma náhodných peňažných tokov, ktoré sú spojené s prechodom zo stavu  $i$  do stavu  $j$  do času  $t$  a podobne  $A_i(t, \omega)$  je suma peňažných tokov do času  $t$  spojená so zotrvaním v stave  $i$ .

To znamená, že zmena výplatnej funkcie je definovaná ako súčet sumy zmien výplatných funkcií, ak poistený zostane v danom stave a sumy zmien, ak zmení svoj stav. Ak poistený zostane v stave  $i$  a  $a_i(t)$  sa zmení, indikátor  $I_i(t, \omega)$  zaručí, že sa aj výplatná funkcia  $A_i(t, \omega)$  zmení o danú sumu. Ak poistený zmení svoj stav a na základe toho sa mu vyplatí suma  $a_{ij}(t)$ , tak počet skokov  $N_{ij}(t, \omega)$  sa zvýši o jedna a teda výplatná funkcia  $A_{ij}(t, \omega)$  sa taktiež zmení o danú sumu.

*Pozn.* Vidíme, že počet skokov je konečné číslo a že  $I_i(t, \omega)$  je buď 0 alebo 1, takže buď budeme výplatnú funkciu násobiť konečným číslom alebo budeme zmenu výplatnej funkcie násobiť najviac 1 z čoho vyplýva, že naozaj nepotrebujeme omedzenia výplatných funkcií  $a_{ij}(t)$  a  $a_i(t)$ .

Definícia peňažného toku pre diskretný čas bude trochu iná, keďže  $a_i^{Pre}(t)$  vyjadruje platbu v čase  $t$ , ale  $a_i(t)$  je suma platieb do času  $t$ .

**Definícia 16.** (*Stochastický peňažný tok; diskretný čas*)

*Stochastický peňažný tok pre diskretný Markovov model môžeme definovať ako:*

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij}(t, \omega) &= a_{ij}^{Post}(t) \Delta N_{ij}(t, \omega), \\ \Delta A_i(t, \omega) &= I_i(t, \omega) a_i^{Pre}(t), \\ \Delta A(t, \omega) &= \sum_{i \in S} \Delta A_i(t, \omega) + \sum_{(i,j) \in S \times S} \Delta A_{ij}(t, \omega),\end{aligned}$$

kde platby  $a_i^{Pre}(t)$  sa uskutočňujú na začiatku intervalu  $t$ , platby  $a_{ij}^{Post}(t)$  na konci intervalu,  $\Delta A_{ij}(t, \omega) = A_{ij}(t+1, \omega) - A_{ij}(t, \omega)$  a podobne  $\Delta A_i(t, \omega) = A_i(t+1, \omega) - A_i(t, \omega)$ .

## 1.5 Matematická rezerva

Teraz, keďže už poznáme definíciu peňažného toku, môžeme na základe nej definovať matematickú rezervu. Existuje mnoho scenárov, aké peňažné toky sa budú vyplácať poistenému, pretože nevieme kedy dôjde k poistnej udalosti. Preto matematickú rezervu budeme definovať ako strednú hodnotu týchto tokov. Navyše, rozlíšime situácie, kedy poistený zostane v jednom stave počas celého časového intervalu  $T$  a kedy zmení svoj stav. Z tohto dôvodu budeme integrovať podľa výplatnej funkcie len pre určitý stav, príp. zmenu stavu. V obidvoch prípadoch budeme predpokladať, že vieme, že poistený bol v čase  $t$  v stave  $j$ .

**Definícia 17.** (*Matematická rezerva, spojitý čas*)

*Matematickú rezervu pre poistenie, kde poistený zotrúva v stave  $g \in S$  v časovom intervale  $T \in \sigma(\mathbb{R})$  za podmienky, že  $X_t = j$  môžeme vyjadriť ako*

$$V_j(t, A_{gT}) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) dA_g(\tau) | X_t = j \right].$$

*Podobne pre všetky prechody zo stavu  $g \in S$  do stavu  $h \in S$ , počas časového intervalu  $T$  platí*

$$V_j(t, A_{ghT}) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) dA_{gh}(\tau) | X_t = j \right].$$

Pre  $T = \mathbb{R}$  budeme používať značenie  $V_j(t, A_g)$  resp.  $V_j(t, A_{gh})$ .

Celková matematická rezerva pre stav  $j$  je potom rovná

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in S} V_j(t, A_g) + \sum_{g, h \in S, g \neq h} V_j(t, A_{gh}).$$

**Definícia 18.** (Matematická rezerva; diskretný čas)

Rezerva pre diskretný čas pre stav  $g \in S$  je definovaná ako

$$V_j(t, A_{gT}) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \in T} v(\tau) \Delta A_g(\tau) | X_t = j \right].$$

Podobne pre prechody zo stavu  $g \in S$  do stavu  $h \in S$  platí

$$V_j(t, A_{ghT}) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \in T} v(\tau + 1) \Delta A_{gh}(\tau) | X_t = j \right].$$

Celková matematická rezerva pre stav  $j$  je potom rovná

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in S} V_j(t, A_g) + \sum_{g, h \in S, g \neq h} V_j(t, A_{gh}).$$

Všimnime si, že hlavná zmena v definovaní rezervy pre diskretný model v porovnaní so spojitým je tá, že sme difereciály nahradili diferenciami a integrál sumou.

Na výpočet integrálov v Definícii 17 nám pomôže nasledujúca veta, ktorá hovorí, ako vypočítame strednú hodnotu peňažných tokov, ktoré súvisia so zmenou stavu poisteného, ak vieme, že bol v určitom čase  $s$  v stave  $i$ , pritom nás zaujíma časový interval od času  $s$  do nekonečna, prípadne jeho podmnožina. Druhá časť vety hovorí, ako vypočítame strednú hodnotu peňažných tokov, ktorá ale súvisí so zostatím v určitom stave, ak vieme, že poistený bol opäť v spomínanom čase  $s$  v stave  $i$ . Vety môžeme použiť pre spojitý čas. Neskôr (pod Lemmou 4) poznamenáme, čo by sa zmenilo, ak by sme uvažovali diskretný čas.

**Veta 3.** *Nech  $(X_t)_{t \in T}$  je regulárny Markovov reťazec na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ďalej nech  $i, j, k \in S, s < t$  a  $T \in \sigma(\mathbb{R})$ , kde  $T \subset [s, \infty]$ . Potom platí:*

1. Pre  $a \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E} \left[ \int_T a(\tau) dN_{jk}(\tau) | X_s = i \right] = \int_T a(\tau) p_{ij}(s, \tau) \mu_{jk}(\tau) d\tau.$$

2. Ak  $A$  je funkciou ohraničených variácií, potom

$$\mathbb{E} \left[ \int_T I_j(\tau) dA(\tau) | X_s = i \right] = \int_T p_{ij}(s, \tau) dA\tau.$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 40. □

Ďalej, na základe budúceho peňažného toku, vieme definovať perspektívnu rezervu. Teda rezervu pre časový interval  $(t, \infty)$ , ak vieme, že poistený bol v čase  $t$  v stave  $j$ .

**Definícia 19.** (*Perspektívna rezerva; spojité čas*)

*Perspektívnu rezervu pre poistenie za podmienky, že poistný bol v čase  $t$  v stave  $j$ , ak uvažujeme spojité čas, môžeme vyjadriť ako*

$$\begin{aligned} V_j^+(t) &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \int_t^\infty v(\tau) dA(\tau) | X_t = j \right]. \\ &= \mathbb{E} [V^+(t, A) | X_t = j]. \end{aligned}$$

*Navyše pre zprehľadnenie výpočtu rezervy ešte definujeme diskontovanú perspektívnu rezervu (pre regulárny poistný model)*

$$W_j^+(t) := v(t)V_j^+(t).$$

Obdobne získame definíciu pre diskrétny čas.

**Definícia 20.** (*Perspektívna rezerva; diskrétny čas*)

*Perspektívnu rezervu pre poistenie za podmienky, že poistný bol v čase  $t$  v stave  $j$ , ak uvažujeme diskrétny čas, môžeme vyjadriť ako*

$$V_j^+(t) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau=t}^\infty v(\tau) \Delta A(\tau) | X_t = j \right].$$

Teraz si ukážeme ako túto diskontovanú perspektívnu rezervu  $W_j^+(t)$  vypočítať, ak uvažujeme spojité čas. Uvedieme však, aké zmeny by nastali v prípade diskrétného času.

**Lemma 4.** *Nech  $(X_t)_{t \in T}$ ,  $a_{ij}$ ,  $a_i$  a  $\delta_t$  tvoria regulárny poistný model a nech  $j \in S$ ,  $t < u$  a  $(X_t)_{t \in T}$  Potom platí:*

$$\begin{aligned} W_j^+(t) &= \sum_{g \in S} p_{jg}(t, u) W_g^+(u) \\ &+ \int_{(t, u]} v(\tau) \sum_{g \in S} p_{jg}(t, \tau) \left\{ da_g(\tau) + \sum_{S \ni h \neq g} a_{gh}(\tau) \mu_{gh}(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 44. □

*Pozn.* Pre diskrétny model by sme vedeli obmeniť aj Vetu 3 a Lemmu 4, avšak museli by sme navyše zmeniť intenzity prechodu, pretože tie pre diskrétny model nie sú definované ( $\mu_{jk}(\tau)$  by sme teda zmenili na  $p_{jk}(\tau, \tau + 1)$ ).

## 2. Diferenčné rovnice na výpočet rezervy

V tejto časti budeme uvažovať diskretný Markovov model (to znamená, že ak máme proces  $(X_t)_{t \in T}$ , tak  $T$  je podmnožina  $\mathbb{N}_0$ ) a predstavíme si Thieleho diferenčné rovnice, ktoré nám budú slúžiť na výpočet rezervy.

**Veta 5.** (Thieleho diferenčné rovnice) *Rezerva pre diskretný Markovov model splňa nasledujúcu rovnicu:*

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} v_t p_{ij}(t, t+1) \{a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1)\}.$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 44. □

Teraz si uvedme ako vyzerajú Thieleho diferenčné rovnice pre konkrétne typy poistenia. Začneme poisteniami, pri ktorých sa vypláca jednorázová čiastka a prejdeme na dôchodky, pri ktorých oprávnená osoba získava penziu počas dohodnutého obdobia.

### 2.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

V prípade tohto poistenia sa vyplatí poistná čiastka oprávnenej osobe ak poistený zomrie pred dosiahnutím určitého vopred daného veku (označíme ako  $s$ ). V prípade celoživotného poistenia sa vypláca poistné plnenie, nehladiac na to v akom veku poistení zomrie. Uvažujme, že poistený má pri uzatváraní poistenia  $x$  rokov, zápornú výšku poistného v čase  $t$ , ktorú poistený platí na začiatku obdobia, označme  $a_*^{Pre}(t)$  a výšku poistného plnenia, ktoré sa vypláca na konci obdobia, označme  $a_{* \dagger}^{Post}(t)$ . Ďalej vieme, že môžu nastať 2 stavy  $(*, \dagger)$ . V prípade, že poistený je v stave  $\dagger$ , rezerva bude nulová. Ak je poistený v stave  $*$  a dosiahne vek  $s$ , poisťovňa mu už nevyplatí nič, a teda rezerva v čase  $s - x$  je taktiež nulová. Tympádom nás zaujíma len rezerva  $V_*^+(t)$ , ktorej hodnotu vypočítame podľa vzorcov (ak označíme  $p_{* \dagger}(t, t+1) = q(x+t+1)$ ):

$$V_*^+(t) = a_*^{Pre}(t) + v_t (1 - q(x+t+1)) V_*^+(t+1) + v_t q(x+t+1) a_{* \dagger}^{Post}(t), \quad (2.1)$$

$$V_*^+(s-x) = 0. \quad (2.2)$$

### 2.2 Kapitálové zmiešané poistenie

Pri kapitálovom zmiešanom poistení sa poistné plnenie vypláca poistenému, ak sa dožije určitého vopred stanoveného veku (označíme ako  $g$ ) alebo sa vyplatí

oprávnenej osobe, ak zomrie do daného veku (označíme ako  $a_{*†}^{Post}(t)$ ), pritom čiastky, ktoré sa vyplácajú sa môžu líšiť. Pre kapitálové zmiešané poistenie dostaneme rovnaké diferenčné rovnice ako pri kapitálovom poistení pre prípad smrti, akurát sa zmení ohraničujúca podmienka a  $a_{*†}^{Post}(s-x)$  už nebude nulové v čase  $s-x$ , bude rovné čiastke  $g$ . Teda

$$V_*^+(t) = a_*^{Pre}(t) + v_t (1 - q(x+t+1)) V_*^+(t+1) + v_t q(x+t+1) a_{*†}^{Post}(t), \quad (2.3)$$

$$V_*^+(s-x) = g. \quad (2.4)$$

## 2.3 Dôchodkové poistenie

Pri dôchodkovom poistení dvoch osôb sa vopred stanoví suma, ktorú bude pravidelne dostávať jeden z nich v prípade, že druhý zomrie a ktorú budú dostávať obaja, ak žijú. Pre rôzne časy  $t$  sa suma môže líšiť. Predpokladajme opäť, že poistné sa platí na začiatku obdobia a poistné plnenie sa vypláca na konci. Navyše uvažujme, že životy manželov sú nezávislé. Ďalej označme vek manžela pri uzatváraní zmlúvy ako  $x_1$ , vek manželky ako  $x_2$  a príslušné pravdepodobnosti úmrtia ako  $q_M$  a  $q_Z$ . Ďalej predpokladajme, že  $x_1 > x_2$ , označme maximálny možný vek dožitia ako  $\omega$  a koncové podmienky zvolme pre každý typ rezervy rovnaké.

Na začiatok si, pre zjednodušenie, označme výšku dôchodku, ktorú poistení dostanú, ak ostanenú živí ako  $a_{**}^{Post}$ , výšku dôchodku, ak zmenia svoj stav z  $**$  na  $†*$ , prípadne zostanú v stave  $†*$ , ako  $a_{†*}^{Post}$ , obdobne pre  $a_{*†}^{Post}$  a zápornú výšku poistného, ktorú platia obaja, ak žijú ako  $a_{**}^{Pre}$ , obdobne pre  $a_{*†}^{Pre}$ ,  $a_{†*}^{Pre}$ .

Teraz si rozoberme všetky tieto výplatné funkcie. Ak žijú obaja a majú pred dosiahnutím určitého veku  $s$ , budú platiť poistné, ktorého záporná výška je vyjadrená ako  $a_{**}^{Pre}$ ,  $a_{**}^{Post}$  bude nulové. Ak jeden z nich dovŕši vopred stanovený vek,  $a_{**}^{Post}$  bude rovné dôchodku, ktorý dostáva jeden z nich, ale  $a_{**}^{Pre}$  nebude stále nulové, pretože druhý z dvojice ho bude musieť platiť. V prípade, že obaja dovŕšia dôchodkový vek,  $a_{**}^{Pre}$  bude nulové a  $a_{**}^{Post}$  bude rovné dôchodku, ktorý dostávajú obaja. V prípade smrti jedného z dvojice,  $a_{*†}^{Pre}$  alebo  $a_{†*}^{Pre}$  bude nulové (neplatia už nič) a  $a_{*†}^{Post}$  alebo  $a_{†*}^{Post}$  (podľa toho, kto z dvojice je nažive) bude rovné čiastke, ktorá sa vypláca žijúcemu z dvojice v prípade smrti toho druhého. Na základe týchto úvah môžeme nulové členy zo vzorca vylúčiť a vyjdu nám nasledujúce rovnice:

$$\begin{aligned}
V_{**}^+(t) &= a_{**}^{Pre}(t) + v_t \left(1 - q_Z(x_2 + t + 1)\right) \left(1 - q_M(x_1 + t + 1)\right) \\
&\quad \cdot (a_{**}^{Post}(t) + V_{**}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_M(x_1 + t + 1) \left(1 - q_Z(x_2 + t + 1)\right) (a_{\dagger*}^{Post}(t) + V_{\dagger*}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_Z(x_2 + t + 1) \left(1 - q_M(x_1 + t + 1)\right) (a_{*\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger}^+(t + 1)), \\
V_{**}^+(\omega - x_2) &= 0. \\
V_{\dagger*}^+(t) &= v_t \left(1 - q_Z(x_2 + t + 1)\right) (a_{\dagger*}^{Post}(t) + V_{\dagger*}^+(t + 1)), \\
V_{\dagger*}^+(\omega - x_2) &= 0. \\
V_{*\dagger}^+(t) &= v_t \left(1 - q_M(x_1 + t + 1)\right) (a_{*\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger}^+(t + 1)), \\
V_{*\dagger}^+(\omega - x_2) &= 0.
\end{aligned}$$

## 2.4 Sirotský dôchodok

Ďalším príkladom je dôchodkové poistenie dieťaťa pre prípad smrti rodiča, ktorý zjednodušene budeme označovať sirotský dôchodok, kde v prípade, že zomrie jeden z rodičov sa dieťaťu vypláca dôchodok až do dovŕšenia 26 rokov. Pre prehľadnosť označme vek dieťaťa  $x_1$ , vek otca  $x_2$  a vek matky  $x_3$  a príslušné pravdepodobnosti úmrtia  $q_1, q_2, q_3$ . Zápornú výšku poistného, ktorú platia, ak všetci žijú, označíme ako  $a_{***}^{Pre}$ , výšku dôchodku, ak je otec po smrti označíme ako  $a_{*\dagger*}^{Post}$ , obdobne výšku dôchodku, ak je po smrti matka  $a_{**\dagger}^{Post}$  a ak sú po smrti obaja  $a_{*\dagger\dagger}^{Post}$ . Potom dostaneme:

$$\begin{aligned}
V_{***}^+(t) &= a_{***}^{Pre}(t) + v_t \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) \left(1 - q_2(x_2 + t + 1)\right) \\
&\quad \cdot \left(1 - q_3(x_3 + t + 1)\right) V_{***}^+(t + 1) \\
&\quad + v_t q_2(x_2 + t + 1) \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) \left(1 - q_3(x_3 + t + 1)\right) \\
&\quad \cdot (a_{*\dagger*}^{Post}(t) + V_{*\dagger*}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_3(x_3 + t + 1) \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) \left(1 - q_2(x_2 + t + 1)\right) \\
&\quad \cdot (a_{**\dagger}^{Post}(t) + V_{**\dagger}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_3(x_3 + t + 1) \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) q_2(x_2 + t + 1) \\
&\quad \cdot (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1)) \\
V_{*\dagger*}^+(t) &= v_t \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) \left(1 - q_3(x_3 + t + 1)\right) (a_{*\dagger*}^{Post}(t) + V_{*\dagger*}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_3(x_3 + t + 1) \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1)), \\
V_{**\dagger}^+(t) &= v_t \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) \left(1 - q_2(x_2 + t + 1)\right) (a_{**\dagger}^{Post}(t) + V_{**\dagger}^+(t + 1)) \\
&\quad + v_t q_2(x_2 + t + 1) \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1)), \\
V_{*\dagger\dagger}^+(t) &= v_t \left(1 - q_1(x_1 + t + 1)\right) (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t) + V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1)),
\end{aligned}$$

s ohraničujúcimi podmienkami

$$V_{***}^+(26 - x_1) = V_{*\dagger*}^+(26 - x_1) = V_{**\dagger}^+(26 - x_1) = V_{*\dagger\dagger}^+(26 - x_1) = 0.$$

### 3. Diferenciálne rovnice na výpočet rezervy

V tejto časti si predstavíme Thieleho diferenciálne rovnice pomocou ktorých vypočítame rezervu a poistné pre konkrétke typy životného poistenia.

**Veta 6.** (Thieleho diferenciálne rovnice) Nech  $(X_t)_{t \in T}$ ,  $a_{ij}$ ,  $a_i$  a  $\delta_t$  tvoria regulárny poistný model a nech  $t < u$ . Ďalej nech  $da_i(t)$  s hustotou  $\tilde{a}_i(t)$  je absolútne spojitá vzhľadom k Lebesgueovej miere  $\lambda$ . Potom, ak predpokladáme detemernistickú úrokovú intenzitu, platí:

1.  $W_g^+(t)$  je spojité pre všetky  $g \in S$ .
2. 
$$\frac{\partial}{\partial t} W_j^+(t) = -v(t) \left( \tilde{a}_j(t) + \sum_{j \neq g \in S} \mu_{jg}(t) a_{jg}(t) \right) + \mu_j(t) W_j^+(t) - \sum_{j \neq g \in S} \mu_{jg}(t) W_g^+(t).$$
3. 
$$V_j^+(t) = \frac{1}{v(t)} \left[ \int_t^u v(\tau) \bar{p}_{jj}(t, \tau) \left( \tilde{a}_j(\tau) + \sum_{j \neq g \in S} \mu_{jg}(\tau) (a_{jg}(\tau) + V_g^+(\tau)) \right) d\tau + v(u) \bar{p}_{jj}(t, u) V_j^+(u^-) \right].$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v Koller (2012) na strane 54. □

Podme si teraz rozobrať jednotlivé komponenty diskontovanej rezervy (bod 2 z predchádzajúcej vety). Uvažujme časový interval  $[t, u]$ , pričom vieme, že poistený bol v čase  $t$  v stave  $j$ . Potom poistený v čase  $\tau \in [t, u]$  buď ostane v stave  $j$  a vyplátí sa mu  $\tilde{a}_j(\tau)$  (a my musíme vytvoriť rezervu v tejto výške) alebo zmení svoj stav z  $j$  na  $g \in S$ . V tomto prípade nám vznikne rezerva pre stav  $g$  ( $\mu_{jg}(\tau) V_g^+(\tau)$ ) a rezerva pre vyplatie poistného plnenia  $\mu_{jg}(\tau) a_{jg}(\tau)$ . Posledná možnosť je, že poistený ostane v celom časovom intervale  $[t, u]$  v stave  $j$  a rezerve pre tento prípad odpovedá posledný sčítanec vo Vete 6.

Ďalej nás zaujíma ako vyzerajú vzorce pre diskontovanú prespektívnu rezervu pre typy poistenia, ktoré sme už predstavili v diskretnom čase.

#### 3.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

Začneme kapitálovým poistením pre prípad smrti a označíme sumu poistného plnenia  $b$ , intenzitu poistného  $c$ , diskontovanú rezervu v čase  $t$  pre stav, v ktorom poistený žije (resp. je po smrti) ako  $W_*^+(t)$  (resp.  $W_\dagger^+(t)$ ), prechodovú sadzbu zo stavu  $*$  na stav  $\dagger$  v čase  $t$ , kde poistený má  $x + t$  rokov ako  $\mu_{*\dagger}(x + t)$ , podobne prechodovú sadzbu pre opustenie stavu  $*$  ako  $\mu_*(x + t)$ . Všimnime si, že tieto

dve prechodové sadzby sa rovnajú, keďže máme len 2 stavy a opustenie stavu  $*$  vlastne znamená zmenu stavu  $*$  na  $\dagger$ , preto budeme používať značenie  $\mu(x+t)$ . Ostatné značenie zostane rovnaké ako pri diskretnom čase ( $x$  je vek poisteného pri uzatváraní zmlúvy,  $s$  je vek do ktorého sa poistné plnenie vypláca (v prípade celoživotného poistenia  $s = 105$ )).

Pre  $\tilde{a}_*(t)$  a  $a_{*\dagger}(t)$  potom dostaneme:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_*(t) &= -c \\ a_{*\dagger}(t) &= b\end{aligned}$$

Následne diferenciálne rovnice diskontovanej rezervy (2. vzorec vo Vete 6), ak uvažujeme spojité úročenie, majú tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W_*^+(t) &= v(t)(c - b\mu(x+t)) + \mu(x+t)W_*^+(t) - \mu(x+t)W_{\dagger}^+(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}W_{\dagger}^+(t) &= 0,\end{aligned}$$

kde  $W_*^+(s-x) = W_{\dagger}^+(s-x) = 0$ .

Vidíme, že  $W_{\dagger}^+(t) = 0$  pre všetky  $t$  a teda našou úlohou bude dopočítať  $W_*^+(t)$ . Diferenciálnu rovnicu si prepíšeme do tvaru:

$$W_*^{+\prime}(t) - \mu(x+t)W_*^+(t) = v(t)(c - b\mu(x+t))$$

a najprv nájdeme, použitím separácie premenných, komplementárne riešenie homogénnej rovnice.

$$\begin{aligned}W_{*C}^{+\prime}(t) - \mu(x+t)W_{*C}^+(t) &= 0 \\ \frac{dW_{*C}^+(t)}{dt} &= \mu(x+t)W_{*C}^+(t) \\ \frac{dW_{*C}^+(t)}{W_{*C}^+(t)} &= \mu(x+t)dt \\ \int \frac{1}{W_{*C}^+(t)}dW_{*C}^+(t) &= \int \mu(x+t)dt \\ \ln |W_{*C}^+(t)| &= \int \mu(x+t)dt + C \\ W_{*C}^+(t) &= C \exp\left(\int \mu(x+t)dt\right)\end{aligned}$$

Teraz podľa variácie konštant, riešenie pôvodnej rovnice získame vynásobením komplementárneho riešenia neznámou funkciou  $C(t)$ , teda

$$W_*^+(t) = C(t) \exp\left(\int \mu(x+t)dt\right).$$

Potom dosadíme  $W_*^+(t)$  do pôvodnej rovnice, aby sme dostali vyjadrenie pre  $C(t)$

$$\begin{aligned} C'(t) \exp\left(\int \mu(x+t)dt\right) + C(t) \exp\left(\int \mu(x+t)dt\right) \mu(x+t) \\ - \mu(x+t)C(t) \exp\left(\int \mu(x+t)dt\right) = v(t)(c - b\mu(x+t)) \\ C'(t) = \frac{v(t)(c - b\mu(x+t))}{\exp\left(\int \mu(x+t)dt\right)} \\ C(t) = \int_0^t v(q)(c - b\mu(x+q)) \exp\left(-\int \mu(x+q)dq\right) dq \end{aligned}$$

a teda riešenie diferenciálnej rovnice je rovné:

$$\begin{aligned} W_*^+(t) = & \left( \int_0^t v(q)(c - b\mu(x+q)) \exp\left(-\int \mu(x+q)dq\right) dq + C \right) \\ & \cdot \exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=t}. \end{aligned}$$

Vďaka ohraničujúcim podmienkam potom vieme vyjadriť konštantu  $C$

$$\begin{aligned} 0 = W_*^+(s-x) &= \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) \exp\left(-\int \mu(x+q)dq\right) dq + C \\ C &= - \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) \exp\left(-\int \mu(x+q)dq\right) dq. \end{aligned}$$

## 3.2 Kapitálové zmiešané poistenie

V tomto prípade majú diferenciálne rovnice rovnaký tvar ako v predchádzajúcom prípade, jediné, čo sa líši sú ohraničujúce podmienky:

$$W_*^+(s-x) = g \cdot v(s-x) \quad a \quad W_{\dagger}^+(s-x) = 0,$$

kde  $g$  je opäť suma, ktorá sa vypláti poistenému, ak sa dožije  $s$  rokov,  $x$  je vek poisteného pri uzatváraní poistenia.

V prípade kapitálového zmiešaného poistenia bude riešenie diferenciálnych rovníc rovnaké ako v predchádzajúcom prípade, zmenia sa len ohraničujúce hodnoty a teda výpočet konštanty.

$$\begin{aligned} g \cdot v(s-x) = W_*^+(s-x) &= \left( \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq + C \right) \\ & \cdot \exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=s-x}. \\ C &= \frac{g \cdot v(s-x)}{\exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=s-x}} - \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq. \end{aligned}$$

## 3.3 Dôchodkové poistenie

Teraz uvažujme poistenie 2 osôb - manžela a manželky, kde výšku penzie v čase  $t$ , ktorú dostáva žijúca manželka, ak je manžel po smrti, označíme  $a_{\dagger*}(t)$ ,

výšku penzie v čase  $t$ , ktorú dostáva žijúci manžel v prípade, že je manželka po smrti  $a_{*\dagger}(t)$  a výšku penzie (po odčítaní poisťného) v čase  $t$  v prípade ak obidvaja žijú označíme  $\tilde{a}_{**}(t)$ . Navyše nech životy manželov sú nezávislé. Keďže

$$\begin{aligned} p_{*\dagger}^{manžel}(t, t + \Delta y) &= \mu_M(t)\Delta y + o(\Delta y) \\ p_{*\dagger}^{manželka}(t, t + \Delta y) &= \mu_Z(t)\Delta y + o(\Delta y) \end{aligned}$$

tak vďaka nezávislosti dostaneme pre prechodovú sadzbu ich spoločného úmrtia:

$$\lim_{\Delta y \searrow 0} \frac{(\mu_M(x_1 + t)\Delta y + o(\Delta y))(\mu_Z(x_2 + t)\Delta y + o(\Delta y))}{\Delta y} = 0$$

a teda opustenie stavu  $**$  nastane práve vtedy, ak ho opustí manžel alebo manželka (opustenie naraz má nulovú intenzitu). Preto prechodová sadza pre opustenie stavu  $**$  v čase  $t$  je rovná:

$$\mu_M(x_1 + t) + \mu_Z(x_2 + t)$$

a potom diferenciálne rovnice majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_{**}^+(t) &= -v(t)\tilde{a}_{**}(t) + (\mu_M(x_1 + t) + \mu_Z(x_2 + t))W_{**}^+(t) \\ &\quad - \mu_M(x_1 + t)W_{\dagger*}^+(t) - \mu_Z(x_2 + t)W_{*\dagger}^+(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} W_{\dagger*}^+(t) &= -v(t)a_{*\dagger}(t) + \mu_M(x_1 + t)W_{\dagger*}^+(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} W_{*\dagger}^+(t) &= -v(t)a_{\dagger*}(t) + \mu_Z(x_2 + t)W_{*\dagger}^+(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} W_{\dagger\dagger}^+(t) &= 0 \end{aligned}$$

s ohraničujúcimi podmienkami ( $\omega = 105$  je maximálne vek, ktorého sa osoba môže dožiť a ak predpokladáme, že  $x_1 > x_2$ )

$$W_{*\dagger}^+(\omega - x_2) = W_{\dagger\dagger}^+(\omega - x_2) = W_{**}^+(\omega - x_2) = W_{\dagger*}^+(\omega - x_2) = 0.$$

Všimnime si, že posledné dve nenulové rovnice vieme vypočítat samostatne a výsledok dosadiť do prvej. Najprv si rovnice prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} W_{*\dagger}^+'(t) - \mu_M(x_1 + t)W_{*\dagger}^+(t) &= -v(t)a_{*\dagger}(t) \\ W_{\dagger*}^+'(t) - \mu_Z(x_2 + t)W_{\dagger*}^+(t) &= -v(t)a_{\dagger*}(t) \end{aligned}$$

a obdobne ako pri kapitálovom poistení pre prípad smrti, pomocou separácie premenných, dostaneme najprv komplementárne riešenie

$$\begin{aligned} W_{*\dagger C}^+(t) &= C_1 \exp\left(\int \mu_M(x_1 + t)dt\right) \\ W_{\dagger* C}^+(t) &= C_2 \exp\left(\int \mu_Z(x_2 + t)dt\right) \end{aligned}$$

a potom výsledne riešenie:

$$\begin{aligned}
W_{*\dagger}^+(t) &= \left( \int_0^t -v(q)a_{*\dagger}(q) \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q)dq\right) dq + C_1 \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int \mu_M(x_1+q)dq|_{q=t}\right), \\
W_{\dagger*}^+(t) &= \left( \int_0^t -v(q)a_{\dagger*}(q) \exp\left(-\int \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq\right) dq + C_2 \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq|_{q=t}\right),
\end{aligned}$$

kde  $C_1, C_2$  sú konštanty, ktoré vieme dopočítať vďaka ohraničujúcim podmienkam

$$\begin{aligned}
0 = W_{*\dagger}^+(\omega - x_2) &= \left( \int_0^{\omega-x_2} -v(q)a_{*\dagger}(q) \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q)dq\right) dq + C_1 \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int \mu_M(x_1+q)dq|_{q=\omega-x_1}\right), \\
C_1 &= \int_0^{\omega-x_2} v(q)a_{*\dagger}(q) \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q)dq\right) dq \\
0 = W_{\dagger*}^+(\omega - x_2) &= \left( \int_0^{\omega-x_2} -v(q)a_{\dagger*}(q) \exp\left(-\int \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq\right) dq + \right. \\
&\quad \left. + C_2 \right) \cdot \exp\left(\int \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq|_{q=\omega-x_2}\right). \\
C_2 &= \int_0^{\omega-x_2} v(q)a_{\dagger*}(q) \exp\left(-\int \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq\right) dq
\end{aligned}$$

Teraz, keď už poznáme vyjadrenie pre  $W_{\dagger*}^+$  a  $W_{*\dagger}^+$ , môžeme dopočítať  $W_{**}^+(t)$  opäť pomocou separácie premenných a variácie konštant. Najprv si prepíšeme rovnicu do tvaru:

$$\begin{aligned}
W_{**}^{+'}(t) - (\mu_M(x_1+t) + \mu_{\bar{Z}}(x_2+t))W_{**}^+(t) &= \\
= -v(t)\tilde{a}_{**}(t) - \mu_M(x_1+t)W_{\dagger*}^+(t) - \mu_{\bar{Z}}(x_2+t)W_{*\dagger}^+(t).
\end{aligned}$$

potom komplementárne riešenie bude rovné

$$W_{**C}^+(t) = C \exp\left(\int \mu_M(x_1+t) + \mu_{\bar{Z}}(x_2+t)dt\right)$$

a pre výsledné riešenie dostaneme:

$$\begin{aligned}
W_{**}^+(t) &= \left( \int_0^t (-v(q)\tilde{a}_{**}(q) - \mu_M(x_1+q)W_{\dagger*}^+(q) - \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)W_{*\dagger}^+(q)) \right. \\
&\quad \cdot \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q) + \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq\right) dq + C \left. \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int \mu_M(x_1+q) + \mu_{\bar{Z}}(x_2+q)dq|_{q=t}\right),
\end{aligned}$$

kde  $C$  opäť vypočítame vďaka ohraničujúcej podmienke

$$W_{**}^+(\omega - x_2) = 0.$$

Teda

$$C = \int_0^{\omega-x_2} (v(q)\tilde{a}_{**}(q) + \mu_M(x_1+q)W_{\dagger*}^+(q) + \mu_Z(x_2+q)W_{**\dagger}^+(q)) \cdot \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q) + \mu_Z(x_2+q)dq\right) dq.$$

### 3.4 Sirotský dôchodok

V tomto prípade uvažujeme stavy 3 osôb - matky, otca a dieťaťa. Výšku penzie v čase  $t$  označíme  $a(t)$ , čiastku, ktorú platia v čase  $t$  za poistenie, ak sú všetci živý označíme  $\tilde{a}_{***}(t)$  (musí byť záporná), dieťa má pri uzatváraní zmlúvy  $x_1$  rokov, matka  $x_2$  a otec dieťaťa  $x_3$  a opäť predpokladáme, že životy sú nezávislé.

Podme si teraz rozobrať jednotlivé situácie, ktoré môžu nastať. Uvažujme najprv, že všetci členovia žijú ( $j = ***$ ), potom možné stavy sú:

- všetci traja zostanú v tomto stave (živí) a teda budú platiť  $\tilde{a}_{***}(t)$ , prechodová sadzba pre opustenie tohto stavu je  $\mu_M(x_2+t) + \mu_Z(x_3+t) + \mu_D(x_1+t)$  (kvôli predpokladu nezávislosti životov, má spoločné úmrtie nulovú intenzitu) a diskontovaná rezerva pre čas  $t$  je  $W_{***}^+(t)$
- zomrie otec dieťaťa - dieťaťu sa začne vyplácať penzia vo výške  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba bude  $\mu_M(x_2+t)$  a diskontovaná rezerva je  $W_{*\dagger*}^+(t)$
- zomrie matka dieťaťa - dieťaťu sa začne vyplácať penzia vo výške  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba bude  $\mu_Z(x_3+t)$  a diskontovaná rezerva je  $W_{**\dagger}^+(t)$
- zomrú obaja rodičia - keďže sú životy rodičov nezávislé, príslušné prechodové sadzby budú rovné 0.
- v ostatných stavoch (keď zomrie dieťa) bude  $a(t) = 0$  a  $W_{\dagger**}^+(t) = W_{\dagger\dagger*}^+(t) = W_{\dagger*\dagger}^+(t) = W_{\dagger\dagger\dagger}^+(t) = 0$  pre všetky  $t$ .

Diferenciálna rovnica teda bude vyzeráť nasledujúco:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{***}^+(t) = -v(t)\tilde{a}_{***}(t) + \left(\mu_M(x_2+t) + \mu_Z(x_3+t) + \mu_D(x_1+t)\right)W_{***}^+(t) - \mu_M(x_2+t)W_{*\dagger*}^+(t) - \mu_Z(x_3+t)W_{**\dagger}^+(t)$$

Ďalej nás zaujíma diferenciálna rovnica pre stav, kde otec nie je nažive, matka s dieťaťom áno ( $j = * \dagger *$ ). Možné stavy v tomto prípade sú :

- všetci traja zostanú v tomto stave (matka s dieťaťom živý, otec po smrti), dieťaťu sa vypláca  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba je  $\mu_D(x_1+t) + \mu_Z(x_3+t)$  a diskontovaná rezerva pre čas  $t$  je  $W_{*\dagger*}^+(t)$
- zomrie aj matka dieťaťa - dieťaťu sa naďalej vypláca  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba bude  $\mu_Z(x_3+t)$  a diskontovaná rezerva je  $W_{*\dagger\dagger}^+(t)$

- v ostatných stavoch (keď zomrie dieťa) bude takisto  $a(t) = 0$  a  $W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = 0$  pre všetky  $t$ .

Príslušná diferenciálna rovnica teda bude mať tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{**\dagger}^+(t) = -v(t)a(t) + (\mu_{\text{D}}(x_1 + t) + \mu_{\text{Z}}(x_3 + t))W_{**\dagger}^+(t) - \mu_{\text{Z}}(x_3 + t)W_{**\dagger}^+(t)$$

Podobne to bude pre stav, kedy nežije len matka ( $j = **\dagger$ ), možné stavy potom budú:

- všetci traja zostanú v tomto stave (otec s dieťaťom živý, matka po smrti), dieťaťu sa vypláca  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba je  $\mu_{\text{D}}(x_1 + t) + \mu_{\text{M}}(x_2 + t)$  a diskontovaná rezerva pre čas  $t$  je  $W_{**\dagger}^+(t)$
- zomrie aj otec dieťaťa - dieťaťu sa naďalej vypláca  $a(t)$ , príslušná prechodová sadza bude  $\mu_{\text{M}}(x_2 + t)$  a diskontovaná rezerva je  $W_{**\dagger}^+(t)$
- v ostatných stavoch (keď zomrie dieťa) bude takisto  $a(t) = 0$  a  $W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = 0$  pre všetky  $t$ .

Potom dostaneme nasledujúcu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{**\dagger}^+(t) = -v(t)a(t) + (\mu_{\text{D}}(x_1 + t) + \mu_{\text{M}}(x_2 + t))W_{**\dagger}^+(t) - \mu_{\text{M}}(x_2 + t)W_{**\dagger}^+(t)$$

Nakoniec si ešte rozoberme stav, kedy žije len dieťa ( $j = *\dagger\dagger$ ). V tomto prípade môžu nastať tieto javy:

- všetci traja zostanú v tomto stave (dieťa živé, rodičia po smrti), dieťaťu sa vypláca  $a(t)$ , príslušná prechodová sadzba je  $\mu_{\text{D}}(x_1 + t)$  a diskontovaná rezerva pre čas  $t$  je  $W_{*\dagger\dagger}^+(t)$
- v ostatných stavoch (keď zomrie dieťa) bude takisto  $a(t) = 0$  a  $W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = W_{\dagger^{**}}^+(t) = 0$  pre všetky  $t$ .

Diferenciálna rovnica má potom tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{*\dagger\dagger}^+(t) = -v(t)a(t) + \mu_{\text{D}}(x_1 + t)W_{*\dagger\dagger}^+(t).$$

Pre úplnosť ešte uvedme, že platí:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\dagger^{**}}^+(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} W_{\dagger^{**}}^+(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} W_{*\dagger\dagger}^+(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} W_{*\dagger\dagger}^+(t) = 0$$

a ohraničujúce podmienky sú:

$$W_{***}^+(26 - x_1) = W_{**\dagger}^+(26 - x_1) = W_{**\dagger}^+(26 - x_1) = W_{**\dagger}^+(26 - x_1) = 0$$

$$W_{\dagger^{**}}^+(26 - x_1) = W_{\dagger^{**}}^+(26 - x_1) = W_{\dagger^{**}}^+(26 - x_1) = W_{\dagger^{**}}^+(26 - x_1) = 0.$$

Teraz vieme nájsť riešenie postupne pre všetky rezervy, ak začneme rezervou  $W_{*††}^+(t)$ . Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, použitím separácie premenných a variácie konštánt dostaneme riešenie:

$$W_{*††}^+(t) = \left( \int_0^t -v(q)a(q) \exp\left(-\int \mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q)dq\right) dq + C_1 \right) \cdot \exp\left(\int \mu(x_1 + q)dq\right)|_{q=t}$$

a následne vďaka ohraničujúcej podmienke dostaneme vyjadrenie pre konštantu  $C_1$

$$C_1 = \int_0^{26-x_1} v(q)a(q) \exp\left(-\int \mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q)dq\right) dq.$$

Ďalej budeme pokračovať v hľadaní riešenia pre  $W_{**†}^+(t)$ , rovnakou metódou dostaneme riešenie:

$$W_{**†}^+(t) = \left( \int_0^t \left( -v(q)a(q) - \mu_M(x_2 + q)W_{*††}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_M(x_2 + q)\right) dq\right) dq + C_2 \right) \cdot \exp\left(\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_M(x_2 + q)\right) dq\right)|_{q=t},$$

kde  $C_2$  sa vďaka ohraničujúcim podmienkam rovná

$$C_2 = \int_0^{26-x_1} \left( v(q)a(q) + \mu_M(x_2 + q)W_{*††}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_M(x_2 + q)\right) dq\right) dq.$$

Obdobne pre  $W_{*†*}^+(t)$  dostaneme

$$W_{*†*}^+(t) = \left( \int_0^t \left( -v(q)a(q) - \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)W_{*††}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right) dq + C_3 \right) \cdot \exp\left(\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right)|_{q=t}$$

$$C_3 = \int_0^{26-x_1} \left( v(q)a(q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)W_{*††}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right) dq.$$

Na záver pomocou doterajších výsledkov dostaneme vyjadrenie aj pre  $W_{***}^+(t)$ .

$$W_{***}^+(t) = \left( \int_0^t \left( -v(q)\tilde{a}_{***}(q) - \mu_M(x_2 + q)W_{*†*}^+(q) - \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)W_{**†}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_M(x_2 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right) dq + C_4 \right) \cdot \exp\left(\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right)|_{q=t}$$

$$C_4 = \int_0^{26-x_1} \left( v(q)\tilde{a}_{***}(q) + \mu_M(x_2 + q)W_{*†*}^+(q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)W_{**†}^+(q) \right) \cdot \exp\left(-\int \left(\mu_{\mathbb{D}}(x_1 + q) + \mu_M(x_2 + q) + \mu_{\mathbb{Z}}(x_3 + q)\right) dq\right) dq.$$

## 4. Výpočet poistného

V tejto kapitole uvidíme ako vypočítame poistné pre konkrétne typy poistenia v diskretnom, ale aj v spojitom čase. Vo všetkých typoch poistenia v diskretnom čase, budeme predpokladať, že poistné sa platí na začiatku každého obdobia a to v rovnakej výške, až kým nedôjde k vyplácaniu poistného plnenia/dôchodku, príp. až kým poistenie neskončí. Podmienky a väčšina značení pri konkrétnych typoch poistenia budú rovnaké ako pri odvádzaní vzorcov pre rezervy (niektoré značenia zmeníme kvôli prehľadnosti). Výšku poistného určíme tak, aby rezerva v čase 0 bola nulová.

### 4.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

#### 4.1.1 Diskretný čas

Pripomeňme, že v prípade kapitálového poistenia pre prípad smrti,  $a_*^{Pre}(t)$  je rovné poistnému, ktoré označíme  $c$ , pre všetky časy  $t$ , v ktorých poistník platí poistné. Dopočítať ho môžeme buď pomocou princípu ekvivalencie, napríklad na základe nasledujúcich úvah.

Označme si  $V_*^{+c}(t)$  časť rezervy v čase  $t$ , ktorá sa vzťahuje k poistnému a  $V_*^{+PP}(t)$  časť rezervy v čase  $t$ , ktorá sa vzťahuje k vyplateniu poistného plnenia. Potom platí

$$\begin{aligned}V_*^+(t) &= V_*^{+c}(t) + V_*^{+PP}(t) \\V_*^{+c}(t) &= c + v_t (1 - q(x + t + 1)) V_*^{+c}(t + 1) \\V_*^{+PP}(t) &= v_t q(x + t + 1) a_{*+}^{Post}(t) + v_t (1 - q(x + t + 1)) V_*^{+PP}(t + 1),\end{aligned}$$

pre  $t$  spĺňajúce  $0 \leq t < s - x$ . Ohraničujúce podmienky sú:

$$V_*^{+c}(s - x) = V_*^{+PP}(s - x) = 0$$

Potom pre  $V_*^{+c}(t)$  platí

$$V_*^{+c}(t) = c \cdot V_*^{+c=1}(t),$$

kde  $V_*^{+c=1}(t)$  je rezerva v čase  $t$ , ak poistné je rovné 1. Potom dosadením získame:

$$V_*^+(t) = c \cdot V_*^{+c=1}(t) + V_*^{+PP}(t)$$

a našou úlohou je vypočítať  $c$  tak, aby rezerva v čase 0 bola nulová, teda:

$$\begin{aligned}0 = V_*^+(0) &= c \cdot V_*^{+c=1}(0) + V_*^{+PP}(0). \\c &= \frac{V_*^{+PP}(0)}{V_*^{+c=1}(0)}\end{aligned}\tag{4.1}$$

### 4.1.2 Spojitý čas

Pripomeňme, že v spojitom čase, sme poistné označili rovno ako  $c$ . Opäť chceme aby rezerva bola v čase 0 nulová, teda dosadíme do už odvodených rovníc pre výpočet rezerv a dostaneme:

$$\begin{aligned}
 0 &= W_*^+(0) = C \cdot \exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=0} \\
 0 &= C = -\int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) \exp\left(-\int \mu(x+q)dq\right) dq \\
 \int_0^{s-x} v(q) c e^{-\int \mu(x+q)dq} dq &= \int_0^{s-x} v(q) b\mu(x+q) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq \\
 c &= b \frac{\int_0^{s-x} v(q)\mu(x+q) \exp(-\int \mu(x+q)dq) dq}{\int_0^{s-x} v(q) \exp(-\int \mu(x+q)dq) dq}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

## 4.2 Kapitálové zmiešané poistenie

### 4.2.1 Diskrétny čas

Znova nás zaujíma výška poistného, ktorú označíme  $c$  a ktorú vieme vypočítať rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom prípade, prípadne existuje ešte ďalšia možnosť, ktorú si teraz ukážeme.

Označme  $PV_P$  súčasnú hodnotu budúcich očakávaných príjmov (s pohľadu poisťovne) a  $PV_V$  súčasnú hodnotu budúcich očakávaných výdajov. Potom musí platiť, že  $PV_P = PV_V$ . Príjmy poisťovne tvorí poistné, ktoré platí poistenec vždy na začiatku obdobia, ak sa tohto okamihu dožije. Výdaje poisťovne tvorí poistné plnenie v prípade smrti poistenca, ktoré pre prehľadnosť označíme  $b$  a čiastka  $g$  v prípade, že poistenec prežije  $s$  rokov. Dostaneme teda:

$$c + \sum_{k=1}^{s-x-1} c v(k) {}_k p_x = b v(1) q(x) + \sum_{l=1}^{s-x-1} b v(l+1) {}_l p_x q(x+l) + g v(s-x) {}_{s-x} p_x,$$

kde  ${}_k p_x$  značí pravdepodobnosť, že poistený, ktorý má  $x$  rokov, prežije ešte  $k$  rokov.

### 4.2.2 Spojitý čas

Aj v tomto prípade, ak chceme aby rezerva v 0 bola nulová, musí byť konštata  $C$  rovná nule, preto potom pre poistné  $c$  dostaneme:

$$\begin{aligned}
 0 &= C = \frac{g \cdot v(s-x)}{\exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=s-x}} - \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq. \\
 \frac{g \cdot v(s-x)}{\exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=s-x}} &= \int_0^{s-x} v(q)(c - b\mu(x+q)) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq \\
 c &= \frac{\frac{g \cdot v(s-x)}{\exp\left(\int \mu(x+q)dq\right)|_{q=s-x}} + b \int_0^{s-x} v(q)\mu(x+q) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq}{\int_0^{s-x} v(q) e^{-\int \mu(x+q)dq} dq}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

## 4.3 Dôchodkové poistenie

### 4.3.1 Diskrétny čas

Teraz nás bude zaujímať výška poistného pre dôchodkové poistenie. Záporná výška poistného tvorila  $a_{**}^{Pre}$ , my si ju však teraz rozdelíme a označíme  $c$  výšku poistného ktorú platí jeden z dvojice (druhý bude platiť rovnaké poistné vo výške  $c$ ). Potom  $c$  vypočítame pomocou princípu ekvivalencie. Rozoberme si najprv súčasnú hodnotu budúcich platieb. Manžel zaplatí poistné vo výške  $c$  pri uzatváraní poistenia s istotou, ďalšie roky bude platiť poistné, až kým nedovrší vopred stanovený vek  $s$  a bude nažive, obdobne manželka. Po diskontovaní teda dostaneme:

$$PV_P = c + \sum_{k=1}^{s-x_1-1} c v(k) {}_k p_{x_1}^M {}_k p_{x_2}^{\check{Z}} \\ + c + \sum_{k=1}^{s-x_2-1} c v(k) {}_k p_{x_2}^{\check{Z}} {}_k p_{x_1}^M$$

Budúce výdaje poisťovne rozdelme na výdaje spojené s vyplatením dôchodkov po dosiahnutí  $s$  rokov a na výdaje v prípade smrti jedného z dvojice. V prvom prípade, ak sa manžel dožije veku  $s$ , kým bude žiť, bude dostávať dôchodok vo výške  $b$ , obdobne manželka. Teda táto časť výdajov bude rovná:

$$PV_{V1} = {}_{s-x_1} p_{x_1}^M \cdot \sum_{k=s-x_1+1}^{\omega-x_1} b v(k) {}_k p_{s+x_1}^M \\ + {}_{s-x_2} p_{x_2}^{\check{Z}} \cdot \sum_{k=s-x_2+1}^{\omega-x_2} b v(k) {}_k p_{s+x_2}^{\check{Z}}$$

V druhom prípade, teda keď zomrie napríklad manžel, bude manželka dostávať do  $s$ -tého roku života dôchodok vo výške  $b$  (budeme predpokladať, že výšky dôchodku sú rovnaké vo všetkých prípadoch). Po tomto roku bude naďalej dostávať dôchodok, ale ten sme už zahrnuli do  $PV_{V1}$ . Obdobne v prípade smrti manželky.

$$PV_{V2} = \sum_{l=0}^{s-x_2-1} {}_l p_{x_1}^M q_M(x_1+l) \sum_{k=l+1}^{s-x_2} b {}_k p_{x_2}^{\check{Z}} v(k) \\ + \sum_{l=0}^{s-x_1-1} {}_l p_{x_2}^{\check{Z}} q_{\check{Z}}(x_2+l) \sum_{k=l+1}^{s-x_1} b {}_k p_{x_1}^M v(k).$$

Poistné  $c$ , ktoré bude platiť každý z nich, potom vypočítame tak, aby platilo:

$$PV_P = PV_{V1} + PV_{V2}.$$

### 4.3.2 Spojitý čas

Ak chceme aby rezerva v čase 0 bola nulová, opäť musí platiť, že konštanta  $C$  musí byť rovná 0. Teda dostaneme:

$$0 = C = \int_0^{\omega-x_2} (v(q)\tilde{a}_{**}(q) + \mu_M(x_1+q)W_{\dagger*}^+(q) + \mu_Z(x_2+q)W_{\dagger*}^+(q)) \cdot \exp\left(-\int \mu_M(x_1+q) + \mu_Z(x_2+q) dq\right) dq, \quad (4.4)$$

kde v tomto prípade sa snažíme vypočítať výšku  $\tilde{a}_{**}(t)$ , ktorá značí 2 krát hodnotu poistného v čase  $t$ , ak obaja majú pod  $s$  rokov. V prípade, že len jeden z nich má pod  $s$  rokov,  $\tilde{a}_{**}(t)$  je rovné výške jedného poistného.

## 4.4 Sirotský dôchodok

### 4.4.1 Diskrétny čas

Našou úlohou je opäť odvodiť výšku poistného, ktorú aj tentokrát označíme  $c$ , pre sirotský dôchodok. Použijeme znovu princíp ekvivalencie. Súčasná hodnota budúcich príjmov z pohľadu poisťovne vypočítame ako:

$$PV_P = c + \sum_{k=1}^{26-x_1-1} c v(k) {}_k p_{x_1} {}_k p_{x_2} {}_k p_{x_3}$$

a súčasnú hodnotu budúcich výdajov vypočítame:

$$\begin{aligned} PV_V = & \sum_{l=0}^{26-x_1-1} {}_l p_{x_2}^M q_2(x_2+l) \sum_{k=l+1}^{26-x_1} a_{*\dagger*}(k) {}_k p_{x_1} {}_k p_{x_3} v(k) \\ & + \sum_{l=0}^{26-x_1-1} {}_l p_{x_3}^Z q_3(x_3+l) \sum_{k=l+1}^{26-x_1} a_{**\dagger}(k) {}_k p_{x_1} {}_k p_{x_2} v(k) \\ & + \sum_{m=0}^{26-x_1-1} \sum_{l=0, m \neq l}^{26-x_1-1} {}_m p_{x_2}^M {}_l p_{x_3}^Z q_2(x_2+m) q_3(x_3+l) \sum_{k=\max(l,m)+1}^{26-x_1} a_{*\dagger\dagger}(k) {}_k p_{x_1} v(k) \end{aligned}$$

Poistné  $c$  potom dopočítame tak, aby platilo:

$$PV_P = PV_V.$$

### 4.4.2 Spojitý čas

V tomto prípade budeme poistné počítat z rovníc pre rezervu, ak sú nažive všetci traja poistení. Opäť chceme aby rezerva v čase 0 bola nulová, teda aby platilo  $W_{***}^+(0) = 0$ . Po dosadení zistíme, že konštanta  $C_4$  musí byť nulová, preto poistné v čase  $t$ ,  $\tilde{a}_{***}(t)$ , dopočítame tak aby platilo:

$$0 = C_4 = \int_0^{26-x_1} (v(q)\tilde{a}_{***}(q) + \mu_M(x_2+q)W_{\dagger*}^+(q) + \mu_Z(x_3+q)W_{\dagger*}^+(q)) \cdot \exp\left(-\int (\mu_D(x_1+q) + \mu_M(x_2+q) + \mu_Z(x_3+q)) dq\right) dq. \quad (4.5)$$

## 5. Rovnice pre vyššie momenty

V tejto kapitole si odvodíme rovnice pre vyššie momenty v diskretnom čase, vďaka ktorým potom vypočítame smerodajnú odchýlku budúcich platieb. V spojitom čase momenty neuvedieme, odvodené sú však v Koller (2012). Za podmienok, že  $X_t = i$  a že neprebehli žiadne platby v čase  $t$ ,  $p$ -ty moment môžeme vypočítať na základe nasledujúcej vety.

**Veta 7.** *Nech  $a_i^{Pre}(t) = 0$  pre všetky  $t$ . Potom vyššie momenty matematickej rezervy splňujú rekurzívnu formulu*

$$\mathbb{E}[(V^+(t,A))^p | X_t = i] = (v_t)^p \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (a_{ij}^{Post}(t))^{p-k} \cdot \mathbb{E}[(V^+(t+1,A))^k | X_{t+1} = j]$$

*Dôkaz. (Náznak)*

Najprv si pomocou Definície 17 vyjadríme peňažný tok v čase  $t$ . (Platby v čase  $t+1$  diskontujeme do času  $t$ ). Dostaneme

$$\Delta A_t = \sum_{j \in S} I_j(t) a_j^{Pre}(t) + \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) v_t a_{jk}^{Post}(t)$$

Potom rezerva je vyjadrená ako súčet diskontovaných peňažných tokov a vďaka linearite môžeme napísať

$$V^+(t,A) = v_t \sum_{j \in S} I_j(t+1) V^+(t+1,A) + \sum_{j \in S} I_j(t) a_j^{Pre}(t) + \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) v_t a_{jk}^{Post}(t)$$

Ďalej budeme predpokladať, že prostredný člen je nulový a pomocou binomickej vety a úprav dostaneme

$$(V^+(t,A))^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sum_{j \in S} I_j(t+1) (v_t V^+(t+1,A))^k \left( \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) v_t a_{jk}^{Post}(t) \right)^{p-k}.$$

Potom

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(V^+(t,A))^p | X_t = i] = \\ & = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sum_{j \in S} I_j(t+1) (v_t V^+(t+1,A))^k \left( \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) v_t a_{jk}^{Post}(t) \right)^{p-k} | X_t = i \right] \end{aligned}$$

Na záver úpravou tohto výrazu a využitím vlastností podmienených pravdepodobností dostaneme rekurzívny vzorec na výpočet prespektívnej matematickej rezervy. □

Teda pre prvé dva momenty po dosadení dostaneme:

$$\mathbb{E}[V^+(t,A)|X_t = i] = v_t \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1) \left( a_{ij}^{Post}(t) + \mathbb{E}[V^+(t+1,A)|X_{t+1} = j] \right)$$

*Pozn.* Vyššie uvedený vzorec sa rovná Thieleho diferenčnej rovnici, ak predpokladáme, že  $a_i^{Pre}(t)$  je nulové pre všetky  $t$  (čo sme aj predpokladali v odvodzovaní vzorca pre  $p$ -te momenty).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = i] &= (v_t)^2 \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1) \left( [a_{ij}^{Post}(t)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 a_{ij}^{Post}(t) \mathbb{E}[V^+(t+1,A)|X_{t+1} = j] + \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}[V^+(t+1,A)^2|X_{t+1} = j] \right). \end{aligned}$$

Na základe týchto dvoch rovníc potom vieme vypočítať rozptyl. Podme si teraz ukázať ako vyzerajú rovnice pre konkrétne typy poistenia.

## 5.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

V prípade kapitálového poistenia pre prípad smrti pre druhý moment (prvý moment je rovný rezerve) platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = *] &= v_t^2 (1 - q(x+t+1)) \left( (a_*^{Post}(t))^2 + 2a_*^{Post}(t)V_*(t+1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}[(V^+(t+1,A))^2|X_{t+1} = *] \right) + v_t^2 q(x+t+1) (a_{*†}^{Post}(t))^2, \end{aligned}$$

s ohraničujúcou podmienkou

$$\mathbb{E}[(V^+(s-x,A))^2|X_{s-x} = *] = 0.$$

Predpokladali sme však, že  $a_*^{Pre}(t)$  je nulové. Keďže sa ale poistné platí na začiatku obdobia, pre  $a_*^{Post}(t)$  budeme uvažovať

$$a_*^{Post}(t) = v_t^{-1} a_*^{Pre}(t).$$

## 5.2 Kapitálové zmiešané poistenie

Druhý moment matematickej rezervy vypočítame rovnako ako v prípade termínovaného poistenia, s tým rozdielom, že  $a_*^{Post}(s-x) = g$ .

## 5.3 Dôchodkové poistenie 2 osôb

Ďalej si odvodíme druhý moment, pre 3 rôzne stavy poistených. Začneme stavom, v ktorom žijú obaja partneri. Pripomeňme, že poistné musíme úročiť, teda že platí  $a_{**}^{Post}(t) = v_t^{-1} a_{**}^{Pre}(t)$ , pre všetky  $t$ , kde obaja poistení platia poistné.

Ak platí poisťné len jeden, poisťné zúročíme a pripočítame hodnotu dôchodku, ktorú poberá druhý z nich.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = **] &= v_t^2(1 - q_M(x_1 + t + 1))(1 - q_Z(x_2 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{**}^{Post}(t))^2 + 2a_{**}^{Post}(t)V_{**}^+(t + 1) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}[(V^+(t + 1,A))^2|X_{t+1} = **] \right) + \\
&\quad + v_t^2 q_M(x_1 + t + 1)(1 - q_Z(x_2 + t + 1)) \left( (a_{\dagger*}^{Post}(t))^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2a_{\dagger*}^{Post}(t)V_{\dagger*}^+(t + 1) + \mathbb{E}[(V^+(t + 1,A))^2|X_{t+1} = \dagger*] \right) + \\
&\quad + v_t^2 q_Z(x_2 + t + 1)(1 - q_M(x_1 + t + 1)) \left( (a_{*\dagger}^{Post}(t))^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2a_{*\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger}^+(t + 1) + \mathbb{E}[(V^+(t + 1,A))^2|X_{t+1} = *\dagger] \right),
\end{aligned}$$

kde ohraničujúca podmienka je:

$$\mathbb{E}[(V^+(\omega - x_2, A))^2|X_{\omega-x_2} = **] = 0.$$

Teraz nás bude zaujímať druhý moment pre stav, kde žijúca je len manželka, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = \dagger*] &= v_t^2(1 - q_Z(x_2 + t + 1)) \left( (a_{\dagger*}^{Post}(t))^2 + 2a_{\dagger*}^{Post}(t)V_{\dagger*}^+(t + 1) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}[(V^+(t + 1,A))^2|X_{t+1} = \dagger*] \right)
\end{aligned}$$

s ohraničujúcou podmienkou.

$$\mathbb{E}[(V^+(\omega - x_2, A))^2|X_{\omega-x_2} = \dagger*] = 0.$$

Nakoniec pre stav, kde žijúci je len manžel dostaneme:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = *\dagger] &= v_t^2(1 - q_M(x_1 + t + 1)) \left( (a_{*\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{*\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger}^+(t + 1) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}[(V^+(t + 1,A))^2|X_{t+1} = *\dagger] \right),
\end{aligned}$$

kde ohraničujúca podmienka je:

$$\mathbb{E}[(V^+(\omega - x_2, A))^2|X_{\omega-x_2} = *\dagger] = 0.$$

## 5.4 Sirotský dôchodok

V prípade sirotského dôchodku dostaneme pre druhý moment matematickej rezervy (ak označíme  $\mathbb{E}[(V^+(t,A))^2|X_t = ** *]$  ako  $V_{***}^{+2}(t)$ ) nasledujúce rovnice:

$$\begin{aligned}
V_{***}^{+2}(t) &= v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))(1 - q_2(x_2 + t + 1))(1 - q_3(x_3 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{***}^{Post}(t))^2 + 2a_{***}^{Post}(t)V_{***}^+(t + 1) + V_{***}^{+2}(t + 1) \right) + \\
&\quad + v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))q_2(x_2 + t + 1)(1 - q_3(x_3 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{**\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{**\dagger}^{Post}(t)V_{**\dagger}^+(t + 1) + V_{**\dagger}^{+2}(t + 1) \right) + \\
&\quad + v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))q_3(x_3 + t + 1)(1 - q_2(x_2 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{**\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{**\dagger}^{Post}(t)V_{**\dagger}^+(t + 1) + V_{**\dagger}^{+2}(t + 1) \right) + \\
&\quad + v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))q_3(x_3 + t + 1)q_2(x_2 + t + 1) \\
&\quad \left( (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1) + V_{*\dagger\dagger}^{+2}(t + 1) \right), \\
V_{**\dagger}^{+2}(t) &= v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))(1 - q_3(x_3 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{**\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{**\dagger}^{Post}(t)V_{**\dagger}^+(t + 1) + V_{**\dagger}^{+2}(t + 1) \right) + \\
&\quad + v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))q_3(x_3 + t + 1) \\
&\quad \left( (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1) + V_{*\dagger\dagger}^{+2}(t + 1) \right), \\
V_{**\dagger}^{+2}(t) &= v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))(1 - q_2(x_2 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{**\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{**\dagger}^{Post}(t)V_{**\dagger}^+(t + 1) + V_{**\dagger}^{+2}(t + 1) \right) + \\
&\quad + v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1))q_2(x_2 + t + 1) \\
&\quad \left( (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1) + V_{*\dagger\dagger}^{+2}(t + 1) \right), \\
V_{*\dagger\dagger}^{+2}(t) &= v_t^2(1 - q_1(x_1 + t + 1)) \\
&\quad \left( (a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t))^2 + 2a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)V_{*\dagger\dagger}^+(t + 1) + V_{*\dagger\dagger}^{+2}(t + 1) \right),
\end{aligned}$$

kde

$$V_{***}^{+2}(26 - x_1) = V_{**\dagger}^{+2}(26 - x_1) = V_{**\dagger}^{+2}(26 - x_1) = V_{*\dagger\dagger}^{+2}(26 - x_1) = 0.$$

## 6. Distribúcia rezervy

V tejto kapitole si uvedieme vzorce na výpočet distribučnej funkcie pre diskretný Markov model. Pre model so spojitým časom distribučné funkcie neuvedieme kvôli zložitosti (jedná sa o zložitú intergrálnu rovnicu), sú však odvodené v Koller (2012).

Uvažujme teda diskretný Markov model. Potom nasledujúca veta nám pomôže pri výpočte distribučnej funkcie rezervy.

**Veta 8.** *Označme distribučnú funkciu rezervy (distribučnú funkciu diskontovaných budúcich tokov) ako*

$$P_i(t, u) = P \left[ \sum_{j=t}^{\infty} \left( \prod_{k=t}^{k < j} v_k \right) \Delta A_j < u \mid X_t = i \right],$$

kde

$$\Delta A_t = \sum_{j \in S} I_j(t) a_j^{Pre}(t) + \sum_{j, k \in S} \Delta N_{jk}(t) v_t a_{jk}^{Post}(t).$$

Potom platí

$$P_i(t, u) = \sum_{j \in S} p_{ij}(t) P_j(t+1, (v_t)^{-1}(u - a_i^{Pre}(t)) - a_{ij}^{Post}(t))$$

a ohraničujúce podmienky získame na základe toho, že poznáme výšku rezervy, ak poistený dovŕši určitý vek (v prípade celoživotných poistení zas predpokladáme, že poistený nedovŕši  $\omega + 1 = 106$ ).

*Dôkaz.* Pre prehľadnenie výpočtov označme

$$D_{t,j} = \prod_{k=t}^{k < j} v_k$$

Potom

$$\begin{aligned} P_i(t, u) &= P \left[ \sum_{j=t}^{\infty} D_{t,j} \Delta A_j < u \mid X_t = i \right] \\ &= \sum_{l \in J} p_{il}(t) P \left[ \sum_{j=t}^{\infty} D_{t,j} \Delta A_j < u \mid X_t = i, X_{t+1} = l \right] \\ &= \sum_{l \in J} p_{il}(t) P \left[ v_t \sum_{j=t+1}^{\infty} D_{t+1,j} \Delta A_j < u - a_i^{Pre}(t) - v_t a_{il}^{Post}(t) \mid X_{t+1} = l \right] \\ &= \sum_{l \in J} p_{ij}(t) P_l(t+1, (v_t)^{-1}(u - a_i^{Pre}(t)) - a_{il}^{Post}(t)). \end{aligned}$$

□

Ďalej si odvodíme distribučné funkcie pre už spomínané 4 typy poistenia, kde značenie bude rovnaké ako pri rezervách. Začneme opäť kapitálovým poistením pre prípad smrti.

## 6.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

Pre tento typ poistenia, pre distribučnú funkciu bude platiť:

$$P_*(t, u) = (1 - q(x + t))P_*(t + 1; v_t^{-1}(u - a_*^{Pre}(t))) + \\ + q(x + t)P_{\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger}^{Post}(t)),$$

kde

$$P_*(s - x + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, \\ 1, & \text{ak } u > 0. \end{cases}$$

$$P_{\dagger}(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, t \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{ak } u > 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 6.2 Kapitálové zmiešané poistenie

Vzorec na výpočet distribučnej funkcie bude rovnaký ako pri kapitálovom poistení pre prípad smrti, zmenia sa len ohraničujúce podmienky:

$$P_*(s - x + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq g, \\ 1, & \text{ak } u > g. \end{cases}$$

## 6.3 Dôchodkové poistenie 2 osôb

Pri dôchodkovom poistení si odvodíme distribučné funkcie pre všetky možné stavy. Začneme stavom, kde žijúci sú obaja poistení:

$$P_{**}(t, u) = (1 - q_{\bar{z}}(x_2 + t))(1 - q_M(x_1 + t))P_{**}(t + 1; v_t^{-1}(u - a_{**}^{Pre}(t)) \\ - a_{**}^{Post}(t)) + q_{\bar{z}}(x_2 + t)(1 - q_M(x_1 + t))P_{*\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger}^{Post}(t)) + \\ + q_M(x_1 + t)(1 - q_{\bar{z}}(x_2 + t))P_{\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{\dagger*}^{Post}(t)) + \\ + q_M(x_1 + t)q_{\bar{z}}(x_2 + t)P_{\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u).$$

kde

$$P_{**}(\omega - x_2 + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, \\ 1, & \text{ak } u > 0. \end{cases}$$

Následne pre stav, kde žijúca je len manželka:

$$P_{\dagger*}(t, u) = (1 - q_{\bar{z}}(x_2 + t))P_{\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{\dagger*}^{Post}(t)) + \\ + q_{\bar{z}}(x_2 + t)P_{\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u).$$

$$P_{\dagger*}(\omega - x_2 + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, \\ 1, & \text{ak } u > 0. \end{cases}$$

Potom pre stav, kde žijúci je len manžel:

$$P_{*\dagger}(t, u) = (1 - q_M(x_1 + t))P_{*\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger}^{Post}(t)) + \\ + q_M(x_1 + t)P_{\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u).$$

$$P_{*\dagger}(\omega - x_2 + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, \\ 1, & \text{ak } u > 0. \end{cases}$$

a napokon pre stav, kde sú obaja poistení po smrti, platí:

$$P_{\dagger\dagger}(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, t \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{ak } u > 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 6.4 Sirotský dôchodok

V prípade sirotského dôchodku, pre distribučné funkcie bude platíť:

$$\begin{aligned} P_{***}(t, u) &= (1 - q_1(x_1 + t))(1 - q_2(x_2 + t))(1 - q_3(x_3 + t))P_{***}(t + 1; \\ &\quad v_t^{-1}(u - a_{**}^{Pre}(t)) + (1 - q_1(x_1 + t))q_2(x_2 + t)(1 - q_3(x_3 + t)) \\ &\quad P_{*\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger*}^{Post}(t)) + (1 - q_1(x_1 + t))q_3(x_3 + t) \\ &\quad (1 - q_2(x_2 + t))P_{**\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{**\dagger}^{Post}(t)) + (1 - q_1(x_1 + t)) \\ &\quad q_3(x_3 + t)q_2(x_2 + t)P_{*\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)(1 - q_3(x_3 + t))(1 - q_2(x_2 + t))P_{\dagger**}(t + 1; v_t^{-1}u) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)q_3(x_3 + t)(1 - q_2(x_2 + t))P_{\dagger*\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)(1 - q_3(x_3 + t))q_2(x_2 + t)P_{\dagger\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)q_3(x_3 + t)q_2(x_2 + t)P_{\dagger\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u), \\ P_{*\dagger*}(t, u) &= (1 - q_1(x_1 + t))(1 - q_3(x_3 + t))P_{*\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger*}^{Post}(t)) + \\ &\quad + (1 - q_1(x_1 + t))q_3(x_3 + t)P_{*\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)(1 - q_3(x_3 + t))P_{\dagger\dagger*}(t + 1; v_t^{-1}u) + \\ &\quad q_1(x_1 + t)q_3(x_3 + t)P_{\dagger\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u), \\ P_{**\dagger}(t, u) &= (1 - q_1(x_1 + t))(1 - q_2(x_2 + t))P_{**\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{**\dagger}^{Post}(t)) + \\ &\quad + (1 - q_1(x_1 + t))q_2(x_2 + t)P_{*\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)) + \\ &\quad + q_1(x_1 + t)(1 - q_2(x_2 + t))P_{\dagger*\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u) + \\ &\quad + q_1(x_1 + t)q_2(x_2 + t)P_{\dagger\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u), \\ P_{*\dagger\dagger}(t, u) &= (1 - q_1(x_1 + t))P_{*\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u - a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t)) + \\ &\quad + q_1(x_1 + t)P_{\dagger\dagger\dagger}(t + 1; v_t^{-1}u), \end{aligned}$$

kde pre všetky stavy, v ktorých je dieťa nažive platí:

$$P_{*..}(26 - x_1 + 1, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, \\ 1, & \text{ak } u > 0. \end{cases}$$

a pre stavy, v ktorých je dieťa po smrti platí:

$$P_{\dagger..}(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u \leq 0, t \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{ak } u > 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 7. Príklady

V tejto kapitole vypočítame, pomocou programu Mathematica, rezervy pre konkrétne vstupy do 4 typov poistenia. Najprv zvolíme vhodné prechodové sadzby, následne si zvolíme konkrétne parametre poistenia. To znamená, že určíme koľko má poistený (prípadne viacerí poistení) rokov pri uzatváraní poistenia, aká čiastka (prípadne dôchodky) sa v akom čase vyplatí a taktiež určíme vhodné poistné. Rezervy vypočítame pre diskretný aj spojitý čas a porovnáme ich. Následne, podľa odvodených vzorcov, naprogramujeme aj distribučnú funkciu a smerodajnú odchýlku a opäť ich porovnáme.

### 7.1 Prechodové sadzby

Najprv teda musíme zvoliť vhodné prechodové sadzby. Podobne ako v knihe Koller (2012), prechodové sadzby  $\mu_{*†}$  budú spĺňať:

$$\log(\mu(t)) = a + bt + ct^2,$$

kde  $a, b, c$  sú parametre, na ktorých odhad použijeme pravdepodobnosti úmrtia (ktoré sme získali z Český statistický úřad (2021)), metodu nelineárnych najmenších štvorcov a programu gnuplot. Ďalej už však budeme programovať len v Mathematice. Keďže pravdepodobnosti sa líšia pre ženy a pre mužov, dostaneme rozdielne hodnoty parametrov. Pre mužov model vyzerá nasledujúco:

$$\log(\mu(t)) = -7,75111 + 0,0524786 t + 0,000173387 t^2 \quad (7.1)$$

a podobne pre ženy:

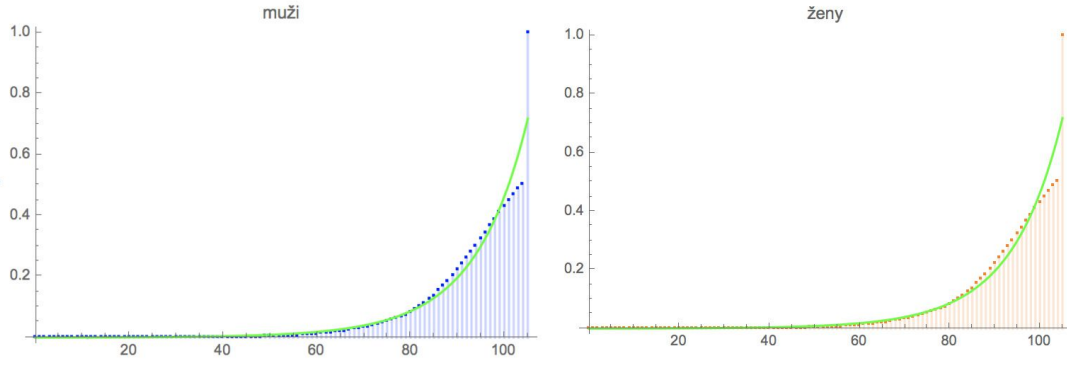
$$\log(\mu(t)) = -8,63058 + 0,0520842 t + 0,000260207 t^2. \quad (7.2)$$

Konkrétne pravdepodobnosti úmrtia a ich aproximácia zvlášť pre mužov a pre ženy je znázornená na Obrázku 7.1.

*Pozn.* Poznamenajme, že na základe Smernice Rady 2004/113/ES, poistné nemôže byť rozdielne pre mužov a pre ženy. V našich prípadoch budeme ale na počítanie poistného používať 7.1 aj 7.2. Pri dôchodkovom poistení však bude platiť, že poistné, ktoré platí žena bude rovnaké ako to, čo platí muž.

### 7.2 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

Získané riešenia si ilustrujeme na príklade, ktorý sme naprogramovali v programe Mathematica a ktorého zdrojový kód sa nachádza v prílohe. Uvažujme 30 ročného muža, ktorý si založil kapitálové poistenie pre prípad smrti do 65 rokov s poistnou čiaskou 200 000, technická úroková miera nech je 3,5%. Teda



Obr. 7.1: Pravdepodobnosti úmrtia a ich aproximácia.

$x = 30, s = 65, i = 0,035$ . Ak uvažujeme diskrétny čas, dosadíme hodnoty do vzorca (4.1) a výjde nám:

$$a_*^{Pre}(t) = 1\,469,48 \quad \text{pre } 0 \leq t < s - x$$

a zo zadania vieme, že

$$a_{*†}^{Post}(t) = 200\,000 \quad \text{pre } 0 \leq t < s - x.$$

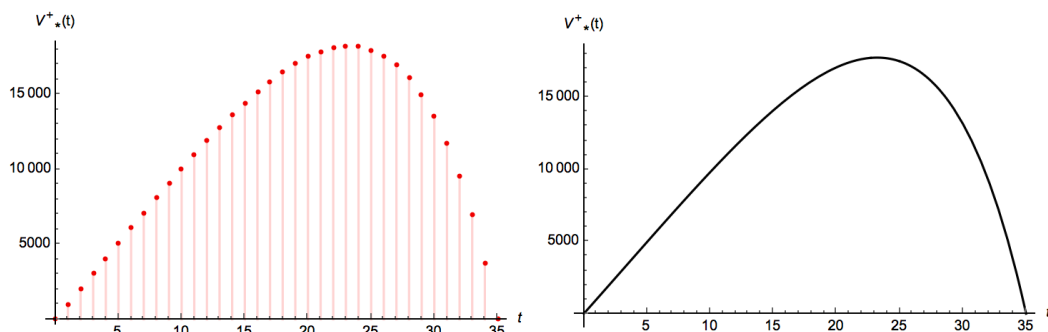
Hodnoty dosadíme do vzorcov (2.1 a 2.2) a dostaneme rezervu, ktorej hodnoty sú znázornené na Obrázku 7.2

Ak uvažujeme spojitý čas, vieme, že  $b = 200\,000$ . Ďalej dosadíme hodnoty do (4.2) a výjde nám, že intenzita poistného je rovná  $c = 1\,469,96$ . Taktiež vieme dopočítať  $W_*^+(t)$  a následne rezervu získame vydelením výsledku diskontným faktorom. Potom graf rezervy pre  $t$  od 0 po 35 môžeme vidieť na Obrázku 7.2. Pre  $t > 35$  bude samozrejme rezerva nulová. Podme sa ešte pozrieť na graf smerodajnej odchýlky a distribučnej funkcie pre  $t = 20$  pre toto poistenie (Obrázok 7.3). Vidíme, že graf smerodajnej odchýlky mierne rastie až do hodnoty 23, je to z toho dôvodu, že pravdepodobnosti úmrtia sa mierne zvyšujú a teda sa mierne zvyšuje aj neistota z vyplatenia. Po tomto čase sú hodnoty menšie preto, že síce sa pravdepodobnosť úmrtia zvyšuje, ale počet možných vyplatení poistného plnenia sa znižuje a tým sa znižuje aj neistota. Ďalej vidíme, že distribučná funkcia zmení razantne svoju hodnotu ešte pre záporne  $u$ . Nastáva to z toho dôvodu, že je vysoká šanca, že poistený bude len platiť poistné, ale poistné plnenie mu vyplatené nebude. A vieme, že súčasná hodnota budúcich poistných je záporná.

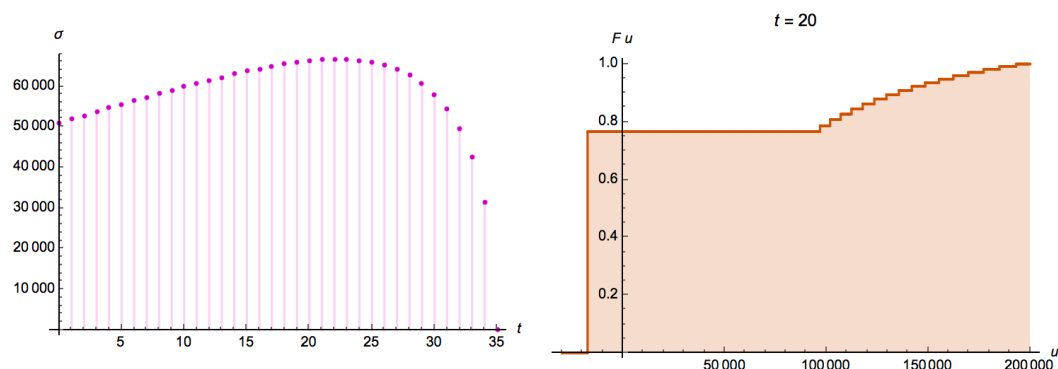
*Pozn.* Z distribučnej funkcie vieme vypočítať strednú hodnotu a tak overiť, či sa zhoduje s vypočítanou rezervou, keďže vieme, že pre konkrétne hodnoty  $t$ , platí:

$$EX_t = \int_0^\infty (1 - P_*(t,y))dy - \int_{-\infty}^0 P_*(t,y)dy.$$

Na výpočet sme použili program Mathematica a zistili, že sa hodnoty naozaj zhodujú.



Obr. 7.2: Grafy rezervy pre kapitálové poistenie pre prípad smrti.



Obr. 7.3: Smerodajná odchýlka a distribučná funkcia pre kapitálové poistenie pre prípad smrti.

### 7.3 Kapitálové zmiešané poistenie

Výsledok opäť ilustrujeme na príklade. Uvažujme rovnaký prípad ako minule ( $x = 30, s = 65, i = 0,035$ ) s tým rozdielom, že ak poistník dovŕši 65 rokov, vyplatí sa mu 100 000 ( $g = 100\,000$ ).

Ak uvažujeme diskretný čas, poistné nám pomocou princípu ekvivalencie výjde

$$a_{*}^{Pre}(t) = 2\,542,79 \quad \text{pre } 0 \leq t < s - x$$

a  $a_{*}^{Post}(t)$  ostáva rovné

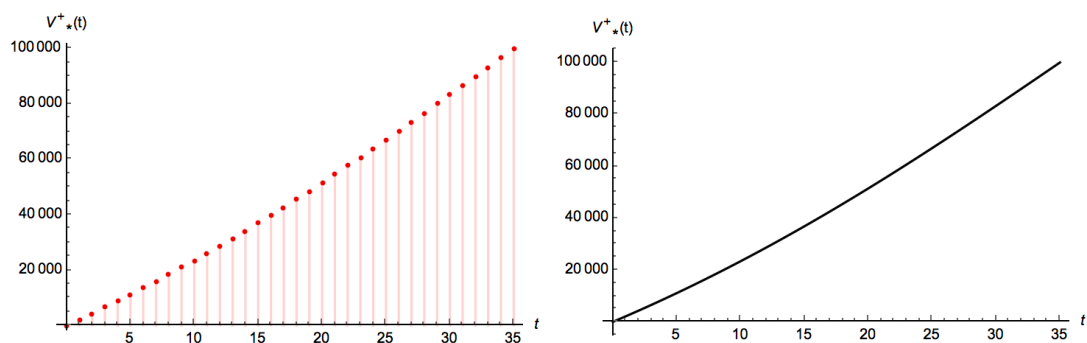
$$a_{*}^{Post}(t) = 200\,000 \quad \text{pre } 0 \leq t < s - x$$

Príslušné hodnoty dosadíme do vzorcov (2.3 a 2.4) a výjdu nám hodnoty, ktoré sú znázornené na Obrázku 7.4.

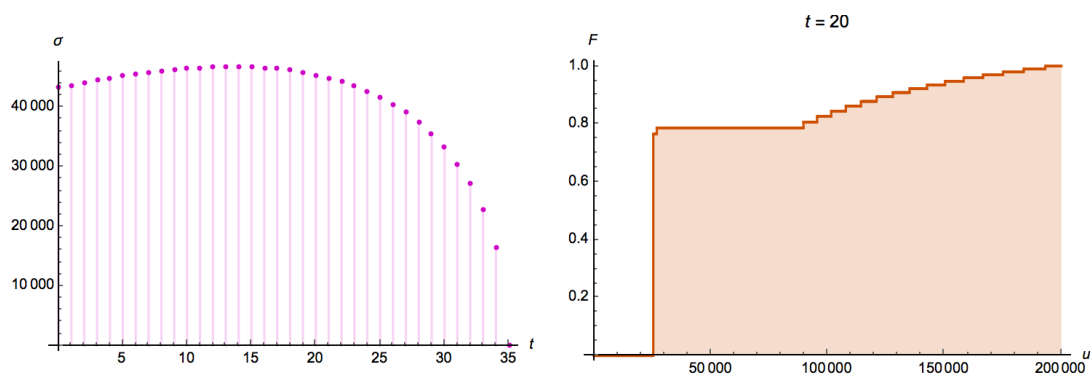
Ak uvažujeme spojité čas, po dosadení do vzorca (4.3) zistíme, že intenzita poistného je rovná  $c = 2\,580,21$ . Graf rezervy je znázornený na Obrázku 7.4 pre  $t$  od 0 do 35. Poznamenajme, že je očividné, že poistné bude väčšie v porovnaní s kapitálovým poistením pre prípad smrti, pretože sa poistnému s istotou vyplatí nejaká suma a taktiež je zrejmé, že pre  $t = 35$  dostaneme rezervu rovnú  $g$ .

Graf rezervy pre smerodajnú odchýlku a distribučnú funkciu v čase  $t = 20$  môžeme vidieť na Obrázku 7.5. Vidíme, že smerodajná odchýlka je pre každý čas  $t < 35$  menšia ako pri kapitálovom poistení pre prípad smrti, čo nastáva preto,

že je menšia neistota, keďže s istotou nejakú sumu poistenému vyplatíme. Ak porovnáme distribučnú funkciu kapitálového zmiešaného poistenia s distribučnou funkciou kapitálového poistenia pre prípad smrti zistíme, že vyššia hodnota distribučnej funkcie kapitálového zmiešaného poistenia nastáva až pre väčšie hodnoty  $u$ . Je to z toho dôvodu, že už sa určitá čiastka poistenému s istotou vyplatí. Keďže však stále veľké percento ľudí sa dožije 65 rokov, súčasná hodnota v čase  $t = 20$  môže byť stále záporná, keďže diskontujeme ešte 15 poistných, ktoré majú zápornú hodnotu.



Obr. 7.4: Grafy rezervy pre kapitálove zmiešané poistenie.



Obr. 7.5: Grafy smerodajnej ochýlky a distribučnej funkcie v hodnote  $t = 20$  pre kapitálove zmiešané poistenie.

## 7.4 Dôchodkové poistenie 2 osôb

Uvažujme teraz manželský pár, muž 30 ročný, žena 25 ročná, ktorí si založia dôchodkové poistenie, aby v prípade, že jeden z nich zomrel, dostával pravidelne ten druhý z nich v čase  $t$  čiastku 10 000. Ak by obaja žili a dovŕšili by 65 rokov, každý z nich by dostával taktiež v čase  $t$  pravidelnú čiastku 10 000. V diskretnom čase vypočítame poistné podľa princípu ekvivalencie a výjde nám, že ak obaja žijú a majú pod 65 rokov, platí každý z nich poistné v čiastke 1 767,02 v čase  $t$ . Ak žijú obaja a manželka má ešte pod 65 rokov, poistné platí len ona. Teda platí, že  $x_1 = 30, x_2 = 25$  a pre výplatné funkcie dostaneme v diskretnom čase dostaneme:

$$a_{**}^{Pre}(t) = \begin{cases} -3\,534,04 & 0 \leq t < 65 - x_1 \\ -1\,767,02 & 65 - x_1 \leq t < 65 - x_2 \end{cases}$$

$$a_{**}^{Post}(t) = \begin{cases} 10\,000 & 65 - x_1 \leq t < 65 - x_2 \\ 20\,000 & 65 - x_2 \leq t < \omega - x_2 \end{cases}$$

$$a_{*\dagger}^{Post}(t) = 10\,000; \quad 0 \leq t < \omega - x_1$$

$$a_{\dagger*}^{Post}(t) = 10\,000; \quad 0 \leq t < \omega - x_2.$$

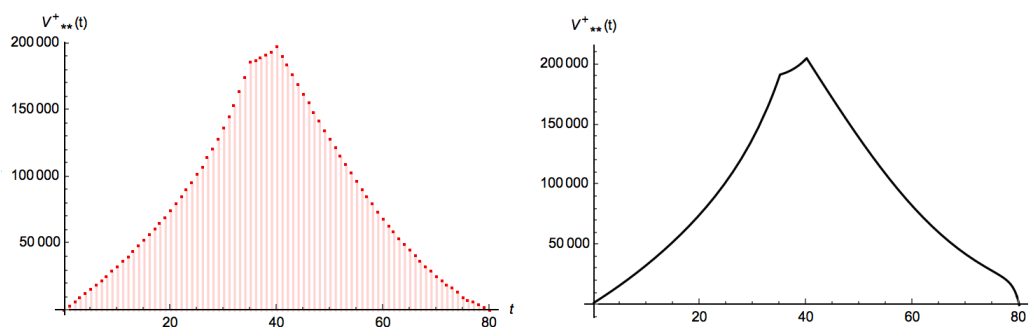
a pre spojitý čas po dosadení do (4.4) zas dostaneme:

$$\tilde{a}_{**}(t) = \begin{cases} -3\,420,82 & 0 \leq t < 65 - x_1 \\ 8\,289,59 & 65 - x_1 \leq t < 65 - x_2 \\ 20\,000 & 65 - x_2 \leq t < \omega - x_2 \end{cases}$$

$$a_{*\dagger}(t) = 10\,000; \quad 0 < t < \omega - x_1$$

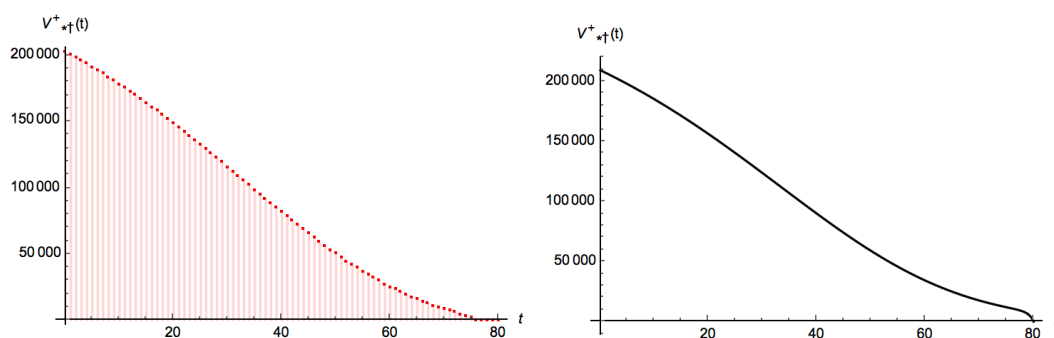
$$a_{\dagger*}(t) = 10\,000; \quad 0 < t < \omega - x_2.$$

Rezerva v prípade, ak obaja poistení žijú je znázornená na Obrázku 7.6. Vidíme, že zlom nastáva v čase 35, kedy muž začne poberať dôchodok a že najväčšiu hodnotu dosahuje v čase 40, kedy už dôchodok poberajú obaja.



Obr. 7.6: Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú.

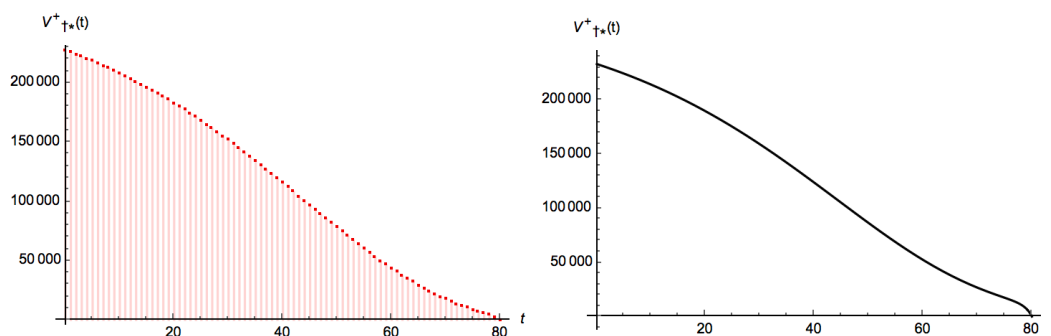
V prípade, že nažive len manžel, je rezerva znázornená na Obrázku 7.7. Priopomeňme, že v spojitom čase, sme najprv získali diskontovanú rezervu  $W_{**}^+(t)$ ,



Obr. 7.7: Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že je žijúci len manžel.

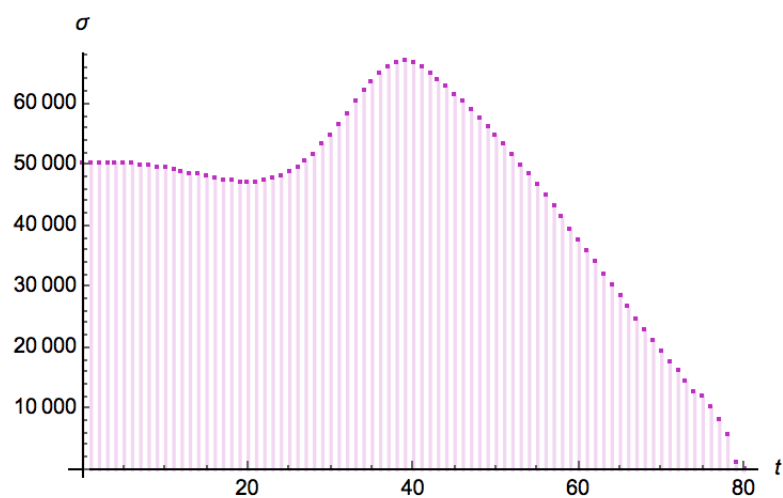
potom ju vydělili diskontným faktorom a tým získali  $V_{**}^+(t)$ , ktorej hodnoty vidíme na Obrázku 7.7.

Rezervy pre prípad, kde je nažive len manželka sú znázornené na Obrázku 7.8. Je zrejmé, že v prípade, že je nažive žena, je rezerva vyššia, pretože v našom prípade je manželka mladšia a taktiež je úmrtnosť žien nižšia. V čase 0 je napríklad rozdiel medzi diskrétnymi rezervami 26 808.

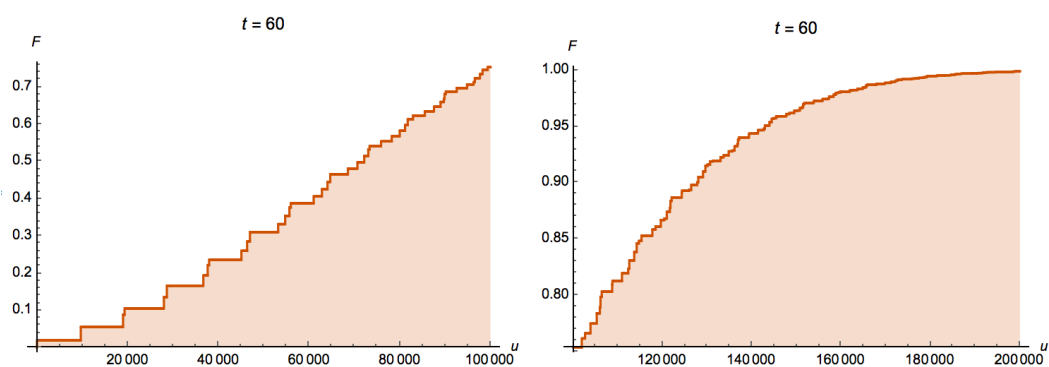


Obr. 7.8: Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že je žijúca len manželka.

Podme si ešte ukázať graf smerodajnej odchýlky (Obrázok 7.9.) a distribučnej funkcie (Obrázok 7.10.). Vidíme, že graf smerodajnej odchýlky mierne klesá až do času 20 a potom začne rásť až do času 40, kde dosiahne svoje maximum (v rovnakom čase je aj hodnota rezervy najväčšia). Nastáva to z toho dôvodu, že sa zvyšuje neistota z toho, koľko dôchodkov sa vyplatí. V čase 40 je hodnota najväčšia, keďže obaja v tomto čase už začínajú poberať dôchodok a neistota z toho ako dlho ho budú poberať zapríčiňuje aj najväčšiu odchýlku. Potom je zrejmé, že hodnoty smerodajnej odchýlky budú klesať.



Obr. 7.9: Graf smerodajnej odchýlky pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú.



Obr. 7.10: Grafy distribučnej funkcie v čase  $t = 60$  pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú (graf pre hodnoty  $u \leq 100\,000$  vľavo, pre vyššie hodnoty vpravo).

## 7.5 Sirotský dôchodok

Uvažujme teraz manželský pár, 40 ročný muž a 35 ročná, ktorí svojmu 10 ročnému synovi založia sirotský dôchodok. Chcu aby ich dieťa v prípade, že aspoň jeden z nich zomrie, dostávalo pravidelne čiastku 10 000 až do dovŕšenia 26 rokov. Nech technická úroková miera je rovná 3,5%. Teda  $x_1 = 10, x_2 = 40, x_3 = 35, i = 0,035$  a pre výplatné funkcie platí:

$$\begin{aligned} a_{*\dagger*}^{Post}(t) &= a_{**\dagger}^{Post}(t) = a_{*\dagger\dagger}^{Post}(t) = 10\,000 & 0 \leq t < 26 - x_1 \\ a(t) &= 10\,000 & 0 \leq t < 26 - x_1 \end{aligned}$$

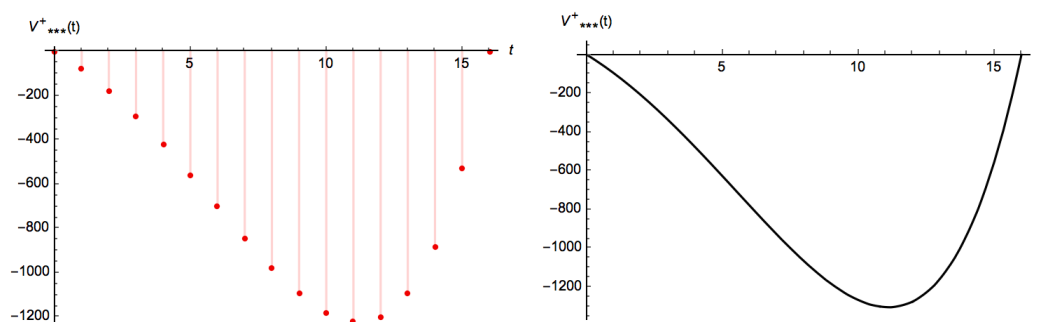
Poistné, v prípade diskretného času, vypočítane pomocou princípu ekvivalencie nám výjde

$$a_{***}^{Pre}(t) = 710,07 \quad 0 \leq t < 26 - x_1.$$

V prípade spojitého času dostaneme zo vzorca (4.5) poistné vo výške:

$$\tilde{a}_{***}(t) = 708,85 \quad 0 \leq t < 26 - x_1.$$

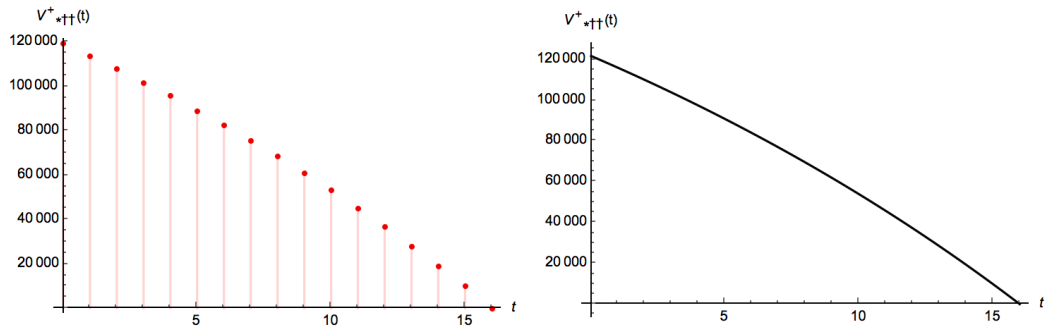
Rezervy pre prípad, kde sú všetci traja nažive sú znázornené na Obrázku 7.11. Rezerva je záporná z toho dôvodu, že riziková prirážka je väčšia ako poistné (typpadom odčítavame od poistného väčšiu hodnotu a dostaneme sa do záporných hodnôt). Riziko však, narozdiel od poistného, nie je konštantné. Zatiaľčo pravdepodobnosti úmrtia rodičov sa veľmi nemenia, počet možných vyplatených dôchodkov sa mení. Preto riziko je zo začiatku väčšie a potom klesá. Takže najprv sa odčítava od poistného vyššia hodnota (preto je rezerva záporná), neskôr sa odčíta menšia hodnota a preto sa rezerva pomaly dostáva do nuly.



Obr. 7.11: Grafy rezervy sirotského dôchodku pre stav, kde žijúci sú všetci traja.

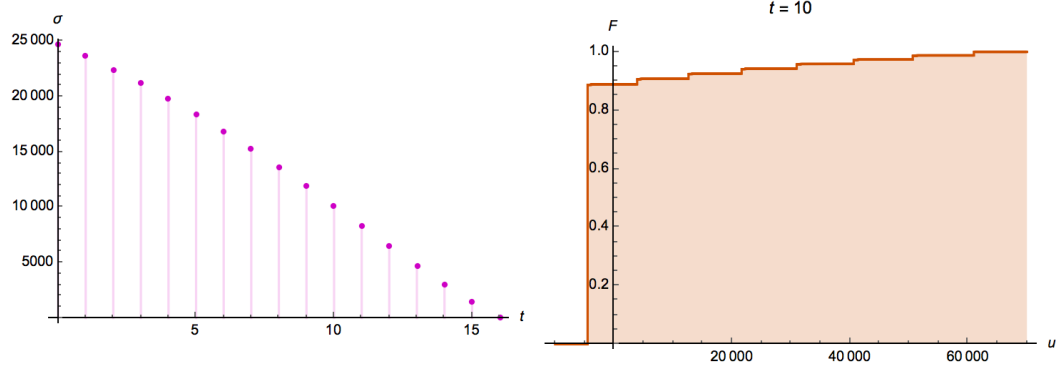
Rezervy pre prípad, kde sú po smrti obaja rodičia, ale dieťa je nažive, vidíme na Obrázku 7.12. Poznamenajme, že rezervy pre prípad, kde nežije len jeden z rodičov, ale dieťa áno, sú rovnaké ako v prípade, kde nežijú obaja rodičia, keďže sa dieťaťu vypláca rovnaký dôchodok.

Na záver tohto príkladu si ukážeme smerodajné odchýlky a distribučnú funkciu pre čas  $t = 10$ , pre stav, v ktorom žijú všetci. Z Obrázka 7.13 vidíme, že smerodajná odchýlka je klesajúca. Keďže poistné je konštatné, klesá predovšetkým z toho dôvodu, že sa riziko znižuje (čo je hlavným zdrojom neistoty).



Obr. 7.12: Grafy rezervy sirotského dôchodku pre stav, kde žijúce je len dieťa.

Ďalej vidíme, že so skoro 90% pravdepodobnosťou bude rezerva menšia ako 0, čo je spôsobené tým, že s vysokou pravdepodobnosťou poisťovňa žiadny dôchodok vyplácať nebude. Navyše si môžeme všimnúť, že maximálna čiastka je približne 60 tisíc, čo odpovedá vyplateným dôchodkom v prípade ak jeden z rodičov zomrie už na začiatku poistenia.



Obr. 7.13: Grafy smerodajnej odchýlky a distribučnej funkcie, v prípade, že sú živí všetci.

# 8. Simulácie pomocou metody Monte Carlo

V tejto kapitole by sme chceli porovnať vypočítané rezervy pre konkrétne typy poistenia so stochastickými rezervami získanými metódou Monte Carlo. Preto budeme simulovať životy fiktívnych poistených, čo znamená, že v každom roku ich poistenia budeme vedieť, či žijú alebo nie. Na simuláciu životov budeme potrebovať pravdepodobnosti úmrtia, ktoré zvolíme rovnaké ako pri vypočítaných rezervách (aby sme ich mohli s vypočítanými rezervami porovnať). Pre mužov budú teda pravdepodobnosti dané pomocou vzorca (7.1) a pre ženy pomocou vzorca (7.2). Poistné budeme voliť také isté, ako sme vypočítali pri konkrétnych typoch poistenia. Na základe toho potom v každom čase  $t$  vypočítame rezervu a to tak, že sčítame všetky budúce diskontované platby z poistenia (poistné so záporným znamienkom, poistné plnenie s kladným znamienkom). Dostaneme teda  $m$  hodnôt rezerv, kde  $m$  značí počet simulácii (počet fiktívnych poistených). Na základe nich vieme vypočítať rezervu pre určitý stav, ktorú dostaneme ako priemer rezerv, ale len takých, ktorí sú v tomto stave. Napríklad, ak nás zaujíma rezerva pre stav, kde poistený žije, z priemerovania vylúčime rezervy, pri ktorých je poistený po smrti. Ďalej z  $m$  rezerv, vypočítame výberový rozptyl resp. výberovú smerodajnú odchýlku pomocou príkazu *Variance* resp. *StandardDeviation*. Následne z týchto dát vieme vypočítať empirickú distribučnú funkciu.

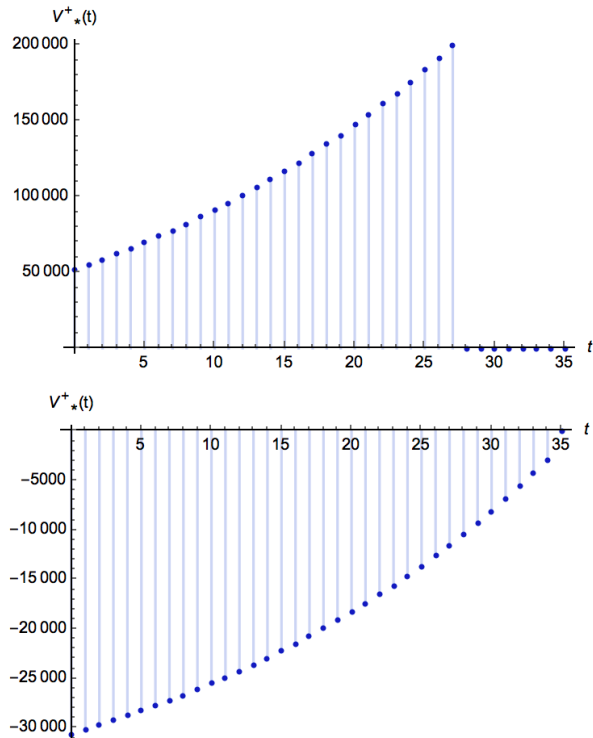
Simulácie spravíme pre štyri typy poistenia: kapitálové poistenie pre prípad smrti, kapitálové zmiešané poistenie, pre dôchodkové poistenie 2 osôb a pre sirotský dôchodok.

## 8.1 Kapitálové poistenie pre prípad smrti

Aby sme vedeli simulácie porovnať s vypočítanými rezervami, poistený bude opäť 30 ročný muž. Spravíme 50 000 opakovaní, čo znamená, že budeme mať 50 000 fiktívnych mužov, kde každý z nich platí rovnaké poistné, ktoré je rovné 1 469,48 (vypočítali sme v 7. kapitole), poistné plnenie je stále rovné 200 000. Ďalšia vec, ktorá sa nezmení je úroková sadzba, ostáva teda rovná 3,5%.

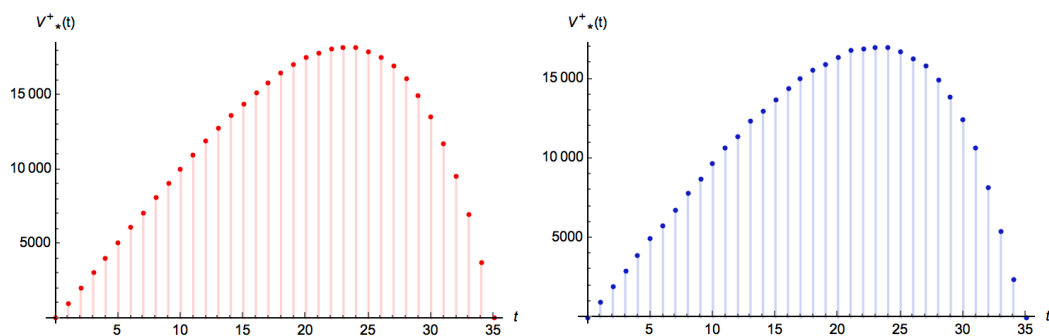
Najprv nasimulujeme priebeh života každého z 50 000 mužov. Následne pre každú simuláciu vypočítame výšku rezervy pre obdobie od 0. do 35. roku poistenia. Na Obrázku 8.1.(horný graf) sú znázornené rezervy pre poistenie, kde muž zomrel počas 26. roku poistenia (ako 56 ročný), tympádom oprávnenej osobe bolo na konci 26. roku poistenia vyplatené poistné plnenie 200 000. Rezervy do času 26, sme získali sčítaním diskontovaného poistného ale aj diskontovaného poistného plnenia. Po tomto roku, už rezerva bude nulová, keďže neprebíhali žiadne budúce platby. Graf podtým odpovedá rezervám, kde poistený žil počas celého poistenia, tympádom sme rezervu dostali ako súčet diskontovaných budúcich poistných.

Teraz by sme chceli vedieť priemernú výšku rezervy v čase  $t$ , za podmienky, že poistený v čase  $t$  žije (v prípade, že je po smrti, je rezerva nulová). Preto z hodnôt rezerv, ktoré nám vznikli pre každého z 50 000 fiktívnych poistených, vyberieme tie, pri ktorých je poistený nažive a spriemerujeme ich. Finálne hodnoty rezerv



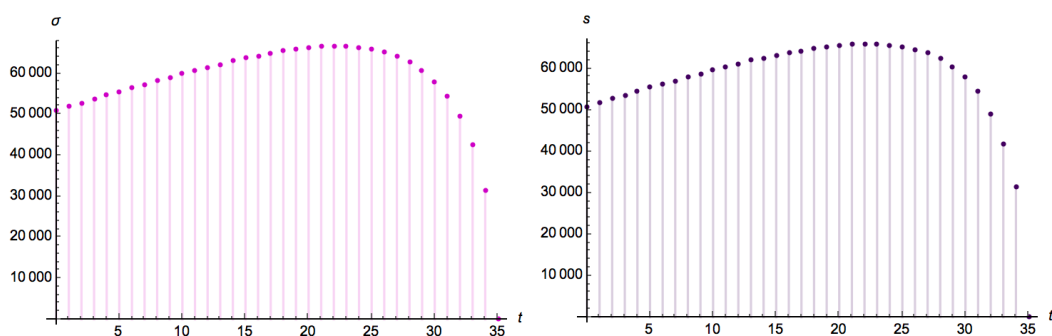
Obr. 8.1: Rezervy pre 2 konkrétne simulácie; poistnený zomrie v priebehu 26. roku poistenia ako 56. ročný (horný graf), poistnený žije aj v 65. roku života (dolný graf).

môžeme vyčítať z Obrázka 8.2 (graf vpravo). Na tomto obrázku taktiež vidíme vypočítané rezervy podľa vzorcov 2.1 a 2.2 (ľavý graf; viď tiež Obrázok 7.2.), z čoho vieme usúdiť, že tvar krivky je rovnaký. Ak by nás zaujímal maximálny rozdiel medzi vypočítanými rezervami a simuláciou, tak ľahko vypočítame, že tento rozdiel je 1 494,97 a je to konkrétne pre rezervu v čase 33.

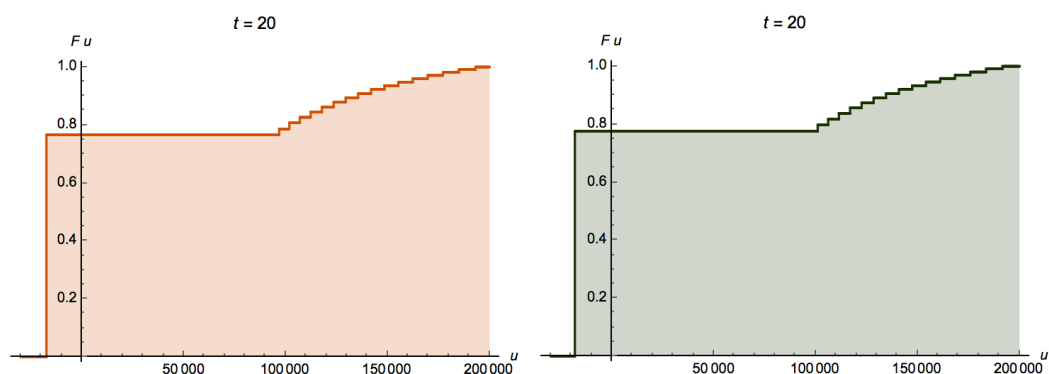


Obr. 8.2: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti.

Podobne porovnáme aj vypočítanú smerodajnú odchýlku s výberovou smerodajnou odchýlkou (označíme  $s$ ), ktorú sme vypočítali zo simulácii. Porovnanie vidíme na Obrázku 8.3. Najväčší rozdiel je v čase 23, kde vypočítaná smerodajná odchýlka je o 773,616 menšia ako výberová smerodajná odchýlka. Porovnanie distribučných funkcií zas vidíme na Obrázku 8.4.



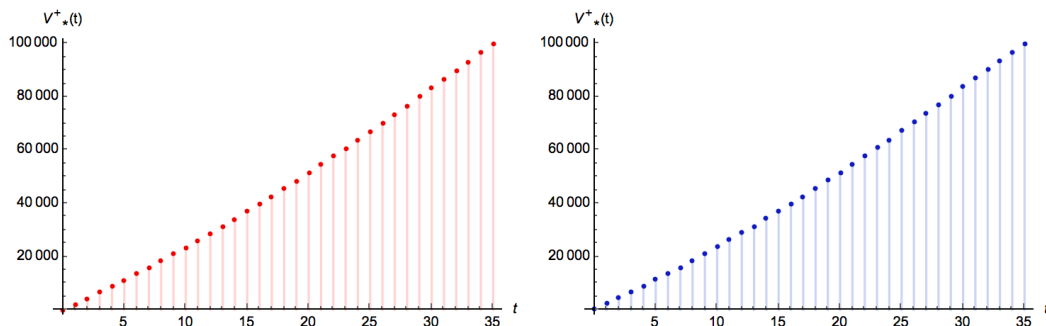
Obr. 8.3: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti.



Obr. 8.4: Porovnanie vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti.

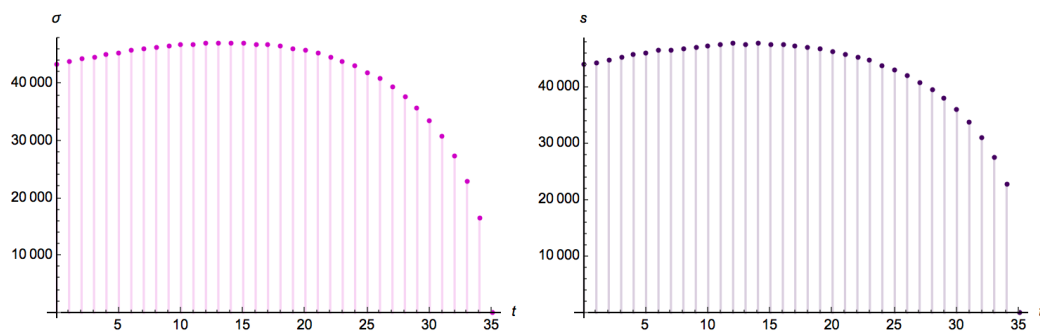
## 8.2 Kapitálove zmiešané poistenie

Opäť rovnaký postup zopakujeme pre kapitálové zmiešané poistenie. Vytvoríme skupinu 50 000 fiktívnych 30 ročných mužov a nasimulujeme ich priebeh života. Ak sa jedinec dožije 65 rokov, pre rezervu do času 35 budeme diskontovať okrem poistného, ktoré je rovné 2 542,79 (vypočítali sme ho v 7. kapitole) aj poistné plnenie v prípade dožitia, čo je v našom prípade 100 000. Ak sa jedinec nedožije tohto veku, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, budeme diskontovať poistné plnenie vo výške 200 000 a poistné. Na záver, spriemerujeme všetky rezervy, kde poistení sú nažive a výjdu nám hodnoty, ktoré môžeme vyčítať z pravého grafu na Obrázku 8.5. Vľavo na tomto obrázku sú znázornené vypočítané rezervy pomocou Thieleho diferenčnej rovnice (viď tiež Obrázok 7.4.), vďaka ktorým môžeme skonštatovať, že viditeľné rozdiely medzi rezervami nevidíme. Je taktiež zrejmé, že hodnota v čase 35 bude rovná 100 000, keďže každému, kto dožije 65. roku života sa vyplatí daná čiastka a my priemerujeme len také rezervy, kde sa čiastka vyplatí. Ešte môžeme poznamenať, že najväčší rozdiel medzi rezervami je v čase 32, kde vypočítaná rezerva je o 541,623 menšia.

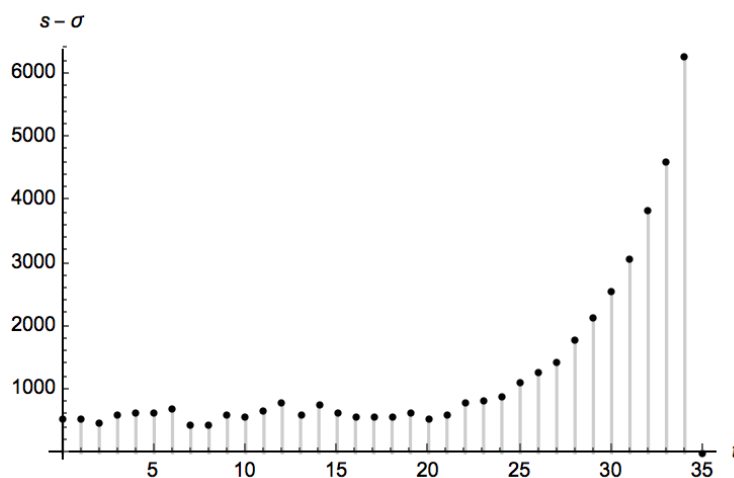


Obr. 8.5: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre kapitálové zmiešané poistenie.

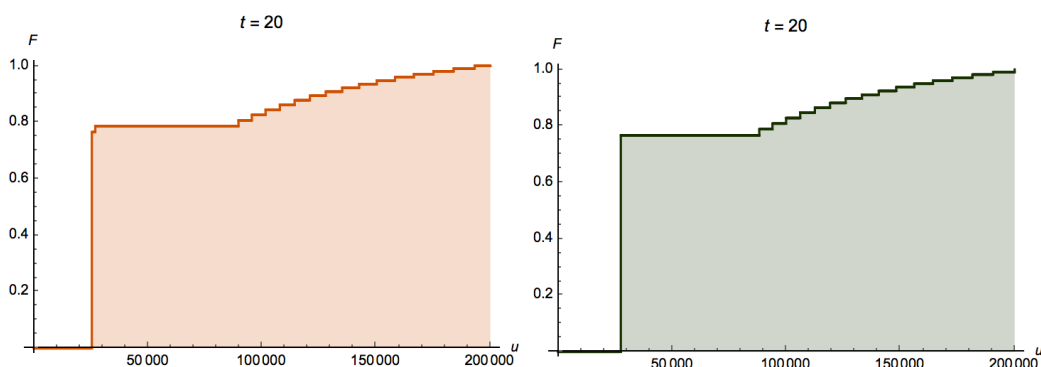
Podobne opäť porovnáme smerodajné odchýlky. Výsledok vidíme na Obrázku 8.5, z ktorého je zrejmé, že najväčší rozdiel bude v čase 34. Konkrétne je rozdiel 6 412,36. Ostatné rozdiely môžeme vyčítať z Obrázka 8.7. Obdobne pre distribučné funkcie. Rozdiely môžeme vyčítať z Obrázka 8.8.



Obr. 8.6: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre kapitálové zmiešané poistenie.



Obr. 8.7: Rozdiely medzi vypočítanou smerodajnou odchýlkou a smerodajnou odchýlkou zo simulácie.



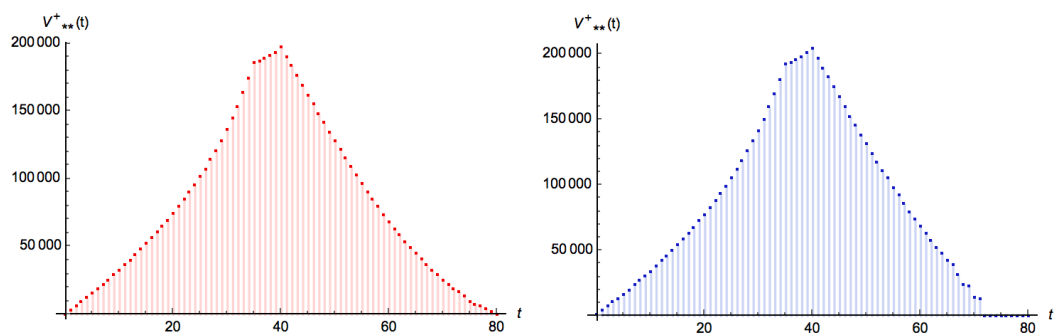
Obr. 8.8: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre kapitálové zmiešané poistenie.

### 8.3 Dôchodkové poistenie 2 osôb

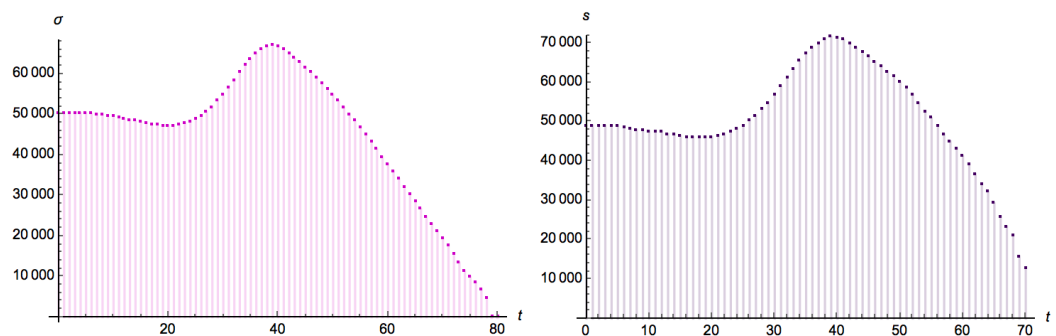
Tentoraz budeme generovať 50 000 párov, ktorí na začiatku poistenia majú 30 rokov (muž) a 25 rokov (žena). V prípade, že jeden z nich zomrie, bude ten druhý z nich dostávať pravidelnú čiastku 10 000. Čiastku v tejto hodnote bude dostávať, aj keď dovŕši 65 rokov.

Opäť najprv nasimulujeme priebeh obidvoch životov, tentokrát až do času  $t = 80$ . Potom, pre každý pár, vypočítame rezervu v čase  $t$  ako sumu diskontovaných platieb od  $t$  po  $80 - t$ , ktoré budú nasledovať. Ak sú obaja živí a majú obaja pod 65 rokov, pričítame 2 krát diskontovanú hodnotu poistného, ktoré zvolíme rovnaké ako pri vypočítaných rezervách, teda 1 767,02. Ak má pod 65 rokov len manželka, pripočítame diskontovaný dôchodok od ktorého odčítame diskontované poistné a ak majú obaja nad 65 rokov, pripočítame 2 krát diskontovanú hodnotu dôchodku (t.j. 20 000). V prípade, že bude žiť len jeden, k sume pribudne len 1 diskontovaná hodnota dôchodku (t.j. 10 000). Na záver v každom čase  $t$  spravíme priemer všetkých rezerv, kde poistení sú v určitom stave. Najprv nás zaujíma stav, kedy žijú obidvaja. Výsledky rezerv zo simulácii, spolu s vypočítanými rezervami, môžeme vyčítať z Obrázka 8.9. Vidíme, že najväčšie zmeny sú od času 70. Je to z toho dôvodu, že pri diferenčných rovniciach sme mali ohraničujúcu podmienku, aby sa rezerva až v čas 80 rovnala 0, zatiaľčo pri simuláciach, sme výšku rezervy v čase napr. 75 vypočítali ako priemer z tých rezerv, kde sú nažive obaja a keďže úmrtnosť muža v čase 75 (muž je vtedy 105 ročný) je 1, takéto rezervy neexistovali, a teda program ich určil ako nulové. Preto nás budú zaujímať hodnoty hodnoty rezerv len do  $t = 75$ , avšak ak by sa predsa stalo, že poistený prežije aj vek 105 rokov, vďaka Thieleho diferenčným rovniciam vieme, aká rezerva by po tomto čase mala byť. Porovnanie smerodajných odchýlok a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii môžeme vidieť na Obrázku 8.10. Poznamenajme, že graf výberových smerodajných odchýlok obsahuje hodnoty len do  $t = 70$ , pretože po tomto čase sme už nemali dostatočný počet pozorovaní na vypočítanie odchýlky. Druhý najväčší rozdiel medzi hodnotami (po rozdiely v čase 70, ktorý je 6 735,95) je v čase 50 a to konkrétne 5 325,27. Porovnanie distribučných funkcií pre čas  $t = 60$  je na Obrázku 8.11. a Obrázku 8.12.

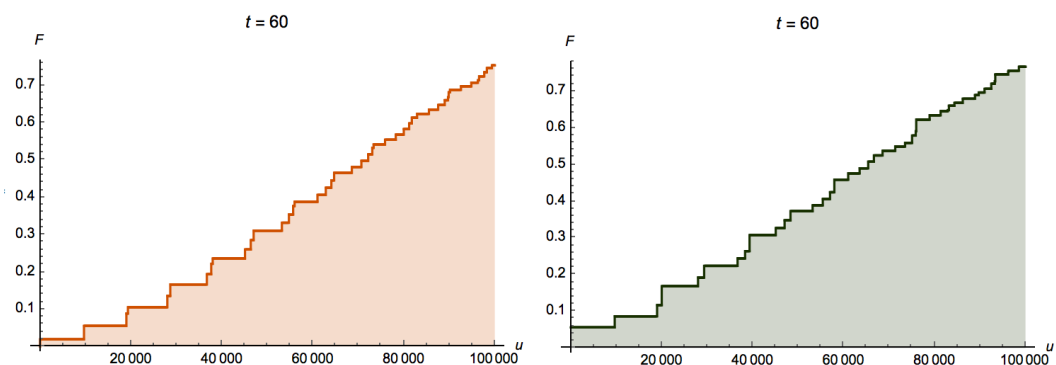
Teraz nás ešte zaujímajú rezervy, v prípade, že žije len jeden z poistených. Predpokladajme najprv, že nažive je už len manželka, teda kým bude žiť, bude dostávať dôchodok. Tentoraz nasimulujeme 10 000 priebehov jej života a v kaž-



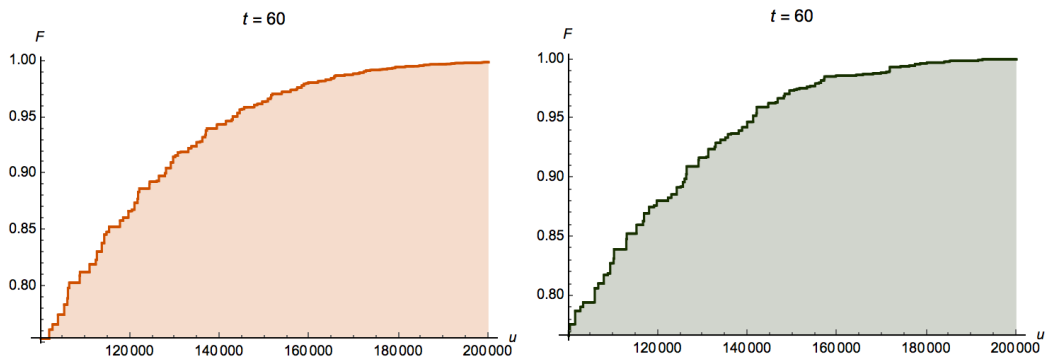
Obr. 8.9: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú.



Obr. 8.10: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú.

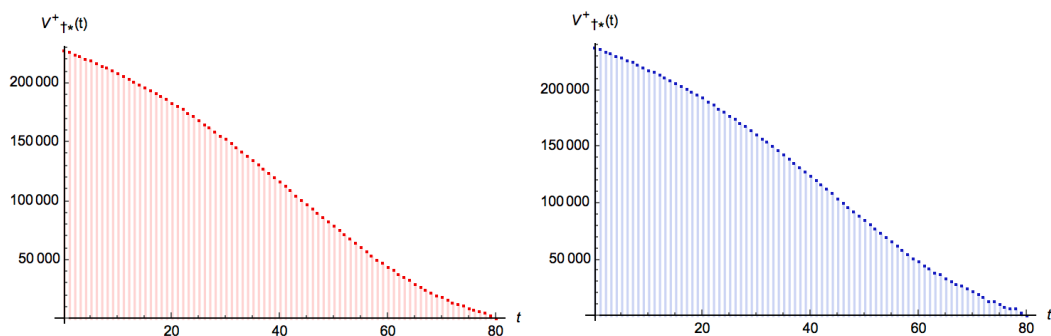


Obr. 8.11: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú, pre hodnoty  $u \leq 100\,000$

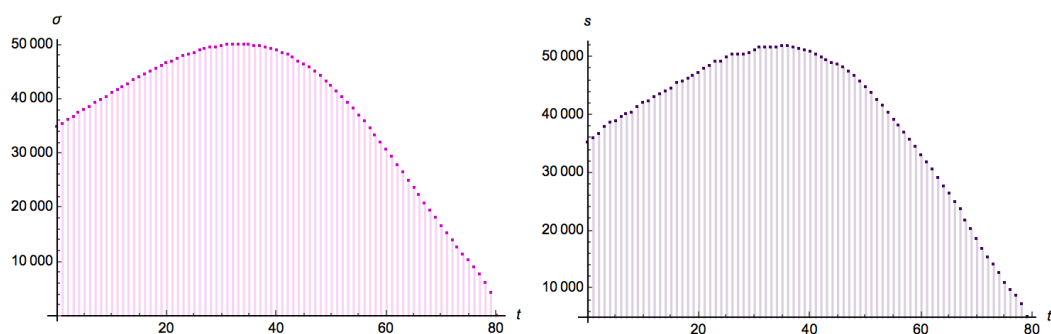


Obr. 8.12: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú, pre hodnoty  $u > 100\,000$

dom vypočítame rezervu pre všetky  $t$  od 0 do 80. Následne spriemerujeme hodnoty tých rezerv, pri ktorých manželka ostane ešte stále nažive. Výsledky spolu s porovnaním z vypočítaných rezerv môžeme vidieť na Obrázku 8.13. Porovnanie odchýlok zas vidíme na Obrázku 8.14. a distribučných funkcií na Obrázku 8.15.

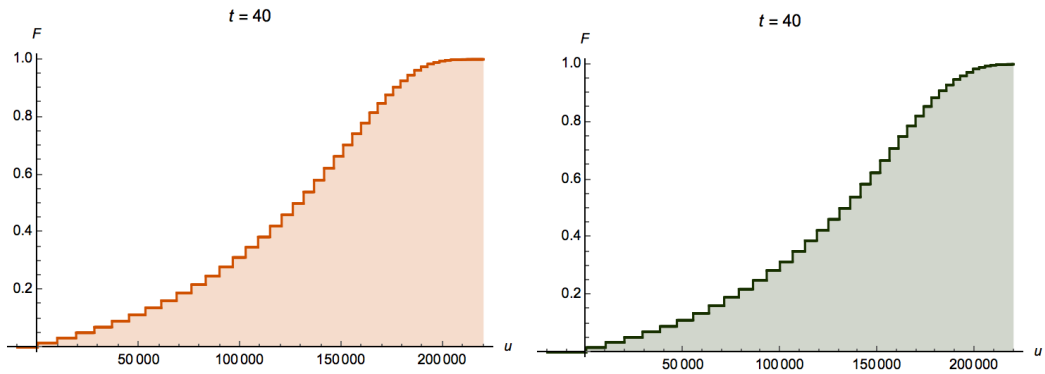


Obr. 8.13: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácií (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka.



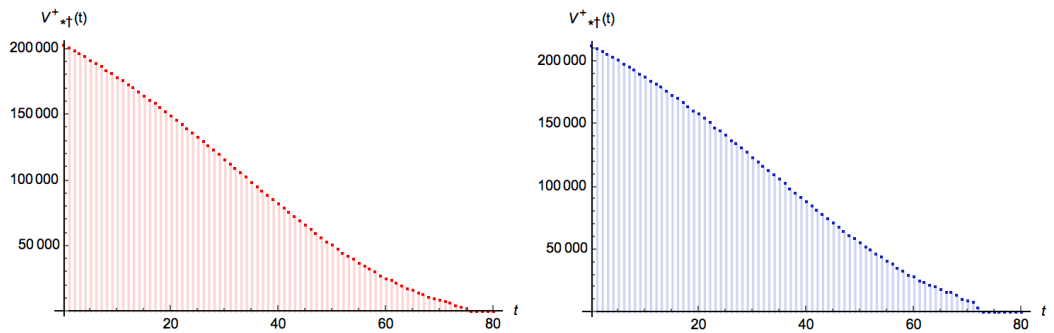
Obr. 8.14: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácií (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka.

Obdobne v prípade, ak žije len manžel. Výsledok vidíme na grafe vpravo na Obrázku 8.16. Porovnanie odchýlok zas vidíme na Obrázku 8.17. a porovnanie

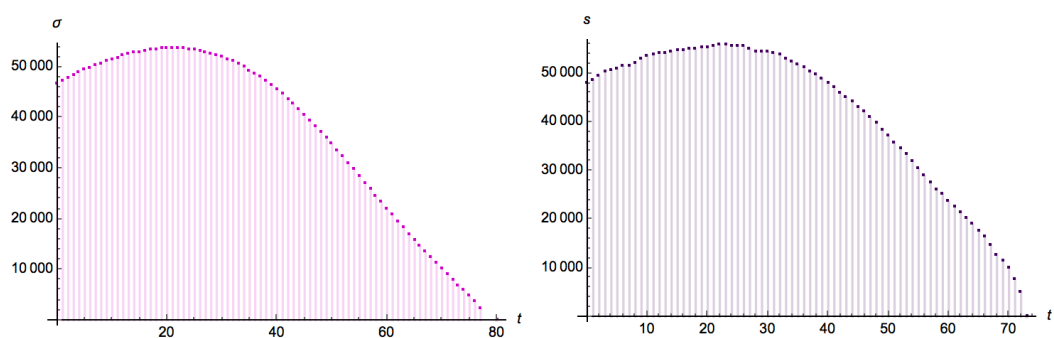


Obr. 8.15: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka.

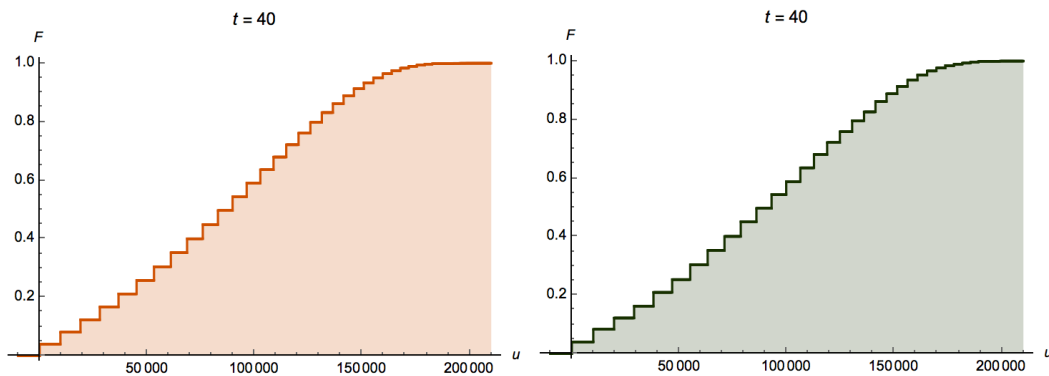
distribučných funkcií na Obrázku 8.18.



Obr. 8.16: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácií (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel.



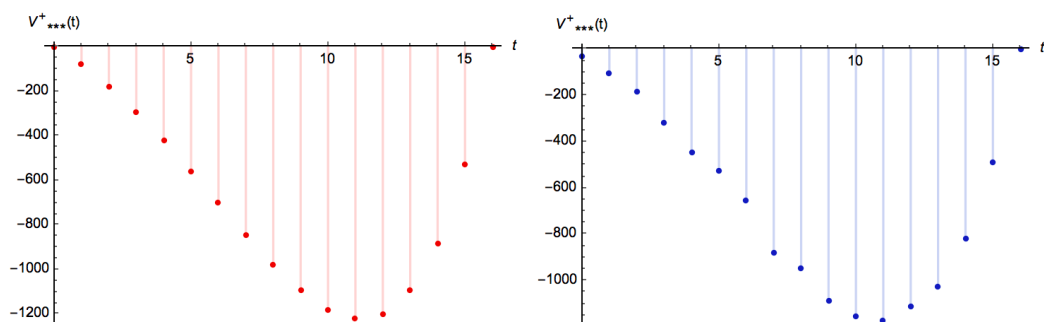
Obr. 8.17: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácií (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel.



Obr. 8.18: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel.

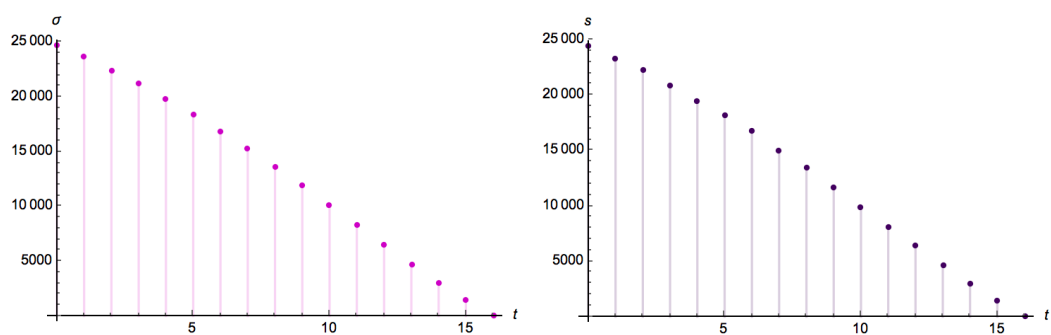
## 8.4 Sirotský dôchodok

Simulačný priebeh pri tomto type dôchodku bude obdobný ako v predchádzajúcich prípadoch, budeme však simulovať priebeh troch životov. Počet simulácií stanovíme na 50 000. Pre jednu simuláciu, rezervu v čase  $t$  vypočítame ako sumu diskontovaných budúcich poistných (výška jedného je 710,07), v prípade ak žijú všetci traja a ak žije len jeden z rodičov, prípadne ani jeden, tak pripočítavať budeme diskontovanú výšku sirotského dôchodku, čo je v našom prípade 10 000. Na záver dostaneme spriemerované rezervy znázornené na Obrázku 8.19. spolu s vypočítanými rezervami. Ochýlky pre tento prípad sú znázornené na Obrázku 8.20. Distribučnú funkciu pre čas  $t = 10$  vidíme na Obrázku 8.21.

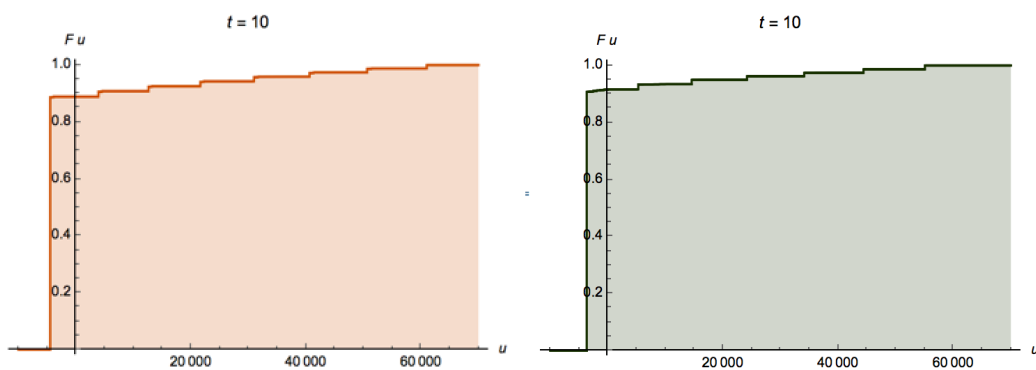


Obr. 8.19: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácií (vpravo) pre sirotský dôchodok, ak sú nažive všetci traja.

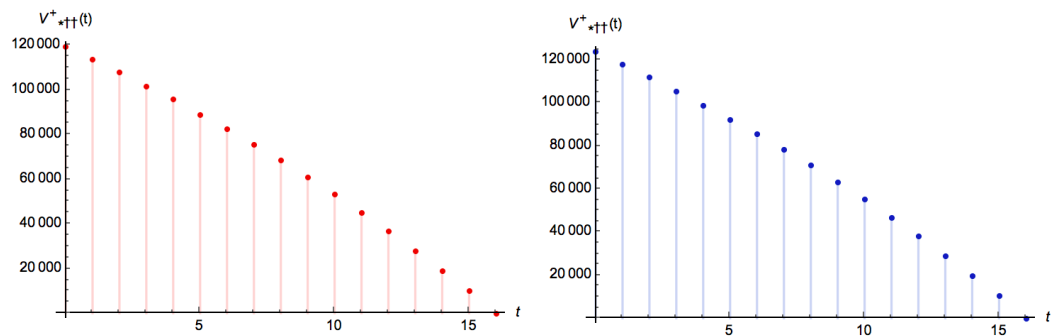
Zdôraznime, že rezerva, ktorá nám vyšla je pre prípad, ak je nažive dieťa aj obaja rodičia. Rezervy pre prípady, kde nežije jeden prípadne obaja rodičia je znázornená na Obrázku 8.22. Porovnanie odchýlok zas môžeme vidieť na Obrázku 8.23 a porovnanie distribučných funkcií pre čas  $t = 10$  na Obrázku 8.24. Poznamenajme, že sme simulovali už len priebeh života dieťaťa, preto je rezerva rovnaká pre všetky 3 prípady.



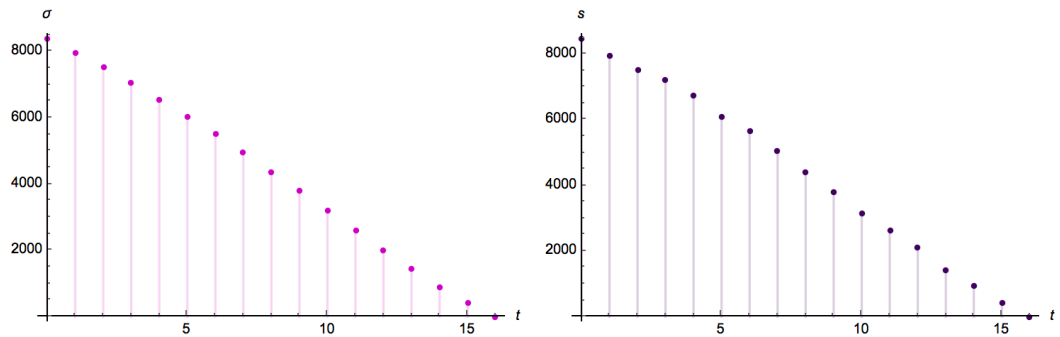
Obr. 8.20: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak sú nažive všetci traja.



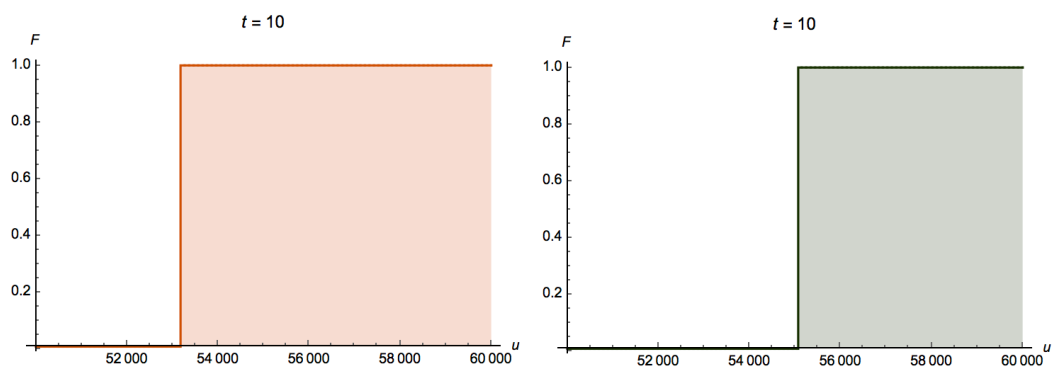
Obr. 8.21: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak sú nažive všetci traja.



Obr. 8.22: Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov.



Obr. 8.23: Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov.



Obr. 8.24: Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov.

# Záver

Hlavným prínosom diplomovej práce bolo odvodenie diferenčných a diferenciálnych rovníc pre konkrétne typy poistenia, ďalej nájdenie explicitných riešení diferenciálnych rovníc, kde sa jednalo o lineárne nehomogénne rovnice 1. radu, následná implementácia riešenia pre vybrané príklady a implementácia simulácii Monte Carlo, ktoré mi slúžili na porovnanie s výsledkami z rovníc.

Na začiatku práce som naštudovala a spísala všetky potrebné pojmy, ktoré sa využívajú pri Thieleho diferenčných a diferenciálnych rovniciach. Následne som odvodila rovnice. V prípade diferenciálnych rovníc, som si jednotlivé komponenty rozobrala a uviedla prečo sa v rovnici nachádzajú. Potom som rovnice odvodila pre konkrétne typy poistenia. V porovnaní s primárnou literatúrou (Koller (2012)), som vo vzorcoch vypustila nulové členy a tak vzorce sprehľadnila. Navyše som sama odvodila rovnice pre sirotsky dôchodok spolu s dôkladným rozobratím všetkých komponentov. V ďalšej kapitole som sa venovala výpočtu poistného, čo znamená, že som pre každý typ poistenia sama odvodila výšku poistného buď podľa princípu ekvivalencie alebo podľa rozobratia rezerv v diskretnom čase, v spojitom čase som výšku poistného dopočítala pomocou podmienky, že rezerva v čase nula je nulová. V diskretnom čase som sa potom venovala aj distribučnej funkcii a výpočtu smerodajných odchýlok, čo môže byť veľmi užitočné napríklad pri analýze rizík poistenia, prípadne pre stanovenie rizikovej prirážky a pre mnoho ďalšieho. Navyše som v konkrétnych prípadoch, pre kontrolu vzorca, z distribučnej funkcie vypočítala strednú hodnotu a tak zistila, že sa zhoduje s rezervou. V záverečnej časti som potom spravila simulácie v programe Mathematica, z nich vypočítala rezervy, distribučné funkcie a smerodajné odchýlky a porovнала tieto výsledky s výsledkami vypočítanými pomocou diferenčných a diferenciálnych rovníc.

Na záver môžem zhrnúť, že v troch prípadoch zo štyroch sú hodnoty zo simulácie podobné s hodnotami vypočítanými pomocou Thieleho diferenčných rovníc, avšak výpočet zo simulácii trval dlhšie. V štvrtom prípade, konkrétne v prípade dôchodkového poistenia, sa rezervy výraznejšie líšili, čo je spôsobené aj ohraničujúcou podmienkou ale aj menším počtom simulácii, avšak väčší počet simulácii by trval dlho a preto sme ho už neuskutočnili. Videli sme, že odchýlky pri tomto poistení sú menšie, ak počítame pomocou Thieleho rovníc, preto by som aj v tomto prípade, ako aj v ostatných, považovala Thieleho rovnice za vyhovujúcejšie na výpočet rezerv.

# Zoznam použitej literatúry

KOLLER, MICHAEL (2012). *Stochastic models in life insurance*. 2nd edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.

CIPRA, TOMÁŠ (2010). *Financial and Insurance Formulas*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

COHN, DONALD (1997). *Measure theory*. Springer Science and Business Media 1997.

JOHNSONBAUGH, RICHARD (2002). *Foundations of Mathematical Analysis*. Courier Corporation 2002.

ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD (2021). *Úmrtnostní tabulky za ČR, regiony soudržnosti a kraje - 2019–2020*. [online] Praha: Český statistický úřad [cit. 2022-01-22]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni-tabulky-za-cr-regiony-soudrznosti-a-kraje-i09aftm7w4#>

# Zoznam obrázkov

7.1	Pravdepodobnosti úmrtia a ich aproximácia. . . . .	36
7.2	Grafy rezervy pre kapitálové poistenie pre prípad smrti. . . . .	37
7.3	Smerodajná odchýlka a distribučná funkcia pre kapitálové poistenie pre prípad smrti. . . . .	37
7.4	Grafy rezervy pre kapitálove zmiešané poistenie. . . . .	38
7.5	Grafy smerodajnej odchýlky a distribučnej funkcie v hodnote $t = 20$ pre kapitálove zmiešané poistenie. . . . .	38
7.6	Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú. . . . .	39
7.7	Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že je žijúci len manžel. . . . .	40
7.8	Graf rezervy pre dôchodkové poistenie, v prípade, že je žijúca len manželka. . . . .	40
7.9	Graf smerodajnej odchýlky pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú. . . . .	41
7.10	Grafy distribučnej funkcie v čase $t = 60$ pre dôchodkové poistenie, v prípade, že obaja poistení žijú (graf pre hodnoty $u \leq 100\ 000$ vľavo, pre vyššie hodnoty vpravo). . . . .	41
7.11	Grafy rezervy sirotského dôchodku pre stav, kde žijúci sú všetci traja. . . . .	42
7.12	Grafy rezervy sirotského dôchodku pre stav, kde žijúce je len dieťa. . . . .	43
7.13	Grafy smerodajnej odchýlky a distribučnej funkcie, v prípade, že sú živí všetci. . . . .	43
8.1	Rezervy pre 2 konkrétne simulácie; poistnený zomrie v priebehu 26. roku poistenia ako 56. ročný (horný graf), poistnený žije aj v 65. roku života (dolný graf). . . . .	45
8.2	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti. . . . .	45
8.3	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti. . . . .	46
8.4	Porovnanie vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre kapitálové poistenie pre prípad smrti. . . . .	46
8.5	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre kapitálove zmiešané poistenie. . . . .	47
8.6	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre kapitálove zmiešané poistenie. . . . .	47
8.7	Rozdiely medzi vypočítanou smerodajnou odchýlkou a smerodajnou odchýlkou zo simulácie. . . . .	47
8.8	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre kapitálove zmiešané poistenie. . . . .	48

8.9	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú. . . . .	49
8.10	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú. . . . .	49
8.11	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú, pre hodnoty $u \leq 100\,000$ . . . . .	49
8.12	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak obaja poistení žijú, pre hodnoty $u > 100\,000$ . . . . .	50
8.13	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka. . . . .	50
8.14	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka. . . . .	50
8.15	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúca len manželka. . . . .	51
8.16	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel. . . . .	51
8.17	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel. . . . .	51
8.18	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre dôchodkové poistenie, v prípade ak je žijúci len manžel. . . . .	52
8.19	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak sú nažive všetci traja. . . . .	52
8.20	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak sú nažive všetci traja. . . . .	53
8.21	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak sú nažive všetci traja. . . . .	53
8.22	Graf vypočítaných rezerv (vľavo) a rezerv zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov. . . . .	53
8.23	Graf vypočítaných smerodajných odchýlok (vľavo) a výberových smerodajných odchýlok zo simulácii (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov. . . . .	54
8.24	Graf vypočítanej distribučnej funkcie (vľavo) a distribučnej funkcie zo simulácie (vpravo) pre sirotsky dôchodok, ak je mŕtvy aspoň jeden z rodičov. . . . .	54

# Zoznam použitých skratiek

- \* - značí stav, kedy je poistený živý
- † - značí stav, kedy je poistený mŕtvy
- $V_j^+(t)$  - rezerva, kde poistený je v čase  $t$  v stave  $j$
- $W_j^+(t)$  - diskontovaná rezerva, kde poistený je v čase  $t$  v stave  $j$
- $a_i(t)$  - suma peňazí, ktorú dostane poistený do čase  $t$  po odčítaní výdajov, ak do času  $t$  aj v čase  $t$  je v stave  $i$ , ak uvažujeme spojitý čas
- $a_{ij}(t)$  - suma peňazí, ktorú dostane poistený v čase  $t$  po odčítaní výdajov, ak v čase  $t$  zmení svoj stav z  $i$  na  $j$ , ak uvažujeme spojitý čas
- $a_i^{Pre}(t)$  - suma peňazí, ktorú dostane poistený v čase  $t$  po odčítaní výdajov, ak v čase  $t$  je v stave  $i$ , ak uvažujeme diskretný čas
- $a_{ij}^{Post}(t)$  - suma peňazí, ktorú dostane poistený v čase  $t + 1$  po odčítaní výdajov, ak v čase  $t$  je v stave  $i$  a v čase  $t + 1$  je v stave  $j$ , ak uvažujeme diskretný čas
- $p_{ij}(s,t)$  - pravdepodobnosť, že sa poistený dostane do stavu  $j$  v čase  $t$ , za podmienky, že v čase  $s$  bol v stave  $i$ .
- $q(x + t + 1)$  - pravdepodobnosť, že poistený zomrie ako  $x + t + 1$  ročný, za podmienky, že ako  $x + t$  ročný, bol živý.
- ${}_k p_x$  - pravdepodobnosť, že poistený, ktorý má  $x$  rokov, prežije ešte  $k$  rokov.
- $\mu_i(t), \mu_{ij}(t)$  - prechodové sadzby
- $v(t), v_t$  - diskontné faktory
- $s$  - vek, ktorý je hraničný pre vyplácanie poistného plnenia
- $c$  - kladná výška poistného
- $b$  - výška poistného plnenia, ak poistený zomrie
- $g$  - výška poistného plnenia, ak sa poistený dožije  $s$  rokov
- $\omega$  - maximálne vek, ktorého sa osoba môže dožiť, rovný 105

# A. Prílohy

Diferenčné rovnice

Termínované poistenie v prípade smrti

```
Clear["Global`*"];
```

```
i = 0.035; disk = Exp[-i]; b := 200000; x := 30; s := 65;
```

```
vyplata[y_] := If[0 <= y <= s - x, b, 0];
```

```
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]
```

V\_Payout

```
sol11[n_] :=
```

```
sol11[n] =
```

```
disk pumrtiaM[x + n + 1] vyplata[n] +
```

```
disk (1 - pumrtiaM[x + n + 1]) sol11[n + 1]
```

```
sol11[s - x] = 0;
```

V\_Premium, P = 1

```
sol22[n_] :=
```

```
sol22[n] = +1 + disk (1 - pumrtiaM[x + n + 1]) sol22[n + 1];
```

```
sol22[s - x] = 0;
```

Výpočet poistného

```
Platit = sol11[0]/sol22[0]
```

```
Platba[y_] := If[0 <= y < s - x, Platit, 0];
```

Výpočet rezervy termínovaného poistenia

```
solF[n_] :=
```

```
solF[n] = -Platba[n] + disk (1 - pumrtiaM[x + n + 1])
```

```
solF[n + 1] + disk pumrtiaM[x + n + 1] vyplata[n] ;
```

```
solF[s - x] = 0;
```

```
DiscretePlot[solF[i], {i, 0, 35}, PlotStyle ->
```

```
RGBColor[0.94, 0., 0.],
```

```
AxesLabel -> {t,
```

```
"\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\!\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\)\)\], \
```

```
\(*\)\)\(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
```

```
AxesStyle -> Black]
```

Druhý moment, rozptyl

```
PlatbaDisk[y_] := If[0 <= y < s - x, -Platit*(1/disk), 0];
```

```
Druhy[t_] :=
```

```
Druhy[t] =
```

```
disk^2 (1 - pumrtiaM[x + t + 1]) (PlatbaDisk[t]^2 +
```

```
2*PlatbaDisk[t]*solF[t + 1] + Druhy[t + 1]) +
```

```
disk^2 pumrtiaM[x + t + 1] vyplata[t]^2;
```

```
Druhy[s - x] = 0;
```

```
Rozptyl[t_] := Rozptyl[t] = Druhy[t] - solF[t]^2
```

```
DiscretePlot[Sqrt[Rozptyl[i]], {i, 0, 35},
```

```

PlotStyle -> RGBColor[0.81, 0., 0.78],
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
PlotLabel -> None,
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

Distribučná funkcia
DistMrtvy[t_, u_] := If[u <= 0, 0, 1]
DistZivy[e_, u_] :=
  DistZivy[e,
    u] = (1 - pumrtiaM[x + e]) DistZivy[e + 1,
      disk^(-1) (u + Platba[e])] +
    pumrtiaM[x + e] DistMrtvy[e + 1, disk^(-1) u - vyplata[e]];
DistZivy[s - x + 1, u_] := DistZivy[s - x + 1, u] =
  If[u <= 0, 0, 1]
DiscretePlot[DistZivy[20, w], {w, -30000, 200000},
  PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All,
  AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 20], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

Stredná hodnota z distribučnej funkcie
- Integrate[DistZivy[20, y], {y, -Infinity, 0}] +
  NIntegrate[(1 - DistZivy[20, t]), {t, 0, Infinity}]

Kapitálové poistenie
Nastavenia
Clear["Global'"];
i = 0.035; g = 100000; disk = Exp[-i]; b := 200000; x := 30;
s := 65;
vyplata[y_] := If[0 <= y < s - x, b, 0];
vyplata2[y_] := If[y == s - x, g, 0]; v[y_] := Exp[-i*y];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]

Výpočet POISTNÉHO podľa princípu ekvivalencia
Solve[P +
  Sum[P*v[k]*Product[(1 - pumrtiaM[x + a]), {a, 0, k}], {k, 1,
    34}] == b*v[1]*pumrtiaM[x] +
  Sum[b*v[l]*Product[(1 - pumrtiaM[x + a]), {a, 0, l - 1}]*
    pumrtiaM[x + l], {l, 2, 34}] +
  v[s - x]*100000*Product[(1 - pumrtiaM[x + m]), {m, 0, 35}], P]
Platba2[y_] := If[0 <= y <= s - x, -2542.79, 0];

Výpočet rezervy
solF2[n_] :=
  solF2[n] = -Platba2[n] +
    disk (1 - pumrtiaM[x + n + 1]) solF2[n + 1] +
    disk pumrtiaM[x + n + 1] (vyplata[n] + vyplata2[n]);

```

```

solF2[s - x] = 100000;
DiscretePlot[solF2[i], {i, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001', 0.', 0.'],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \(\+\)]\)\]), \
\(\*\)]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Druhý moment, rozptyl

```

PlatbaDisk[y_] := If[0 <= y < s - x, -2542.79*(1/disk), 0];
PlatbaDisk[s - x] := g;

```

```

Druhy2[t_] :=
  Druhy2[t] =
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x + t + 1]) (PlatbaDisk[t]^2 +
      2*PlatbaDisk[t]*solF2[t + 1] + Druhy2[t + 1]) +
    disk^2 *pumrtiaM[x + t + 1]*(vyplata[t])^2;

```

```

Druhy2[s - x] = g*g;
Rozptyl2[t_] := Druhy2[t] - solF2[t]^2
DiscretePlot[Sqrt[Rozptyl2[i]], {i, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

DistMrtvyK[t_, u_] := If[u < 0, 0, 1]
Platba[y_] := If[0 <= y <= s - x, 2542.79, 0];
DistZivyK[t_, u_] :=
  DistZivyK[t,
    u] = (1 - pumrtiaM[x + t]) DistZivyK[t + 1,
      disk^(-1) (u + Platba[t])] +
    pumrtiaM[x + t] DistMrtvyK[t + 1,
      disk^(-1) u - vyplata[t] - vyplata2[t]];
DistZivyK[s - x + 1, u_] := If[u <= g, 0, 1]
DiscretePlot[DistZivyK[20, w], {w, -20000, 200000},
  PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 20], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Stredná hodnota z distribučnej funkcie

```

strHod[k_] := - Integrate[DistZivyK[k, y], {y, -Infinity, 0}] +
  NIntegrate[(1 - DistZivyK[k, y]), {y, 0, Infinity}]
DiscretePlot[strHod[q], {q, 0, 35}]

```

Dôchodkové poistenie

Nastavenia

```

Clear["Global`*"];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2]
i = 0.035; disk =
  Exp[-i]; b := 10000; x1 := 30; x2 := 25; omega := 105;
vyplataZ[y_] := If[0 <= y <= omega - x2, b, 0];
vyplataM[y_] := If[0 <= y <= omega - x2, b, 0];
v[y_] := Exp[-i*y];

```

Výpočet POISTNĚHO podľa princípu ekvivalencia

```

PVP[c_] := c +
  Sum[v[k] c Product[(1 - pumrtiaM[x1 + q]), {q, 0, k}]*
    Product[(1 - pumrtiaZ[x2 + q]), {q, 0, k}], {k, 1,
    65 - x1 - 1}] + c +
  Sum[v[k] c Product[(1 - pumrtiaZ[x2 + q]), {q, 0,
    k}] Product[(1 - pumrtiaZ[x1 + q]), {q, 0, k}], {k, 1,
    65 - x2 - 1}]
PVV1 = Product[(1 - pumrtiaM[x1 + m]), {m, 0, 65 - x1}]*
  Sum[b v[k] Product[(1 - pumrtiaM[65 + q]), {q, 0,
    k - 65 + x1}], {k, 65 - x1 + 1, omega - x1}] +
  Product[(1 - pumrtiaZ[x2 + m]), {m, 0, 65 - x2}]*
  Sum[b v[k] Product[(1 - pumrtiaZ[65 + q]), {q, 0,
    k - 65 + x2}], {k, 65 - x2 + 1, omega - x2}]
PVV2 = Sum[
  Product[(1 - pumrtiaM[x1 + m]), {m, 0, 1}]*
  pumrtiaM[x1 + 1] Sum[
    b Product[(1 - pumrtiaZ[x2 + m]), {m, 0, k}] v[k], {k, 1 + 1,
    65 - x2}], {1, 0, 65 - x2 - 1}] +
  Sum[Product[(1 - pumrtiaZ[x2 + m]), {m, 0, 1}] pumrtiaZ[x2 + 1]
  Sum[
    b Product[(1 - pumrtiaM[x1 + m]), {m, 0, k}] v[k], {k, 1 + 1,
    65 - x1}], {1, 0, 65 - x1 - 1}]
Solve[PVP[c] == PVV1 + PVV2, c]
cecko = 1767

```

Výpočet rezervy Mrtvy Ziva

```

MrtvyZivaD[n_] :=
  MrtvyZivaD[n] =
    disk (1 - pumrtiaZ[x2 + n + 1]) (MrtvyZivaD[n + 1]
    + vyplataZ[n]);
MrtvyZivaD[105 - x2] = 0;
DiscretePlot[MrtvyZivaD[i], {i, 0, 105 - x2},
  PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001, 0., 0.],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\(*SubscriptBox[\(\!\(\(*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\)\], \
\(\[Dagger]*\)\)\)\)(t)"}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

```

Výpočet rezervy Zivy Mrtva
ZivyMrtvaD[n_] :=
  ZivyMrtvaD[n] =
    disk (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (ZivyMrtvaD[n + 1]
    + vyplataM[n]);
ZivyMrtvaD[105 - x2] = 0;
DiscretePlot[ZivyMrtvaD[i], {i, 0, 105 - x2},
  PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001', 0.', 0.'],
  AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\],
    \(*\
    \[Dagger]\)\)\(t)"}], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}

Výpočet rezervy Zivy Ziva
platba[y_] :=
  If[0 <= y < 65 - x1, -2*cecko,
    If[65 - x1 <= y < 65 - x2, -cecko, 0]];
vyplataZIVI[y_] :=
  If[65 - x1 <= y < 65 - x2, b, If[65 - x2 <= y < 105 - x2,
  2*b, 0]];
pomoc1[y_] :=
  disk pumrtiaM[
    x1 + y + 1] (1 - pumrtiaZ[x2 + y + 1]) (vyplataM[y] +
    MrtvyZivaD[y + 1]);
pomoc2[y_] :=
  disk pumrtiaZ[
    x2 + y + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + y + 1]) (vyplataZ[y] +
    ZivyMrtvaD[y + 1])
For[i = 0, i < 7, i++, pomoc2[75 + i] := 0]
ZivyZivaD[n_] :=
  ZivyZivaD[n] =
    platba[n] +
    disk (1 - pumrtiaZ[x2 + n + 1]) (1 -
    pumrtiaM[x1 + n + 1]) (vyplataZIVI[n] + ZivyZivaD[n + 1]) +
    pomoc1[n] + pomoc2[n] ;
ZivyZivaD[105 - x2] = 0;
DiscretePlot[ZivyZivaD[i], {i, 0, 105 - x2},
  PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001', 0.', 0.'],
  AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t],
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\], \
    \(**\)\)\(t)"}], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}

Druhý moment, rozptyl ŽM
DruhyMomZM[omega - x2] = 0;
DruhyMomZM[t_] :=
  DruhyMomZM[t] =

```

```

disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (vyplataM[t]^2 +
2 vyplataM[t] ZivyMrtvaD[t + 1] + DruhyMomZM[t + 1]);
RozptylZM[t_] := RozptylZM[t] = DruhyMomZM[t] - (ZivyMrtvaD[t])^2
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZM[i]], {i, 0, omega - x2},
PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
PlotLabel -> None,
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Druhý moment, rozptyl MŽ

```
DruhyMomMZ[omega - x2] = 0;
```

```
DruhyMomMZ[t_] :=
```

```
DruhyMomMZ[t] =
```

```
disk^2 (1 - pumrtiaZ[x2 + t + 1]) (vyplataZ[t]^2 +
```

```
2 vyplataZ[t] MrtvyZivaD[t + 1] + DruhyMomMZ[t + 1]);
```

```
RozptylMZ[t_] := RozptylMZ[t] = DruhyMomMZ[t] - (MrtvyZivaD[t])^2
```

```
DiscretePlot[Sqrt[RozptylMZ[i]], {i, 0, omega - x2},
```

```
PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
```

```
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
```

```
PlotLabel -> None,
```

```
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]
```

Druhý moment, rozptyl ŽŽ

```
platbaDisk[y_] :=
```

```
If[0 <= y < 65 - x1, -2*1765.914*(1/disk),
```

```
If[65 - x1 <= y < 65 - x2, -1765.914*(1/disk), 0]];
```

```
DruhyMomZZ[omega - x2] = 0;
```

```
DruhyMomZZ[t_] :=
```

```
DruhyMomZZ[t] =
```

```
disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (1 -
```

```
pumrtiaZ[x2 + t + 1]) ((vyplataZIVI[t] + platbaDisk[t])^2 +
```

```
2 (vyplataZIVI[t] + platbaDisk[t]) ZivyZivaD[t + 1] +
```

```
DruhyMomZZ[t + 1]) +
```

```
disk^2 pumrtiaM[
```

```
x1 + t + 1] (1 - pumrtiaZ[x2 + t + 1]) ((vyplataZ[t])^2 +
```

```
2 (vyplataZ[t]) MrtvyZivaD[t + 1] + DruhyMomMZ[t + 1]) +
```

```
disk^2 pumrtiaZ[
```

```
x2 + t + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) ((vyplataM[t])^2 +
```

```
2 (vyplataM[t]) ZivyMrtvaD[t + 1] + DruhyMomZM[t + 1]);
```

```
RozptylZZ[t_] := RozptylZZ[t] = DruhyMomZZ[t] - (ZivyZivaD[t])^2
```

```
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZZ[i]], {i, 0, omega - x2},
```

```
PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
```

```
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
```

```
PlotLabel -> None,
```

```
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]
```

Distribučná funkcia ZM

```
DistMM[t_, u_] := DistMM[t, u] = If[u <= 0, 0, 1];
```

```

DistZM[t_, u_] :=
  DistZM[t,
    u] = (1 - pumrtiaM[x1 + t]) DistZM[t + 1,
      disk^(-1) * u - vyplataM[t]] +
      pumrtiaM[x1 + t] DistMM[t + 1, disk^(-1)*u];
DistZM[omega - x2 + 1, u_] :=
  DistZM[omega - x2 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZM[40, w], {w, -10000, 210000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Distribučná funkcia MZ

```

DistMZ[t_, u_] :=
  DistMZ[t,
    u] = (1 - pumrtiaZ[x2 + t]) DistMZ[t + 1,
      disk^(-1) * u - vyplataZ[t]] +
      pumrtiaZ[x2 + t]*DistMM[t + 1, disk^(-1)*u];
DistMZ[omega - x2 + 1, u_] :=
  DistMZ[omega - x2 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistMZ[40, w], {w, -10000, 220000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Distribučná funkcia ZZ

```

DistZZ[t_, u_] :=
  DistZZ[t,
    u] = (1 - pumrtiaZ[x2 + t]) (1 - pumrtiaM[x1 + t])
  DistZZ[t + 1,
    disk^(-1) *(u - platba[t]) - vyplataZIVI[t]] +
    pumrtiaZ[x2 + t] (1 - pumrtiaM[x1 + t]) DistZM[t + 1,
      disk^(-1) * u - vyplataM[t]] +
    pumrtiaM[x1 + t] (1 - pumrtiaZ[x2 + t]) DistMZ[t + 1,
      disk^(-1) * u - vyplataZ[t]] +
    pumrtiaM[x1 + t] pumrtiaZ[x2 + t] DistMM[t + 1, disk^(-1)*u];
DistZZ[omega - x2 + 1, u_] :=
  DistZZ[omega - x2 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZZ[40, w], {w, -10000, 420000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Sirotský dôchodok

```
Clear["Global'*"];
```

```

pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
x1 = 10; x2 = 40; x3 = 35; omega = 105;
v[y_] := Exp[-i*y]; i := 0.035; s = 26; disk = Exp[-i]; b = 10000;
vyplataD[y_] := If[0 <= y < s - x1, b, 0];

```

Žije len dieťa

```

ZivyMM[n_] :=
  ZivyMM[n] =
    disk (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (vyplataD[n] + ZivyMM[n + 1]) ;
ZivyMM[s - x1] = 0;
DiscretePlot[ZivyMM[i], {i, 0, s - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001', 0.', 0.'],
  AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t],
    "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\],
\(*\[\Dagger\]\[\Dagger\]\)\]\(t)\)", LabelStyle -> {GrayLevel[0]}}

```

Žije otec a dieťa

```

ZivyZM[n_] :=
  ZivyZM[n] =
    disk (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (1 -
      pumrtiaM[x2 + n + 1]) (vyplataD[n] + ZivyZM[n + 1]) +
    disk pumrtiaM[
      x2 + n + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (vyplataD[n] +
      ZivyMM[n + 1]);
ZivyZM[s - x1] = 0;
DiscretePlot[ZivyMM[i], {i, 0, s - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.27'], AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[Čas], HoldForm[Rezerva]},
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}}

```

Žije matka a dieťa

```

ZivyMZ[n_] :=
  ZivyMZ[n] =
    disk (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (1 -
      pumrtiaZ[x3 + n + 1]) (vyplataD[n] + ZivyMZ[n + 1]) +
    disk pumrtiaZ[
      x3 + n + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (vyplataD[n] +
      ZivyMM[n + 1]);
ZivyMZ[s - x1] = 0;
DiscretePlot[ZivyMM[i], {i, 0, s - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.27'], AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[Čas], HoldForm[Rezerva]},
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}}

```

Výpočet poistného

```

PVP[c_] := c +

```

```

Sum[v[k] c Product[(1 - pumrtiaM[x1 + q]), {q, 0,
k}] Product[(1 - pumrtiaM[x2 + q]), {q, 0,
k}] Product[(1 - pumrtiaZ[x3 + q]), {q, 0, k}], {k, 1,
26 - x1 - 1}]
PVV = Sum[
pumrtiaM[x2 + 1] Product[(1 - pumrtiaM[x2 + q]), {q, 0, 1}]
Sum[vyplataD[k] v[
k] Product[(1 - pumrtiaM[x1 + q]), {q, 0,
k}] Product[(1 - pumrtiaZ[x3 + q]), {q, 0, k}], {k, 1 + 1,
26 - x1}], {1, 0, 26 - x1 - 1}] +
Sum[pumrtiaZ[x3 + 1] Product[(1 - pumrtiaZ[x3 + q]), {q, 0, 1}]
Sum[vyplataD[k] v[
k] Product[(1 - pumrtiaM[x1 + q]), {q, 0,
k}] Product[(1 - pumrtiaM[x2 + q]), {q, 0, k}], {k, 1 + 1,
26 - x1}], {1, 0, 26 - x1 - 1}] +
Sum[If[m != 1,
pumrtiaM[x2 + m] pumrtiaZ[
x3 + 1] Product[(1 - pumrtiaM[x2 + q]), {q, 0,
m}] Product[(1 - pumrtiaZ[x3 + q]), {q, 0, 1}], 0] Sum[
vyplataD[k] v[k] Product[(1 - pumrtiaM[x1 + q]), {q, 0, k}],
{k, Max[m, 1] + 1, 26 - x1}], {m, 0, 26 - x1 - 1}, {1, 0,
26 - x1 - 1}]
Solve[PVP[c] == PVV, c]
poistne = 710.07

```

Žijú všetci

```
platit[y_] := If[0 <= y <= s - x1, -710.07, 0];
```

```
VsetciZivi[n_] :=
```

```
VsetciZivi[n] =
```

```
platit[n] +
```

```
disk (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (1 - pumrtiaZ[x2 + n + 1]) (1 -
pumrtiaZ[x3 + n + 1]) VsetciZivi[n + 1] +
```

```
disk pumrtiaM[
```

```
x2 + n + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (1 -
pumrtiaZ[x3 + n + 1]) (vyplataD[n] + ZivyMZ[n + 1]) +
```

```
disk pumrtiaZ[
```

```
x3 + n + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (1 -
pumrtiaM[x2 + n + 1]) (vyplataD[n] + ZivyZM[n + 1]) +
```

```
disk pumrtiaZ[x3 + n + 1] pumrtiaM[
```

```
x2 + n + 1] (1 - pumrtiaM[x1 + n + 1]) (vyplataD[n] +
ZivyMM[n + 1])
```

```
VsetciZivi[s - x1] = 0;
```

```
DiscretePlot[VsetciZivi[i], {i, 0, s - x1},
```

```
PlotStyle -> RGBColor[0.9400000000000001, 0., 0.],
```

```
AxesStyle -> Black,
```

```
AxesLabel -> {HoldForm[t],
```

```
"\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\)\], \
\(***\)\)\](t)"}], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}}
```

```

Druhý moment, rozptyl ŽMM
DruhyMomZMM[26 - x1] = 0;
DruhyMomZMM[t_] :=
  DruhyMomZMM[t] =
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (vyplataD[t]^2 +
      2 vyplataD[t] ZivyMM[t + 1] + DruhyMomZMM[t + 1]);
RozptylZMM[t_] := RozptylZMM[t] = DruhyMomZMM[t] - (ZivyMM[t])^2
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZMM[i]], {i, 0, 26 - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

```

Druhý moment, rozptyl ŽŽM
DruhyMomZZM[26 - x1] = 0;
DruhyMomZZM[t_] :=
  DruhyMomZZM[t] =
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (1 -
      pumrtiaM[x2 + t + 1]) (vyplataD[t]^2 +
      2 vyplataD[t] ZivyZM[t + 1] + DruhyMomZZM[t + 1]) +
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) pumrtiaM[
      x2 + t + 1] (vyplataD[t]^2 + 2 vyplataD[t] ZivyMM[t + 1] +
      DruhyMomZMM[t + 1]);
RozptylZZM[t_] := RozptylZZM[t] = DruhyMomZZM[t] - (ZivyZM[t])^2
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZZM[i]], {i, 0, 26 - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[1.', 0.', 0.25'], AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

```

Druhý moment, rozptyl ŽMŽ
DruhyMomZMZ[26 - x1] = 0;
DruhyMomZMZ[t_] :=
  DruhyMomZMZ[t] =
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (1 -
      pumrtiaZ[x3 + t + 1]) (vyplataD[t]^2 +
      2 vyplataD[t] ZivyMZ[t + 1] + DruhyMomZMZ[t + 1]) +
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) pumrtiaZ[
      x3 + t + 1] (vyplataD[t]^2 + 2 vyplataD[t] ZivyMM[t + 1] +
      DruhyMomZMM[t + 1]);
RozptylZMZ[t_] := RozptylZMZ[t] = DruhyMomZMZ[t] - (ZivyMZ[t])^2
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZMZ[i]], {i, 0, 26 - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[1.', 0.', 0.25'], AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

```

Druhý moment, rozptyl ŽŽŽ
platitDisk[y_] := If[0 <= y <= s - x1, -710.07*(1/disk), 0];

```

```

DruhyMomZZZ[26 - x1] = 0;
DruhyMomZZZ[t_] :=
  DruhyMomZZZ[t] =
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) (1 - pumrtiaM[x2 + t + 1])
    (1 - pumrtiaZ[x3 + t + 1]) (platitDisk[t]^2 +
      2 platitDisk[t] VsetciZivi[t + 1] + DruhyMomZZZ[t + 1]) +
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) pumrtiaM[
      x2 + t + 1] (1 - pumrtiaZ[x3 + t + 1]) (vyplataD[t]^2 +
      2 vyplataD[t] ZivyMZ[t + 1] + DruhyMomZMZ[t + 1]) +
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) pumrtiaZ[
      x3 + t + 1] (1 - pumrtiaM[x2 + t + 1]) (vyplataD[t]^2 +
      2 vyplataD[t] ZivyZM[t + 1] + DruhyMomZMZ[t + 1]) +
    disk^2 (1 - pumrtiaM[x1 + t + 1]) pumrtiaZ[x3 + t + 1]
    pumrtiaM[
      x2 + t + 1] (vyplataD[t]^2 + 2 vyplataD[t] ZivyMM[t + 1] +
      DruhyMomZMM[t + 1]);
RozptylZZZ[t_] := RozptylZZZ[t] = DruhyMomZZZ[t] -
  (VsetciZivi[t])^2
DiscretePlot[Sqrt[RozptylZZZ[i]], {i, 0, 26 - x1},
  PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.', 0.78'],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia MMM

```
DistMMM[t_, u_] := DistMMM[t, u] = If[u <= 0, 0, 1]
```

Distribučná funkcia ZMM

```

DistZMM[t_, u_] :=
  DistZMM[t,
    u] = (1 - pumrtiaM[x1 + t]) DistZMM[t + 1,
      disk^(-1) * u - vyplataD[t]] +
    pumrtiaM[x1 + t] DistMMM[t + 1, disk^(-1)*u];
DistZMM[26 - x1 + 1, u_] :=
  DistZMM[26 - x1 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZMM[10, w], {w, 60000, 62000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Distribučná funkcia MZM

```
DistMZM[t_, u_] := DistMZM[t, u] = If[u <= 0, 0, 1]
```

Distribučná funkcia ZZM

```

DistZZM[t_, u_] :=
  DistZZM[t,
    u] = (1 - pumrtiaM[x1 + t]) (1 - pumrtiaM[x2 + t])

```

```

DistZZM[t + 1,
  disk^(-1) *u - vyplataD[t]] + (1 - pumrtiaM[x1 + t])
  pumrtiaM[x2 + t] DistZMM[t + 1,
  disk^(-1) *u - vyplataD[t]] + (pumrtiaM[x1 + t]) (1 -
  pumrtiaM[x2 + t]) DistMZM[t + 1,
  disk^(-1) *u] + (pumrtiaM[x1 + t]) pumrtiaM[x2 + t] DistMMM[
  t + 1, disk^(-1) *u];
DistZZM[26 - x1 + 1, u_] :=
  DistZZM[26 - x1 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZZM[10, w], {w, 60000, 62000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Distribučná funkcia MMZ

```
DistMMZ[t_, u_] := DistMMZ[t, u] = If[u <= 0, 0, 1]
```

Distribučná funkcia ZMZ

```

DistZMZ[t_, u_] :=
  DistZMZ[t,
  u] = (1 - pumrtiaM[x1 + t]) (1 - pumrtiaZ[x3 + t])
  DistZMZ[t + 1, disk^(-1) *u - vyplataD[t]] +
  (1 - pumrtiaM[x1 + t])
  pumrtiaZ[x3 + t] DistZMM[t + 1, disk^(-1) *u - vyplataD[t]] +
  pumrtiaM[x1 + t] (1 - pumrtiaZ[x3 + t]) DistMMZ[t + 1,
  disk^(-1) *u] +
  pumrtiaM[x1 + t] pumrtiaZ[x3 + t] DistMMM[t + 1,
  disk^(-1) *u];
DistZMZ[26 - x1 + 1, u_] :=
  DistZMZ[26 - x1 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZMZ[10, w], {w, 60000, 62000}, PlotRange -> All,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.81', 0.31', 0.'],
  PlotRange -> All, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Distribučná funkcia ZZZ

```

DistZZZ[t_, u_] :=
  DistZZZ[t,
  u] = (1 - pumrtiaM[x1 + t]) (1 - pumrtiaM[x2 + t]) (1 -
  pumrtiaZ[x3 + t]) DistZZZ[t + 1,
  disk^(-1) *(u - platit[t])] + (1 - pumrtiaM[x1 + t])
  pumrtiaM[
  x2 + t] (1 - pumrtiaZ[x3 + t]) DistZMZ[t + 1,
  disk^(-1) *u - vyplataD[t]] + (1 - pumrtiaM[x1 + t])
  pumrtiaZ[
  x3 + t] (1 - pumrtiaM[x2 + t]) DistZZM[t + 1,

```

```

disk^(-1) *u - vyplataD[t]] + (1 - pumrtiaM[x1 + t])
pumrtiaZ[
x3 + t] (pumrtiaM[x2 + t]) DistZMM[t + 1,
disk^(-1) *u - vyplataD[t]] +
pumrtiaM[
x1 + t] (1 - pumrtiaZ[x3 + t]) (1 - pumrtiaM[x2 + t])
DistZMM[t + 1, disk^(-1) *u] +
pumrtiaM[x1 + t] pumrtiaZ[x3 + t] (1 - pumrtiaM[x2 + t])
DistMZM[t + 1, disk^(-1) *u] +
pumrtiaM[x1 + t] (1 - pumrtiaZ[x3 + t]) pumrtiaM[x2 + t]
DistMMZ[t + 1, disk^(-1) *u] +
pumrtiaM[x1 + t] pumrtiaZ[x3 + t] pumrtiaM[x2 + t]
DistMMM[t + 1, disk^(-1) *u];
DistZZZ[26 - x1 + 1, u_] :=
DistZZZ[26 - x1 + 1, u] = If[u <= 0, 0, 1];
DiscretePlot[DistZZZ[10, w], {w, -10000, 70000},
PlotStyle -> RGBColor[0.81, 0.31, 0.], PlotRange -> All,
AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]

```

Diferenciálne rovnice

Termínované poistenie

Nastavenia

```
Clear["Global'"];
```

```
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]
```

```
g = 100000; i := 0.035; b := 200000; x := 30; s := 65;
```

```
v[y_] := Exp[-i*y];
```

Výpočet poistného

```
poistne =
```

```

b*Integrate[
v[q] pumrtiaM[x + q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
{q, 0, s - x}]/(Integrate[
v[q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]], {q, 0, s - x}])
poistne = \%

```

Rezerva

```
konst = -Integrate[
```

```

v[q] (poistne -
b * pumrtiaM[x + q]) Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
{q, 0, s - x}]

```

```
help[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaM[x + y], y]]
```

```
Termin[t_] :=
```

```
Termin[t] =
```

```
Integrate[
```

```

v[q] (poistne -
b*pumrtiaM[x + q]) Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
{q, 0, t}] * help[t]

```

```

Plot[Termin[y]/v[y], {y, 0, s - x}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\]), \
\(*\)]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Kapitálove poistenie

Nastavenia

```

Clear["Global'*"];
g = 100000; i := 0.035; b := 200000; x := 30; s := 65; c := 100;
v[y_] := Exp[-i*y];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]
vyplata2[y_] := If[0 < y < s - x, b, 0]
vyplata2[s - x] := 100000

```

Výpočet poistného

```

help[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaM[x + y], y]]
cPomoc = (g*v[s - x])/help[s - x]
cPomoc2 =
  b*NIntegrate[
    v[q] pumrtiaM[x + q]*Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
    {q, 0, s - x}]
c2Nove = (cPomoc + cPomoc2)/
  Integrate[v[q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
    {q, 0, s - x}]
poistne[y_] := If[0 <= y <= s - x, c2Nove, 0]

```

Rezerva

```

konst = cPomoc -
  Integrate[
    v[q] (c2Nove -
      b*pumrtiaM[x + q]) Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
    {q, 0, s - x}]
Kapital[t_] :=
Kapital[t] =
  Integrate[
    v[q] (c2Nove -
      b*pumrtiaM[x + q]) Exp[-Integrate[pumrtiaM[x + q], q]],
    {q, 0, t}] * help[t]

```

```

Plot[Kapital[y]/v[y], {y, 0, s - x}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\]), \
\(*\)]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Dôchodkové poistenie

```

Nastavenia
Clear["Global`*"];
x1 = 30; x2 = 25; omega = 105; DeltaT = x1 - x2;
v[y_] := Exp[-i*y]; i := 0.035; s = 65;
vyplataM[y_] := If[0 < y < omega - x2, 10000, 0];
vyplataZ[y_] := If[0 < y < omega - x2, 10000, 0];
ObajaZivy[y_, cecko_] :=
  If[0 < y < 65 - x2,
    If[65 - x1 < y < 65 - x2, 10000 - cecko, -2*cecko],
    If[y >= omega, 0, 20000]]
ZiviPlat[y_] :=
  If[0 < y < 65 - x2, If[65 - x1 < y < 65 - x2, 8130.395,
    -3739.21],
    If[y >= omega, 0, 20000]]
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2]
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2]
help[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaM[x1 + y], y]]
help2[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaZ[x2 + y], y]]

Rezerva - ŽIVÝ MŔTVA
konst1 = Integrate[
  v[q] vyplataM[q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + q], q]], {q, 0,
  omega - x2}]
ZivyMrtva[y_] :=
  ZivyMrtva[
  y] = (Integrate[-v[q] vyplataM[
  q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + q], q]], {q, 0, y}] +
  konst1)*help[y]
Plot[[ZivyMrtva[y]]/v[y], {y, 0, omega - x2}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
  AxesLabel -> {t,
  "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\],
  \(*\[\Dagger]\)\)\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle ->
  {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

Rezerva - MŔTVY ŽIVÁ
konst2 = Integrate[
  v[q] vyplataZ[q] Exp[-Integrate[pumrtiaZ[x2 + q], q]], {q, 0,
  omega - x2}]
MrtvyZiva[y_] :=
  MrtvyZiva[
  y] = (Integrate[-v[q] vyplataZ[
  q] Exp[-Integrate[pumrtiaZ[x2 + q], q]], {q, 0, y}] +
  konst2)*help2[y]
Plot[N[MrtvyZiva[y]]/v[y], {y, 0, omega - x2}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
  AxesLabel -> {t,
  "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\], \

```

```

\\(\[Dagger]*\\)\)(t)", PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

Rezerva - ŽIVÝ ŽIVÁ
Integrate[(+v[k] ZiviPlat[k] + pumrtiaM[x1 + k] N[MrtvyZiva[k]]
+pumrtiaZ[x2 + k] N[ZivyMrtva[k]])*
  Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + k] + pumrtiaZ[x2 + k], k]],
  {k, 0, omega - x2}]
help3[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaM[x1 + y] + pumrtiaZ[x2 + y], y]]
ZivyZiva[y_] :=
  ZivyZiva[y] =
  NIntegrate[-(v[k] ZiviPlat[k] + pumrtiaM[x1 + k]
  N[MrtvyZiva[k]] + pumrtiaZ[x2 + k] N[ZivyMrtva[k]])*
  Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + k] + pumrtiaZ[x2 + k], k]],
  {k, 0, y}]*help3[y]
Plot[[ZivyZiva[y]]/v[y], {y, 0, 80}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
  AxesLabel -> {t,
  "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\], \
\(**\)\)\)(t)", PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Sirotský dôchodok

Nastavenia

```
Clear["Global'"];
```

```
x1 = 10; x2 = 40; x3 = 35; omega = 105;
```

```
v[y_] := Exp[-i*y]; i := 0.035; s = 26;
```

```
vyplata[y_] := If[0 <= y <= s - x1, 10000, 0]
```

```
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
```

```
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
```

Rezerva - ŽIVÉ MRŤVY MRŤVA

```
konst1 = Integrate[
```

```
  v[q] vyplata[q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + q], q]], {q, 0,
  s - x1}]
```

```
help[y_] = Exp[Integrate[pumrtiaM[x1 + y], y]]
```

```
ZiveMrtvyMrtva[t_] :=
```

```
  ZiveMrtvyMrtva[
```

```
    t] = (Integrate[-v[q] vyplata[
      q] Exp[-Integrate[pumrtiaM[x1 + q], q]], {q, 0, t}] +
  konst1)*help[t]
```

```
Plot[N[ZiveMrtvyMrtva[y]]/v[y], {y, 0, s - x1}, PlotRange -> All,
```

```
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'],
```

```
  AxesLabel -> {t,
```

```
  "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\], \
\(**\)\)\)(t)", PlotLabel -> None,
```

```
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]
```

```

Rezerva - VŠETCI ŽIVÍ
vsetciZivy[y_] := If[0 < y <= s - x1, PlatitSD, 0]
konst4 = Integrate[(v[k] vsetciZivy[k] +
  pumrtiaM[x2 + k] ZiveMrtvyZiva[k] +
  pumrtiaZ[x3 + k] N[ZiveZivyMrtva[k]])*
  Exp[-Integrate[(pumrtiaM[x1 + k] + pumrtiaM[x2 + k] +
  pumrtiaZ[x3 + k]), k]], {k, 0, s - x1}]
help6[y_] =
  Exp[Integrate[pumrtiaM[x1 + y] + pumrtiaM[x2 + y] + pumrtiaZ[x3
+ y], y]]
RezervaZivi[t_] :=
  RezervaZivi[t] =
  NIntegrate[(-v[e] vsetciZivy[e] -
  pumrtiaM[x2 + e] ZiveMrtvyZiva[e] -
  pumrtiaZ[x3 + e] ZiveZivyMrtva[e])*
  Exp[-Integrate[
  pumrtiaM[x1 + e] + pumrtiaM[x2 + e] + pumrtiaZ[x3 + e],
  e]], {e, 0, t}]*help6[t]
Plot[N[RezervaZivi[y]]/v[y], {y, 0, s - x1}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01, 0.01, 0.01],
  AxesLabel -> {t,
  "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \(\+\)]\)\)\], \
\(\**\)\)\(t)\)}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

```

Rezerva - VŠETCI ŽIVÍ - NDSOLVE
sol2 = NDSolve[{w' [
  t] == -v[t] vsetciZivy[
  t] + (pumrtiaM[x2 + t] + pumrtiaZ[x3 + t] +
pumrtiaM[x1 + t]
)*w[t] - pumrtiaM[x2 + t] y[t] - pumrtiaZ[x3 + t] z[t],
  y' [t] == -v[t] vyplata[
  t] + (pumrtiaM[x1 + t] + pumrtiaZ[x3 + t]) y[t] -
  pumrtiaZ[x3 + t] q[t],
  z' [t] == -v[t] vyplata[
  t] + (pumrtiaM[x1 + t] + pumrtiaM[x2 + t]) z[t] -
  pumrtiaM[x2 + t] q[t],
  q' [t] == -v[t] vyplata[t] + pumrtiaM[x1 + t] q[t], w[s - x1]
== 0,
  y[s - x1] == 0, z[s - x1] == 0, q[s - x1] == 0 }, {w[t], y[t],
  z[t], q[t]}, {t, 0, s - x1},
  Method -> {"PDEDiscretization" -> "FiniteElement"}]

```

```

Simulácie Monte Carlo
Termínované poistenie
Clear["Global'*" ]
vek = 30; b = 200000; s = 65; i = 0.035; diskont[a_] := Exp[-i*a];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];

```

```

Prvý život - zomrie v 27.
SeedRandom[8]
poistne = 1469.48;
AnoCiNie = Table[-1, s - vek];
For[e = 0, e < s - vek + 1, e++,
  If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[vek + e]]] == 0,
    AnoCiNie[[e]] = 0, AnoCiNie[[e]] = 1; Break[]]];
Rezerva[t_] :=
  Sum[If[AnoCiNie[[t + k]] == 0, -poistne*diskont[k],
    If[AnoCiNie[[t + k]] == -1, 0, b*diskont[k]]], {k, 0,
    s - vek - t}];
Rezerva[s - vek] = 0;
DiscretePlot[Rezerva[q], {q, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.6, 0.1, 0.75],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\], \
\(*\)\]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

```

Druhý život - nezomrie
SeedRandom[11]
poistne2 = 1469.48;
AnoCiNie2 = Table[-1, s - vek];
For[e = 0, e < s - vek + 1, e++,
  If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[vek + e]]] == 0,
    AnoCiNie2[[e]] = 0, AnoCiNie2[[e]] = 1; Break[]]];
Rezerva2[t_] :=
  Sum[If[AnoCiNie2[[t + k]] == 0, -poistne2*diskont[k],
    If[AnoCiNie2[[t + k]] == -1, 0, b*diskont[k]]], {k, 0,
    s - vek - t}];
Rezerva2[s - vek] = 0;
DiscretePlot[Rezerva2[q], {q, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.6, 0.1, 0.75],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\], \
\(*\)\]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

```

For[v = 0, v < s - vek + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
For[v = 0, v < s - vek + 1, v++, pocet[v] = 0];
For[c = 1, c < 50001, c++, SeedRandom[c]; poistne = 1460.48;
  AnoCiNie = Table[-1, s - vek];
  For[e = 0, e < s - vek + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[vek + e]]] == 0,
      AnoCiNie[[e]] = 0, AnoCiNie[[e]] = 1; Break[]]];
  Rezerva[t_] :=
    Sum[If[AnoCiNie[[t + k]] == 0 \[0r] AnoCiNie[[q]] == 1,

```

```

-poistne*diskont[k], If[AnoCiNie[[t + k]] == -1, 0,
  b*diskont[k]]], {k, 0, 35 - t}];
For[q = 0, q < 35, q++,
  If[AnoCiNie[[q]] == 0 \[Or] AnoCiNie[[q]] == 1 ,
    pocet[q] = pocet[q] + 1; VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
    RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))/
    pocet[q];
    RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]];
RezervaN[35] = 0]
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.‘, 0.1‘, 0.75‘],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\], \
\(*\)\]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie REZERV so simulaciou

```

For[q = 0, q < 36, q++, Porovnanie[q] = solF[q] - RezervaN[q]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 35}]

```

Výberový rozptyl & distribučná funkcia

```

For[q = 0, q < 35, q++,
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 50000}];
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_ , _]];
data[35] = ConstantArray[0, 50000];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0., 0.37],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie ODCHYLOK so simulaciou

```

For[q = 0, q < 36, q++,
  Porovnanie[q] = StandardDeviation[data[q]] - Sqrt[Rozptyl[q]]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 35}]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[20]];
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, -30000, 200000},
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 20], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  PlotStyle -> RGBColor[0.09‘, 0.19‘, 0.‘], AxesStyle -> Black]

```

Kapitálové poistenie

```

Clear["Global' *"]
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
vek = 30; b = 200000; s = 65; i = 0.035;
diskont[a_] := Exp[-i*a]; g = 100000;
For[v = 0, v < s - vek + 1, v++, RezervaN[v] = 0];

```

```

For[v = 0, v < s - vek + 1, v++, pocet[v] = 0];
For[c = 1, c < 50001, c++, SeedRandom[c];
  poistne = 2542.7;
  AnoCiNie = Table[-1, s - vek];
  For[e = 0, e < s - vek + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[vek + e]]] == 0,
      AnoCiNie[[e]] = 0, AnoCiNie[[e]] = 1; Break[]]];
  Rezerva[t_] :=
    Sum[If[AnoCiNie[[t + k]] == 0, -poistne*diskont[k],
      If[AnoCiNie[[t + k]] == -1, 0, b*diskont[k]]], {k, 0,
      s - vek - t}] +
    If[AnoCiNie[[35]] == 0, g*diskont[s - vek - t], 0];
  If[AnoCiNie[[35]] == 0, Rezerva[35] := g, Rezerva[35] := 0];
  For[q = 0, q < 35, q++,
    If[AnoCiNie[[q]] == 0 \[Or] AnoCiNie[[q]] == 1,
      pocet[q] = pocet[q] + 1; VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
      RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))/
      pocet[q];
      RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]];
  If[AnoCiNie[[35]] == 0, pocet[35] = pocet[35] + 1;
  VysledkyRezerv[35, c] = Rezerva[35];
  RezervaP[35] = (Rezerva[35] + RezervaN[35]*(pocet[35] - 1))/
  pocet[35]; RezervaN[35] = RezervaP[35], pocet[35] =
  pocet[35]]]
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 35},
  PlotStyle -> RGBColor[0.4, 0.1, 0.75],
  AxesLabel -> {t,
  "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\], \
\(*\)\]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie REZERV so simulaciou

```

For[q = 0, q < 36, q++, Porovnanie[q] = solF2[q] - RezervaN[q]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 35}]

```

Výberový rozptyl & distribučná funkcia

```

For[q = 0, q < 36, q++,
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 50000}];
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_, _]];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 35},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0.4, 0.37],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle ->
  Black]

```

Porovnanie ODCHYLOK so simulaciou

```

For[q = 0, q < 36, q++,
  Porovnanie[q] = StandardDeviation[data[q]] - Sqrt[Rozptyl2[q]]]

```

```

DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 35}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'], PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s - \[Sigma]]},
  PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[20]];
DiscretePlot[CDF\[ScriptCapitalD], x], {x, 20000, 200000},
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 20], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  PlotStyle -> RGBColor[0.09', 0.19', 0.'], AxesStyle -> Black]

```

Dôchodkové poistenie

```

Clear["Global'*"];
For[c = 1, c < 50001, c++, SeedRandom[c];
  poistne = 1767;
  AnoCiNieM = Table[-1, omega - x2];
  AnoCiNieZ = Table[-1, omega - x2];
  For[e = 0, e < omega - x2 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x1 + e]]] == 0,
      AnoCiNieM[[e]] = 0, AnoCiNieM[[e]] = 1; Break[]];
  For[e = 0, e < omega - x2 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaZ[x2 + e]]] == 0,
      AnoCiNieZ[[e]] = 0, AnoCiNieZ[[e]] = 1; Break[]];
  Rezerva[t_] :=
    Sum[If[AnoCiNieM[[t + k]] == 0 && AnoCiNieZ[[t + k]] == 0,
      If[t + k < 40,
        If[t + k < 35, -2*poistne*diskont[k],
          (b - poistne)*diskont[k]], 2*b*diskont[k]],
      If[(AnoCiNieM[[t + k]] == -1 &&
        AnoCiNieZ[[t + k]] == 0) \[Or] (AnoCiNieM[[t + k]] == 0
&& AnoCiNieZ[[t + k]] == -1), b*diskont[k], 0]], {k, 0,
    omega - x1 - t}] +
    Sum[If[AnoCiNieZ[[75 + k]] == 0, b*diskont[omega - x1 - t + k],
      0], {k, 1, 5}];
  Rezerva[80] = 0;
  For[q = 0, q < 81, q++, VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q]];
  For[q = 0, q < 81, q++,
    If[(AnoCiNieM[[q]] == 0 \[Or]
      AnoCiNieM[[q]] == 1) && (AnoCiNieZ[[q]] == 0 \[Or]
      AnoCiNieZ[[q]] == 1), pocet[q] = pocet[q] + 1;
    vysledky[q, c] = Rezerva[q];
    RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))
      /pocet[q];
    RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]];
    RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]];
  DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 80},

```

```

PlotStyle -> RGBColor[0.1, 0.1, 0.75],
AxesLabel -> {t,
  "\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\)\]), \
\(*\)\)\(t)\)", PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie REZERV so simulaciou

```

For[q = 0, q < 76, q++, Porovnanie[q] = ZivyZivaD[q] -
RezervaN[q]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 75}, PlotRange -> All]

```

Výberový rozptyl & distribučná funkcia

```

For[q = 0, q < 81, q++,
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 50000}];
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_, _]];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 68},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0.1, 0.37],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie ODCHYLOK so simulaciou

```

For[q = 0, q < 81, q++,
  Porovnanie[q] = StandardDeviation[data[q]] - Sqrt[RozptylZZ[q]]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 75}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01, 0.01, 0.01], PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Rozdiely]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[40]];
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, 20000, 400000},
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  PlotStyle -> RGBColor[0.09, 0.19, 0.1], AxesStyle -> Black]

```

Dôchodkové poistenie - žije len manželka

```

Clear["Global'*"];
b := 10000; x1 := 30; x2 := 25; s = 65; omega := 105; i = 0.035;
diskont[a_] := Exp[-i*a];
For[v = 0, v < omega - x2 + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
For[v = 0, v < omega - x2 + 1, v++, pocet[v] = 0];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
For[c = 1, c < 10001, c++, SeedRandom[c];
  poistne = poistne = 1765.914; AnoCiNie = Table[-1, omega - x2];
  For[e = 0, e < omega - x2 + 1, e++,

```

```

If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaZ[x2 + e]]] == 0,
  AnoCiNie[[e]] = 0, AnoCiNie[[e]] = 1; Break[]];
Rezerva[t_] :=
  Sum[If[AnoCiNie[[t + k]] == 0, b*diskont[k], 0], {k, 0,
    omega - x2 - t}];
Rezerva[80] = 0;
For[q = 0, q < 81, q++,
  If[AnoCiNie[[q]] == 0 \[Or] AnoCiNie[[q]] == 1,
    pocet[q] = pocet[q] + 1; VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
    RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))/
    pocet[q];
    RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]];
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 80},
  PlotStyle -> RGBColor[0.1, 0.1, 0.75],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\], \
\(\[Dagger]*\)\)\(t)\)", PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie REZERV so simulaciou

```

For[q = 0, q < 81, q++, Porovnanie[q] = MrtvyZivaD[q] -
  RezervaN[q]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 80}]

```

Výberový rozptyl & distribučná funkcia

```

For[q = 0, q < 81, q++,
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 10000}];
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_, _]];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 79},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0.1, 0.37],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Porovnanie ODCHYLOK so simulaciou

```

For[q = 0, q < 81, q++,
  Porovnanie[q] = StandardDeviation[data[q]] - Sqrt[RozptylMZ[q]]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 80}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01, 0.01, 0.01], PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Rozdiely]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[40]];
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, -20000, 220000},
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  PlotStyle -> RGBColor[0.09, 0.19, 0.1], AxesStyle -> Black]

```

```

Dôchodkové poistenie - žije len manžel
Clear["Global`*"];
b := 10000; x1 := 30; x2 := 25; s = 65; omega := 105; i = 0.035;
diskont[a_] := Exp[-i*a];
For[v = 0, v < omega - x2 + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
For[v = 0, v < omega - x2 + 1, v++, pocet[v] = 0];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
For[c = 1, c < 10001, c++, SeedRandom[c];
  poistne = poistne = 1765.914; AnoCiNie = Table[-1, omega - x2];
  For[e = 0, e < omega - x2 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x1 + e]]] == 0,
      AnoCiNie[[e]] = 0, AnoCiNie[[e]] = 1; Break[]];
  Rezerva[t_] :=
    Sum[If[AnoCiNie[[t + k]] == 0, b*diskont[k], 0], {k, 0,
      omega - x2 - t}];
  Rezerva[80] = 0;
  For[q = 0, q < 81, q++,
    If[AnoCiNie[[q]] == 0 \[Or] AnoCiNie[[q]] == 1,
      pocet[q] = pocet[q] + 1; VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
      RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))/
        pocet[q];
      RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]];
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 80},
  PlotStyle -> RGBColor[0.6, 0.1, 0.75],
  AxesLabel -> {t,
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\]\)\], \
\(\*\[Dagger]\)\]\)(t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle ->
{GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

Porovnanie REZERV so simulaciou
For[q = 0, q < 76, q++, Porovnanie[q] = ZivyMrtvaD[q] -
  RezervaN[q]]
DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 75}]

Výberový rozptyl & distribučná funkcia
For[q = 0, q < 81, q++,
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 10000}];
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_, _]];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 80},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0.6, 0.37],
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

Porovnanie ODCHYLOK so simulaciou
For[q = 0, q < 76, q++,
  Porovnanie[q] = StandardDeviation[data[q]] - Sqrt[RozptylZM[q]]]

```

```

DiscretePlot[Porovnanie[m], {m, 0, 75}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> RGBColor[0.01', 0.01', 0.01'], PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Rozdiely]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[40]];
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, -10000, 210000},
  AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
  PlotLabel -> HoldForm[t = 40], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
  PlotStyle -> RGBColor[0.09', 0.19', 0.'], AxesStyle -> Black]

```

Sirotský dôchodok

```

Clear["Global'"];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
b := 10000; x1 := 10; x2 := 40; x3 = 35; omega := 105; s = 26;
i = 0.035; diskont[a_] := Exp[-i*a];
For[v = 0, v < s - x1 + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
For[v = 0, v < s - x1 + 1, v++, pocet[v] = 0];
For[c = 1, c < 50001, c++, SeedRandom[c];
  poistne = 577.5;
  AnoCiNieD = Table[-1, s - x1];
  AnoCiNieM = Table[-1, s - x1];
  AnoCiNieZ = Table[-1, s - x1];
  For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x1 + e]]] == 0,
      AnoCiNieD[[e]] = 0, AnoCiNieD[[e]] = 1; Break[]];
  For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x2 + e]]] == 0,
      AnoCiNieM[[e]] = 0, AnoCiNieM[[e]] = 1; Break[]];
  For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
    If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaZ[x3 + e]]] == 0,
      AnoCiNieZ[[e]] = 0, AnoCiNieZ[[e]] = 1; Break[]];
  Rezerva[t_] :=
  Sum[If[AnoCiNieD[[t + k]] == 0 && AnoCiNieM[[t + k]] == 0 &&
    AnoCiNieZ[[t + k]] == 0, -poistne*diskont[k],
    If[(AnoCiNieD[[t + k]] == 0 && AnoCiNieM[[t + k]] == -1 &&
      AnoCiNieZ[[t + k]] == 0) \[Or] (AnoCiNieD[[t + k]] == 0 &&
      AnoCiNieM[[t + k]] == 0 &&
      AnoCiNieZ[[t + k]] == -1) \[Or] (AnoCiNieD[[t + k]] == 0
      && AnoCiNieM[[t + k]] == -1 && AnoCiNieD[[t + k]] == -1),
    b*diskont[k], 0]], {k, 0, 15 - t}];
  Rezerva[16] = 0;
  For[q = 0, q < 17, q++,
    If[(AnoCiNieM[[q]] == 0 \[Or]
      AnoCiNieM[[q]] == 1) && (AnoCiNieZ[[q]] == 0 \[Or]

```

```

        AnoCiNieZ[[q]] == 1) && (AnoCiNieD[[q]] == 0 \[Or]
        AnoCiNieD[[q]] == 1), pocet[q] = pocet[q] + 1;
VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))/
pocet[q];
RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]]
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 16},
PlotStyle -> RGBColor[0.4, 0.1, 0.75],
AxesLabel -> {t,
"\!\(\!*SubscriptBox[\(\!\(\!*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)\)\], \
(***)\)\](t)"}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
AxesStyle -> Black]

```

Výberový rozptyl & distribučná funkcia

```

For[q = 0, q < 17, q++,
data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 50000}];
data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_ , _]];
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 16},
PlotStyle -> RGBColor[0.26, 0.4, 0.37],
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]},
PlotLabel -> None,
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]

```

Distribučná funkcia

```

\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[10]];
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, -10000, 45072},
AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},
PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},
PlotStyle -> RGBColor[0.09, 0.19, 0.4], AxesStyle -> Black]

```

Výberový rozptyl ručne

```

For[v = 0, v < 17, v++, RozptylN[v] = 0];
For[c = 1, c < 50001, c++, SeedRandom[c];
poistne = 577.5;
AnoCiNieD = Table[-1, s - x1];
AnoCiNieM = Table[-1, s - x1];
AnoCiNieZ = Table[-1, s - x1];
For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x1 + e]]] == 0,
AnoCiNieD[[e]] = 0, AnoCiNieD[[e]] = 1; Break[]];
For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x2 + e]]] == 0,
AnoCiNieM[[e]] = 0, AnoCiNieM[[e]] = 1; Break[]];
For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaZ[x3 + e]]] == 0,
AnoCiNieZ[[e]] = 0, AnoCiNieZ[[e]] = 1; Break[]];
Rezerva[t_] :=
Sum[If[AnoCiNieD[[t + k]] == 0 && AnoCiNieM[[t + k]] == 0 &&

```

```

AnoCiNieZ[[t + k]] == 0, -poistne*diskont[k],
If[(AnoCiNieD[[t + k]] == 0 && AnoCiNieM[[t + k]] == -1 &&
AnoCiNieZ[[t + k]] == 0) \[Or] (AnoCiNieD[[t + k]] == 0
&& AnoCiNieM[[t + k]] == 0 &&
AnoCiNieZ[[t + k]] == -1) \[Or] (AnoCiNieD[[t + k]] == 0
&& AnoCiNieM[[t + k]] == -1 && AnoCiNieD[[t + k]] == -1),
b*diskont[k], 0]], {k, 0, 15 - t}];
Rezerva[16] = 0;
For[q = 0, q < 17, q++,
If[(AnoCiNieM[[q]] == 0 \[Or]
AnoCiNieM[[q]] == 1) && (AnoCiNieZ[[q]] == 0 \[Or]
AnoCiNieZ[[q]] == 1) && (AnoCiNieD[[q]] == 0 \[Or]
AnoCiNieD[[q]] == 1),
RozptylP[q] = RozptylN[q] + (Rezerva[q] - RezervaN[q])^2;
RozptylN[q] = RozptylP[q], RozptylN[q] = RozptylN[q] + 0]]];
For[q = 0, q < 17, q++, RozptylN[q] = 1/(pocet[q] - 1)*
RozptylN[q]]
DiscretePlot[Sqrt[RozptylN[m]], {m, 0, 16}, PlotRange -> All]

```

Sirotský dôchodok - žije dieťa, 1 alebo 2 rodičia mŕtvi

```

Clear["Global'"];
b := 10000; x1 := 10; x2 := 40; x3 = 35; omega := 105; s = 26;
i = 0.035; diskont[a_] := Exp[-i*a];
For[v = 0, v < s - x1 + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
pumrtiaM[y_] = Exp[-7.75111 + 0.0524786 y + 0.000173387*y^2];
pumrtiaZ[y_] = Exp[-8.63058 + 0.0520842 y + 0.000260207 y^2];
For[v = 0, v < s - x1 + 1, v++, RezervaN[v] = 0];
For[v = 0, v < s - x1 + 1, v++, pocet[v] = 0];
For[c = 1, c < 10001, c++, SeedRandom[c];
poistne = 575.584;
AnoCiNieD = Table[-1, s - x1];
For[e = 0, e < s - x1 + 1, e++,
If[RandomVariate[BernoulliDistribution[pumrtiaM[x1 + e]]] == 0,
AnoCiNieD[[e]] = 0, AnoCiNieD[[e]] = 1; Break[]]];
Rezerva[t_] :=
Sum[If[AnoCiNieD[[t + k]] == 0, b*diskont[k], 0], {k, 0,
15 - t}]; Rezerva[16] = 0;
For[q = 0, q < 17, q++,
If[(AnoCiNieD[[q]] == 0 \[Or] AnoCiNieD[[q]] == 1),
pocet[q] = pocet[q] + 1; VysledkyRezerv[q, c] = Rezerva[q];
RezervaP[q] = (Rezerva[q] + RezervaN[q]*(pocet[q] - 1))
/pocet[q];
RezervaN[q] = RezervaP[q], pocet[q] = pocet[q]]]]
DiscretePlot[RezervaN[m], {m, 0, 16},
PlotStyle -> RGBColor[0.4, 0.1, 0.75],
AxesLabel -> {t,
"\!\(\*SubscriptBox[\(\!\(\*SuperscriptBox[\(V\), \((+)\)]\)\)\],
\(\*\[Dagger]\[Dagger]\)\)\)(t)"}, PlotLabel -> None,

```

```
LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]
```

Výberový rozptyl

```
For[q = 0, q < 17, q++,  
  data[q] = Table[VysledkyRezerv[q, w], {w, 1, 10000}];  
  data[q] = DeleteCases[data[q], VysledkyRezerv[_, _]]]  
DiscretePlot[StandardDeviation[data[m]], {m, 0, 16},  
  PlotStyle -> RGBColor[0.26', 0.', 0.37'],  
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[s]}, PlotLabel -> None,  
  LabelStyle -> {GrayLevel[0]}, AxesStyle -> Black]
```

Distribučná funkcia

```
\[ScriptCapitalD] = EmpiricalDistribution[data[10]];  
DiscretePlot[CDF[\[ScriptCapitalD], x], {x, 50000, 60000},  
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm[u], HoldForm[F]},  
  PlotLabel -> HoldForm[t = 10], LabelStyle -> {GrayLevel[0]},  
  PlotStyle -> RGBColor[0.09', 0.19', 0.'], AxesStyle -> Black]
```