

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra psychologie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vybrané kognitivní předpoklady a metakognice ve vztahu k obtížím
v aritmetických dovednostech u žáků mladšího školního věku

Selected cognitive prerequisites and metacognition in relation to difficulties in
arithmetic skills of younger school age pupils

Bc. Marína Stieranková

Vedoucí práce: PhDr. Klára Špačková, Ph.D.
Studijní program: Psychologie
Studijní obor: Psychologie

2022

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Vybrané kognitivní předpoklady a metakognice ve vztahu k obtížím v aritmetických dovednostech žáků mladšího školního věku* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 19. 4. 2022

.....

Bc. Marína Stieranková

Poděkování

Ráda bych poděkovala PhDr. Kláře Špačkové, Ph.D. nejen za odborné vedení mé práce, ale také za vstřícnost, podporu a trpělivost, se kterou se mi věnovala. Dále děkuji Mgr. Kateřině Skalové Pražákové za cenné rady, konzultace a zapůjčení tabletové aplikace využitě v empirické části této práce. Děkuji všem žákům za ochotu se výzkumu účastnit, jejich rodičům a učitelům za spolupráci při sběru dat. V neposlední řadě chci poděkovat svému manželovi, mojí rodině, přátelům a kolegům za veškerou podporu v průběhu studia.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá oblastí obtíží v aritmetických dovednostech ve vztahu k metakognici a vybraným kognitivním předpokladům u žáků mladšího školního věku. Teoretická část této práce poskytuje vhled do problematiky metakognice, matematických dovedností, kognitivních předpokladů pro jejich rozvoj, metakognice v souvislosti s matematikou, a také se věnuje nástrojům pro měření těchto oblastí. V empirické části popisuje výzkum, jehož cílem bylo porovnat metakognitivní znalosti (vztahujících se k self, úlohám a strategiím) a vybrané kognitivní předpoklady (symbolické a nesymbolické vnímání množství (numerozita), prostorové schopnosti, inhibice) u skupiny žáků s oslabenou úrovní aritmetických dovedností (N=24) a skupiny žáků s úrovní aritmetických dovedností v normě (N=31). Výsledky výzkumu prokázaly mezi výzkumnými skupinami rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se k self a metakognitivních znalostech vztahujících se ke strategiím posilujícím kompetence. V ostatních sledovaných oblastech (metakognitivní znalosti vztahující se k úlohám, k vyhýbacím strategiím a vybrané kognitivní předpoklady) nebyl statisticky významný rozdíl mezi sledovanými skupinami žáků prokázán.

KLÍČOVÁ SLOVA

aritmetické dovednosti, metakognitivní znalosti, mladší školní věk, kognitivní předpoklady, výukové obtíže

ABSTRACT

This thesis deals with the area of difficulties in arithmetic skills in relation to metacognition and selected cognitive prerequisites in younger school age pupils. The theoretical part of this thesis provides an insight into the issues of the metacognition, of the mathematical skills, of the cognitive prerequisites for their development, of the metacognition in relation to the mathematics, and also deals with the tools for measuring these areas. The empirical part describes the research, which aimed to compare the metacognitive knowledge (of self, tasks and strategies) and selected cognitive assumptions (symbolic and non-symbolic perception of quantity (numerosity), spatial ability, inhibition) of a group of students with a lower level of the arithmetic skills (N=24) and a group of students with a level of arithmetic skills within the norm (N=31). The results of the research showed a difference between the research groups in metacognitive knowledge of self, and metacognitive knowledge of competence-enhancing strategies. In the other monitored areas (metacognitive knowledge of tasks, avoidance strategies and selected cognitive prerequisites), no statistically significant difference between the observed groups of students was demonstrated.

KEY WORDS

arithmetic skills, metacognitive knowledge, younger school age, cognitive preconditions, learning difficulties

Obsah

Úvod.....	8
TEORETICKÁ ČÁST	10
1 Metakognice.....	10
1.1 Definice metakognice.....	10
1.2 Modely metakognice	11
1.3 Vývoj metakognice.....	18
2 Matematické schopnosti a dovednosti	22
2.1 Schopnosti vs. dovednosti	22
2.2 Matematické schopnosti a dovednosti.....	22
2.3 Vybrané kognitivní předpoklady pro rozvoj matematických dovedností	24
2.4 Obtíže v aritmetických dovednostech	27
3 Metakognice v kontextu matematiky	30
4 Nástroje měření	32
4.1 Nástroje na měření metakognice	32
4.2 Nástroje na měření matematických schopností a dovedností.....	36
EMPIRICKÁ ČÁST	40
5 Uvedení do problematiky.....	40
5.1 Cíl práce	41
5.2 Formulace výzkumných otázek a hypotéz	41
6 Metodika práce.....	43
6.1 Popis výzkumného vzorku	43
6.2 Realizace výzkumu.....	44
6.3 Použité metody	45
6.4 Zpracování dat.....	49
7 Statistická analýza dat a interpretace jejích výsledků	51
7.1 Deskriptivní analýza dotazníku metakognitivních znalostí.....	52

7.2	Deskriptivní analýza proměnných.....	55
8	Testování hypotéz	58
8.1	Oblast metakognitivních znalostí	58
8.2	Oblast vybraných kognitivních předpokladů	59
9	Diskuze.....	63
	Závěr	70
	Seznam použitých zdrojů.....	72
	Seznam tabulek	81
	Seznam obrázků.....	82
	Seznam příloh	83

Úvod

Vzhledem k rozvoji inkluzivního vzdělávání je podpora žáků s výukovými obtížemi velmi aktuálním tématem. Výzkum v oblasti obtíží v matematických dovednostech se dle mnohých autorů vyvíjí značně pomaleji nežli výzkum v oblasti čtenářských dovedností, ačkoliv matematické dovednosti jsou pro vzdělávání stejně nezbytné (Geary, Hamson & Hoard, 2000). Žáci s obtížemi v počítání získávají často k číslům a aritmetice negativní postoj, který může přerůst v úzkost či ve školní fóbii. Obtíže v této oblasti však nemají vliv pouze na školní výkony, ale také na každodenní život jedince. Některé studie například uvádí, že jedinci s obtížemi v aritmetice jsou znevýhodněni také na trhu práce či mohou být více ohroženi dezinformacemi (Kaufmann & Aster, 2012; Roozenbeek et al., 2020). Pokud chceme předcházet selhávání žáků v této oblasti, včasná intervence je nezbytná. Avšak proto, aby mohla být adekvátně mířena, vyžaduje také kvalitní diagnostiku.

V pedagogicko-psychologických poradnách je problematika obtíží v matematických schopnostech a dovednostech oproti obtížím ve čtení, psaní či gramatice výrazně méně častou zakázkou. Ve většině případů doporučuje návštěvu poradny učitel žáka, případně školní poradenské pracoviště. Je tedy otázkou, zdali je dětí s matematickými obtížemi ve školách méně, nebo se jim věnuje pouze menší pozornost a do poradny odesílány nejsou. Autorka této práce se pohybuje ve školství delší dobu na různých pozicích. Za tuto dobu vyzorovala, že se obtížím v matematice nepřikládá takový význam, jako například obtíže ve čtení nebo psaní, a to jak na prvním, tak na druhém stupni základní školy. V našem školství se ujal jakýsi narativ, že matematika je těžká a úspěšní jsou v ní pouze *opravdu chytrí* žáci. Butterworth (2003) upozorňuje, že podobně se kdysi přistupovalo také k obtížím ve čtení, které byly dlouho považovány pouze za důsledek nízkých intelektových schopností. V této oblasti již pokročil výzkum a také diagnostika, proto je dnes na tuto problematiku nahlíženo komplexněji. Psychologové a speciální pedagogové mají sice k dispozici diagnostické nástroje matematických dovedností, z osobních rozhovorů s kolegy z poradny však autorce vyplynulo, že jsou v této oblasti velmi nejistí a chybí jim dostatečné teoretické povědomí o této problematice. Zajímavé také je, že depistážní šetření, které se provádí ve druhých třídách základních škol, se zaměřuje pouze na předpoklady pro čtení a psaní, případně aktuální úroveň rozvoje v těchto oblastech. Početní dovednosti ani jejich předpoklady plošně mapovány nejsou.

Proto, aby mohly být diagnostické nástroje kvalitní, je nezbytné prozkoumat, jaké jsou zakládající příčiny těchto obtíží. Výzkumy, které se touto problematikou zabývají, předpokládají vliv oslabení některých kognitivních předpokladů na rozvoj aritmetických

dovedností. Zvažují klíčový vliv oslabených schopností symbolizace množství (numerozity), prostorových schopností, exekutivních funkcí (zejména inhibice a krátkodobé pracovní paměti) či vliv celkově pomalejšího tempa řešení úloh (např. Landerl et al., 2004; Butterworth, 2003; Pražáková & Špačková, 2019). Jiné výzkumy předpokládají významný vliv metakognice na rozvoj aritmetických dovedností. Některé z nich dokonce naznačují, že jedinec s dobře rozvinutými metakognitivními schopnostmi má potenciál vypořádat se i s takovými úlohami, pro které nemá dostatečné matematické znalosti (např. DeFranco, 1996).

Práce je členěna do dvou hlavních částí – na část teoretickou a empirickou. Cílem teoretické části této práce je představit čtenářům problematiku metakognice, její vztah k matematickým dovednostem, předpoklady pro rozvoj aritmetických dovedností a nástroje měření obou oblastí. Empirická část předkládá popis výzkumu, který byl realizovaný ve spolupráci s doktorským výzkumem Skalové Pražákové zabývajícím se klíčovými indikátory specifických obtíží v rozvoji aritmetických dovedností u dětí mladšího školního věku (podrobněji in Pražáková, 2019). Cílem našeho výzkumu bylo zmapovat, zdali existuje rozdíl v metakognitivních znalostech a vybraných kognitivních předpokladech u žáků mladšího školního věku, přesněji žáků třetích tříd základních škol, kteří se liší úrovní aritmetických dovedností. Na závěr této práce diskutujeme výsledky výzkumu, a také hodnotíme limity této práce.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Metakognice

1.1 Definice metakognice

Pokud budeme hledat odpověď na otázku, co to metakognice je, velmi pravděpodobně narazíme na zdánlivě jednoduché vysvětlení, že **metakognice je myšlení o myšlení**. Ačkoliv vypadá tato definice velmi jasně, při hlubším zamyšlení se nad jejím významem z ní mnoho nevyplývá, proto se pokusíme tento pojem vysvětlit obsáhleji.

Když se na slovo *metakognice* podíváme z etymologického hlediska po vzoru mnohých autorů (např. Krykorková & Chvál, 2001; Říčan, 2017a), jedná se o slovo složené z řecké předpony *meta-* a kořene slova *kognice*. Předpona *meta-* značí nějaký přesah, něco za, v tomto případě tedy mluvíme o něčem, co přesahuje *kognici* neboli *poznávání* (Hartl & Hartlová, 2000). Zjednodušeně lze říci, že se jedná o označení schopnosti jedince nahlížet na své vlastní poznávání a procesy s ním spojené.

Na jednom přesném vymezení metakognice se však odborníci dodnes neshodnou. Může tomu tak být například proto, že existuje řada pojmů, které s metakognicí úzce souvisí, či dokonce pojmenovávají její části, a často jsou v užívání zaměňovány (např. exekutivní kontrola (angl. executive control), autoregulace (angl. self-regulation), meta-paměť (angl. meta-memory), sebereflexe (angl. self-reflection), důvěra ve vlastní schopnosti (angl. self-efficacy) aj.). Také samotné teorie metakognice se v některých případech výrazně obsahově odlišují. Ačkoliv je tedy definování tohoto pojmu nejednoznačné, lze konstatovat, že všechny definice zdůrazňují důležitou roli exekutivních procesů (zejména kontroly a regulace poznávacích procesů) (Livingstone, 2003; Van Zile-Tamsen, 1996; Lokajíčková, 2014).

Říčan (2017a) také upozorňuje na úzkou souvislost mezi metakognicí a Sternbergovou teorií úspěšné inteligence, která zdůrazňuje důležitost uvědomování si, v souvislosti s určitou úlohou či situací, který druh myšlení je vhodné využít. Sternberg považoval metakognici za extrémně důležitou pro inteligenci a zdůrazňoval, že metakognitivní procesy řídí a koordinují procesy kognitivní, které jsou zpětně ovlivňovány samotným kognitivním úkolem. Z tohoto důvodu lze předpokládat, že metakognitivní i kognitivní procesy jsou pro řešení problémů stejně důležité (Sternberg, 1984, 1994, in Říčan, 2017a; Van Zile-Tamsen, 1996). Vágnerová (2005, s. 42) také nahlíží na metakognici jako na významnou součást inteligence ovlivňující celkovou úspěšnost jedince. Metakognice totiž umožňuje jedinci porozumět sobě

a svým schopnostem, zhodnotit své možnosti, regulovat a kontrolovat proces řešení, volit vhodné strategie v tomto procesu atp.

Termín metakognice je nejčastěji spojován s osobou Johna H. Flavella, který se jej jako první pokusil definovat začátkem 70. let, v době, kdy zájem o tuto oblast výrazně vzrostl (Flavell, 2000). Flavell (1976, s. 232) popsal metakognici následovně (vlastní překlad¹). „*Metakognice odkazuje na znalosti člověka týkající se jeho vlastních kognitivních procesů nebo čehokoliv, co nimi souvisí, např. vlastností informací nebo dat důležitých pro učení.*“

1.2 Modely metakognice

V následující části představíme modely metakognice různých autorů. Snažili jsme se vybrat takové přístupy, které jsou v rámci tohoto tématu vlivné a v nahlížení na metakognici se alespoň částečně odlišují, abychom zachytili také rozmanitost tohoto tématu, která je značná a v chápání celého konceptu má své místo.

1.2.1 Model kognitivního monitorování

Výraznou osobností moderní vývojové psychologie je již výše zmiňovaný Flavell, který se výrazně zasloužil o rozvoj vědeckých zkoumání v oblasti metakognice a její teoretické zakotvení. Flavell (1979, s. 906) v souvislosti s výzkumem vývoje dětských paměťových strategií vytvořil model kognitivního monitorování. Metakognici v něm dělí do čtyř komponent na (a) **metakognitivní znalosti** (angl. metacognitive knowledge), (b) **metakognitivní zkušenosti** (angl. metacognitive experiences), (c) **cíle nebo úlohy** (angl. goal or tasks) a (d) **činnosti nebo strategie** (angl. actions or strategies). Prostřednictvím činnosti a součinnosti těchto komponent může jedinec monitorovat širokou škálu poznávacích procesů.

Metakognitivní znalosti

Součástí komponenty metakognitivních znalostí jsou primárně znalosti a přesvědčení o tom, jakým způsobem ovlivňují průběh a výsledek poznávacích činností různé faktory a proměnné, které jsou v tomto směru aktivní, a které se různě kombinují. Tyto faktory a proměnné člení Flavell (1979, s. 907) do tří hlavních kategorií: (a) **osoba**, (b) **úloha** a (c) **strategie**.

- a) Kategorie **osoby** (angl. person) obsahuje vše, o čem je jedinec přesvědčen v souvislosti s poznávací činností sebe a druhých. Jedná se o přesvědčení

¹ „*Metacognition refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes or anything related to them, e.g., the learning-relevant properties of information or data*“

o intraindividuálních odlišnostech („*Učím se lépe, když si věci píšu, než když si je opakuji nahlas.*“), interindividuálních odlišnostech („*Jeden kamarád má lepší schopnost empatie než druhý.*“) a přesvědčení o obecnostech poznávání, které si jedinec může postupně osvojovat (např. přesvědčení o existenci různého druhu a stupně porozumnění nějaké informaci).

- b) Kategorie **úlohy** (angl. task) zahrnuje dvě subkategorie. První subkategorie souvisí s metakognitivními znalostmi toho, jak ovlivní vnímaná kvalita informací, dostupných během poznávací činnosti, samotné řízení této činnosti a úspěšnost při dosahování cíle. Takové informace můžeme vnímat jako zajímavé nebo nudné, dostatečné nebo omezené, dobře nebo špatně organizované, lehké nebo náročné.² Druhá subkategorie souvisí s metakognitivními znalostmi o tom, že kognitivní náročnost úkolu se může výrazně lišit (např. s ohledem na požadovaný cíl úkolu) při dostupnosti stejných informací.³
- c) Kategorie **strategie** (angl. strategy) zahrnuje znalosti, o tom, jaké strategie je vhodné použít vzhledem na jejich účinnost v souvislosti s druhem poznávací činnosti či dosahovaného cíle⁴.

Metakognitivní zkušenosti

Dle Flavella (1997) jsou metakognitivní zkušenosti jakékoliv kognitivní či metakognitivní zkušenosti doprovázející nějakou intelektuální činnost. Takové zkušenosti mohou trvat různě dlouho a mohou mít jednoduchý, ale i složitý obsah, mohou se objevit před, po nebo během poznávací činnosti. Autor se domnívá, že se metakognitivní zkušenosti objevují častěji v situacích, které vyžadují zaměřené a vědomé myšlení (např. v práci nebo ve škole, v nových, neznámých potenciálně rizikových situacích). Tyto zkušenosti mohou podstatně ovlivňovat kognitivní cíle či úlohy, metakognitivní znalosti, kognitivní činnosti či strategie. Mohou vést k vytvoření nového cíle, revidování či opuštění starého (např. pocit selhání), mohou ovlivňovat základ metakognitivních znalostí tím, že k nim něco přidají, něco z nich odstraní či je pozmění a nakonec mohou také aktivovat nové strategie pro dosažení kognitivních i metakognitivních cílů.

² Např. žák, který vnímá úlohu, kterou má vypočítat jako lehkou, předpokládá, že pro něj bude její řešení málo náročné, plynulé. Ze sociálně-kognitivního hlediska můžeme zmínit, např. dítě, které se potřebuje naučit, že i když má informace o nějaké osobě, nemusí být vždy z hlediska kvality a kvantity dostačující pro vytvoření úsudku.

³ Např., když čteme stejný text, víme, že je náročnější následně text přeříkat doslovně, než ho převyprávět vlastními slovy.

⁴ Např. může být jedinec přesvědčen, že se nejlépe danou látku naučí, když si bude vlastními slovy opakovat hlavní body, případně požádá, aby ho někdo přezkoušel.

Metakognitivní znalosti, metakognitivní zkušenosti, cíle a strategie se za účelem kognitivního monitorování vzájemně ovlivňují, doplňují a různě spolu interagují. Flavell (1979, s. 909) uvádí pro lepší ilustraci příklad takové součinnosti. Nejdříve jsou stanovené (námi samými nebo někým jiným) cíle a úkoly, které je potřeba splnit, metakognitivní znalosti váží se k tomuto konkrétnímu cíli (např. víme, že nemáme dostatek znalostí) vyvolají metakognitivní zkušenost, že takového cíle bude těžké dosáhnout. Takováto metakognitivní zkušenost v součinnosti s metakognitivními znalostmi nás vede k využití kognitivní strategie, kterou je získání informací od zkušenějších kolegů. Tím, jak se nám daří nebo nedaří informace získávat, se aktivují další metakognitivní zkušenosti související s tím, jak jsme v našem úsilí úspěšní, což následně zaktivizuje metakognitivní strategie za účelem prozkoumání toho, kterými informacemi disponujeme, a zdali jsou pro náš cíl užitečné.

1.2.2 Procesuální a dispoziční model

Krykorková a Chvál (2001, s. 188) nahlíží na metakognici se snahou o hlubší interpretaci tohoto fenoménu, se snahou zachytit různé teoreticko-metodologické prvky vyplývající z procesu tvorby pojetí metakognice. Tento koncept se snaží zachytit prostřednictvím tří stěžejních kontextů.

Metakognice a reflexe v systému osobnosti

V rámci tohoto kontextu autoři zdůrazňují dva důležité aspekty. Za prvé ten, že ačkoliv metakognice tvoří součást regulační složky poznávacího systému osobnosti, odlišuje se od ostatních regulativních strategií úrovní, ze které svoji činnost⁵ vykonává (jedná se tedy o „schopnost vyššího řádu“). Druhým důležitým aspektem je, že činnost metakognice je úzce spjata s prožíváním, a je tedy úzce propojena s osobnostními vlastnostmi a dispozicemi.

Metakognice, mentální reprezentace a učení se vyšším principům

Důraz zde kladou autoři na obecnost, která určuje metakognitivní činnost. To lze chápat tak, že (zobecněné) principy, které metakognice využívá, lze aplikovat i na situace, které nebyly součástí učebního procesu, jedná se tedy o principy vyššího řádu. Pojem mentální reprezentace, resp. mentální reprezentace vyššího řádu, zde uvádí v souvislosti se souborem těchto principů, které dohromady tvoří „...*strukturu organizovaného vědění v určité oblasti poznání, učiva nebo logického celku.*“ (Krykorková & Chvál, 2001, s. 187)

⁵ Jedná se o činnosti plánování, řízení, monitorování, regulování, hodnocení aj.

Metakognice v kontextu inteligentního chování

V této části se autoři zamýšlí nad odrazem metakognice v teoriích inteligence s důrazem na Sternbergovu a Gardnerovu teorii. V rámci Sternbergova komponentního modelu inteligence zdůrazňují tzv. metakomponenty, které Stenberg považuje za důležitou součást inteligentního jednání spolu s metakognitivními procesy. V rámci Gardenovy teorie inteligence upozorňují na významovou souvislost mezi metakognicí a presonální inteligencí (Krykorková & Chvál, 2001).

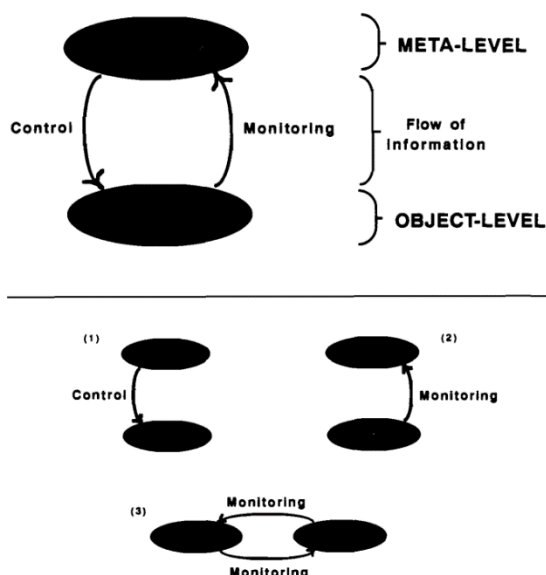
Na základě výše zmíněných kontextů, vymezují Krykorková a Chvál (2001, s. 188) metakognici jako určitou formu „...*poznání, která má charakter nadhledu nad naším poznáním, učením a myšlením...*“ a definují její dvě základní složky, a to složku a) **dispoziční**, která zahrnuje reprezentace vyššího řádu a tvoří tak metakognitivní potenciál jedince a b) **procesuální**, kterou tvoří procesy, které metakognici utváří, jako je monitorování, kontrola, plánování aj. (Krykorková & Chvál, 2001).

1.2.3 Model Nelsona a Narens

Nelson a Narens (1990, s. 125) staví svoji analýzu metakognice na třech principech, které, jak samy uvádí, můžeme izolovaně nalézt u jiných autorů. Tyto tři principy jsou znázorněny v grafu níže (obrázek 1).

- První princip se týká rozdělení kognitivních procesů do dvou vzájemně souvisejících úrovní, které autoři nazývají (a) **meta-úrovní** (meta-level), jejímž úkolem je řídit činnost na (b) **objektové úrovni** (object-level), kde se odehrávají kognitivní operace.
- Druhý princip, na kterém autoři staví, říká, že výše zmíněná meta-úroveň v sobě zahrnuje **dynamický model** (dynamic model) objektové úrovně (např. mentální simulaci).
- Třetí princip spočívá ve vymezení dvou důležitých procesů souvisejících s tokem informací mezi meta-úrovní a objektivní úrovní, kterými jsou a) **řízení** (control) a b) **monitorování** (monitoring).

Dle Nelsona a Narens (1990) proces **řízení** (control) probíhá směrem od meta-úrovně k objektivní úrovni, na které probíhají kognitivní operace, a to tak, že informace směřující z meta-úrovně mohou vyvolat změny v činnosti na objektivní úrovni, avšak k tomu je zapotřebí, aby se pomocí procesu monitorování dostávaly informace z objektivní úrovně do meta-úrovně (např. o tom, že není zapotřebí aktuální stav měnit).



Obrázek 1 - Metakognitivní model Nelsona a Narens

1.2.4 Víceúrovňový model Anastasie Efklides

Na závěr této části se pokusíme představit zajímavý, ale složitý víceúrovňový model metakognice, který navrhuje Efklides (2008). V tomto modelu autorka kombinuje mimo jiné i některé výše zmíněné modely, ale zahrnuje do něj také další aspekty metakognice, o kterých jsme se doposud nezmiňovali.

Efklides (2008) ve svém modelu metakognice pracuje se třemi základními komponentami:

- **metakognitivní znalosti** (angl. metacognitive knowledge),
- **metakognitivní zkušenosti** (angl. metacognitive experiences),
- **metakognitivní dovednosti** (angl. metacognitive skills).

Metakognitivní znalosti a zkušenosti jsme si teoreticky představili výše v rámci teorie Flavella. **Metakognitivní dovednosti** jsou další komponentou, kterou je však potřeba odlišit od metakognitivních znalostí. Metakognitivní znalosti se týkají znalostí a přesvědčení o tom, jakým způsobem ovlivňují průběh a výsledek poznávacích činností osobní charakteristiky, úkolové charakteristiky a dostupné strategie (Flavell, 1979). Jak uvádí Veenman a Elshout (1999), metakognitivní znalosti však nemusí v daný moment nutně vést k chování, které povede k řešení problému⁶. Na druhou stranu metakognitivní dovednosti zahrnují procedurální

⁶ Příkladem může být student, který si je sice vědom toho, že by bylo dobré, aby si udělal stručný výtah z dlouhého textu (má o tom metakognitivní znalost), a přesto to z různých důvodů neudělá (látka ho nezajímá, je moc náročná nebo student nemá dost potřebných znalostí a dovedností pro tvorbu takového výtahu).

znalosti, které jsou potřebné pro regulaci či kontrolu poznávací činnosti v daný moment. Jedná se o orientaci v úloze, plánování, monitorování, kontrolu, rekapitulaci. Tyto dovednosti mohou být využívány i na nevědomné úrovni (Veenman & Elshout, 1999).

Efklides (2008) zahrnuje do svého modelu **vědomý a nevědomý charakter metakognice**. Autorka upozorňuje na fakt, že pokud nahlížíme na metakognici z hlediska toho, že kontroluje, monitoruje a reguluje probíhající poznávací činnosti, předpoklad, že probíhá pouze na vědomé úrovni se nezdá být správný⁷ (Robinson, 1983 in Efklides, 2008). Ačkoliv je náročné zkoumat nevědomou úroveň metakognice, neuropsychologická zjištění dokazují, že lze pozorovat v anetriorním cingulárním kortexu konfliktní odpověď, ještě předtím než je vyslovena. Stejně tak lze pozorovat v této oblasti mozku chybu záhy poté, co je vyslovena nesprávná odpověď (Bush, Luu & Posner, 2000; Van Veen & Carter, 2002 in Efklides, 2008).

Pokud metakognice slouží např. k regulaci pozornosti k novým podnětům, je zde zapotřebí neustále monitorovat příchozí informace (což probíhá na nevědomé úrovni), implicitně regulovat procesy (zvýšení úsilí, zpomalení zpracování informace aj.), aby mohla být pozornost účelně zaměřena. Pokud však není implicitní regulace dostačující, dostane se výsledek monitorovacího procesu do vědomí v podobě metakognitivních zkušeností afektivního charakteru, které nás upozorní na možné selhání. Jedná se o proces zpracování zdola nahoru. Proces shora dolů, který je vědomý, se může aktivovat například tehdy, když nás externí zpětná vazba (my sami nebo někdo druhý) upozorní na chybu, která nebyla implicitní regulací odhalena a dochází k explicitnímu metakognitivnímu uvědomění, které je spojeno s informacemi v pracovní paměti, se sociální interakcí, potřebou sdělovat své myšlenky, posuzovat myšlení druhých (například argumentace v rámci diskuze) (Efklides, 2008).

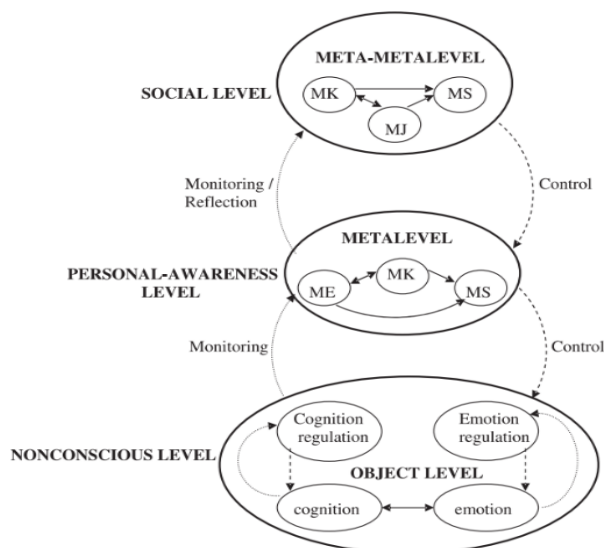
Efklides do svého modelu dále zahrnuje **autoregulaci** (angl. self-regulation) jako dobrovolný proces, který se stará o to, aby naše činnost vedla k chtěnému výsledku. Metakognice je jedním z nástrojů autoregulace a je tudíž propojena s výše zmíněnými komponentami. Důraz klade autorka na výrazné ovlivňování autoregulace metakognitivními zkušenostmi (zejm. afektivního charakteru – např. pocitem selhání, vnímanou náročností). Metakognitivní zkušenosti jsou kognitivního i afektivního charakteru, proto ovlivňují funkci kognitivní i afektivní regulační smyčky (angl. cognitive and affective regulatory loop), které jsou součástí procesu autoregulace (Efklides, 2008).

⁷ Jako příklad nevědomé úrovně metakognice můžeme uvést děti, které velmi často kladou otázky, které podporují jejich porozumění určitému problému, ale přitom si nejsou vědomy toho, že jejich porozumění není dostatečné.

Výše jsme stručně představili teoretické zakotvení tohoto modelu, a můžeme se tedy posunout k jeho popisu. Jak lze vidět na obrázku č. 2, jedná se o model víceúrovňový. Tento model předpokládá, že objektová úroveň (viz výše Nelson & Narens, 1990) zahrnuje kognitivní i afektivní procesy, které jsou zde na nevědomé úrovni regulovány samostatnými regulačními systémy, kognitivním a afektivním.

Na úrovni osobního vědomí se nachází produkty těchto regulačních systémů spolu s jejich vnímaným vlivem na chování, zároveň se zde nachází emoce, myšlenky, představy, přání atd. společně se třemi metakognitivními komponentami, tedy metakognitivními znalostmi, zkušenostmi a dovednostmi, které jsou dle autorky složkami sebeuvědomnění. Dochází zde k integraci reprezentace a požadavků dané úlohy a následného chování či jednání v souvislosti s touto úlohou.

Úroveň osobního vědomí je informačně propojena s meta-meta úrovní – tedy sociální úrovní metakognice, která zahrnuje metakognitivní úsudky o sobě či druhých (o metakognitivních znalostech, zkušenostech či dovednostech), zahrnuje informace ohledně sebeuvědomnění, stejně jako informace z interakcí s druhými lidmi. Monitorování na této úrovni je explicitní a může mít formu reflexe (Efklides, 2008).



Obrázek 2 - Víceúrovňový model Anastasie Efklides

vysvětlivky: ME = metakognitivní zkušenosti; MK = metakognitivní znalosti;

MS = metakognitivní dovednosti; MJ = metakognitivní posouzení

1.3 Vývoj metakognice

Výzkum v oblasti metakognice byl zejména ve svých počátcích výrazně ovlivněn teorií kognitivního vývoje Jeana Piageta (např. Lai, 2011; Říčan, 2017b; Hrbáčková, 2011). Dle Piageta probíhá kognitivní vývoj postupně čtyřmi hlavními stádii, v jejichž rámci dítě různým způsobem vnímá a poznává svět kolem sebe a svůj svět vnitřní. Jedná se: **senzomotorické stádium** (0–2 roky), **předoperační stádium** (2–7 let), **stádium konkrétních operací** (7–11 let) a **stádium formálních operací** (11/12–14/15 let). Posledně jmenované stádium je v kontextu metakognice podstatné především proto, že v tomto stádiu je již jedince schopen (na rozdíl od stádia konkrétních operací) rozlišit formu a obsah, je schopen dedukce a tvorby hypotéz, abstraktně myslet, systematizovat své myšlení, plánovat, tvořit postup, tak aby dosáhl chtěného cíle. (Piaget & Inhelder, 1997; Thorová, 2015)

Výzkumníci tedy předpokládali, že pokud dítě nedosáhne tohoto stádia kognitivního vývoje, nemůže být schopno metakognitivního uvažování a proto zpochybňovali rozvoj metakognice před 8–10 rokem, tedy před vstupem na druhý stupeň (Flavell, 1979; Lai, 2001; Říčan, 2017). Piagetova teorie byla však kritizována zejména proto, že opomíjí sociální a kulturní vlivy, které mohou výrazně zasahovat do průběhu vývoje. Následný výzkum, který ověřoval Piagetovu teorii, také prokázal, že některé kognitivní schopnosti se objevují u dětí dříve (Hrbáčková, 2011; Thorová, 2015).

1.3.1 Raný vývoj metakognice

Novodobé výzkumy v oblasti metakognice pojímají vývoj tohoto kognitivního fenoménu z širšího hlediska a předpokládají počátek rozvoje metakognitivních schopností již velmi brzy. Brinck a Liljenfors (2013) upozorňují na fakt, že vzhledem na to, že koncept kognice se ve vědě rozšiřuje, mělo by se to odrážet i ve výzkumech metakognice. Ve svých úvahách vychází z předpokladu, že intersubjektivita⁸ umožňuje učení se metakognitivním dovednostem a domnívají se, že metakognitivní schopnosti a dovednosti se na implicitní úrovni začínají rozvíjet mezi 2.–4. měsícem v rámci interakce s druhými. Sociální prostředí není vždy předvídatelné, a to může být důvodem k potřebnosti kontrolovat a monitorovat kognici. Agnetta a Rochat (2004) ve svém článku uvádí, že chování dětí během experimentu naznačovalo přítomnost metakognice již u dětí od 9 měsíců, kdy děti řídily svoji činnost, aby si ověřily, zda dospělý jeho činnost napodobuje (např. náhle ztrnuly nebo zrychlily tempo). Balcomb a Gerken (2006, s. 1003) naznačují, že procesy, které můžeme označovat jako metakognitivní, možná

⁸ Intersubjektivita je „... nejranější dyadické sociálně-komunikační chování...“ (Thorová, 2015, s. 136).

existují v propojení s korovými procesy na implicitní úrovni již velmi brzy a pouze se začínou stávat s věkem explicitními.

U dětí v předškolním věku je již metakognitivní chování a uvažování více rozvinuto, i když není jednoduché ho zkoumat, vzhledem na jeho více méně non-verbální charakter. Děti v tomto věku jsou schopné zaměřit pozornost žádoucím směrem, přizpůsobovat své aktivity, v určité míře plánovat, hodnotit činnost zaměřenou k cíli, a také se s rozvojem verbálních schopností pokouší tyto procesy verbalizovat (Whitebread et al., 2009; Balcomb, & Gerken, 2006). Jako vhodné se jeví v tomto věku metakognici rozvíjet. Užití nástrojů k rozvoji metakognice může vést u dětí v předškolním věku ke zdokonalení metakognitivních schopností (Hrbáčková, 2011; Whitebread et al., 2009).

1.3.2 Mladší školní věk

Vzhledem k zaměření této práce se v následující části budeme více věnovat vývojovému období mladšího školního věku dítěte, především vývojovým specifickým v oblasti myšlení a metakognice.

Toto období vývoje dítěte je vymezeno věkem 6 až 7 let, kdy dítě nastupuje do školy a věkem 11 až 12 let, tedy nástupem puberty. Velmi důležitým milníkem v životě dítěte je nástup do školy. Dítě se ocitá v novém prostředí, mezi neznámými lidmi v novém, dosud nepoznaném, kontextu. Na dítě jsou kladeny větší nároky od dospělých – na jeho samostatnost, rychlost práce, přemýšlení, důslednost, dodržování pravidel. Dítě je často v prostředí, které ho nutí srovnávat se s druhými dětmi, čelí nezdarům, má snahu dosahovat úspěchu. Toto období je velmi důležité pro rozvoj sebevědomí, sebeúcty, víru ve vlastní schopnosti a motivaci k učení (Thorová, 2015).

Langmeier a Krejčířová (2006) charakterizují toto období vývoje dítěte jako období střízlivého realismu. Myšlení dítěte v tomto věku již není tolik závislé na aktuálním prožívání, přáních, fantazijích, stává se méně egocentrické a je více zaměřené na svět kolem ve snaze poznat a pochopit ho takový, jakým doopravdy je. Mladší školní věk je v kontextu Piagetovy teorie kognitivního vývoje fází konkrétních logických operací. Dle Piageta dítě v tomto období začíná uvažovat logicky, avšak na konkrétní úrovni. Abstraktního myšlení zatím dítě dle Piageta není schopno. Pokud je nuceno řešit problém, se kterým nemá dosavadní zkušenost, může se uchýlit k vývojově nižším strategiím, které mu dopomohou v alespoň částečné orientaci v úloze (např. si úlohu egocentricky zkreslí či zjednoduší), může použít prelogické formy myšlení a úsudku. Pro myšlení dítěte je v tomto období velmi důležitá vlastní zkušenost,

dokáže zacházet s konkrétními pojmy, myšlenkami či představami, které z jeho zkušenosti vychází (Langmeier & Krejčířová, 2006; Thorová, 2015).

Při zpracování informací se dítě v tomto období zpočátku omezuje na jednu informaci či část informací, které mu připadají podstatné. Dítě má v začátku tohoto vývojového období obtíže se zpracováním více informací najednou (např. interpretací dvou linií příběhu, obtíže při přechodu přes deset aj.). Až kolem osmi let je dítě schopno uvažovat komplexněji. Toto se projevuje také v řešení problému. Jak jsme se výše zmínili, menší dítě má tendenci si problém zjednodušovat pro jeho lepší orientaci, vybere si například pouze nějakou část informací, a řešení tudíž nemusí být správné. Postupně však roste schopnost informace hodnotit, třídít dle významnosti tak, aby byly pro řešení úkolu dobře využitelné. Způsob, jakým dítě chápe a řeší problémy, se v průběhu vývoje mění na základě rozvoje schopností a dovedností, získávání zkušeností, zvyšováním efektivity užívání strategií. Škola tento vývoj výrazně stimuluje tím, že rozvíjí různé kognitivní styly (Vágnerová & Lisá, 2021).

Dle Vágnerové a Lisé (2021) je metakognice na počátku školního věku spíše obecná. U mladších školáků je omezena schopnost rozlišovat vlastní kompetence a kompetence druhých, omezena je také schopnost adekvátního sebehodnocení, posouzení vlastních schopností, odhadu obtížnosti úkolu, posouzení vhodné strategie řešení problému či zpětné vazby. V průběhu tohoto vývojového období však dochází k výraznému zdokonalování těchto metakognitivních znalostí a schopností. Z výzkumu de Jagera, Jansena a Reezigta (2005) mimo jiné vyplývá, že pro rozvoj metakognice na první stupni základní školy je velmi účinné, pokud se učitelé v rámci výuky na rozvoj metakognice zaměřují, ať už pomocí uceleného programu nebo jako součást běžného vyučování.

Pohled na vývoj metakognice je značně ovlivněn teoretickou roztříštěností na poli jejího bádání, a také velkými rozdíly v přístupu k jejímu zkoumání. Zejména starší výzkumy zabývající se vývojem metakognice používají v rámci výzkumu tradiční kognitivní experimenty (např. Johna Flavell nebo Gregory Schraw), které k měření využívají např. posuzování výroků o učení (angl. judgment of learning), kdy po respondentech žádají, aby si zapamatovali nějaký obsah a predikovali úspěšnost jeho vybavení v budoucnu. Vzhledem na to, že se do takového úkolu promítá nejen úroveň metakognice, ale také úroveň verbálního porozumění, kapacita paměti, úroveň pozornosti aj., tedy aspekty, které se s vývojem stávají kvalitnějšími a v mladším věku zatím nemusí být dostatečně vyžralé, výsledky takovýchto výzkumů mohou potvrzovat rozvoj metakognitivních strategií až v pozdějším věku, ačkoliv tomu tak nemusí být. Moderní výzkumy, které využívají

rozmanitější nástroje na měření metakognice (např. pozorování metakognitivních projevů v chování, vizuální nástroje, prázdné komiksové bubliny pro myšlenky i slova, non-verbální aktivity aj.), se přiklání k názoru, že se metakognitivní schopnosti pravděpodobně rozvíjejí již mnohem dříve než se původně předpokládalo a v průběhu vývoje, postupným dozráváním CNS a nabýváním zkušeností, se zdokonalují, prohlubují, rozšiřují a nabývají tak komplexnější formy (až do dospělosti) (Schraw & Moshman, 1995; Branigan & Donaldson, 2019).

2 Matematické schopnosti a dovednosti

2.1 Schopnosti vs. dovednosti

Pojmy *schopnost* a *dovednost* mohou nabývat více významů a jejich jasné definování není jednoduché, ačkoliv v běžné mluvě tuto nejednoznačnost nevnímáme tak výrazně. Nejasné vymezení těchto pojmů může mít vliv na empirické zkoumání a následně se tak může projevit i v rozdílných výsledcích výzkumů, které jsou zaměřené na zdánlivě stejný cíl (Nakonečný, 2009, Cígler, 2010; Říčan, 2010; Košč, 1972).

Někteří autoři vymezují schopnosti v souvislosti s výkonem (Nakonečný, 2009; Atkinson et. al., 1995). Nakonečný (2009, s. 194) definuje schopnosti jako „...*psychofyzické dispozice k výkonu*...“ a zahrnuje pod tento pojem také specifické schopnosti (např. technické) fantazii a paměť. Upozorňuje na velmi podstatný fakt, že schopnosti jsou ovlivňovány jak vnitřními, tak vnějšími podmínkami (např. motivace, rodinné zázemí aj.). Znamená to tedy, že pokud budou mít dvě osoby stejné schopnosti, nemusí podat stejný výkon. Výkon lze tedy považovat za míru naučeného, zatímco schopnost za předpoklad k tomuto učení (Atkinson et al., 1995).

2.2 Matematické⁹ schopnosti a dovednosti

V souvislosti s matematikou se v literatuře můžeme setkat jak s pojmem **matematické schopnosti** (angl. mathematical ability), tak s pojmem **matematické dovednosti** (angl. mathematical skill/ achievement). Cígler (2018, s. 15) ve své knize s příznačným názvem *Matematické schopnosti* vysvětluje rozdílnost těchto pojmů. Zatímco pojmem **matematické schopnosti** nejčastěji označuje exekutivní a poznávací složky, které jsou využívány při řešení matematických operací (patří sem tedy i některé součásti pracovní paměti, aj.), pojem **matematické dovednosti** označuje spíše jakousi úroveň vývoje či naučenou znalost matematiky, která souvisí nejen s matematickými schopnostmi, ale také např. s motivací, přístupem ke škole, sebehodnocením žáka, učebním stylem aj. Sám autor však upozorňuje, že tento rozdíl není jednoznačný a pokud nebude mít jedinec dostatečné teoretické znalosti nebude schopen složitějšího matematického uvažování (Cígler, 2018).

⁹ V této diplomové práci používáme slovo „*matematický*“ ekvivalentně se slovem „*aritmetický*“. Jsme si vědomi, že slovo matematika je široký pojem, který kromě aritmetiky zahrnuje také oblasti, jako je geometrie, algebra, počet, pravděpodobnost, statistika aj. Tato práce se však zaměřuje na žáky mladšího školního věku, přesněji na žáky 3. tříd, kdy ve výuce matematiky převažuje aritmetika, a proto je cílem našeho bádání právě tato oblast. Vycházíme však z teoretických předpokladů a výzkumných snah zabývajících se také obecně matematikou.

Mnozí autoři (např. Geary, 2000; Dehaene, 2011) se shodují na tom, že se lidé rodí s vrozeným souborem kvantitativních schopností. Výzkumy dokazují, že lze tyto vrozené elementární početní schopnosti pozorovat již v posledním trimestru prenatálního období (Schleger et al., 2014).¹⁰ Některé výzkumy dokonce dokazují vrozenost elementárních početních schopností také u různých živočišných druhů (např. u šimpanzů (Beran et al., 2012) či ryb (Agrillo, Miletto Petrazzini & Bisazza, 2015)).

Z neuropsychologického hlediska jsou kvantitativní schopnosti lokalizovány v parietálním laloku lidského mozku (Dehaene, 1997). V této části mozku byl identifikován aproximální numerický systém. Jedná se o kognitivní systém, který nám umožňuje velmi rychle odhadovat množství. Tento systém je považován za klíčový pro vývoj elementární aritmetiky, především pro vytváření mentální reprezentace pro základní aritmetické operace (sčítání, odčítání, dělení, násobení) (Plassová, Stuchlíková & Vavřečka, 2017). Systém se skládá ze dvou základních složek: (a) **aproximální aritmetika** (tato složka je aktivní během odhadu množiny s více než čtyřmi prvky) a (b) **paralelní systém individualizace** (aktivní při odhadu méně než čtyř prvkové množiny) (Plassová et al., 2017; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004).

Výše zmíněný systém slouží k preverbálnímu (implicitnímu) porozumění množství, pro který se u nás začíná používat termín **numerozita** (Plassová et al., 2017; Pražáková, & Kucharská, 2019). Tato schopnost je pozorovatelná ve vývoji již velmi brzy. Jak jsme se zmínili výše, některé výzkumy dokonce mluví o existenci této schopnosti již ve třetím trimestru prenatálního období (Schleger et al., 2014). Geary (2000) uvádí, že již v prvních týdnech života jsou děti schopné vnímat a reagovat na množinu v počtu od 1 do 3 (někdy do 4) prvků a rozlišovat mezi takovýmto množstvím.¹¹

Geary (2000) nazývá tyto vrozené schopnosti jako **primární kvantitativní schopnosti**¹², a kromě numerozity autor zmiňuje také implicitní schopnost ordinality, počítání a jednoduché aritmetiky. Wynn (1992 in Geary, 2000) dokázal, že děti v pěti měsících již jsou schopny rozlišit navýšení či snížení množství. Děti kolem 18 měsíců již dokáží porozumět základním ordinálním vztahům, například dokáží posoudit, že dva předměty jsou více než jeden, ale méně než tři (Geary, 2000).

¹⁰ Pomocí magnetoencefalografie zkoumali odezvu mozku plodu na měnící se počet zvuků (tónů) ve srovnání s novorozenci a dospělými. Již ve třetím trimestru se u plodu odezva měnila v závislosti na počtu zvuků.

¹¹ Feigenson a Carey (2005) ve svém výzkumu s 10–12 měsíčními dětmi prokázali, že takto malé děti dokáží rozlišovat množiny zahrnující maximálně 3 prvky (při množinách se čtyřmi prvky tyto schopnosti selhávaly).

¹² V literatuře se můžeme setkat s rozmanitým označením těchto vrozených schopností, pro přehlednost této práce budeme užívat pojmu primární kvantitativní schopnosti dle Gearyho (2000).

Některé výzkumy dokazují, že úroveň primárních kvantitativních schopností koreluje s úrovní **sekundárních kvantitativních schopností**¹³ (tedy početními a aritmetickými dovednostmi), které se rozvíjejí později (např. Agrillo, Piffer & Adriano, 2013; Feigenson et al., 2004). Zájem o identifikaci klíčových předpokladů pro rozvoj sekundárních kvantitativních schopností mají odborníci zejména v souvislosti s problematikou specifických obtíží v matematických dovednostech. Jejich výzkumy (např. Landerl, Bevan & Butterworth, 2004; Butterworth, 2003; Pražáková & Špačková, 2019) předpokládají významný vliv úrovně numerozity na rozvoj matematických dovedností, ale zvažují také další kognitivní předpoklady, které do rozvoje vstupují. V následující části se pokusíme nastínit stručný přehled těchto nejčastěji zvažovaných kognitivních předpokladů.

2.3 Vybrané kognitivní předpoklady pro rozvoj matematických dovedností

Matematika je komplexní předmět, což implikuje zapojení velkého množství různých základních schopností (kognitivních předpokladů). Žáci, kteří mají obtíže v některé z těchto oblastí nebo v jejich propojení, mohou mít obtíže v učení se matematice (Karagiannakis, Beccagliani-Frank & Papadatos, 2014). Vzhledem k tomu, že kognitivních předpokladů je více, mohou žáci s obtížemi v matematice v nějakých oblastech selhávat, ale v některých mohou mít dobré výsledky (Bartelet, Ansari, Vaessen & Blomert, 2014).

2.3.1 Intelektové schopnosti

Dle mnohých autorů je úroveň matematických dovedností úzce propojena s úrovní inteligence. K posouzení matematických schopností a dovedností se využívají také vícedimenzionální testy rozumových předpokladů (např. WISC-III) (blíže se využití těchto testů v souvislosti s diagnostikou matematických schopností věnujeme níže). Někteří autoři však upozorňují, že vztah inteligence a matematických dovedností není přímo úměrný (Zelinková, 2003; Passolunghi, Vercelloni & Schadee, 2007).

Vágnerová a Klégrová (2008) uvádí, že inteligence je komplexní a zahrnuje jak g-faktor (tedy faktor obecné inteligence), tak také specifické faktory (jednotlivé intelektové funkce), které se různou měrou podílí na dosažení dobrého školního výkonu také v oblasti matematiky. Tyto dílčí intelektové funkce jsou různě významné pro rozvoj matematických dovedností a jsou rozepsány v dalším textu.

¹³ Geary (2000) takto nazývá schopnosti, které se rozvíjí v rámci předškolní či školní výuky a jsou kulturně podmíněny.

2.3.2 Numerozita

O numerozitě jsme se zmiňovali výše v této kapitole. Jedná se o vrozené implicitní porozumění množstvím, které se jeví jako významné pro rozvoj matematických dovedností (zejm. aritmetických schopností). Například sčítání lze chápat jako změnu numerozity vyplývající z kombinace dvou skupin, odčítání jako odebrání podskupiny z větší skupiny atp. (Butterworth, 2003). V rámci výzkumných úvah je velmi často zvažován právě klíčový vliv úrovně numerozity na rozvoj matematických dovedností (např. Pražáková & Špačková, 2019; Landerl et al., 2004; Butterworth, 2003).

2.3.3 Symbolizace množství

Symbolizace množství (někdy také symbolická numerozita) souvisí se schopností pracovat s číselnými symboly. Tato schopnost byla zkoumána například pomocí úkolů, kdy byly osobám prezentovány číslice, které měly co nejrychleji pojmenovat, případně je měly porovnávat (dle instrukce buď větší/menší číselnou hodnotou nebo větším/menším rozměrem) nebo měly číslice psát apod. Ukázalo se, že osoby se specifickou poruchou učení v matematice podávají v úlohách tohoto typu horší výkon než osoby z kontrolní skupiny, jednalo se zejména o rozdíl v rychlosti, přesnosti a plynulosti při práci s číselnými symboly (např. Pražáková & Špačková, 2019; Landerl et al., 2004; Furman & Rubinsten, 2012). Lze tedy předpokládat, že symbolizace množství, zejm. její rychlost, plynulost a přesnost, jsou dalším důležitým předpokladem pro rozvoj matematických dovedností.

2.3.4 Exekutivní funkce

Vymezení exekutivních funkcí není jednoznačné, pro tuto práci bude postačující uvést pro lepší orientaci jednu ze shrnujících definic. Dle Ptáčka (2011, s. 7) jsou exekutivní funkce „...souborem psychických procesů zodpovědných za řízení a ovládání kognitivních, emočních a behaviorálních funkcí, zejména během aktivního řešení nových problémů...“ a jsou zodpovědné za chování, které je záměrné orientované na řešení a cíl. Vágnerová a Lisá (2021) uvádí, že žáci s kvalitnějšími exekutivními funkcemi bývají ve škole úspěšnější. Tyto funkce se výrazně zlepšují mezi 6. a 8. rokem, což souvisí i s nástupem do školy a s novými požadavky na žáka. Dle Diamond (2013) panuje všeobecná shoda na existenci tří jádrových exekutivních funkcí, kterými jsou: inhibice, pracovní paměť a kognitivní flexibilita. Výzkumy dokazují signifikantní souvislost exekutivních funkcí s matematickými dovednostmi (např. Presentación et al., 2015). V mnohých výzkumech zaměřujících se na zkoumání matematických předpokladů

se pozornost věnuje zejména dvěma z těchto funkcí, a to inhibici a pracovní paměti (Pražáková, 2021; Presentación et al., 2015; Passolunghi & Siegel, 2001).

Inhibice

Inhibice je jednou z jádrových exekutivních funkcí. Jedná se o schopnost jedince kontrolovat svoji pozornost, chování, myšlenky, emoce takovým způsobem, aby dokázal potlačit vnitřní nebo vnější rušivý podnět a jednal tak, jak je v dané situaci potřebné (Diamond, 2013). Dle Vágnerové a Lisé (2021) schopnost inhibice dozrává mezi 9. a 12. rokem a její dozrávání úzce souvisí s požadavky školního prostředí. Presentación et al. (2015) uvádí, že pro některé autory má úroveň inhibice větší schopnost predikovat úroveň matematických dovedností než pracovní paměť. Bull a Scerif (2001 in Presentación et al., 2015) zkoumali inhibici pomocí Stroopova testu čísel, kdy mají respondenti označit číslice větší rozměrem bez ohledu na jejich číselnou hodnotu. Zjistili, že úroveň inhibice váží se na numerické podněty vysoce spolehlivě predikuje úroveň matematických dovedností u dětí od 6 do 8 let věku.

Pracovní paměť

Další jádrovou exekutivní funkcí je pracovní paměť, která zachází s informacemi, které již nejsou percepčně přítomny. Umožňuje tyto informace uchovávat v mysli a mentálně s nimi pracovat. Rozlišujeme dle obsahu dva druhy pracovní paměti: verbální a neverbální (Diamond, 2013). Výsledky mnohých výzkumů prokazují významnou souvislost úrovně pracovní paměti s matematickými dovednostmi (např. Mercader et al., 2018; Landerl et al., 2004; Presentación et al., 2015; Locuniak & Jordan, 2008). Na výkon v matematice má vliv také dlouhodobá paměť, zejména z hlediska uchovávání a vybavování jednoduchých aritmetických faktů (jako je např. $5+1=6$) či početních vědomostí (Locuniak & Jordan, 2008).

2.3.5 Prostorové schopnosti

Výsledky mnohých výzkumů prokázaly souvislost mezi prostorovými schopnostmi a úrovní matematických dovedností (např. Locuniak & Jordan, 2008; Osmon et al., 2007; Bartelet et al., 2014). Stock, Desoete & Roeyers (2010, s. 390) mimo jiné uvádí, že lidé s oslabením prostorových schopností mohou mít obtíže s orientací ve struktuře číselného systému – s chápáním umístění jednotek, desítek a stovek, mohou mít obtíže s umístováním čísel na číselnou osu, prohazováním číslic ve větších číslech či obtíže v geometrii. Zdá se, že prostorové schopnosti tvoří základ pro vytváření číselných představ a vztahů mezi čísly a jsou zásadní pro rozvoj matematických dovedností (Dehaene, 1997).

2.3.6 Jazykové schopnosti

Jazyk hraje v matematice důležitou roli. Dle Pražákové a Kucharské (2019, s. 149) slova popisují „...jednak samotnou kvantitu (např. jedna, dva, nebo tři), dále také kategorie kvantit (hodně, málo), relativní množství (více, méně) i vztahy mezi množstvím (např. dvakrát tolik)....“. Geary (2000) zmiňuje možný vliv lingvistických charakteristik jednotlivých jazyků na porozumění desítkové soustavě. Evropské jazyky na rozdíl od asijských svým slovním označením čísel nekorrespondují s desítkovou soustavou arabského číselného systému (evropské jazyky označují čísla větší než 10 jiným slovním označením jako „jedenáct“, třicet“ apod., zatímco asijské jazyky označují taková čísla jako „jedna deset jedna“ a „tři deset“ apod.). Asijští školáci se tedy učí desítkovou soustavu snáze a dělají méně chyb při počítání a transkódování mezi číslicemi (arabskými čísly) a slovním vyjádřením (Geary, 2000).

2.4 Obtíže v aritmetických dovednostech

Příčiny obtíží v aritmetických dovednostech mohou být různé. Výkon v matematice závisí na funkci mnoha oblastí, jako jsou například výše zmíněné kognitivní předpoklady, metakognice, socio-emoční fungování (např. vliv úzkostnosti) (Geary, 2017; Kaufmann & Aster, 2012), socioekonomický status rodiny (Levine, Jordan & Huttenlocher, 1992), motivační faktory vztahující se k učení, styl a cíle učení, rodičovská přesvědčení a styl, zdravotní omezení žáka aj. (Aunio, & Niemivirta, 2010; Cígler, 2018; Butterworth, 2003).

V českém prostředí je rozšířena klasifikace poruch a narušení matematických dovedností, kterou uvádí Novák (2004), a která zohledňuje různorodé příčiny vzniku těchto obtíží. Novák (2004) dělí tyto poruchy na:

- **kalkulastenii** – narušení matematických dovedností či vědomostí v důsledku nedostatečné stimulace jedince školou či rodinou, případně v důsledku sociální deprivace jedince, při normální úrovni všeobecných rozumových i matematických schopností;
- **hypokalkulii** – narušení rozvoje početních dovedností vyplývající z mírně snížených a nerovnoměrně rozložených matematických schopností v souvislosti s dysfunkcí CNS při alespoň průměrných všeobecných rozumových předpokladech;
- **oligokalkulii** – narušení rozvoje početních dovedností v důsledku narušení struktury a výrazného snížení úrovně matematických schopností, úroveň všeobecných rozumových předpokladů se nachází v pásmu podprůměru;

- **vývojovou dyskalkulii** – specifická porucha učení v matematice, která se projevuje obtížemi v získávání a používání početních dovedností vyplývající s dysfunkcí CNS, za předpokladu, že má jedinec všeobecné rozumové předpoklady pohybující se v pásmu průměru či nadprůměru a podnětné sociokulturní zázemí.

V souvislosti s obtížemi v matematických dovednostech se nejčastěji setkáváme s pojmem **vývojová dyskalkulie**. V souladu s mezinárodní klasifikací nemocí (MKN-10, 2022) lze dyskalkulii vymezit jako specifickou poruchu početních schopností (týká se především jednoduchého počítání, sčítání, odčítání, násobení a dělení), kdy příčiny těchto obtíží nelze přičítat rozumovému oslabení či nedostatečné výuce. V literatuře se však setkáváme s nejednotností vymezení dyskalkulie, zejména z hlediska zakládajících příčin obtíží tohoto typu. Nicméně dle Kaufmanna a von Astera (2012) existuje mezi autory shoda na tom, že původ těchto obtíží je multifaktoriální. Lze pozorovat spojitost mezi neurologickými onemocněními či genetickými syndromy a výskytem dyskalkulie,¹⁴ lze uvažovat o genetické náchylnosti na narušení vývoje základních matematických, lingvistických, prostorových či exekutivních funkcí. Dále upozorňují na to, že lze v rámci dyskalkulie vymezit subtypy v závislosti na rozdílech v etiologii, neurálních podkladech, kognitivních reprezentacích a úrovni dovedností (Kaufmann & Aster, 2012).

Nejednotnost panuje také v souvislosti s obtížemi v matematice obecně, a to jak v terminologii, tak i v teoretickém pojetí této problematiky. Nejčastěji se můžeme setkat s pojmem vývojová dyskalkulie (angl. developmental dyscalculia), můžeme však narazit i na pojmy jako jsou: obtíže v matematice (angl. mathematical disability), obtíže v učení se aritmetice (angl. arithmetic learning disability) či psychologické obtíže v matematice (angl. psychological difficulties in mathematics) aj. (Butterworth, 2003). Jak zmiňuje např. Geary (1993 in Butterworth, 2003) zdá se, že ačkoliv je terminologie odlišná, jedná se ve své podstatě o popis téhož.

Pro účely této práce jsme se přiklonili k užívání pojmu **obtíže v aritmetických dovednostech**, ekvivalentně užíváme v empirické části této práce pojem **oslabená úroveň aritmetických dovedností**. Vnímáme tato označení jako obecnější, zahrnující širší skupinu žáků, kteří se potýkají s problémy v této oblasti. Tyto pojmy užíváme k označení žáků, kteří dosahují v hodinách matematiky či matematických testech (zaměřených na aritmetiku) horších

¹⁴ U dětí s neurologickým onemocněním (např. epilepsie, předčasně narozené děti, děti s metabolickými poruchami), či dětí s genetickými syndromy (např. syndrom fragilního X chromozomu, Williams-Beuren syndrom atp.) lze v častých případech pozorovat dyskalkulické obtíže (Kaufmann & Aster, 2012).

výsledků a vykazují tak obtíže v této oblasti. Nezohledňujeme při tom, jaká je úroveň intelektových schopností¹⁵ těchto žáků a neidentifikujeme tedy žáky dyskalkulické (dle definice MKN-10 viz výše). Cílem práce je zkoumat souvislost těchto obtíží s kognitivními předpoklady a metakognitivními znalostmi. Vybrané kognitivní předpoklady jsme uvedli výše, problematice metakognice v souvislosti s matematikou se věnujeme v následující kapitole.

¹⁵ Intelektové schopnosti jsme mapovali pouze orientačně, abychom pro účely studie ze vzorku vyloučili jedince s výrazně podprůměrnou úrovní rozumových schopností.

3 Metakognice v kontextu matematiky

Jak uvádí Chytrý, Pešout a Říčan (2014), aktuální výzkumné snahy v oblasti metakognice se orientují na dva základní směry, a to na oblast gramotnosti (zejm. psaní, čtení) a na oblast řešení problémů, kam patří také matematické dovednosti. Výzkum ve druhém zmiňovaném směru je méně rozsáhlý, a to jak u nás, tak v zahraničí. Nicméně výzkumy, které se této problematice věnují, mnohdy prokázaly signifikantní vztah mezi úrovní metakognice a úspěšností v matematice (např. Lucangeli & Cornoldi, 1997; Desoete, Roeyers & Buysse, 2001; Chytrý, Říčan & Živná, 2019).

Metakognice v souvislosti s matematikou se častěji zkoumá u starších žáků či adolescentů. Méně výzkumů se zabývá žáky mladšího školního věku, avšak výzkumné snahy v této oblasti existují. Například Carr, Alexander a Folds-Bennett (1994) realizovali pětiměsíční longitudinální studii, jejíž cílem bylo zkoumat metakognitivní znalosti u žáků druhých tříd základních škol v souvislosti s jejich matematickými strategiemi. Tento výzkum prokázal, že již žáci druhých tříd profitují ze svých metakognitivních znalostí o matematických strategiích, avšak zejména pokud úlohy, které řeší, jsou přiměřené jejich věku a dovednostem. Tento výzkum je ve shodě se zjištěními staršího výzkumu Garofala a Lestera (1985), kteří naznačovali, že žáci na základní škole již mají znalosti o matematických strategiích a mohou tyto znalosti využít ve svůj prospěch. Tento vztah metakognitivních znalostí a úspěchu v řešení úloh naznačuje, že žáci, kteří jsou si vědomi toho proč, kdy a jak použít strategie, budou s větší pravděpodobností v jejich užívání úspěšní.

Na základě výsledků výzkumu zahrnujícího žáky třetích a čtvrtých tříd základních škol Lucangeli a Cornoldi (1997) upozorňují, že ačkoliv metakognice úzce souvisí s matematickým výkonem, tento vztah je užší v případě méně zautomatizovaných úloh, jako jsou např. logické či geometrické úlohy. V aritmetice je dle autorů tento vztah méně významný, jelikož aritmetické úlohy vyžadují přímočarý algoritmičtý postup, který žák buď zná nebo nezná.¹⁶

Desoete et al. (2001) ve svých studiích zkoumali souvislost mezi úrovní metakognice a výkonem v matematice u žáků třetích tříd základní školy. Rozdělili žáky na základě výkonu v matematickém testu na podprůměrné, průměrné a nadprůměrné. Studie prokázala, že u žáků, kteří jsou v matematice nadprůměrní, lze sledovat více rozvinutou metakognici z hlediska všech jejích sledovaných komponent, oproti žákům průměrným či podprůměrným

¹⁶ V případě tohoto výzkumu, se v rámci metakognice autoři orientovali zejména na to, jaké mají žáci povědomí o předložené úloze (predikce) a jaké vědomosti v tomto případě aktivují (plánování). Dále se zabývali exekutivní kontrolou žáků během práce na úloze (monitorování a hodnocení).

v matematice. Autoři dále považují v souvislosti s matematikou jako zásadní off-line metakognitivní komponentu, tedy metakognici, která probíhá s časovým odstupem od samotné metakognitivní nebo kognitivní činnosti (před nebo po). Tato komponenta zahrnuje tzv. off-line dovednosti (predikce a evaluace). Výsledky jejich výzkumu jsou ve shodě se studií Verschaffela (1999 in Desoete et al., 2001), který poukázal na důležitost metakognice během přípravné fáze (predikce) na řešení matematických úloh před samotným počítáním, a také na důležitost závěrečné fáze (evaluační).

Některé výzkumy naznačují, že pokud má jedinec dostatečně rozvinuté metakognitivní schopnosti, dokáže se vypořádat i s takovými úlohami, pro které nemá dostatečné matematické znalosti, i když samozřejmě i ty jsou nezbytnou součástí řešení úloh (např. DeFranco, 1996). Mimo jiné i proto se zdá být pro rozvoj matematických dovedností důležitá podpora rozvoje metakognice v rámci vzdělávacího procesu. Například Chytrý et al. (2019) srovnávají ve své studii úroveň metakognice a úroveň výkonu v matematice s ohledem na vzdělávací styl preferovaný v daných třídách (Montessori třídy, třídy s výukou dle Hejného metody a běžné třídy ZŠ). Výsledky výzkumu prokázaly statisticky významný rozdíl v úrovni metakognice mezi žáky vyučovanými Hejného metodou a žáky z běžných tříd. V úrovni matematické výkonnosti byl signifikantní rozdíl zaznamenán mezi žáky vyučovanými dle Hejného metody/ žáky z Montessori tříd a žáky z běžných tříd. Dále výsledky této studie naznačují, že žáci z tříd vyučovaných Hejného metodou, stejně jako žáci z Montessori tříd dosahují statisticky významně lepších výsledků v testu mapujícím matematickou výkonnost a také lepších výsledků v oblasti kalibrace¹⁷, která může mít vliv na lepší zapojení metakognitivních postupů do řešení úloh.

Různé studie upozorňují na provázanost metakognice v matematice s dalšími koncepty. Upozorňují například na úzkou provázanost metakognitivních znalostí a motivace a na to, že oba tyto koncepty přispívají ke zlepšení matematického výkonu (např. Garofalo & Lester, 1985; Tian, Fang & Li, 2018). Jiné studie poukazují na souvislost metakognice a úspěchu v matematice s atribucí úspěchu. Žáci úspěšní v matematice mají nejen více rozvinutou metakognici, ale navíc přisuzují úspěch a neúspěch spíše vnitřním ovlivnitelným faktorům. (Desoete et al., 2001). Borkowski, Teresa Estrada, Milstead a Hale (1999) poukazují na to, že je vhodné doplnit programy pro rozvoj metakognice také programy pro přenastavení atribuce úspěchu.

¹⁷ Kalibrace neboli přesnost metakognitivního monitorování je míra souladu mezi skutečným výkonem jedince a sebehodnocením jeho vlastního výkonu (Chytrý et al., 2019).

4 Nástroje měření

4.1 Nástroje na měření metakognice

Zájem o problematiku metakognice v souvislosti se vzděláváním žáků stoupá a vznikají různé programy, doporučené postupy, metody a techniky, jak metakognici v rámci výuky rozvíjet. Z ucelených programů lze zmínit např. Feursteinův program instrumentálního obohacení (Krykorková & Chvál, 2001). Méně se však rozvíjí oblast měření metakognice, přičemž pro dobrou intervenci je možnost kvalitního posouzení úrovně schopností důležitá.

Práce s metakognicí v individuálním pedagogicko-psychologickém poradenství by mohla být velkým přínosem. Poradenský systém u nás disponuje velmi kvalitními nástroji pro měření intelektových schopností, posouzení poruch učení, posouzení osobnostních či sociálních faktorů. V našem prostředí však chybí kvalitní nástroje na měření metakognice. Zahraniční výzkumy dokazují, že děti s kvalitními rozumovými předpoklady, bez jiných běžněji diagnostikovaných obtíží, mohou v učení selhávat právě z důvodu nedostatečně rozvinuté metakognice, a naopak, že pomocí dobře rozvinutých metakognitivních dovedností lze kompenzovat nedostatky v rozumových předpokladech, kognici či vědomostech potřebných pro řešení daného problému (Schraw, 1998; McGuire 2015 in Straka, 2021). Kvalitní intervence by měla navazovat na kvalitní diagnostiku, v českém prostředí však není k dispozici mnoho ověřených, na českou populaci standardizovaných, nástrojů (Straka, 2021).

V našem prostředí také nelze nalézt mnoho odborných publikací, které se zabývají měřením metakognice. V následující části vycházíme především z monografie Ondřeje Straky (2021) *Jak měřit metakognici (nejen) u nadaných*, která vyšla minulý rok v Brně a je v našem prostředí doposud nejprehlednějším popisem metod měření metakognice. Straka (2021) člení v této monografii metody měření na metody **on-line** a **off-line**, dle toho, zdali měření probíhá přímo během činnosti (on-line) či s časovým odstupem (off-line).

4.1.1 On-line metody

Analýza TAP

Analýza TAP je metodicky propracovaná metoda s výzkumnou tradicí, která byla původně vytvořena k mapování kognitivních procesů, postupem času se však osvědčila pro mapování metakognice. Zkratka TAP pochází z anglického názvu „*think-aloud protocol analysis*“, v překladu „*analýza protokolu myšlení nahlas*“, český termín pro tuto metodu není etablovaný, v literatuře se můžeme setkat s označením *analýza TAP* (Straka, 2021).

Jedná se o metodu, která mapuje metakognitivní procesy u jedince v přímém čase během řešení zadaného problému. Zkoumaný jedinec je v úvodu instruován, aby během řešení problému verbalizoval své myšlenky, tedy říkal vše, co si myslí spontánně, bez jakýchkoliv úprav (může být vyslovena případně i část myšlenky, zkratka, heslo, pouze její úvod atp.). Tento „myšlenkový tok“ je administrátorem nahráván. Na základě nahrávky je sestaven protokol, který je následně analyzován, a to buď kvalitativně nebo kvantitativně (zpočátku se metoda užívala zejména v kontextu kvalitativního výzkumu, časem však vznikaly varianty vhodné pro statistické zpracování). Výsledky takového zkoumání mohou být ovlivněny např. mírou reaktivity¹⁸ (tedy, jak je myšlení jedince ovlivněno samotnou testovou situací), mírou verbálních schopností jedince či mírou obtížnosti předkládaného úkolu (Straka, 2021).

Sledování očních pohybů (eye tracking)

Využití této metody v oblasti metakognice není nikterak rozšířené, i když doposud realizované výzkumy naznačují, že má v této oblasti velký potenciál využití. Pro sledování očních pohybů se využívá speciální infračervená kamera, která snímá pohyb očí probanda, který sleduje vymezené zorné pole (např. obrazovku počítače). Sledují se v tomto případě většinou dva základní střídající se stavy zrakového vnímání, které probíhají v podstatě automaticky, velmi rychle a nevědomě: fixace (oko je skoro nehybné v poloze, kdy obraz zaměřené oblasti dopadá na žlutou skvrnu) a sakáda (velmi krátký a rychlý pohyb oka mezi dvěma fixacemi). Pro zkoumání souvislosti očních pohybů a metakognice se jako zásadní ukázaly faktory související s fixací (její délka, počty a také přesun mezi oblastmi zájmu) a zvláštní typ sakády – regrese, tedy zpětný pohyb, který má za cíl znovu fixovat již vnímaný podnět např. pro získání více informací (Straka, 2021).

Pozorování (záznamové archy)

Metoda pozorování umožňuje měřit metakognitivní procesy v průběhu řešení problému. Jednou z možností je využití záznamových archů (např. výzkum Whitebread et al., 2009). Metoda je vhodná zejména při mapování metakognice u mladších dětí, u kterých ještě není dostatečně rozvinuta schopnost verbalizovat myšlenkové pochody. Výhodou této metody je, že není tolik závislá na kapacitě pracovní paměti a pozorovatel může zohledňovat další faktory, jako jsou např. faktory prostředí, ve kterém měření probíhá. Pozorovatel může metakognitivní projevy hodnotit i pomocí bodů. I tato metoda tedy dává možnost kvalitativního nebo kvantitativního zpracování (Říčan, 2017a).

¹⁸ Míra reaktivity se zdá být ovlivněna věkem, čím mladší děti, tím větší reaktivní ovlivnění (Straka, 2021).

4.1.2 Off-line metody

Dotazníky a posuzovací škály

Dotazníkové metody a posuzovací škály jsou oproti výše zmíněným on-line metodám dostupnější a méně náročné na administraci a zpracování. To je také důvod, proč jsou ve výzkumech metakognice preferovány. Tato forma měření však sebou přináší také určitá rizika, zejména u mladších dětí může výsledky ovlivňovat nedostatečně rozvinutá schopnost porozumění čtenému textu. Vzhledem na zaměření práce představíme v následující části dotazníky, které byly vytvořeny pro účely zkoumání metakognice v souvislosti s matematikou, mimo jiné také dotazník The Metacognitive Knowledge in Mathematics Questionnaire (dále jen MKMQ), který byl inspirací při tvorbě dotazníku, který jsme pro účely výzkumného šetření použili.

MKMQ

MKMQ vytvořili autoři Efklides a Vlachopoulos (2012). Tento nástroj mapuje, jak na sebe jedinec nahlíží jako na zpracovatele matematické úlohy. Autoři při tvorbě dotazníku vycházeli z předpokladu existence tří metakognitivních komponent (metakognitivní znalosti, metakognitivní dovednosti a metakognitivní zkušenosti) a jejich vzájemného ovlivňování (tento model je v širším kontextu uveden výše). Autoři vychází z předpokladu vlivu metakognitivních zkušeností typu **snadnosti/plynulosti** a **obtížnosti/nedostatku plynulosti** (angl. easiness/fluency a difficulty/lack of fluency), které jsou vyvozeny z předchozích zkušeností člověka s matematickými úlohami, na strukturu metakognitivních znalostí. Metakognitivní znalosti vážící se k self (angl. metacognitive knowledge of self) a k úlohám (angl. metacognitive knowledge of task) mají lidé organizovány kolem těchto dvou výše zmíněných stěžejních dimenzí. Autoři však upozorňují na to, že metakognitivní znalosti vážící se k self a k úlohám nejsou to samé. Metakognitivní znalosti vážící se k self se týkají toho, zdali je proces řešení úlohy pro jedince snadný/plynulý nebo náročný/nedostatečně plynulý a souvisí s pojetím vlastních schopností, zatímco metakognitivní znalosti vážící se k úlohám se soustředí na obecnou náročnost dané úlohy (objektivní nebo vnímanou), tedy na kvalitu úlohy, ne na self. Stejně tak metakognitivní znalosti vážící se ke strategiím autoři dělí na základě toho, jak reagují na vnímanou náročnost úlohy, tedy na **strategie posilující kompetence** (angl. competence-enhancing strategies), které mohou zvýšit plynulost a usnadnit plnění úlohy a na **strategie vyhýbací** (angl. avoidance strategies), které jsou reakcí na nedostatek plynulosti/náročnost. Zároveň bylo jejich snahou zkoumat jednotlivé typy metakognitivních znalostí odděleně (Efklides & Vlachopoulos, 2012).

Dotazník pozůstává ze 45 položek rozdělených do 7 částí:

- první dvě části mapují dva faktory metakognitivních znalostí vázících se k self (1) snadnost/plynulost; (2) obtížnost/nedostatek plynulosti;
- b) další dvě části sledují dva faktory metakognitivních znalostí vázících se k úlohám, (3) snadné/nízká náročnost (angl. easy/low demands); (4) obtížné/vysoká náročnost (angl. difficult/high demands);
- tři poslední části mapují metakognitivní znalosti vázící se ke strategiím: (5) kognitivní/metakognitivní strategie, (6) strategie posilující kompetence (angl. competence-enhancing strategies) a (7) vyhýbací strategie (angl. avoidance strategies).

Probandi hodnotí jednotlivé položky na škálách 1-5, které jsou blíže specifikovány pod každou subškálou (Efklides & Vlachopoulos, 2012).

MAESTRA 5-6+

Nástroj MAESTRA 5-6+ vznikl v Německém prostředí a je určený pro žáky od páté třídy do první poloviny sedmé třídy základní školy. K obsahové a kriteriální validizaci v ČR došlo v roce 2014 autory Chytrým, Pešoutem a Říčanem (Chytrý, 2020). V rámci této metody žák hodnotí strategie u pěti specifických učebních situací. Tyto situace odpovídají modelu významného matematika Polyu, který vytvořil model čtyř fází kognitivní aktivity při řešení matematických problémů. Jedná se o porozumění zadání, plánování kroků vedoucích k cíli, realizace plánu a hodnocení řešení (Chytrý et al., 2014).

Úkolem žáků je zhodnotit efektivitu jednotlivých strategií, které jsou přiřazeny k předkládaným modelovým situacím a liší se efektivitou a funkčností. Tyto strategie mají žáci hodnotit také ve vztahu k dalším nabízeným variantám strategií. Zpracovávání výsledků neprobíhá pouze ve smyslu hodnocení správnosti či nesprávnosti výběru dané strategie, ale výběry se posuzují ve vztahu k ostatním nabízeným strategiím s ohledem na expertní posouzení, která byla získána v rámci validizace tohoto nástroje (Chytrý et al., 2014; Chytrý, 2020).

Metakognitivní interview

Další z možných způsobů zjišťování metakognice je rozhovor. Většinou se jedná o strukturované či polostrukturované rozhovory s kombinací uzavřených a otevřených otázek. Oproti dotazníkům je však tato metoda časově náročnější a neumožňuje hromadnou administraci. Výhodou je, že lze rozhovor vést i s dětmi, které ještě neumí číst nebo by pro ně vyplňování dotazníku mohlo být z různých příčin náročné (Straka, 2021). Říčan (2017a) však

upozorňuje, že u mladších dětí je zde velké riziko zkreslení z důvodu nedostatečné úrovně verbálního vyjadřování. Na druhou stranu však může žáka přímý kontakt s tím, kdo rozhovor vede, motivovat k hlubšímu přemýšlení a examinátor si může nejasné odpovědi ověřovat či dopomoci dítěti s porozuměním otázky (Straka, 2021).

4.2 Nástroje na měření matematických schopností a dovedností

4.2.1 Nástroje měření matematických schopností a dovedností

V této části se budeme zabývat konkrétními nástroji, které se při zjišťování úrovně matematických schopností a dovedností, případně charakteru a rozsahu jejich obtíží, používají. Jedná se o nástroje, které se využívají pro účely psychologické či speciálně-pedagogické diagnostiky. Pedagogické diagnostice se v této práci věnovat nebudeme.

Jelikož je úroveň matematických schopností a dovedností prokazatelně závislá na inteligenci, přesněji na jejich složkách (např. Vágnerová & Klégrová, 2008; Zelinková, 2003), představíme na úvod některé testy rozumových předpokladů a jejich souvislost s matematickými schopnostmi a dovednostmi. Následně se budeme věnovat speciálním nástrojům na měření matematických schopností u nás i v zahraničí.

Intelligenční testy

Wechslerova intelligenční škála pro děti

Doposud nejpoužívanějším testem rozumových předpokladů u nás je třetí vydání Wechslerovy intelligenční škály pro děti - WISC-III. Jedná se o test určený k hodnocení intelektových schopností dětí ve věku od 6 do 16 let a 11 měsíců. Subtesty jsou dle charakteru děleny na performační a verbální (Krejčířová, Boschek & Dan, 2002). Mnoho odborníků se shoduje na tom, že obtíže v matematických schopnostech a dovednostech se specificky promítají kvantitativně i kvalitativně do výsledků tohoto testu, a to zejména těch subtestů, ve kterých se výkon jedince odvíjí od úrovně jeho početních schopností, exekutivních funkcí, prostorové orientace a dalších schopností, které souvisí s matematikou (např. Landerl et al., 2004, 2009; von Aster & Shalev, 2007; Locuniak & Jordan, 2008; Vágnerová & Klégrová, 2008; Presentación et al., 2015; Traspe & Skalková, 2018).

Vágnerová a Klégrová (2008) poskytují přehledný výčet specifických oblastí, ve kterých lze oslabení pozorovat. Nižší výkon v těchto oblastech má vliv také na celkový skóre (CIQ). U dětí s obtížemi v matematice jsou často zaznamenány např. snížené výkony v subtestech Počty a Opakování čísel.

Cattelův test fluidní inteligence

Cattelův test fluidní inteligence (CFT 20-R) byl sestaven se záměrem měřit intelektový potenciál co možná nejvíce oprostěný od vlivu faktorů prostředí a vzdělávání. Cattel je autorem teorie, která inteligenci dělí na fluidní a krystalickou (Gf a Gc), tuto teorii rozvinuli společně s Hornem. Fluidní inteligence, kterou tento test měří, je „...*schopnost logického myšlení, schopnost řešit problémy v nových situacích. Je to schopnost identifikovat vzory a vztahy...*” (Fajmonová, Hönigová, Urbánek, & Širůček, 2015, s. 5).

Stejně jako jiné inteligenční testy, také CFT 20-R může posloužit jako vodítko při hledání příčin obtíží v matematice u testovaného jedince. Jedná se zejména o oblasti krátkodobé vizuální paměti, vizuo-prostorové představivosti, pozornosti či pracovního tempa jejichž oslabení se může do výkonu v testu promítnout (Fajmonová et al., 2015).

Testy matematických schopností a dovedností používané u nás

Diagnostika matematických schopností a dovedností Jiřiny Bednářové

V českém prostředí se hojně používá k posuzování matematických schopností a dovedností testová metoda od Jiřiny Bednářové (2015) *Diagnostika matematických schopností a dovedností* pro žáky 1.–4. tříd základních škol. Vybrané subtesty z této baterie jsme využili také pro účely výzkumného záměru této diplomové práce. Diagnostická baterie se zaměřuje na všechny podstatné složky uvedené v RVP ZV¹⁹, které si žáci na prvním stupni základní školy mají osvojit. Jedná se o dovednost provádět aritmetické operace a rozumět tomu, proč byl zvolen daný postup, případně umět propojit takovou matematickou operaci se skutečnou situací (Bednářová, 2015).

Některé subtesty jsou stejné pro všechny ročníky, jiné jsou přizpůsobené dle probíraného učiva a sledují aktuální vývojovou úroveň matematických schopností a dovedností. V případě, že bychom chtěli posoudit žáky nadprůměrné v oblasti matematiky, není k tomu tato baterie určena. Pokud totiž v těchto subtestech žák dosáhne 100. percentilu, tedy maximálního hrubého skóru, znamená to, že v dané oblasti dosáhl úrovně adekvátní jeho věku a školním nárokům. Testy v diagnostické baterii jsou zaměřeny na oblast numerace, základních číselných operací a aplikace číselných operací (Bednářová, 2015).

První skupina subtestů mapuje oblast **numerace**. Jedná se o proces vytváření a osvojování pojmu čísla a jeho vlastností tak, aby byl žák schopen např. počítat objekty

¹⁹ Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

ve skupině, tvořit skupiny určitého počtu prvků, číst číslice, orientovat se na číselné ose aj. Těmito úlohami můžeme posoudit míru osvojení předpokladů pro zvládnutí základních číselných operací, které jsou součástí další části (Bednářová, 2015).

Další část obsahuje subtesty mapující schopnost a dovednost žáka provádět **základní číselné operace** s přirozenými čísly, jakými jsou sčítání, odčítání, násobení a dělení, sledují také schopnost provádět mezikroky daných operací např. při přechodu přes 10 (Bednářová, 2015).

Poslední oblast, kterou tento nástroj mapuje, je dovednost žáka **aplikovat základní číselné operace**. Jedná se o nastavbu na schopnosti a dovednosti měřené v předchozí části. Tato část tedy mapuje nejen znalost číselných operací a jejich mezikroků, ale zejména to, jak žák hlouběji těmito operacím rozumí a zdali je schopen je adekvátně použít či rozeznat. Tato část mapuje například to, jestli je žák schopen doplnit znaménko do příkladu, aby dával smysl, zdali dokáže přiřadit adekvátní matematickou operaci k obrázku aj.

Diagnostika struktury matematických schopností (DISMAS)

Dalším nástrojem, který se u nás často využívá k posuzování matematických schopností a dovedností je tzv. DISMAS, tedy *Diagnostika struktury matematických schopností* autorů psychologa Traspeho a speciální pedagožky Skalkové, jehož třetí přepracované vydání je dostupné od roku 2018. Tento nástroj je administrován individuálně a mapuje základní aritmetické schopnosti a dovednosti, které se formují v předškolním věku a na prvním stupni základní školy. Nástroj je určen pro předškolní děti, žáky na 1. i 2. stupni ZŠ, ale také pro studenty SŠ, kteří mají výrazné obtíže v matematice (Traspe & Skalková, 2018).

DISMAS umožňuje svou strukturou vytvořit podrobný obrázek nejen o tom, co žák v oblasti matematických schopností a dovedností nezvládá, v čem selhává, ale také v čem se mu naopak daří. Test se skládá z pěti subtěstů: *Číselné řady; Představy čísel; Matematické pojmy; Operační představy a Automatizace početních dovedností*, některé z nich se dále dělí na oddíly. Tyto subtesty lze také členit do 14 vývojových škál. Součástí testu jsou také Piagetovy zkoušky, které mohou být hodnoceny i kvantitativně, a v českém diskurzu jsou v testech využívány zřídka (Hönigová, 2014). Výhodou této diagnostické metody je, že ačkoliv je administrace poměrně krátká (jedná se o cca 20-40 minut dle věku žáka), můžeme vytěžit mnoho informací o struktuře, rozsahu a závažnosti silných a slabých stránek žáka v oblasti početních schopností a dovedností (Traspe, & Skalková, 2018).

Testy matematických schopností a dovedností používané v zahraničí

BASIS-MATH 4-8 TEST

Jedním ze zahraničních nástrojů k mapování matematických schopností a dovedností je BASIS-MATH 4-8 test, který byl publikován v Německu v roce 2010 a je určený pro žáky 4. až 8. ročníku. Tento test není zaměřený na zjišťování úrovně žáka ve srovnání s kurikulem, ale spíše na to, jakým způsobem si žák osvojil strategie počítání a jak je dokáže aplikovat. Test je určený k diagnostice žáků, kteří se potýkají s obtížemi v matematice (Reusser, 2011).

Test je časově nenáročný, administrace trvá přibližně 20-45 min. Úlohy jsou seskupeny do tří úrovní požadavků. Zaměřuje se na oblasti základních matematických operací, metod a postupů výpočtů, pochopení desetinných čísel, chápání matematických operací – násobení a dělení, schopností *matematizovat* a řešit problémy. Nástroj nabízí možnost nejen kvantitativního, ale také kvalitativního zhodnocení postupů a strategií, které žák při počítání užívá (Reusser, 2011).

The Dyscalculia Screener

Nástroj The Dyscalculia Screener autora Butterwortha (2003) zahrnuje úlohy, které nejsou zaměřeny pouze na dosaženou úroveň matematických schopností a dovedností. Zaměřuje se na základní předpoklady pro rozvoj početních schopností a dovedností, aby co nejvíce eliminoval vliv školy. Takovými předpoklady je například vnímání množství (numerozita), které autor považuje za zakládající příčinu těchto obtíží. Nástroj je jedinečný v tom, že obsahuje také úlohy administrované na počítači. Taková administrace umožňuje měřit reakční čas jedince s velkou přesností, je tak možné odlišit, jak sám Butterworth uvádí: “... například ty, co počítají na prstech od těch, jejichž výkon je plynulý...” (Butterworth, 2003, s.10, vlastní překlad²⁰). Autor předpokládá, že se žáci s obtížemi v matematice, zejména se specifickými obtížemi, budou výrazně odlišovat spíše v čase než ve správnosti odpovědí (Butterworth, 2003).

²⁰ “...for example, the finger counters from the fluent performers....”

EMPIRICKÁ ČÁST

5 Uvedení do problematiky

V teoretické části této práce jsme se věnovali problematice metakognice a aritmetických dovedností a jejich předpokladům, a také možnostem diagnostiky obou oblastí. Ačkoliv nebylo v minulosti věnováno tématu oslabení aritmetických dovedností mnoho prostoru, v poslední době zájem výzkumníků o tuto problematiku roste. Jedním z hlavních cílů takto zaměřených výzkumů je identifikovat zakládající příčiny těchto obtíží, aby mohla být diagnostika a intervence dobře zaměřena a nesoustředila se pouze na dosaženou úroveň matematických dovedností či jejich prohlubování. Výzkumy v této oblasti upozorňují na klíčový vliv vybraných kognitivních deficitů, další studie upozorňují na úzkou souvislost matematických dovedností a metakognice žáků.

V této práci se opíráme o poznatky z výzkumů, které předpokládají vliv některých kognitivních předpokladů, respektive jejich oslabení, na rozvoj obtíží v matematických dovednostech. Zvažují zejména klíčový vliv oslabené schopnosti symbolického a nesymbolického vnímání množství (numerozity), prostorových schopností a exekutivních funkcí (zejm. inhibice a krátkodobé pracovní paměti). Upozorňují také na rozdíly z hlediska rychlosti řešení úloh u jedinců bez obtíží a u jedinců s obtížemi v aritmetických dovednostech (např. Landerl et al., 2004; Butterworth, 2003; Pražáková, & Špačková, 2019).

Dále vycházíme z předpokladu, že pro řešení problémů (tedy i aritmetických úloh) jsou důležité nejen kognitivní, ale také metakognitivní procesy, které mohou kognitivní procesy ovlivňovat, řídit či koordinovat, a mít tak vliv na samotný proces řešení problému a jeho výsledek (Sternberg, 1984, 1994 in Říčan, 2017; Van Zile-Tamsen, 1996). Vycházíme z předpokladu existence tří komponent metakognice: metakognitivních znalostí, dovedností a zkušeností, a jejich vzájemného ovlivňování, zejména pak vlivu metakognitivních zkušeností, které jsou vyvozeny z předchozích zkušeností jedince s danou úlohou (řešení úlohy bylo pro jedince snadné/plynulé nebo obtížné/málo plynulé), na metakognitivní znalosti, sebeuvědomění i autoregulaci (Flavell, 1979; Efklides, 2008). Středem našeho zájmu jsou konkrétněji metakognitivní znalosti, jejichž souvislost s aritmetickými dovednostmi je málo probádaná. Metakognitivní znalosti se týkají představ žáků o sobě jako řešiteli matematické úlohy, o povaze matematiky, o matematických procesech, technikách a strategiích, které mají k dispozici, a které využívají či nevyužívají. Výzkumy, které byly v této oblasti dosud realizovány, prokazují vzájemnou souvislost mezi úrovní aritmetických dovedností

a metakognitivními znalostmi žáků (např. Tian et al., 2018; Neuenhaus, Artelt, Lingel & Schneider, 2011; Efklides & Vlachopoulos, 2012).

5.1 Cíl práce

Hlavním cílem této práce je zjistit, zdali existuje rozdíl v metakognitivních znalostech a vybraných kognitivních předpokladech u žáků mladšího školního věku s různou úrovní aritmetických dovedností (dále jen AD). Za tímto účelem jsme nejdříve mapovali úroveň AD u žáků 3. tříd základních škol, abychom tyto žáky mohli rozdělit do dvou skupin – na žáky s oslabenou úrovní AD (skupina O) a žáky s úrovní AD v normě (skupina N).

Cílem této práce je tedy zmapovat, zdali existuje rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se k self, úlohám a strategiím, mezi žáky s oslabenou úrovní AD a žáky s úrovní AD v normě.

Dále je cílem této práce zmapovat, jestli existuje rozdíl v úrovni vybraných kognitivních předpokladů (nesymbolické a symbolické numerozity, inhibice a prostorových schopností) mezi žáky s oslabenou úrovní AD a žáky s úrovní AD v normě, a to jak z hlediska správnosti, tak z hlediska rychlosti zpracování odpovědi.

Vzhledem k charakterům stanovených cílů jsme zvolili kvantitativní design práce. Data byla sbírána pomocí standardizované testové baterie pro diagnostiku matematických schopností a dovedností, nestandardizovaného dotazníku vytvořeného pro účely této práce a pomocí tabletové aplikace (nestandardizované). Podrobněji se použitým nástrojům věnujeme níže.

5.2 Formulace výzkumných otázek a hypotéz

V souladu s cíli práce jsme si stanovili následující výzkumné otázky a hypotézy.

První výzkumná otázka

Existuje rozdíl v metakognitivních znalostech žáků s oslabenou úrovní AD a žáků s úrovní AD v normě?

H₁: Metakognitivní znalosti vztahující se k self se u žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD liší.

H₂: Metakognitivní znalosti vztahující se k úlohám se u žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD liší.

H₃: Žáci s úrovní AD v normě se liší v užívání strategií posilujících kompetence od žáků s oslabenou úrovní AD.

H4: Žáci s úrovní AD v normě se liší v užívání vyhybacích strategií od žáků s oslabenou úrovní AD.

Druhá výzkumná otázka

Existuje rozdíl v úrovni vybraných kognitivních předpokladů u žáků s oslabenou úrovní AD a žáků s úrovní AD v normě?

H5: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě.

H_{5a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{5b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

H6: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě.

H_{6a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{6b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

H7: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě.

H_{7a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{7b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

H8: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě.

H_{8a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{8b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

6 Metodika práce

Hlavní část výzkumu probíhala v prvním pololetí školního roku 2021/2022 na pražských základních školách. V následujícím textu představíme výzkumný vzorek, metody, které jsme pro účely výzkumu použili, a popíšeme průběh sběru dat.

6.1 Popis výzkumného vzorku

Vzhledem na výzkumný záměr soustředit se na žáky mladšího školního věku jsme se rozhodli do výzkumného vzorku vybrat žáky 3. tříd běžných základních škol. Z oslovených deseti základních škol se nám podařilo výzkum realizovat ve třech z nich, tedy dohromady v šesti třídách. Jedná se o školy sídlící v Praze bez alternativního výchovně-vzdělávacího programu. Pouze ve výuce matematiky se jedna ze tříd výzkumného vzorku vzdělávala dle Hejného metody, zbylých pět tříd se vzdělávalo v matematice běžnou klasickou metodou. Níže uvádíme deskriptivní charakteristiky výzkumného vzorku.

Tabulka 1 - Počet participantů z jednotlivých škol

Škola	Třída	Vzdělávací metoda	Počet participantů v jednotlivých třídách	Počet participantů celkem
ZŠ1	ZŠ1 (třída A)	Hejného	7	13
	ZŠ1 (třída B)	Klasická	6	
ZŠ2	ZŠ2 (třída A)	Klasická	9	25
	ZŠ2 (třída B)	Klasická	16	
ZŠ3	ZŠ3 (třída A)	Klasická	8	17
	ZŠ3 (třída B)	Klasická	9	
Celkem				55

Jak lze vidět v tabulce 1, celkový počet participantů byl 55. Ze třídy, ve které jsou žáci vzdělávání Hejného metodou, se výzkumu účastnilo nejméně žáků (celkem 7). Vzhledem k malému zastoupení této skupiny nebyla vytvořena samostatná kategorie. Výkony těchto žáků se však nijak výrazně nelišili od ostatních žáků vzdělávaných běžnou formou, proto byli tito žáci ve vzorku ponecháni. Žákům jsme administrovali také orientační test intelektových schopností (část A Cattellova testu fluidní inteligence), abychom si ověřili, že ve vzorku nejsou žáci s výrazně podprůměrnou úrovní rozumových schopností.

Tabulka 2 - Počet a věkový průměr participantů

Pohlaví	Počet	Věkový průměr
Chlapci	30	9,0
Dívky	25	9,0
Celkem	55	9,0

Výzkumu se účastnili žáci třetích tříd ve věkovém rozmezí od 8,5 let do 10,1 let, průměrný věk participantů byl 9 let. Z celkového počtu participantů bylo 30 chlapců a 25 dívek (tabulka 2).

6.2 Realizace výzkumu

Ředitelům základních škol byl rozeslán průvodní dopis. V tomto dopise byl popsán výzkumný záměr a organizační podmínky testování. V případě souhlasu s realizací testování byl ředitelům zaslán informační dopis a informovaný souhlas s účastí ve výzkumu pro zákonné zástupce žáků, které je také součástí přílohy této práce (viz příloha 2 a 3 této práce).

Výzkum byl realizován ve dvou etapách přímo v prostorách základních škol. Některé školy byly ochotny poskytnout zvláštní prostory pro testování tak, aby byli v místnosti přítomni pouze žáci s informovaným souhlasem. Jiné školy umožnily testování v kmenových třídách a dětem bez informovaného souhlasu zadaly učitelky zvláštní práci.

První etapa zahrnovala vybrané subtesty z *Diagnostiky matematických schopností a dovedností* (Bednářová, 2015). V rámci druhé etapy (realizované v každé třídě cca o týden později) byly žákům zadávány úlohy realizované na tabletech a následně jim byl předložen dotazník metakognice.

Realizace každé z etap trvala přibližně 60 minut. V případě, že byly učitelky přítomné během testování, byly poučeny, aby do procesu sběru dat nezasahovaly. Žákům byl při prvním kontaktu stručně vysvětlen záměr výzkumu, byli ujištěni, že jejich práce nebude klasifikována a nijak neovlivní jejich školní hodnocení. Žákům byl přidělen osobní kód. Kromě pohlaví žáků byl také mapován jejich věk. Žáci byli požádáni, aby vedle vytvořeného kódu zapsali datum svého narození. Následně byly před každou částí testování žákům sděleny instrukce a vymezen prostor pro dotazy. Výhodou byla osobní přítomnost autorky práce, která tak mohla kontrolovat, zdali žáci porozuměli zadání a zda plní instrukce správně. Většina žáků spolupracovala bez obtíží během všech administrovaných úkolů. Bylo patrné, že žáci reagovali s větším nadšením a zájmem na úlohy, se kterými se běžně nesetkávají, tedy na úlohy

na tabletech. Při předložení listu se třemi vybranými subtesty aritmetických dovedností, byla na některých z nich patrná větší míra nejistoty. Během vyplňování dotazníku metakognitivních znalostí se žáci častěji doptávali na významy jednotlivých výroků. Vše jim bylo dovysvětleno.

6.3 Použité metody

Pro účely výzkumu jsme použili standardizované a nestandardizované metody. V následujícím textu tyto metody podrobněji popíšeme.

6.3.1 Dotazník metakognitivních znalostí

Dotazník metakognitivních znalostí byl sestaven pouze pro účely tohoto výzkumu, nejedná se tedy o standardizovanou metodu. K sestavení vlastního dotazníku jsme přistoupili zejména z toho důvodu, že se nám nepodařilo najít v českém prostředí takový nástroj, který by mapoval metakognitivní znalosti v souvislosti s aritmetikou a byl by vhodný pro žáky 3. tříd. Při tvorbě dotazníku jsme se inspirovali nástrojem Metacognitive Knowledge in Mathematics Questionnaire (MKMQ) (Efklides, & Vlachopoulos, 2012), který podrobněji popisujeme výše ve čtvrté kapitole. Naší snahou bylo vytvořit nástroj, který by mapoval přesvědčení, vnímání a představy žáků související s aritmetikou a jejich pohled na sebe jako řešitele aritmetických úloh. Cílem bylo zmapovat pomocí tohoto nástroje, jak žáci vnímají, že je pro ně řešení aritmetických úloh snadné/plynulé (ve smyslu plynulosti kognitivních procesů) nebo naopak obtížné/méně plynulé vzhledem k jejich vlastním schopnostem (kategorie **self** (snadné/obtížné)). Jak vnímají obecnou náročnost aritmetických úloh (kategorie **úlohy** (málo náročné/velmi náročné)) a v neposlední řadě, jaké strategie žáci v souvislosti s aritmetikou využívají (kategorie **strategie** (strategie posilující kompetence/strategie vyhýbací)).

Dotazník, který jsme pro účely tohoto výzkumu sestavili, využívá k hodnocení třech výše zmíněných kategorií metakognitivních znalostí škály, na kterých participanti hodnotí jednotlivé výroky. Dotazník se skládá z pěti posuzovacích subškál. Participanti hodnotí položky na čtyřbodové škále. Každá subškála obsahuje několik položek a sleduje dimenze dané kategorie. Pro tyto subškály jsme vytvořili označení, které využíváme pro úsporu místa v této práci:

- 1. subškála: **MZself+** – metakognitivní znalosti vážící se k self (snadnost, plynulost);
- 2. subškála: **MZself-** – metakognitivní znalosti vážící se k self (obtížnost, málo plynulosti);
- 3. subškála: **MZúlohy** – metakognitivní znalosti vážící se k úloze (náročnost);

- 4. subškála: **MZstrategie+** – metakognitivní znalosti vážící se ke strategiím (strategie posilující kompetence);
- 5. subškála: **MZstrategie-** – metakognitivní znalosti vážící se ke strategiím (strategie vyhýbací).

První subškála **MZself+** obsahuje celkem 5 položek, které mapují metakognitivní znalosti vážící se k self, konkrétně dimenzi – snadnost/plynulost. Participanti hodnotili výroky na škále: *rozhodně souhlasím (4 body) – spíše souhlasím (3 body) – spíše nesouhlasím (2 body) a rozhodně nesouhlasím (1 bod)* (obrázek 3).

	rozhodně souhlasím	spíše souhlasím	spíše nesouhlasím	rozhodně nesouhlasím
Je pro mě jednoduché počítat příklady, a to i ty s velkými čísly.				

Obrázek 3 - Ukázka položky ze subškály MZself+

Druhá subškála **MZself-** obsahuje celkem 5 položek a mapuje metakognitivní znalosti vážící se k self, konkrétně dimenzi – obtížnost/málo plynulosti. Participanti hodnotili výroky na škále stejné škále, jako v předchozí subškále: *rozhodně souhlasím (1 body) – spíše souhlasím (2 body) – spíše nesouhlasím (3 body) a rozhodně nesouhlasím (4 bod)* (obrázek 4).

Když počítám příklady na násobení, tak mě to unavuje.				
---	--	--	--	--

Obrázek 4 - Ukázka položky ze subškály MZself-

Obě subškály MZself+ i MZself- mapují metakognitivní znalosti vážící se k self. Pro účely tohoto výzkumu, byla subškála MZself- skórována reverzně vůči subškále MZself+. Žáci mohli tedy získat maximální počet bodů 40. Pokud v této kategorii participant skóroval vysoko, znamenalo to, že vzhledem ke svému schopnostem vnímá, že je pro něj řešení aritmetických úloh snadné a plynulé.

Třetí subškála **MZúlohy** obsahuje pět položek a mapuje metakognitivní znalosti vážící se k úlohám, v tomto případě základním aritmetickým operacím a úkolům, jako je dělení, násobení, sčítání, odčítání a doplňování číselných řad. Subškála je uvedena nedokončenou tázací větou: „*Jak složité je podle tebe počítat příklady, které obsahují:...*“. Participanti hodnotili výroky na škále: *hodně těžké (4 body)– těžké (3 body) – lehké (2 body) – hodně lehké (1 bod)* (viz obrázek 5). Tato subškála mapuje dimenzi náročnosti (malá náročnost/ velká náročnost). Participanti v této subškále mohli získat maximálně 20 bodů. Čím více bodů participant získal, tím vnímá aritmetické úlohy obecně jako náročnější.

→ Jak složité je podle tebe počítat příklady, které obsahují:

(u odpovědi udělej křížek)

	hodně těžké	těžké	lehké	hodně lehké
dělení (např. 16 : 2)				

Obrázek 5 - Ukázka položky ze subškály MZúlohy

Čtvrtá subškála **MZstrategie+** mapuje metakognitivní znalosti vážící se ke strategiím posilující kompetence. Tato subškála obsahuje 3 položky. Participantů hodnotili výroky na škále: *nikdy (1 bod) – občas (2 body) – často (3 body) – vždy (4 body)* (viz obrázek 6). Maximální počet bodů z této subškály je 12. Čím výše žák skóruje, tím více využívá strategie posilující kompetence v souvislosti s aritmetikou.

	nikdy	občas	často	vždy
Když něčemu nerozumím, zeptám se pana učitele/ paní učitelky, abych mohl/a příklad vypočítat.				

Obrázek 6 - Ukázka položky ze subškály MZstrategie+

Pátá subškála **MZstrategie-** také mapuje metakognitivní znalosti vážící se ke strategiím. Tři položky této subškály mapují vyhýbací strategie. Participantů hodnotili výroky na škále: *nikdy (1 bod) – občas (2 body) – často (3 body) – vždy (4 body)* (viz obrázek 7). Maximální počet bodů z této subškály je 12. Čím výše žák skóruje, tím více využívá vyhýbací strategie v souvislosti s aritmetikou.

Když máme dělat nějaké cvičení a jsou k němu výsledky, výsledky opíšu.				

Obrázek 7 - Ukázka položky ze subškály MZstrategie-

6.3.2 Posouzení matematických schopností a dovedností

Pro posouzení matematických schopností a dovedností jsme použili tři subtesty z metody *Diagnostika matematických schopností a dovedností* od Jiřiny Bednářové (Bednářová, 2015), která je podrobněji popsána výše. Z každé oblasti, na které je metoda zaměřena, jsme vybrali jeden subtest. Pro každý subtest byl vymezen specifický časový limit.

Doplňování chybějících čísel

Tento subtest je jedním z těch, které mapují oblast numerace. Jedná se o sedm vzestupných či sestupných číselných řad. Žák do každé řady doplňuje 7 chybějících čísel. Časový limit pro tento subtest je 1 minuta a 30 sekund.

Základní číselné operace

Jako další jsme vybrali subtest *Základní číselné operace* jako zástupce oblasti základních početních operací. Jedná se o 40 příkladů, které jsou rozděleny po 10 do sloupců, kdy každý sloupec obsahuje příklady zaměřené na jeden druh číselné operace v oboru přirozených čísel (sčítání, odčítání, násobení a dělení). Časový limit pro tento subtest je 3 minuty a 30 sekund.

Doplnění znaků operací

Jedná se o subtest z oblasti aplikace základních číselných operací. Subtest obsahuje 20 příkladů zahrnujících sčítání, odčítání, násobení a dělení. Žák má do operace však místo výsledku, jak je tomu v předchozím subtestu, doplnit znak příslušné operace, tedy plus, mínus, krát nebo děleno. Pro tento subtest mají žáci vymezenou 1 minutu.

Hrubé skóry, které žáci získali, jsme převedli dle manuálu na percentily. Manuál této metody však nabízí také dělení žáků do tří skupin dle výkonu: 1. odpovídá stupni výuky, 2. stimulace vhodná a 3. stimulace nutná. Pro účely této práce jsme se tedy nakonec rozhodli výkony žáků hodnotit pomocí těchto tří kategorií.

6.3.3 Měření kognitivních předpokladů pro rozvoj aritmetických dovedností

Tabletová aplikace na měření různých kognitivních předpokladů byla sestavena pro účely doktorského výzkumu Skalové Pražákové (více Pražáková, 2019), v jehož spolupráci je realizovaná zde prezentovaná studie. Nejedná se tedy o standardizovanou metodu. Jelikož jsme však nedohledali podobnou metodu měření předpokladů AD u nás, zejména metodu, která by měřila numerozitu, rozhodli jsme se tuto metodu pro účely výzkumu použít. Celkem 10 tabletů bylo zapůjčených z katedry psychologie na PedF UK v Praze. Výhodou administrování těchto úloh na tabletu je možnost měřit rychlost i správnost pro každou administrovanou položku. Pro účely našeho výzkumu jsme měřili počet správných odpovědí a mediány rychlosti správných odpovědí, tedy střední hodnotu času, za který dítě odpovědělo správně na položky. Testová aplikace obsahuje celkem 13 subtestů. Subtesty jsou zaměřené na mapování předpokladů pro rozvoj AD (jako je např. numerozita, inhibice, prostorové schopnosti aj.), při sestavování subtestů se autoři inspirovali zahraničními výzkumy (např. Butterworth, 2003).

Žáci byli po zapnutí aplikace vyzváni k vepsání osobního kódu do kolonky jméno, následně administrátor žáky instruoval, jak aplikaci ovládat. Na začátku každého subtestu je přímo na tabletu napsaná instrukce pro daný subtest. Následují tři zácvičné položky, které slouží také k ověření porozumění instrukcím. Pokud zde žák chybuje, aplikace sama chybu zřetelně

opraví, vizualizuje a vysvětlí správné řešení. Následně žáci začínají pracovat na jednotlivých položkách. Po třech nesprávných odpovědích je žákovi subtest automaticky ukončen a žák pokračuje na zácvičné položky dalších subtestů. Pro účely tohoto výzkumu jsme vybrali pouze některé z administrovaných subtestů mapujících vybrané kognitivní předpoklady (subtest Porovnávání bodů, Porovnávání čísel, Kostky a Inhibice).

Porovnávání bodů

Tento subtest se zaměřuje na mapování úrovně nesymbolického vnímání množství. Úkolem participanta je označit takové políčko, kde je více bodů bez ohledu na jejich velikost a rozmístění.

Porovnávání čísel

Tento subtest mapuje také úroveň vnímání množství, tentokrát však symbolického. Participant je instruován, aby označil políčko, ve kterém se nachází číslo, které označuje větší počet (má vyšší hodnotu). Čísla jsou vyobrazena v různých velikostech, žák má tedy označit číslo s větší hodnotou bez ohledu na jeho fyzickou velikost.

Kostky

Tento subtest jsme vybrali proto, že mapuje další ze sledovaných kognitivních předpokladů pro rozvoj aritmetických dovedností, a to prostorové schopnosti. V tomto subtestu má žák mentálně rotovat se vzorovou kostkou tak, aby rozeznal tuto kostku v jiném otočení. Na výběr má ze dvou kostek, kdy pouze jedna z nich je správná, tedy odpovídá vzorové kostce v otočení.

Inhibice

Jedním z kognitivních předpokladů pro rozvoj matematických dovedností jsou také exekutivní funkce, zejména pak inhibice a krátkodobá pracovní paměť (více viz výše). Pro náš výzkum jsme se rozhodli mapovat úroveň inhibice v souvislosti s úrovní aritmetických dovedností. V tomto subtestu má žák za úkol označit takový tvar, který je v zadání menší bez ohledu na barvu. Jako distraktor je zde použito šedé zbarvení jednoho z obrazců.

6.4 Zpracování dat

Data byla dále zpracována za pomoci bezplatného statistického programu *jamovi*, který je dostupný ke stažení zde: <https://www.jamovi.org/>. Nejdříve jsme se zaměřili na rozdělení žáků do dvou skupin, kritéria dělení a deskriptivní charakteristiky jednotlivých skupin uvádíme níže. Následně jsme se zaměřili na deskriptivní analýzu jednotlivých položek dotazníku

metakognitivních znalostí. Před samotnými statistickými analýzami jsme provedli kontrolu rozložení jednotlivých proměnných. Na základě vizuální kontroly histogramů považujeme proměnné MZself, MZstrategie+ za normálně rozložené. U proměnné MZstrategie- pozorujeme zešikmení zleva, stejně jako u proměnné MZúlohy. Nicméně se nedomníváme, že by uvedená rozložení znamenala pro analýzy zásadní problém a neočekáváme, že by výrazným způsobem ovlivnila výsledky. Pro proměnné vztahující se k vybraným kognitivním předpokladům bylo možné detekovat po vizuální kontrole histogramů extrémní hodnoty, které jsme se rozhodli ze souboru vyloučit. Převodli jsme tedy naměřené hodnoty u jednotlivých participantů na z-skóry, vizuální kontrolou datové matice jsme vyřadili hodnoty, které se lišily o více než 2 směrodatné odchyly.

Pro analýzu dat jsme se rozhodli použít t-test pro dva nezávislé soubory. Shodnost rozptylu jsme ověřovali pomocí Levenova testu (viz příloha 1). Pro potvrzení statisticky významných rozdílů jsme stanovili hladinu významnosti 5% ($p < 0,05$). Kvůli rozdílným velikostem srovnávaných vzorků, jsme se pro přesnější výpočet rozhodli užít tzv. Welchovy korekce. Pro výsledky, u kterých se pomocí t-testu prokázal signifikantní rozdíl mezi srovnávanými skupinami žáků, jsme vypočítali velikost účinku (tzv. effect size). Sílu efektu jsme posuzovali dle Cohenova koeficientu účinku d (Hendl, 2021). Níže v tabulce uvádíme hodnoty d pro interpretaci velikosti účinku (Cohen, 1988).

Tabulka 3 - Hodnoty Cohenova koeficientu

Velikost účinku	d
velmi malé	0,01
malé	0,2
střední	0,5
vysoké	0,8
velmi vysoké	1,2
enormní	2

7 Statistická analýza dat a interpretace jejích výsledků

Pro účely tohoto výzkumu jsme si nejdříve rozdělili participanty dle úrovně aritmetických dovedností do dvou kategorií tak, abychom mohli dále tuto kategorickou proměnnou užít pro analýzu dat. Toto dělení jsme provedli na základě výkonu ve vybraných subtestech *Diagnostiky matematických schopností a dovedností* (Bednářová, 2015).

1. kategorie: žáci s úrovní AD v normě (skupina N);
2. kategorie: žáci s oslabenou úrovní AD (skupina O).

Rozhodovali jsme se mezi použitím dvou druhů kritérií rozdělení participantů do kategorií (verze A a verze B).

Verze A:

Skupina N (úroveň AD v normě): do této kategorie jsme zařadili takové žáky, kteří ve všech zadávaných subtestech podali výkon odpovídající 1. úrovni (odpovídá stupni výuky).

Skupina O (oslabená úroveň AD): tato kategorie zahrnuje žáky, kteří alespoň v jednom subtestu podali výkon odpovídající 2. nebo 3. úrovni (tedy stimulace vhodná a stimulace nutná).

Verze B:

Zvažovali jsme rozdělit participanty dle přísnějšího kritéria vůči skupině O, tak aby v této kategorii byli žáci, kteří podali oslabený výkon ve více než v jedné sledované oblasti.

Skupina N: do této kategorie jsme zařadili takové žáky, kteří ve všech zadávaných subtestech podali výkon odpovídající 1. úrovni (odpovídá stupni výuky), nebo právě v jednom ze subtestů podali výkon odpovídající 2. úrovni.

Skupina O: tato kategorie zahrnuje žáky, kteří podali výkon odpovídající 2. úrovni ve dvou a více subtestech, nebo alespoň v jednom subtestu podali výkon odpovídající úrovni 3.

Jak lze vidět v tabulce 4, zastoupení žáků ve skupině O pro verzi B je příliš malé, což by mohlo být problematické při provádění analýz. Proto jsme se rozhodli pro verzi A, nicméně je nutné podotknout, že úroveň obtíží v AD u žáků zařazených do skupiny O se pohybuje v rozmezí od velmi mírných až po výrazné obtíže.

Tabulka 4 - Rozdělení žáků do kategorií dle úrovně AD pro verzi A a B

Skupina	Verze A			Verze B		
	Celkem (%)	Chlapci	Dívky	Celkem (%)	Chlapci	Dívky
skupina N (AD v normě)	31 (56,4%)	19	12	39 (70,9%)	23	16
skupina O (oslabené AD)	24 (43,6%)	11	13	16 (29,1%)	7	9
Celkem	55 (100%)	30	25	55 (100%)	30	25

V následující tabulce 5 můžeme vidět, že věkový průměr obou skupin se mírně liší. Žáci ve skupině O mají vyšší věkový průměr než žáci ve skupině N. Věkový rozptyl se v obou skupinách se nijak zásadně neliší.

Tabulka 5 - Průměr věku žáků dle příslušnosti ke skupině

	Skupina	Průměr	SD	Rozptyl
věk	N	8,92	0,303	0,091
	O	9,15	0,454	0,207

7.1 Deskriptivní analýza dotazníku metakognitivních znalostí

V následující části jsme se zaměřili na deskriptivní analýzu jednotlivých položek dotazníku v závislosti na úrovni AD žáků.

Subškála MZself+

Tabulka 6 – Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZself+)

Položka	Skupina	Průměr	SD	Rozdíl průměrů
A1: Je pro mě jednoduché počítat příklady, a to i ty s velkými čísly.	N	3,23	0,717	0,44
	O	2,79	0,588	
A2: Umím dobře počítat z paměti (bez použití papíru a tužky).	N	3,10	0,870	0,47
	O	2,63	0,924	
A3: U slovních úloh vím hned, jak postupovat a co počítat.	N	2,84	0,898	-0,33
	O	3,17	0,868	
A4: Odčítání větších čísel zvládám bez chyb (např. 25–14=).	N	3,39	0,919	0,35
	O	3,04	0,859	

A5: Na hodině matematiky, rozumím vždy zadání a dokážu příklady samostatně vypočítat.	N	3,06	0,892	0,27
	O	2,79	0,833	

Z tabulky 6 je patrný mírný rozdíl v průměrech odpovědí mezi oběma skupinami žáků v subškále MZself+, která mapuje dimenzi snadnosti/plynulosti metakognitivních znalostí vztahujících se k self. Žáci s úrovní AD v normě (skupina N) více souhlasili s danými výroky než žáci ze skupiny O. Největší rozdíl je patrný u položky A2, která se týká počítání z paměti. Druhý výraznější rozdíl je patrný u položky A1. Tato položka se týká počítání s velkými čísly. Naopak u položky A5 je rozdíl mezi skupinami žáků nejmenší, tato položka se týká porozumění zadání a samostatnosti. Zajímavá je položka A3, která se týká slovních úloh. Zde odpovídali žáci ze skupiny O více souhlasně než žáci z druhé skupiny.

Subškála MZself-

Tabulka 7 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZself-)

Položka	Skupina	Průměr	SD	Rozdíl průměrů
B1: Když počítám příklady na násobení, tak mě to unavuje.	N	3,23	0,762	0,65
	O	2,58	1,100	
B2: Je pro mě těžké počítat s čísly většími než 10.	N	3,61	0,955	0,28
	O	3,33	0,917	
B3: Často se mi pletou čísla/znaménka (+,-,.,×).	N	3,42	0,992	-0,04
	O	3,46	0,977	
B4: Vypočítat příklady mi trvá hodně dlouho.	N	3,03	0,795	0,49
	O	2,54	0,884	
B5: Na hodinách matematiky se často cítím ztracená/y a potřebuji pomoci.	N	3,26	0,893	0,47
	O	2,79	0,977	

Subškála MZself-, která je skórovaná reverzně vůči subškále předchozí (tzn. čím více bodů žák získá, tím méně s daným výrokiem souhlasí), mapuje dimenzi obtížnosti/nedostatku plynulosti. Z tabulky 7 je patrné, že žáci z první skupiny skórovali výše téměř u všech položek. Pouze u položky B3 toto neplatí, avšak rozdíl průměrů je velmi malý. Všeobecně tedy žáci s úrovní aritmetických dovedností v normě souhlasili s výroky méně než žáci s oslabenou úrovní aritmetických dovedností. Nejvíce se v průměrech odpovědí lišily skupiny žáků u položky B1, tato položka se týká pocíťované únavy během počítání. Další výrazný rozdíl v odpovědích je patrný u položky B4, která se týká času, potřebného na zpracování aritmetických příkladů. Výrazný rozdíl je také u položky B5, která se týká orientace a samostatnosti v hodinách matematiky.

Subškála MZúlohy

Tabulka 8 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZúlohy)

Položka	Skupina	Průměr	SD	Rozdíl průměrů
C1: dělení (např. $16 : 2$)	N	1,65	0,755	-0,06
	O	1,71	0,859	
C2: násobení (např. 8×3)	N	1,48	0,626	-0,1
	O	1,58	0,830	
C3: sčítání (např. $7 + 5$)	N	1,10	0,301	-0,19
	O	1,29	0,550	
C4: odčítání (např. $5 - 2$)	N	1,29	0,529	-0,09
	O	1,38	0,576	
C5: doplňování číselných řad (např. 125 __ 123 __ 121 _)	N	1,39	0,667	-0,49
	O	1,88	1,035	

Subškála MZúlohy mapuje vnímání obecné náročnosti aritmetických úkolů žáky. Jak je z tabulky 8 patrné, žáci z obou skupin se liší minimálně v tom, jak vnímají náročnost aritmetických úkolů. Všeobecně považují tyto úkoly spíše za hodně lehké až lehké. Největší rozdíl v průměrech odpovědí obou skupin je patrný u položky C5, která mapuje vnímání náročnosti doplňování číselných řad. Žáci s oslabenou úrovní AD vnímají tento druh úkolu jako náročnější než žáci s úrovní AD v normě.

Subškála MZstrategie+

Tabulka 9 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZstrategie+)

Položka	Skupina	Průměr	SD	Rozdíl průměrů
D1: Když něčemu nerozumím, zeptám se p. učitele/učitelky, abych mohl/a příklad vypočítat.	N	2,48	0,851	0,19
	O	2,29	0,859	
D2: Na počítači nebo v časopisech hraji matematické hry.	N	1,90	1,012	0,4
	O	1,50	0,590	
D3: Když příklad nebo cvičení dokončím, pro kontrolu si ho raději znovu přepočítám.	N	3,23	1,055	0,56
	O	2,67	1,204	

Subškála MZstrategie+ mapuje využívání strategií posilující kompetence. Jak lze z tabulky 9 vyčíst, i v tomto případě skórovala skupina žáků s úrovní AD v normě (skupina N) výše než skupina O. Výraznější rozdíl v průměrech je patrný u položky D2, která se týká mimoškolního zájmu o matematiku. U položky D3 je rozdíl nejvýraznější, ta se týká zpětné kontroly vykonaného práce.

Subškála MZstrategie-

Tabulka 10 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZstrategie-)

Položka	Skupina	Průměr	SD	Rozdíl průměrů
E1: Když máme dělat nějaká cvičení a jsou k němu výsledky, výsledky opišu.	N	1,55	0,961	-0,12
	O	1,67	0,816	
E2: Když je pro mě příklad velmi složitý, radši se do něj nepouštím a vynechám ho.	N	2,29	0,973	0,08
	O	2,21	1,021	
E3: Když neumím příklad vypočítat, čekám až někdo řekne správné řešení a řešení si zapíšu.	N	2,06	0,998	0,02
	O	2,04	0,859	

Subškála MZstrategie- mapuje využívání vyhýbacích strategií u žáků. V tomto případě, jak je patrné v tabulce 10, se žáci lišili v průměrech odpovědí velmi málo. Dané strategie ohodnotili obě skupiny shodně tak, že je využívají méně. Největší rozdíl, i když stále velmi malý, je patrný u položky E1, která se týká úplnému vyhnutí se řešení příkladu. Tuto strategii žáci s oslabenou úrovní AD využívají častěji, avšak velmi nepatrně.

7.2 Deskriptivní analýza proměnných

Tato část práce je věnovaná deskriptivní analýze proměnných s ohledem na dvě výše zmíněné kategorie žáků. Nejdříve se zaměříme na proměnné vztahující se k metakognitivním znalostem, následně se zaměříme na proměnné vztahující se k vybraným kognitivním předpokladům z hlediska rychlosti a přesnosti odpovědí v jednotlivých skupinách.

Pro výsledky žáků v jednotlivých subškálách a subtestech jsme provedli základní deskriptivní statistiku dle příslušnosti ke kategorii: skupina N či skupina O. Jedná se o četnost participantů (n), počet chybějících hodnot (Chybějící), průměrné hodnoty (Průměr), mediánové hodnoty (Medián), směrodatné odchyly (SD), minimální (Min.) a maximální (Max.) hodnoty.

Tabulka 11 - Deskriptivní statistika pro proměnné metakognitivních znalostí

Subškála	Skupina	n	Chybějící	Průměr	Medián	SD	Min.	Max.
MZself	N	31	0	32,13	33,00	4,62	18	40
	O	24	0	29,13	29,00	5,45	17	38
MZúlohy	N	31	0	6,90	19,00	1,97	5	12
	O	24	0	7,83	8,00	2,43	5	14
MZstrategie+	N	31	0	7,61	8,00	1,45	5	11
	O	24	0	6,46	6,00	1,91	3	10
MZstrategie-	N	30	1	5,93	6,00	2,10	3	11
	O	24	0	5,92	5,00	2,28	3	12

Tabulka 11 zobrazuje mimo jiné průměrné hodnoty jednotlivých sledovaných proměnných z oblasti metakognitivních znalostí pro jednotlivé skupiny žáků. Jak lze z tabulky vyčíst, žáci s oslabenou úrovní AD se v odpovědích lišili zejména v oblasti metakognitivních znalostí vztahujících se k self a metakognitivních znalostí vztahujících se ke strategiím podporujícím kompetence. V ostatních dvou oblastech není patrný výrazný rozdíl v průměrech obou skupin.

Tabulka 12 - Deskriptivní statistika pro výsledky žáků v subtestech vybraných kognitivních předpokladů z hlediska rychlosti

Subtest	Skupina	n	Chybějící	Průměr	Medián	SD	Min.	Max.
Porovnávání bodů	N	30	1	2,60	2,10	1,34	18	5,43
	O	23	1	2,40	1,81	1,92	17	9,47
Porovnávání čísel	N	28	3	1,44	1,41	0,14	1,240	1,76
	O	20	4	1,50	1,45	0,19	1,107	1,81
Kostky	N	27	4	4,09	3,54	2,29	0,82	9,32
	O	19	5	4,62	5,03	1,78	2,00	7,84
Inhibice	N	29	2	1,89	1,88	0,48	1,12	3,11
	O	22	2	1,99	1,84	0,76	1,08	4,84

Tabulka 12 zobrazuje průměr mediánu času správných odpovědí, tedy střední hodnoty rychlosti, kterou dítě odpovídalo na položky správně. Žáci s úrovní AD v normě byli nepatrně rychlejší ve správných odpovědích u subtestu Porovnávání bodů (subtest zaměřený na nesymbolickou numerozitu). V ostatních subtestech byli překvapivě nepatrně rychlejší žáci s oslabenou úrovní AD.

Tabulka 13 - Deskriptivní statistika pro výsledky žáků v subtestech vybraných kognitivních předpokladů z hlediska správnosti

Subtest	Skupina	n	Chybějící	Průměr	Medián	SD	Min.	Max.
Porovnávání bodů	N	29	2	15,55	16	2,11	11	19
	O	19	5	15,37	15	2,79	10	19
Porovnávání čísel	N	25	6	19,76	20	0,52	18	20
	O	19	5	19,53	20	0,51	19	20
Kostky	N	31	0	7,65	9	4,35	0	13
	O	24	0	6,54	8,50	4,41	0	12
Inhibice	N	28	3	17,86	18,50	2,45	11	20
	O	19	5	18,00	18	1,89	14	20

Z tabulky 13 můžeme vyčíst průměr správných odpovědí žáků v jednotlivých sledovaných subtestech. Také v tomto případě jsou rozdíly v průměrech na pohled velmi

nepatrné. V tomto případě žáci s AD v normě nepatrně více správně odpovídali v subtestech Porovnávání bodů, Porovnávání čísel a Kostky. V subtestu Inhibice nepatrně správněji odpovídali žáci s oslabenou úrovní AD.

8 Testování hypotéz

V této části se budeme věnovat zhodnocení statistické významnosti rozdílů v jednotlivých sledovaných oblastech mezi žáky s oslabenou úrovní AD a žáky s úrovní AD v normě. Pro každou sledovanou oblast (metakognitivní znalosti a vybrané kognitivní předpoklady) uvádíme nejdříve přehlednou tabulku výsledků t-testů, následně komentujeme výsledky vzhledem k jednotlivým hypotézám.

8.1 Oblast metakognitivních znalostí

Tabulka 14 – Výsledky nepárového t-testu pro oblast metakognitivních znalostí

		t	df	p	Rozdíl průměrů	Rozdíl standardní chyby	d
MZself	Stud. t.	2,212	53,0	0,031	3,004	1,358	0,601
	Welch. t.	2,166	45,0	0,036	3,004	1,387	0,595
MZúlohy	Stud. t.	-1,569	53,0	0,123	-0,930	0,593	-0,427
	Welch. t.	-1,528	43,8	0,134	-0,930	0,609	-0,427
MZstrategie+	Stud. t.	2,547	53,0	0,014	1,155	0,453	0,693
	Welch. t.	2,460	41,8	0,018	1,155	0,469	0,680
MZstrategie-	Stud. t.	0,028	52,0	0,978	0,017	0,598	0,008
	Welch. t.	0,028	47,4	0,978	0,017	0,603	0,008

H₁: Metakognitivní znalosti vztahující se k self se u žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD liší.

Jak lze vyčíst z tabulky 14, výpočet nepárového t-testu na hladině významnosti 5% prokázal statisticky významný rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se k self mezi skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti ($p = 0,036$) je menší než zadaná hladina významnosti, tedy $p < 0,05$, nulovou hypotézu zamítáme. Cohenovo d naznačuje přibližně střední hodnoty rozměrového efektu. Vzhledem na porovnání průměrů obou skupin (tabulka 11) lze konstatovat, že žáci s úrovní AD v normě vnímají řešení aritmetických úloh vzhledem ke svým schopnostem více jako snadné a plynulé než žáci z druhé skupiny (O).

H₂: Metakognitivní znalosti vztahující se k úlohám se u žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD liší.

Tabulka 14 dále ukazuje, že výpočet t-testu neprokázal na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se k úlohám mezi

oběma skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti ($p = 0,134$) je větší než zadaná hladina významnosti, tedy $p > 0,05$, tudíž nulovou hypotézu nezamítáme. V tomto případě lze konstatovat, že metakognitivní znalosti vztahující se k úlohám se u žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD neliší.

H₃: Žáci s úrovní AD v normě se liší ve využívání strategií posilujících kompetence od žáků s oslabenou úrovní AD.

Z tabulky 14 lze dále vyčíst, že výpočet nepárového t-testu prokázal na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se ke strategiím posilujícím kompetence mezi oběma skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti ($p = 0,018$) je menší než zadaná hladina významnosti, tedy $p < 0,05$, nulovou hypotézu zamítáme. Cohenovo d naznačuje přibližně střední hodnoty rozměrového efektu. Vzhledem na srovnání průměrů obou skupin (tabulka 11) lze konstatovat, že žáci s úrovní AD v normě využívají častěji strategie posilující kompetence (v souvislosti s aritmetickými úlohami) než žáci s oslabenou úrovní AD.

H₄: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší ve využívání vyhýbacích strategií od žáků s úrovní AD v normě.

Tabulka 14 nám také ukazuje výsledky nepárového t-testu pro proměnnou metakognitivních znalostí vztahujících se k vyhýbacím strategiím. t-test neprokázal na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl mezi dvěma skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti ($p=0,978$) je větší než zadaná hladina významnosti, tedy $p > 0,05$, nulovou hypotézu tedy nezamítáme. Lze konstatovat, že nebyl prokázán rozdíl v užívání vyhýbacích strategií (v souvislosti s aritmetickými úlohami) mezi žáky s oslabenou úrovní AD a žáky s úrovní AD v normě.

8.2 Oblast vybraných kognitivních předpokladů

Tabulka 15 - Výsledky nepárového t-testu pro oblast vybraných kognitivních předpokladů (rychlost)

		t	df	p	Rozdíl průměrů	Rozdíl standardní chyby	d
Porovnávání bodů	Stud. t.	0,429	51,0	0,670	0,192	0,447	0,119
	Welch. t.	0,409	37,6	0,685	0,192	0,468	0,116
Porovnávání čísel	Stud. t.	-1,337	46,0	0,188	-0,064	0,048	-0,391
	Welch. t.	-1,273	33,3	0,212	-0,064	0,050	-0,381

Kostky	Stud. t.	-0,851	44,0	0,400	-0,535	0,629	-0,255
	Welch. t.	-0,889	43,5	0,379	-0,535	0,602	-0,260
Inhibice	Stud. t.	-0,535	49,0	0,595	-0,093	0,174	-0,151
	Welch. t.	-0,504	33,6	0,618	-0,093	0,185	-0,147

Tabulka 16 - Výsledky nepárového t-testu pro oblast vybraných kognitivních předpokladů (správnost)

		t	df	P	Rozdíl průměrů	Rozdíl standardní chyby	d
Porovnávání bodů	Stud. t.	0,258	46,0	0,797	0,183	0,709	0,076
	Welch. t.	0,244	31,2	0,809	0,183	0,751	0,074
Porovnávání čísel	Stud. t.	1,480	42,0	0,146	0,234	0,158	0,451
	Welch. t.	1,484	39,3	0,146	0,234	0,157	0,451
Kostky	Stud. t.	0,927	53,0	0,358	1,103	1,190	0,252
	Welch. t.	0,926	49,2	0,359	1,103	1,192	0,252
Inhibice	Stud. t.	-0,215	45,0	0,831	-0,143	0,665	-0,064
	Welch. t.	-0,226	44,2	0,822	-0,143	0,633	-0,065

H₅: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě.

H_{5a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{5b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni nesymbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

Z tabulek 15 a 16 je patrné, že ani po vyloučení extrémních hodnot, které jsme provedli při zpracování dat, neprokázal výpočet nepárového t-testu na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl v úrovni nesymbolického vnímání množství z hlediska správnosti ani rychlosti odpovědí mezi oběma skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti (p=0,685 pro rychlost a p=0,809 pro správnost odpovědí) je větší než zadaná hladina významnost (p>0,05). Z tohoto důvodu nezamítáme nulovou hypotézu a hypotézy H₅, H_{5a} a H_{5b} nepřijímáme.

H₆: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě.

H_{6a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{6b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni symbolického vnímání množství od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

Jak je patrné z tabulek 15 a 16, ani v tomto případě neprokázal výpočet nepárového t-testu na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl v úrovni symbolického vnímání množství z hlediska správnosti ani rychlosti odpovědí mezi oběma skupinami žáků. Pozorovaná hladina významnosti ($p=0,212$ pro rychlost a $p=0,146$ pro správnost odpovědí) je větší než zadaná hladina významnosti ($p>0,05$), nulovou hypotézu ani v tomto případě nezamítáme. Hypotézy H₆, H_{6a} a H_{6b} nepřijímáme.

H₇: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě.

H_{7a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{7b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni prostorových schopností od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

Ke stejným výsledkům jsme dospěli také v případě prostorových schopností. Ani v tomto případě neprokázal výpočet nepárového t-testu na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl v úrovni prostorových schopností z hlediska správnosti ani rychlosti odpovědí mezi oběma skupinami žáků (tabulka 15 a 16). Pozorovaná hladina významnosti ($p=0,379$ pro rychlost a $p=0,359$ pro správnost odpovědí) je větší než zadaná hladina významnosti ($p>0,05$), nulovou hypotézu tedy ani v tomto případě nezamítáme. Hypotézy H₇, H_{7a} a H_{7b} nepřijímáme.

H₈: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě.

H_{8a}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **rychlosti** odpovědí.

H_{8b}: Žáci s oslabenou úrovní AD se liší v úrovni inhibice od žáků s úrovní AD v normě z hlediska **správnosti** odpovědí.

Stejně tak v případě inhibice neprokázal výpočet nepárového t-testu na hladině významnosti 5% statisticky významný rozdíl mezi oběma skupinami žáků, a to jak z hlediska správnosti, tak z hlediska rychlosti odpovědí (tabulka 15 a 16). Pozorovaná hladina

významnosti ($p=0,618$ pro rychlost a $p=0,822$ pro správnost odpovědí) je větší než zadaná hladina významnosti ($p>0,05$). Nulovou hypotézu i v tomto případě nemůžeme zamítnout. Nepřijímáme tedy ani hypotézy H_8 , H_{8a} a H_{8b} .

9 Diskuze

Tato práce se věnuje oblasti metakognice a vybraným kognitivním předpokladům v souvislosti s obtížemi v aritmetických dovednostech žáků mladšího školního věku. Jedná se o problematiku, které se v našem výzkumném prostředí zatím nevěnuje dostatečná pozornost. Inspirací nám tedy byly zejména výzkumy zahraničních autorů, kteří upozorňují na souvislost mezi výše zmíněnými aspekty a rozvojem aritmetických dovedností (AD), případně jejich narušením.

Řešení matematických problémů, tudíž i aritmetických úloh, je náročný proces, který se odehrává na kognitivní, ale také na metakognitivní úrovni. Metakognice v tomto procesu umožňuje jedinci porozumět sobě a svým schopnostem, zhodnotit je, vybrat strategie, případně posoudit efektivnost zapojení různých kognitivních procesů a dojít tak k zamýšlenému výsledku. Žáci jsou v řešení těchto problémů různě úspěšní. Proto, aby bylo možné pomoci žákům, kteří mají s řešením takových úloh obtíže, je potřebné správně odhalit jejich příčinu. Příčiny mohou být kognitivní, ale také metakognitivní. Cílem práce bylo zmapovat obě tyto oblasti a jejich souvislost s oslabením v AD. Ačkoliv např. Lokajíčková (2014) vidí tendenci zkoumání metakognice ubírat se směrem k dospělé či starší populaci, my jsme se rozhodli zkoumat žáky mladšího školního věku, jelikož vnímáme potenciál dobře orientované diagnostiky a na ni navazující účelné intervence právě v tomto vývojovém období, kdy můžeme podpořit rozvoj kognitivních i metakognitivních schopností v kontextu aritmetiky (ať už v rámci ucelených programů či zařazením vhodných prvků do výuky), a pokusit se tak předcházet selhávání žáků.

Z výzkumů vyplývá, že metakognice má vliv na úspěšnost v řešení aritmetických úloh (např. Garofalo & Lester, 1985; Lucangeli, & Cornoldi, 1997). Některé výzkumy naznačují, že pokud má jedinec dostatečně rozvinuté metakognitivní schopnosti, dokáže se vypořádat i s takovými úlohami, pro které nemá dostatečné matematické znalosti (např. DeFranco, 1996). Zajímavá, i když zatím výzkumně méně obsáhlá, zjištění poukazují na významný vztah mezi metakognitivními znalostmi (jako jednou z komponent metakognice) a aritmetickými dovednostmi. Tento vztah je dle některých autorů zprostředkováván s dalšími koncepty, jakými jsou např. důvěra ve vlastní schopnosti (angl. self-efficacy), vnitřní motivace či atribuce úspěchu, které jsou s metakognitivními znalostmi úzce propojeny (např. Tian et al., 2018; Efklides, 2011, Desoete, 2001). Je však vhodné zmínit, že na výzkum metakognice má velký vliv její teoretická roztržitost. Výše zmiňované koncepty jsou někdy s metakognicí zaměňovány, jindy je metakognice vnímaná jako jejich součást (Lokajíčková, 2014).

Na základě analýzy dostupných zdrojů si dovolíme konstatovat, že v našem prostředí se otázce vztahu metakognitivních znalostí a aritmetických dovedností věnuje jen málo pozornosti a můžeme nalézt pouze ojedinělé výzkumné snahy (např. Chytrý et al., 2019; Chytrý, Říčan, Eisenmann & Medová, 2020). Oblast metakognitivních znalostí se však zdá být efektivně ovlivnitelná adekvátně mířenou intervencí, a lze tak podpořit kompetence žáků řešit aritmetické úlohy (Schneider, 2008; Chytrý et al., 2019). Proto jsme se rozhodli zaměřit se tímto směrem a realizovat výzkumnou sondu do oblasti metakognitivních znalostí vztahujících se k aritmetice u žáků mladšího školního věku, kteří se liší v úrovni aritmetických dovedností, tedy žáků s úrovní AD v normě a žáků s oslabenou úrovní AD. Vzhledem na nedostupnost vhodného nástroje k mapování metakognitivních znalostí v souvislosti s aritmetikou u žáků 3. tříd ZŠ v našem prostředí, jsme pro tento účel vytvořili vlastní dotazník inspirovaný zahraničním dotazníkem Metacognitive Knowledge in Mathematics Questionnaire (Efklides & Vlachopoulos, 2012).

Proces řešení aritmetických úloh je výrazně ovlivněn kvalitou procesů a předpokladů na kognitivní rovině. Některé výzkumy (zejm. zahraniční) upozorňují na vliv vybraných kognitivních předpokladů, resp. jejich deficitů, na rozvoj aritmetických dovedností. Tyto výzkumy zvažují zejména vliv oslabené schopnosti nesymbolického a symbolického vnímání množství (numerozity), prostorových schopností a exekutivních funkcí (zejm. inhibice a krátkodobé pracovní paměti). Upozorňují také na rozdíly z hlediska rychlosti zpracování úlohy u jedinců bez obtíží v AD a u jedinců s obtížemi v aritmetice (např. Landerl et al., 2004; Butterworth, 2003; Pražáková, & Špačková, 2019). Naším cílem bylo tedy zmapovat také tuto oblast a porovnat kromě metakognitivních znalostí také vybrané kognitivní předpoklady žáků mladšího školního věku. V našem prostředí máme pouze omezené nástroje ke zkoumání těchto předpokladů (zejm. numerozity), proto jsme se rozhodli použít nestandardizovanou metodu administrovanou na tabletech, kterou vytvořila pro účely svého doktorského výzkumu, v jehož spolupráci byla tato studie realizována, Skalová Pražáková (Pražáková, 2019). Výhodou takto administrovaných úloh byla nejen jejich atraktivita pro žáky mladšího školního věku, kteří tak plnili úlohy více motivovaně, ale také možnost měřit reakční čas u každé správně zodpovězené položky.

Do výzkumného souboru jsme zařadili žáky 3. tříd pražských základních škol, u kterých jsme nejdříve mapovali úroveň aritmetických dovedností, abychom mohli tyto žáky rozdělit na dvě skupiny: na skupinu s úrovní AD v normě a skupinu s oslabenou úrovní AD. Pro tento účel jsme použili vybrané subtesty z diagnostické metody Jiřiny Bednářové *Diagnostika*

matematických schopností a dovedností (Bednářová, 2015). Následně jsme zkoumali, zdali existují mezi oběma skupinami žáků rozdíly ve výše zmiňovaných aspektech. Statistická významnost rozdílů mezi skupinami žáků byla posuzována pomocí t-testu. V následující části se budeme věnovat výsledkům našeho výzkumu.

Diskuze výsledků výzkumu

Z výzkumu vyplynulo, že žáci s úrovní AD v normě se liší od žáků s oslabenou úrovní AD v některých dílčích oblastech metakognitivních znalostí. Navzdory našemu očekávání, neprokázala tato studie rozdíly v žádném z vybraných kognitivních předpokladů mezi dvěma sledovanými skupinami žáků, a to ani ve správnosti ani v rychlosti odpovědí.

Statisticky významný rozdíl mezi žáky s úrovní AD v normě a žáky s oslabenou úrovní AD byl prokázán v metakognitivních znalostech vztahujících se k self. Respektive bylo prokázáno, že žáci, kteří mají oslabené AD, vnímají řešení aritmetických úloh vzhledem ke svým schopnostem jako méně snadné a méně plynulé než žáci s AD v normě. Tato zjištění jsou ve shodě s výzkumy Efklides a Vlachopoulos (2012) a Tian et al. (2018), kteří prokázali statisticky významnou souvislost mezi matematickými dovednostmi a metakognitivními znalostmi vztahujícími se k self. Druzí jmenovaní autoři však upozorňují, že tento vztah není přímý ale je zprostředkován důvěrou ve vlastní schopnosti (self-efficacy). Lze tedy uvažovat, že to, jak žáci vnímají své schopnosti pro řešení aritmetických úloh a jakou v nich mají důvěru, souvisí s úspěšností či neúspěšností při jejich řešení. Z literatury víme, že toto vnímání je významně ovlivněno mimo jiné předchozími zkušenostmi s těmito úlohami. Vzhledem na výše zmíněné vnímáme jako přínosné mapovat při diagnostice obtíží v AD i tuto oblast a následně ji cíleně podporovat (například zařazením sebehodnotících prvků do hodin matematiky, vedením žáků k zhodnocení jejich silných a slabých stránek, vedením žáků k aktivní reflexi práce aj.).

Studie dále neprokázala rozdíl v metakognitivních znalostech vztahujících se k úlohám u žáků s oslabenými AD a žáků s AD v normě. Podobně ani studie Tian et al. (2018) neprokázala významný vztah mezi metakognitivními znalostmi vztahujícími se k úlohám a matematickým výkonem. Na základě výsledků našeho dotazníku, lze předpokládat, že žáci 3. tříd nahlíží na aritmetické úlohy jako na málo náročné, bez ohledu na to, zdali jim jejich řešení činí obtíže či nikoliv. Zajímavým zjištěním také je, že žáci nerozlišují obtížnost základních aritmetických operací a vnímají úlohy s dělením, násobením, sčítáním, či odčítáním jako stejně jednoduché. Mírně se liší ve vnímání obtížnosti doplňování číselných řad (žáci s oslabenou úrovní AD je vnímají jako více obtížné).

Žáci s oslabenou úrovní AD sice vnímají nízkou obecnou náročnost úloh, navzdory tomu však vnímají, že je jejich řešení pro ně obtížné či málo plynulé (viz výsledky v metakognitivních znalostech vztahujících se k self). Pokud žák hodnotí všechny jemu předkládané aritmetické úlohy jako stejně jednoduché, avšak v souvislosti s vlastními schopnostmi hodnotí aritmetické úlohy jako obtížné (tedy „...nejsem dost dobrý, abych dokázal řešit lehké úlohy...“), je na místě položit si otázku, jaký vliv má toto přesvědčení na jeho sebepojetí, motivaci, případnou volbu strategií. Vzhledem na provázanost metakognitivních zkušeností a metakognitivních znalostí (také metakognitivních znalostí vztahujících se ke strategiím), na kterou upozorňují různí autoři (např. Efklides, 2008, Flavell, 2000), předpokládáme, že takováto zkušenost či přesvědčení může vyústit mimo jiné do volby vyhýbacích strategií. Dle našeho názoru může být proto užitečné vést žáky k tomu, aby dokázali posoudit obecnou náročnost úloh, např. posoudit, že sčítání je jednodušší než dělení, jelikož dobrá predikce může mít vliv na volbu vhodných strategií a tím pádem na úspěch v řešení úlohy. Toto potvrdily některé studie, které prokázaly důležitost přípravné fáze na řešení úlohy pro úspěšnost v matematice, která zahrnuje predikci, tedy i odhad náročnosti úlohy (Desoete et al., 2001; Verschaffela, 1999 in Desoete et al., 2001).

Třetí oblast, kterou jsme v této studii zkoumali, se váže k metakognitivním znalostem vztahujícím se ke dvěma typům strategií, které žáci v souvislosti s aritmetikou užívají – ke strategiím posilující kompetence a k vyhýbacím strategiím. Tato oblast souvisí s dříve zmiňovanými oblastmi metakognitivních znalostí, a to zejména v tom smyslu, že použití strategií je jakousi reakcí na posouzení obtížnosti úlohy, ať už z obecného hlediska nebo v souvislosti s vlastními schopnostmi. Na základě našich zjištění lze předpokládat, že se žáci s oslabenou úrovní AD a žáci s úrovní AD v normě liší zejména ve využívání strategií posilujících kompetence. Ukázalo se, že žáci bez obtíží takovéto strategie využívají častěji. Jedná se o strategie, které mohou být užity pro zvýšení plynulosti kognitivního zpracování nebo pro zvýšení kompetencí pro řešení aritmetických úloh (např. žádost o pomoc/radu, vyhledávání informací aj.). Největší rozdíl se ukázal konkrétně v položce, která mapovala užití zpětné kontroly vykonané práce. Je tedy patrné, že žáci s AD v normě tuto kontrolu provádí častěji. Jak jsme se zmínili výše, některé výzkumy upozorňují na rozdíly z hlediska rychlosti zpracování úlohy u žáků s obtížemi a bez obtíží v AD (např. Landerl et al., 2004; Butterworth, 2003; Pražáková, & Špačková, 2019). Můžeme tedy uvažovat, že zpětnou kontrolu častěji provádí žáci nejen proto, že volí vhodnější strategie, ale jednoduše proto, že na ni mají více času.

Naopak se neprokázal rozdíl mezi sledovanými skupinami žáků v užívání vyhýbacích strategií, jejichž užití má za cíl zejména vyhnout se pocitu vyplývajícího z neúspěchu při řešení úlohy. Ačkoliv naše šetření nezjistilo rozdíl mezi oběma skupinami žáků, Tian et al. (2018) na základě své studie předpokládají souvislost mezi užitím obou typů strategií a matematickým výkonem. Jejich šetření zjistilo pozitivní korelaci mezi strategiemi posilujícími kompetence a matematickým výkonem a negativní korelaci mezi vyhýbacími strategiemi a matematickým výkonem. Na základě svých zjištění tedy tvrdí, že metakognitivní znalosti vztahující se ke strategiím (vyhýbacím nebo posilujícím kompetence) mohou predikovat výkon v matematice. Můžeme předpokládat, že žáci s obtížemi v AD jsou méně aktivní a méně vyhledávají pomoc či jinou formu podpory svých kompetencí v aritmetice, může se tak lehce stát, že budou přehlíženi, jejich chování může být vnímáno jako nedostatečný zájem či nedostatečná snaha. Předpokládáme tedy, že mapování metakognitivních znalostí vztahujících se ke strategiím, které žák při řešení aritmetických úloh užívá, by mělo mít své místo v rámci diagnostiky obtíží v AD. Pokud např. zjistíme, že žák během hodin volí spíše vyhýbací strategie, můžeme například doporučit, aby byl žák ve třídě více aktivizován, aby si žák s učitelem domluvili individuální signál pro situace, kdy žák nebude rozumět a bude potřebovat pomoci aj.

V naší studii nebyl prokázán statisticky významný rozdíl v žádném ze sledovaných kognitivních předpokladů mezi žáky s oslabenou úrovní AD a s úrovní AD v normě v této oblasti, a to ani ve správnosti ani v rychlosti zpracování úloh. Je možné, že se jedná o důsledek limitů studie. Předpokládáme, že na výsledky mělo vliv zejména sestavení skupiny žáků s oslabenou AD. Žáci byli rozděleni na základě výsledků ve vybraných 3 subtestech *Diagnostiky matematických schopností a dovedností* (Bednářová, 2015). Hrubé skóry jsme převedli na percentily, ty jsou v této diagnostické baterii děleny do tří skupin – 1. odpovídá stupni výuky, 2. stimulace vhodná, 3. stimulace nutná. Do skupiny žáků s oslabenou úrovní AD jsme zařadili ty, kteří alespoň v jednom subtestu podali výkon odpovídající 2. nebo 3. úrovni (tedy stimulace vhodná/nutná). Samotné toto dělení zapříčinilo, že ve skupině žáků s oslabenými AD byli žáci, jejichž obtíže se pohybují v rozmezí od velmi mírných až po výrazné obtíže. Výzkumy, které předpokládají vliv oslabení vybraných kognitivních předpokladů na rozvoj obtíží v aritmetice, zvažují tento vliv u obtíží specifických. Tedy předpokládají, že deficity ve vybraných kognitivních předpokladech mohou být indikátorem dyskalkulie (např. Butterworth, 2003; Pražáková, & Špačková, 2019; Bartelet et al., 2014). Vzhledem na to, že jsme rozumové předpoklady žáků měřili pouze orientačně

pro vyloučení žáků s výrazně podprůměrnou úrovní intelektových schopností, nehodnotili jsme, zdali oslabení u těchto jedinců nevyplývá z nedostatečně rozvinutých rozumových schopností. Na základě našich zjištění uvažujeme, že v případě obtíží, které nejsou identifikovány jako specifické, nehrají kognitivní předpoklady tak důležitou roli. Pravděpodobně se do výkonu v aritmetických dovednostech promítají více jiné faktory. Rozdíl v metakognitivních znalostech je v tomto případě více vypovídající.

Limity studie

Jedním z výrazných limitů této studie je malý výzkumný vzorek, který čítá pouze 55 participantů. Důvodem takto malého vzorku byla jednak časová náročnost měření, ale také obtížnost dostat se do samotných škol. Testování probíhalo v době pandemie Covid-19, plánovaná měření se tedy mnohokrát přesouvala či rušila z důvodu opakovaných karantén tříd, některé školy zcela zamítly přístup cizích osob do budovy školy. Dalším z důsledků pandemie byla zvýšená absence žáků v tomto období. Vzhledem k tomu, že bylo testování rozděleno do dvou etap, museli jsme některé žáky vyřadit po tom, co absentovali na jednom ze dvou měření. Tím se nám také vzorek značně zúžil. Uvědomujeme si, že výrazným omezením je také rozdělení těchto žáků dle úrovně aritmetických dovedností. Tento aspekt jsme podrobně probírali v diskusi výše.

Rozhodli jsme se věnovat tématu, které v našem prostředí zatím není dostatečně probádané, což se projevilo např. v terminologii užívané v této práci, která je z velké části vlastním překladem autorky z anglických odborných pramenů a jistě by zasloužila vytříbenějších pojmů. Vzhledem k menšímu zájmu odborné veřejnosti o toto téma, nemáme v našem prostředí takové nástroje, které bychom mohli pro měření jednotlivých předpokladů použít u dané věkové skupiny. Rozhodli jsme se tedy užít nestandardizovaných metod, jejichž validita není ověřená, což je pro tento výzkum výrazně limitujícím aspektem. Jedná se o metodu administrovanou na tabletech a dotazník k mapování metakognitivních znalostí. Ačkoliv byly některé rozdíly statisticky významné, je důležité výsledky interpretovat s velkou opatrností.

Výsledky v dotazníku mohly být navíc ovlivněny také úrovní čtenářských schopností žáků. Některé výroky v dotazníku jsou skladbou věty i volbou slov komplikovanější, nejedná se pouze o věty jednoduché či samostatná slova. V kombinaci s výběrem odpovědi ze škály, která není pro všechny subškály konzistentní, mohlo být vyplňování dotazníku pro žáky matoucí. Při samotné administraci dotazníku se žáci poměrně často na jednotlivé výroky doptávali a bylo potřebné některým z nich dané výroky dovysvětlit, což naše předpoklady potvrzuje.

Doporučení pro budoucí bádání

Další bádání v této oblasti by mohlo přinést užitečné informace nejen pro diagnostiku, ale také pro intervenci u žáků s obtížemi v AD. Návrhy pro budoucí bádání vychází zejména z limitů této práce. Doporučujeme pro budoucí výzkum v této oblasti více propracovat kritéria rozdělení žáků na oslabené v AD a na ty, kteří mají dobře rozvinuté AD. Vhodné by bylo mapovat nejen úroveň aritmetických dovedností testem, tak jak jsme činili v naší studii, ale také další faktory, které mají vliv na rozvoj aritmetických dovedností: např. rozumové předpoklady, rodinné zázemí, učební návyky, vzdělávací styl²¹ aj. Vzhledem k dotazníkové formě šetření metakognitivních znalostí bychom doporučovali ověřit úroveň čtenářských dovedností žáků, resp. schopnost porozumění textu (některé výzkumy např. Deseote, 2001 pro tento účel požádali učitele daných žáků, aby tyto schopnosti posoudili).

²¹ Přínosné by bylo v budoucích výzkumných snahách zohlednit styl výuky matematiky v dané třídě, tak jak je tomu např. ve výzkumu Chytrého a kol. (2019) a srovnat například žáky vyučované dle Hejného metody a žáky vyučované klasickou metodou.

Závěr

Tato práce se zabývá problematikou metakognitivních znalostí a vybraných kognitivních předpokladů u žáků mladšího školního věku v souvislosti s aritmetickými dovednostmi, respektive jejich oslabením. Jedná se o problematiku, které se v našem prostředí zatím nevěnuje dostatek pozornosti. Proto jsme chtěli poskytnout alespoň částečný vhled do této oblasti a poukázat tak na významnost tohoto tématu.

Cílem empirické části této práce bylo prozkoumat, zdali existuje rozdíl v metakognitivních znalostech a vybraných kognitivních předpokladech u žáků mladšího školního věku, přesněji u žáků třetích tříd základních škol lišících se úrovní aritmetických dovedností. Výsledky výzkumu naznačují, že žáci, jejichž úroveň aritmetických dovedností je oslabená, vnímají, že je pro ně řešení aritmetických úloh vzhledem k jejich schopnostem obtížné a málo plynulé. Tito žáci se však od druhé skupiny neliší v hodnocení obecné náročnosti aritmetických úloh, kterou hodnotí jako nízkou, bez ohledu na to, o jaký druh základní aritmetické operace se jedná. Výzkum dále prokázal, že žáci s oslabenou úrovní aritmetických dovedností využívají méně takové strategie, které by posilovaly jejich kompetence v této oblasti či zvyšovaly plynulost kognitivního zpracování na rozdíl od druhé skupiny žáků. Tito žáci tak mohou být na hodinách matematiky méně výrazní a jejich neúspěch může být přisuzován nedostatečné snaze, ačkoliv se může jednat o nevhodnou volbu strategií. V míře užívání vyhýbacích strategií, které mají za cíl zejména vyhnout se neúspěchu, se obě skupiny neliší.

K našemu velkému překvapení tento výzkum neprokázal rozdíl mezi oběma skupinami žáků ve vybraných kognitivních předpokladech (symbolické a nesymbolické numerozitě, prostorových schopnostech, inhibici), a to ani ve správnosti ani v rychlosti zpracování úloh. V diskuzi výše probíráme limity této práce, u kterých zvažujeme výrazný vliv na tento výsledek a je tedy potřebné jej interpretovat s velkou opatrností.

Oblasti obtíží v aritmetických dovednostech, resp. její diagnostice, se zatím nevěnuje dostatečná pozornost, ačkoliv početní dovednosti mají výrazný vliv nejen na školní výkony, ale také na ostatní aspekty života jedince. Na základě našich zjištění se domníváme, že mapování a posuzování metakognitivních znalostí v souvislosti s aritmetikou u žáků mladšího školního věku má svoje opodstatnění a může být dobrým vodítkem pro odhalení původu obtíží a pro nastavení následné intervence. Ačkoliv jsme empiricky neprokázali rozdíl ve vybraných kognitivních předpokladech u sledovaných skupin žáků, na základě analýzy odborných zdrojů předpokládáme, že mapování této oblasti by mohlo pro diagnostiku obtíží

v aritmetických dovednostech poskytnout nové a užitečné informace o rozsahu a typu obtíží. Vnímáme jako potřebné prohloubit výzkumné snahy v tomto směru, aby bylo možné takové diagnostické metody vytvořit. Případně vytvořit metody screeningové, které by mohly být součástí depistážních šetření, abychom předešli selhávání v této oblasti a zabránili tak negativním dopadům takových zkušeností na kvalitu života žáka.

Seznam použitých zdrojů

- Agnetta, B., & Rochat, P. (2004). Imitative Games by 9-, 14-, and 18-Month-Old Infants. *Infancy*, 6(1), 1-36. https://doi.org/10.1207/s15327078in0601_1
- Agrillo, C., Miletto Petrazzini, M. E., & Bisazza, A. (2015). At the Root of Math. In *Evolutionary Origins and Early Development of Number Processing* (s. 3-33). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-420133-0.00001-6>
- Agrillo, C., Piffer, L., & Adriano, A. (2013). Individual differences in non-symbolic numerical abilities predict mathematical achievements but contradict ATOM. *Behavioral And Brain Functions*, 9(1). <https://doi.org/10.1186/1744-9081-9-26>
- Atkinson, R. L., Atkinson, R. C., Smith, E. E., Bem, D. J., & Nolen-Hoeksema, S. (1995). *Psychologie*. Victoria Publishing.
- Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning And Individual Differences*, 20(5), 427-435. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.003>
- Balcomb, F., & Gerken, L. A. (2006). Does Implicit Metacognition Provide a Tool for Self-Guided Learning in Preschool Children?. *Proceedings Of The Annual Meeting Of The Cognitive Science Society*, (28), 1003-1008.
- Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A., & Blomert, L. (2014). Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research In Developmental Disabilities*, 35(3), 657-670. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2013.12.010>
- Bednářová, J. (2015). *Diagnostika matematických schopností a dovedností*. Pedagogicko-psychologická poradna Brno.
- Bednářová, J., & Šmardová, V. (2015). *Diagnostika dítěte předškolního věku: co by dítě mělo umět ve věku od 3 do 6 let* (2. vydání, ilustroval Richard ŠMARDÁ). Edika.
- Beran, M. J., Perdue, B. M., Bramlett, J. L., Menzel, C. R., & Evans, T. A. (2012). Prospective memory in a language-trained chimpanzee (Pan troglodytes). *Learning And Motivation*, 43(4), 192-199. <https://doi.org/10.1016/j.lmot.2012.05.002>
- Borkowski, J. G., Estrada, M. T., Milstead, M., & Hale, C. A. (1989). General Problem-Solving Skills: Relations between Metacognition and Strategic Processing. *Learning Disability Quarterly*, 12(1), 57-70. <https://doi.org/10.2307/1510252>

- Branigan, H. E., & Donaldson, D. I. (2019). Learning from learning logs: A case study of metacognition in the primary school classroom. *British Educational Research Journal*, 45(4), 791-820. <https://doi.org/10.1002/berj.3526>
- Brinck, I., & Liljenfors, R. (2013). The Developmental Origin of Metacognition. *Infant And Child Development*, 22(1), 85-101. <https://doi.org/10.1002/icd.1749>
- Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia Screener: Highlighting pupils with specific difficulties in maths*. nferNelson Publishing Company Limited.
- Carr, M., Alexander, J., & Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Applied Cognitive Psychology*, 8(6), 583-595. <https://doi.org/10.1002/acp.2350080605>
- Cígler, H. (2018). *Matematické schopnosti: teoretický přehled a jejich měření*. Masarykova univerzita.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences* (2nd. ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- DeFranco, T. C. (1996). A perspective on mathematical problem-solving expertise based on the performance of male Ph.D. mathematicians. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky, *Research in Collegiate Mathematics Education. II: Conference Board of the Mathematical Sciences Issues in Mathematics Education* (vol. 6, s. 195-213). American Mathematical Society.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. Oxford University Press.
- de Jager, B., Jansen, M., & Reezigt, G. (2005). The Development of Metacognition in Primary School Learning Environments. *School Effectiveness And School Improvement*, 16(2), 179-196. <https://doi.org/10.1080/09243450500114181>
- Desoete, A., Roeyers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and Mathematical Problem Solving in Grade 3. *Journal Of Learning Disabilities*, 34(5), 435-447. <https://doi.org/10.1177/002221940103400505>
- Diamond, A. (2013). Executive Functions. *Annual Review Of Psychology*, 64(1), 135-168. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750>
- Efklides, A. (2008). Metacognition. *European Psychologist*, 13(4), 277-287. <https://doi.org/10.1027/1016-9040.13.4.277>

- Efklides, A. (2011). Interactions of Metacognition With Motivation and Affect in Self-Regulated Learning: The MASRL Model. *Educational Psychologist*, 46(1), 6-25. <https://doi.org/10.1080/00461520.2011.538645>
- Efklides, A., & Vlachopoulos, S. P. (2012). Measurement of Metacognitive Knowledge of Self, Task, and Strategies in Mathematics. *European Journal Of Psychological Assessment*, 28(3), 227-239. <https://doi.org/10.1027/1015-5759/a000145>
- Fajmonová, V., Hönigová, S., Urbánek, T., & Širůček, J. (2015). *CFT 20-R - Cattellův test fluidní inteligence*. Testcentrum.
- Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97(3), 295-313. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2004.09.010>
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends In Cognitive Sciences*, 8(7), 307-314. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002>
- Flavell, J. H. (2000). Development of children's knowledge about the mental world. *International Journal Of Behavioral Development*, 24(1), 15-23. <https://doi.org/10.1080/016502500383421>
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick, *The Nature of Intelligence* (s. 231-235). Lawrence Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911.
- Furman, T., & Rubinsten, O. (2012). Symbolic and non symbolic numerical representation in adults with and without developmental dyscalculia. *Behavioral And Brain Functions*, 8(1). <https://doi.org/10.1186/1744-9081-8-55>
- Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal For Research In Mathematics Education*, 16(3), 163-176. <https://doi.org/10.2307/748391>
- Geary, D. C. (2000). From infancy to adulthood: the development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry*, 9(S2), S11-S16. <https://doi.org/10.1007/s007870070004>
- Geary, D. C. (2017). Dyscalculia at an Early Age. In R. E. Tremblay, M. Boivin, & R. D. V. Peters, *Encyclopedia on Early Childhood Development* (17 February 2017).

<https://www.child-encyclopedia.com/learning-disabilities/according-experts/dyscalculia-early-age>

Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children with Learning Disability. *Journal Of Experimental Child Psychology*, 77(3), 236-263. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561>

Hartl, P., & Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník*. Portál.

Hendl, J. (2021). *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech* (Druhé, rozšířené vydání). Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.

Hönigová, S. (2014). Diagnostika struktury matematických schopností (DISMAS): Recenze metody. *Testforum*, 3(4), 58-64. <https://doi.org/10.5817/TF2014-4-29>

Hrbáčková, K. (2011). The Effect of a Metacognitive Intervention Programme on Cognitive Acceleration of Preschool Children. *E-Pedagogium*, 11(3), 49-63. <https://doi.org/10.5507/epd.2011.033>

Chytrý, V. (2020). *Srovnání preferovaných strategií řízení učebních činností v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ z hlediska úspěšnosti v didaktických testech a úrovně dosažených metakognitivních znalostí žáků* [habilitační práce]. Univerzita Karlova v Praze.

Chytrý, V., Pešout, O., & Říčan, J. (2014). *Preference metakognitivních strategií na pozadí úkolových situací v matematice u žáků druhého stupně ZŠ*. Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem.

Chytrý, V., Říčan, J., & Živná, D. (2019). Matematická výkonnost a metakognice žáků základních škol běžných, základních škol Montessori a žáků vyučovaných podle Hejného metody. *Studia Paedagogica*, 24(1), 107-133. <https://doi.org/10.5817/SP2019-1-5>

Chytrý, V., Říčan, J., Eisenmann, P., & Medová, J. (2020). Metacognitive Knowledge and Mathematical Intelligence—Two Significant Factors Influencing School Performance. *Mathematics*, 8(6). <https://doi.org/10.3390/math8060969>

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers In Human Neuroscience*, 8. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00057>

- Kaufmann, L., & Aster, M. von. (2012). The Diagnosis and Management of Dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt International*. <https://doi.org/10.3238/arztebl.2012.0767>
- Košč, L. (1972). *Psychológia matematických schopností*. SPN.
- Krejčířová, D., Boschek, P., & Dan, J. (2002). *WISC-III. Wechslerova inteligenční škála pro děti*. Testcentrum.
- Krykorková, H., & Chvál, M. (2001). Rozvoj metakognice - cesta k hodnotnějšímu poznání. *Pedagogika*, 51(2), 185-195.
- Lai, E. (2011). Metacognition: A Literature Review Research Report. *Pearson's Research Reports*.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93(2), 99-125. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004>
- Langmeier, J., & Krejčířová, D. (2006). *Vývojová psychologie* (2., aktualiz. vyd). Grada.
- Levine, S. C., Jordan, N. C., & Huttenlocher, J. (1992). Development of calculation abilities in young children. *Journal Of Experimental Child Psychology*, 53(1), 72-103. [https://doi.org/10.1016/S0022-0965\(05\)80005-0](https://doi.org/10.1016/S0022-0965(05)80005-0)
- Livingstone, J. A. (2003). *Metacognition: An Overview*.
- Locuniak, M. N., & Jordan, N. C. (2008). Using Kindergarten Number Sense to Predict Calculation Fluency in Second Grade. *Journal Of Learning Disabilities*, 41(5), 451-459. <https://doi.org/10.1177/0022219408321126>
- Lokajíčková, V. (2014). Metakognice - vymezení pojmu a jeho uchopení v kontextu výuky. *Pedagogika*, 64(3), 278-306.
- Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (1997). Mathematics and Metacognition: What Is the Nature of the Relationship?. *Mathematical Cognition*, 3(2), 121-139. <https://doi.org/10.1080/135467997387443>
- Mercader, J., Miranda, A., Presentación, M. J., Siegenthaler, R., & Rosel, J. F. (2018). Contributions of Motivation, Early Numeracy Skills, and Executive Functioning to Mathematical Performance. A Longitudinal Study. *Frontiers In Psychology*, 8. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.02375>
- Nakonečný, M. (2009). *Psychologie osobnosti* (Vyd. 2., rozš. a přeprac). Academia.

- Nelson, T. O., & Narens, L. (1990). Metamemory: A theoretical framework and new findings. *The Psychology Of Learning And Motivation*, 26, 125-141.
- Neuenhaus, N., Artelt, C., Lingel, K., & Schneider, W. (2011). Fifth graders metacognitive knowledge: general or domain-specific?. *European Journal Of Psychology Of Education*, 26(2), 163-178. <https://doi.org/10.1007/s10212-010-0040-7>
- Novák, J. (2004). *Dyskalkulie: metodika rozvíjení základních početních dovedností* (Vyd. 3., zcela přeprac., rozš). Tobiáš.
- Osmon, D. C., Smerz, J. M., Braun, M. M., & Plambeck, E. (2007). Processing Abilities Associated with Math Skills in Adult Learning Disability. *Journal Of Clinical And Experimental Neuropsychology*, 28(1), 84-95. <https://doi.org/10.1080/13803390490918129>
- Passolunghi, M. C., & Siegel, L. S. (2001). Short-Term Memory, Working Memory, and Inhibitory Control in Children with Difficulties in Arithmetic Problem Solving. *Journal Of Experimental Child Psychology*, 80(1), 44-57. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2626>
- Passolunghi, M. C., Vercelloni, B., & Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development*, 22(2), 165-184. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2006.09.001>
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). *Psychologie dítěte* (2. vyd). Portál.
- Plassová, M., Stuchlíková, I., & Vavrečka, M. (2017). Úvod do aproximálního numerického systému. *Pedagogika*, 67(2), 161-176. <https://doi.org/10.14712/23362189.2017.410>
- Pražáková, K. (2019). Klíčové indikátory specifických obtíží v rozvoji aritmetických dovedností u žáků mladšího školního věku. In E. Maierová, L. Viktorová, M. Dolejš, & T. Dominik, *PHD EXISTENCE 2019 "Tělo a mysl": Česko-slovenská psychologická konference (nejen) pro doktorandy a o doktorandech* (s. 120-126). Univerzita Palackého Olomouci.
- Pražáková, K. (2021). *Pedagogická diagnostika obtíží v matematice na prvním stupni základních škol* [závěrečná práce]. Univerzita Karlova.
- Pražáková, K., & Kucharská, A. (2019). Riziko dyskalkulie a dalších obtíží v matematice u dětí předškolního věku. *Gramotnost, Pregramotnost A Vzdělávání*, 3(2), 143-165.

- Pražáková, K., & Špačková, K. (2019). Přesnost a rychlost ve vnímání množství u jedinců s dyskalkulií. *Gramotnost, Pregramotnost A Vzdělávání*, 2(2), 69-90.
- Presentación, M. -J., Siegenthaler, R., Pinto, V., Mercader, J., & Miranda, A. (2015). Math Skills and Executive Functioning in Preschool: Clinical and Ecological Evaluation // Competencias matemáticas y funcionamiento ejecutivo en preescolar. *Revista De Psicodidactica / Journal Of Psychodidactics*, 20(1), 65-82. <https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.11086>
- Ptáček, R. (2011). *BRIEF Hodnocení exekutivních funkcí u dětí*. Hogrefe-Testcentru.
- Reusser, L. (2011, srpen 3). Basis-Math 4 – 8: Basisdiagnostik Mathematik für die Klassen 4 – 8. <http://www.recheninstitut.at/2011/08/basisdiagnostik-mathematik-fur-die-klassen-4-%E2%80%93-8/>
- Roozenbeek, J., Schneider, C. R., Dryhurst, S., Kerr, J., Freeman, A. L. J., Recchia, G., van der Bles, A. M., & van der Linden, S. (2020). Susceptibility to misinformation about COVID-19 around the world. *Royal Society Open Science*, 7(10). <https://doi.org/10.1098/rsos.201199>
- Říčan, J. (2017). Způsoby zjišťování úrovně metakognitivních znalostí: kvantitativní vs. kvalitativní standard. *Gramotnost, Pregramotnost A Vzdělávání*, 1(1), 67-85.
- Říčan, J. (2017). Rozvoj metakognitivních znalostí: pedagogicko-psychologický vhled. *Gramotnost, Pregramotnost A Vzdělávání*, 1(2), 7-22.
- Říčan, P. (2010). *Psychologie osobnosti: obor v pohybu* (6., rev. a dopl. vyd., V Grada Publishing 2). Grada.
- Schleger, F., Landerl, K., Muenssinger, J., Draganova, R., Reinl, M., Kiefer-Schmidt, I., Weiss, M., Wacker-Gußmann, A., Huotilainen, M., & Preissl, H. (2014). Magnetoencephalographic Signatures of Numerosity Discrimination in Fetuses and Neonates. *Developmental Neuropsychology*, 39(4), 316-329. <https://doi.org/10.1080/87565641.2014.914212>
- Schneider, W. (2008). The Development of Metacognitive Knowledge in Children and Adolescents: Major Trends and Implications for Education. *Mind, Brain, And Education*, 2(3), 114-121. <https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2008.00041.x>
- Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26(1/2), 113-125. <https://doi.org/10.1023/A:1003044231033>

- Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, 7(4), 351-371. <https://doi.org/10.1007/BF02212307>
- Stock, P., Desoete, A., & Roeyers, H. (2010). Screening for mathematical disabilities in kindergarten. *Developmental Neurorehabilitation*, 12(6), 389-396. <https://doi.org/10.3109/17518420903046752>
- Straka, O. (2021). *Jak měřit metakognici (nejen) u nadaných dětí*. Masarykova Univerzita. <https://munispace.muni.cz/library/catalog/book/2104>
- Thorová, K. (2015). *Vývojová psychologie: proměny lidské psychiky od početí po smrt*. Portál.
- Tian, Y., Fang, Y., & Li, J. (2018). The Effect of Metacognitive Knowledge on Mathematics Performance in Self-Regulated Learning Framework—Multiple Mediation of Self-Efficacy and Motivation. *Frontiers In Psychology*, 9. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02518>
- Traspe, P., & Skalková, I. (2018). *DISMAS: Diagnostika struktury matematických schopností* (3. upravené vydání). Národní ústav pro vzdělávání.
- Vágnerová, M. (2005). *Školní poradenská psychologie pro pedagogy*. Karolinum.
- Vágnerová, M., & Klégrová, J. (2008). *Poradenská psychologická diagnostika dětí a dospívajících*. Karolinum.
- Vágnerová, M., & Lisá, L. (2021). *Vývojová psychologie: dětství a dospívání* (Vydání třetí, přepracované a doplněné). Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.
- Van Zile-Tamsen, C. (1996). *Metacognitive self-regulation and the daily academic activities of college students* [dizertace]. State University of New York at Buffalo.
- Veenman, M., & Elshout, J. J. (1999). Changes in the relation between cognitive and metacognitive skills during the acquisition of expertise. *European Journal Of Psychology Of Education*, 14(4), 509-523.
- von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 49(11), 868-873. <https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x>
- Whitebread, D., Coltman, P., Pasternak, D. P., Sangster, C., Grau, V., Bingham, S., Almeqdad, Q., & Demetriou, D. (2009). The development of two observational tools for

assessing metacognition and self-regulated learning in young children. *Metacognition And Learning*, 4(1), 63-85. <https://doi.org/10.1007/s11409-008-9033-1>

Zelinková, O. (2003). *Poruchy učení: specifické vývojové poruchy čtení, psaní a dalších školních dovedností* (10., zcela přeprac. a rozš. vyd). Portál.

MKN-10. (2022). Dostupné 5 březem 2022, z <https://mkn10.uzis.cz/prohlizec/F81.2>

Seznam tabulek

Tabulka 1 - Počet participantů z jednotlivých škol.....	43
Tabulka 2 - Počet a věkový průměr participantů	44
Tabulka 3 - Hodnoty Cohenova koeficientu	50
Tabulka 4 - Rozdělení žáků do kategorií dle úrovně AD pro verzi A a B.....	52
Tabulka 5 - Průměr věku žáků dle příslušnosti ke skupině.....	52
Tabulka 6 – Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZself+).....	52
Tabulka 7 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZself-).....	53
Tabulka 8 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZúlohy).....	54
Tabulka 9 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZstrategie+).....	54
Tabulka 10 - Průměry odpovědí v jednotlivých skupinách (MZstrategie-).....	55
Tabulka 11 - Deskriptivní statistika pro proměnné metakognitivních znalostí	55

Seznam obrázků

Obrázek 1 - Metakognitivní model Nelsona a Narensa	15
Obrázek 2 - Víceúrovňový model Anastasie Efklides	17
Obrázek 3 - Ukázka položky ze subškály MZself+	46
Obrázek 4 - Ukázka položky ze subškály MZself-	46
Obrázek 5 - Ukázka položky ze subškály MZúlohy	47
Obrázek 6 - Ukázka položky ze subškály MZstrategie+	47
Obrázek 7 - Ukázka položky ze subškály MZstrategie-	47

Seznam příloh

Příloha 1 – Hodnoty Levenova testu

Příloha 2 – Informační dopis pro rodiče

Příloha 3 – Informovaný souhlas zákonného zástupce

Příloha 1 – Hodnoty Levenova testu

Homogeneity of Variances Test (Levene's)

	F	df	df2	p
Porovnávání bodů (správnost)	2.673	1	46	0.109
Porovnávání bodů (rychlost)	0.293	1	51	0.591
Porovnávání čísel (správnost)	2.063	1	42	0.158
Porovnávání čísel (rychlost)	1.995	1	46	0.165
Kostky (správnost)	0.400	1	53	0.530
Kostky (rychlost)	1.052	1	44	0.311
Inhibice (správnost)	0.134	1	45	0.716
Inhibice (rychlost)	0.532	1	49	0.469

Note. A low p-value suggests a violation of the assumption of equal variances

Homogeneity of Variances Test (Levene's)

	F	df	df2	p
MZself	1.0922	1	53	0.301
MZúlohy	0.6213	1	53	0.434
MZstrategie+	3.2229	1	53	0.078
MZstrategie-	0.0154	1	52	0.902

Note. A low p-value suggests a violation of the assumption of equal variances

Příloha 2 – Informační dopis pro rodiče



Vážení rodiče, vážení zákonní zástupci,

obracíme se na Vás s prosbou o spolupráci ve výzkumné studii realizované na katedře psychologie PedF UK. Studie si klade za cíl identifikovat klíčové předpoklady pro rozvoj matematických dovedností u žáků základních škol. Tím chceme umět blíže rozpoznat riziko obtíží v matematice včetně specifické poruchy počítání (dyskalkulie) a dát podnět ke vzniku nových diagnostických nástrojů, které by uměly včas rozpoznat jednotlivé typy i příčiny případných obtíží.

Sledován bude mj. význam odhadu množství, paměťových i prostorových schopností, logiky apod. Dále budeme zkoumat souvislost těchto faktorů a metakognice žáků. Studie je inspirována novými poznatky ze zahraničí a snaží se je ověřit v našich podmínkách. Část testových úloh bude administrována pomocí tabletů (některé úkoly budou pojaty částečně jako hra).

Zajímají nás skupinové výsledky, nechystáme se tedy hodnotit výkony jednotlivých žáků samostatně. Účast v této studii by tak pro Vás nebo Vaše dítě neměla žádné zvláštní individuální přínosy, zlepši ale naše znalosti o dané problematice.

Výsledky výzkumu budou zpracovány zcela **anonymně** v souladu s etickými principy ve výzkumu.

Jak by probíhala účast dítěte ve studii?

Studie bude realizována v průběhu 1. pololetí školního roku 2021/2022. Účastníky budou jak žáci s obtížemi v matematice, tak i žáci bez těchto obtíží. Vše proběhne přímo **v prostorách školy, kam daný žák dochází**. Jednotlivé úkoly budou dětem zadávány **skupinově**, časová náročnost pro každé dítě odpovídá cca **1-2 vyučovacím hodinám**, které budou dohodnuty s učiteli žáků. V průběhu výzkumu budou dodržována **hygienická opatření** v závislosti na aktuální epidemiologické situaci.

Spolupráce na studii je z Vaší strany zcela dobrovolná. Abychom však mohli s Vaším dítětem pracovat, potřebujeme nutně Váš souhlas se zařazením do výzkumné studie. Pokud by však dítě

z jakéhokoliv důvodu odmítalo spolupracovat nebo nechtělo ve výzkumu pokračovat, je zaručeno, že může testování odmítnout v jakékoli jeho fázi.

Jak postupovat dále?

Děkujeme za laskavé zvážení naší žádosti o účast dítěte ve studii a těšíme se na případnou spolupráci. V případě souhlasu se zařazením Vašeho dítěte do studie prosíme o vyplnění níže přiloženého formuláře. Formulář následně předejte třídnímu učiteli /učitelce dítěte.

V případě jakýchkoli dotazů nás neváhejte kontaktovat na e-mailové adrese: marina.stierankova@student.pedf.cuni.cz.

S pozdravem

Bc. Marína Stieranková

Příloha 3 – Informovaný souhlas zákonného zástupce



PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
UNIVERZITA KARLOVA

Informovaný souhlas zákonného zástupce

Jméno a příjmení dítěte:

Datum narození:

Jméno a příjmení rodiče/zákonného zástupce:

Dávám tímto souhlas se zařazením dítěte do výzkumné studie, jejíž hlavní řešitelkou je Mgr. Kateřina Skalová Pražáková. Souhlasím též s anonymním zpracováním výsledků pro účely této studie.

V..... dne.....

Podpis rodiče / zákonného zástupce

Pozn.: Pokud byste si přáli být informováni o výsledcích studie, zde můžete zanechat na sebe e-mailové spojení:

Veškeré Vámi poskytnuté údaje budou zpracovány v souladu s ustanovením čl. 13 Nařízení Evropského parlamentu a Rady (EU) č. 2016/679 ze dne 27. dubna 2016, obecného nařízení O ochraně osobních údajů („GDPR“).