

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metrické úlohy v krychli řešené analyticky i synteticky
Metrical tasks in cube solved with analytic and synthetic approach

Denisa Váňová

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Metrické úlohy v krychli řešené analyticky i synteticky potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 18. dubna 2022

Ráda bych poděkovala JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za jeho čas věnovaný mé bakalářské práci, ochotný přístup a také za všechny připomínky a rady, které mi poskytnul. Děkuji své rodině za podporu v průběhu celého studia.

ABSTRAKT

Práce se zabývá metrickými vlastnostmi (vzdálenostmi a odchylkami) geometrických objektů v prostoru z pohledu syntetické a analytické středoškolské geometrie. Je rozdělena na dvě kapitoly. První kapitola obsahuje vymezení a porovnání syntetického a analytického přístupu, definice metrických vlastností a metody řešení metrických úloh v prostoru (včetně analytických vzorců). Druhá kapitola, která je hlavní částí práce, se skládá z vytvořené sbírky řešených metrických úloh, v nichž jsou využívány různé postupy z první kapitoly. Všechny úlohy jsou zadány v krychli a jsou řešeny jak syntetickou, tak analytickou metodou. První část sbírky tvoří úlohy sestavené podle možných řezů krychle rovinou zadanou jejími vrcholy a středy hran. V takto sestrojeném řezu se poté řeší metrické vlastnosti. Úlohy tak mohou sloužit jednak k výpočtům vzdáleností a odchylek, ale také k procvičení polohových vlastností (sestrojování řezů). V další části sbírky se řeší vzdálenosti a odchylky geometrických útvarů, které neleží v jedné rovině. Všechny řešené úlohy jsou doplněny obrázky vytvořenými v programu GeoGebra, součástí práce je i elektronická GeoGebra kniha dostupná na webové stránce <https://www.geogebra.org/m/ayujmdxp>. Ta obsahuje veškeré úlohy řešené v této práci a může čtenáři pomoci s vizualizací a pochopením. Práce může sloužit jak pro žáky, tak učitele středních škol, ať už jako materiál využitelný přímo ve výuce nebo jako sbírka úloh k procvičování.

KLÍČOVÁ SLOVA

metrické úlohy, řezy, analytická geometrie, syntetická geometrie

ABSTRACT

The thesis investigates metrical properties (distances and angles) of geometric objects in three dimensions from the perspective of both synthetic and analytic high-school geometry. The thesis is divided into two chapters. The first chapter contains the definitions and the comparison of the two approaches (synthetic and analytic), as well as the definitions of metrical properties and the methods for solving metrical problems in 3D. The second main chapter then presents a collection of metrical problems (with solutions) that utilizes the methods given in the first chapter. All problems are defined as inside a cube; and are solved by both a synthetic and analytic approach, respectively. The first part of this chapter consists of problems created by constructing the possible cross sections of a cube determined by an intersecting plane defined by the cube's vertices and edge midpoints. The problems are then solved in the cross section thus constructed. As such, they can also serve as practice for constructing cross sections. The other part of this chapter consists of problems not immediately solvable in one plane. All problems are accompanied by illustrations created in the GeoGebra application; and an electronic database, containing all the problems included in the thesis, is available at <https://www.geogebra.org/m/ayujmdxp>. The work can be used by high-school pupils, as well as teachers, both as material used directly in teaching and as a collection of exercises.

KEYWORDS

metrical problems, cross sections, analytic geometry, synthetic geometry

Obsah

Úvod	8
1 Syntetická a analytická metoda	10
1.1 Metrické vlastnosti geometrických objektů v prostoru.....	11
1.2 Vzdálenosti	12
1.2.1 Vzdálenost dvou bodů	12
1.2.2 Vzdálenost bodu od přímky.....	12
1.2.3 Vzdálenost bodu od roviny.....	14
1.2.4 Vzdálenost dvou přímek.....	15
1.2.5 Vzdálenost přímky od roviny	18
1.2.6 Vzdálenost dvou rovin.....	19
1.3 Odchylky.....	19
1.3.1 Odchylka dvou přímek	19
1.3.2 Odchylka přímky a roviny.....	20
1.3.3 Odchylka dvou rovin	22
2 Řešené metrické úlohy v krychli	23
2.1 Sbírka řezů krychle a metrické úlohy pomocí nich řešené	25
2.1.1 Řez 1: Obdélník I.....	27
2.1.2 Řez 2: Obdélník II	30
2.1.3 Řez 3: Rovnostranný trojúhelník I.....	33
2.1.4 Řez 4: Rovnoramenný trojúhelník I	35
2.1.5 Řez 5: Rovnoramenný lichoběžník.....	37
2.1.6 Řez 6: Kosočtverec	40
2.1.7 Řez 7: Rovnoramenný trojúhelník II.....	42
2.1.8 Řez 8: Pětúhelník I	44

2.1.9	Řez 9: Pětúhelník II	47
2.1.10	Řez 10: Obecný lichoběžník.....	50
2.1.11	Řez 11: Obdélník III.....	53
2.1.12	Řez 12: Pravidelný šestiúhelník	56
2.1.13	Řez 13: Rovnostranný trojúhelník II	59
2.1.14	Řez 14: Pětúhelník III.....	61
2.1.15	Řezy krychle rovnoběžnými rovinami	63
2.1.16	Řezy krychle rovinami se společnou přímkou	65
2.2	Ostatní metrické úlohy v krychli	66
Závěr.....		88
Seznam použitých zdrojů.....		89

Úvod

Ve středoškolské matematice se žák setkává s analytickým i syntetickým pohledem na geometrii, oba tyto přístupy jsou však obvykle ve výuce využívány zcela odděleně. Zatímco se syntetickou geometrií se žáci setkávají ve stereometrii, která navazuje na planimetrii, analytická geometrie tvoří samostatný okruh. Proto jsem se v této práci rozhodla geometrii věnovat z analytického i syntetického pohledu, konkrétně se zaměřením na metrické vlastnosti, a ukázat tak vzájemnou souvislost a porovnání obou přístupů.

Cílem práce je představit používané syntetické a analytické postupy k řešení metrických úloh (vzdáleností a odchylek) v prostoru. Postupy poté budou aplikovány ve vytvořené sbírce řešených úloh, která bude systematicky zpracována. Na příkladech bude čtenáři umožněno srovnání obou geometrických přístupů.

Práce je určena zejména žákům a učitelům středních škol. K porozumění textu práce předpokládám základní znalosti syntetické i analytické geometrie v rovině i prostoru probírané na střední škole, práce tak slouží především jako rozšiřující materiál, který nabízí dívat se na metrické úlohy z více pohledů. Práce žákům umožňuje bohatší pochopení geometrie, rozvíjí jejich pohled do více směrů. Rovněž se předpokládá, že může být práce (zejména sbírka řešených úloh) využita učiteli přímo ve výuce.

V první kapitole je stručně popsán rozdíl mezi syntetickou a analytickou geometrií a jsou představeny základní syntetické i analytické metody řešení metrických úloh v prostoru, které jsou doplněny definicemi, ze kterých se při samotném řešení úloh vychází. Součástí jsou také vzorce, které se v analytické geometrii využívají.

Druhá kapitola, která je hlavní částí práce, obsahuje sbírku řešených metrických úloh v krychli, v nichž se používají postupy představené v první kapitole. První část sbírky tvoří úlohy sestavené podle možných řezů krychle rovinou zadanou jejími vrcholy a středy hran. V řezech se poté řeší metrické vlastnosti. Druhá část se skládá z úloh zaměřených na vzdálenosti a odchylky geometrických objektů, které neleží v jedné rovině.

Všechny příklady jsou ilustrovány obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. Součástí práce je rovněž GeoGebra kniha, která je dostupná on-line na webové stránce <https://www.geogebra.org/m/ayujmdxp> a která může čtenáři pomoci řešenou úlohu

v prostoru lépe pochopit. GeoGebra kniha obsahuje veškeré příklady prezentované v této práci, součástí je zadání úlohy, krokovaná konstrukce syntetických postupů a také výsledek.

Ke zvolenému tématu (zkoumání středoškolských geometrických úloh z analytického i syntetického pohledu) není dostupných mnoho materiálů, nejsem si vědoma žádné tuzemské literatury, která by se na toto zaměřovala. Proto vycházím zejména ze středoškolských učebnic, které se věnují buď analytické, nebo syntetické geometrii, a v nich představené postupy zde propojuji.

V diplomové práci (Kreslová, 2019), která se zabývá tímto tématem, je v teoretické části pozornost věnována zejména odvozování analytických vzorců, proto v této práci na odvození vzorců především odkazuji a věnuji se spíše možným postupům řešení metrických úloh. Geometrickým úlohám, které jsou řešeny analytickými i syntetickými metodami, se zabývá také diplomová práce (Hurtová, 2012), ve které jsou však pouze dva příklady zaměřené na metrické vlastnosti.

1 Syntetická a analytická metoda

V celé práci se zabýváme řešením metrických úloh v prostoru z pohledu syntetické a analytické geometrie. Využíváme tak dva základní přístupy pro studium geometrických objektů: syntetickou a analytickou metodu.

Syntetická geometrie zkoumá geometrické útvary a jejich vlastnosti pomocí syntetických metod, jejichž hlavní myšlenkou je zkoumání geometrických objektů, které je založeno na jejich základních geometrických vlastnostech a vzájemných vztazích. V syntetické geometrii se tak pracuje přímo s rovinnými nebo prostorovými útvary (Holešová, 2011).

Analytická geometrie je částí geometrie, která zkoumá geometrické útvary a jejich vlastnosti pomocí analytické metody, která převádí geometrické problémy na algebraické, neboli vyjadřuje geometrické objekty a vztahy mezi nimi algebraickými prostředky. Aby to bylo možné, geometrické objekty umísťujeme do soustavy souřadnic a vyjadřujeme je početně právě pomocí souřadnic (Holešová, 2011; Šindel & Vlach, 2012).

Rozdíl mezi oběma přístupy je tudíž patrný. Zatímco v syntetické geometrii pracujeme přímo s geometrickými objekty, v analytické geometrii využíváme jejich algebraické reprezentace.

Jak uvádí Timmer a Verhoef (2012), i přesto, že analytická geometrie může poskytnout jednoduchou techniku pro řešení různých typů geometrických úloh, žáci středních škol ji mnohdy aplikují bez jakékoli úvahy o tom, co ve skutečnosti dělají. Žáci často manipulují se vzorci bez skutečného pochopení jejich významu. Ve většině případů zůstává analytická a syntetická geometrie zcela izolovaná, místo toho, aby se vytvářela celková představa o geometrických konceptech, se kterými žáci pracují. To má samozřejmě za následek například omezený soubor metod možných k řešení jednotlivých úloh z těchto oblastí. Analytický přístup navíc může být mnohdy náročnější než pohled syntetický, jelikož použitím analytických metod pro práci s geometrickými útvary žáci často zapomínají vlastnosti těchto objektů, což může mít za následek i zdlouhavé a zbytečné výpočty.

1.1 Metrické vlastnosti geometrických objektů v prostoru

V prostorové geometrii se zabýváme zejména polohovými a metrickými vlastnostmi daných objektů. Za takové geometrické útvary v prostoru považujeme body, přímky a roviny. Polohové vlastnosti určují základní vztahy mezi objekty, zejména jejich vzájemnou polohu. V této práci se však věnujeme především metrickým úlohám, které chápeme jako určování měřitelných veličin, konkrétně vzdáleností útvarů a velikostí úhlů (tzv. odchylky).

Při řešení úlohy syntetickou metodou postupujeme tak, že danou úlohu převedeme do roviny a v ní problém nadále řešíme. K výpočítání hledané vzdálenosti typicky využíváme Pythagorovu větu, popřípadě Euklidovu větu o výšce a o odvěsně, k výpočtu odchylky pak zejména goniometrické funkce, případně kosinovou nebo sinovou větu. V některých úlohách je vhodné využít podobnost trojúhelníků nebo také obsah útvaru. Ve většině případů však lze použít více ze zmíněných možností, neexistuje tak jediný správný postup řešení.

Analytická metoda nám na rozdíl od té syntetické umožňuje úlohu nechat v trojrozměrném prostoru. Pracujeme s geometrickými objekty, které reprezentujeme algebraicky pomocí souřadnic, a dále využíváme postupy a vzorce, které jsou níže podrobně rozebrány.

Analytická geometrie nám oproti té syntetické většinou poskytuje univerzální řešení, které se dá při jeho pochopení aplikovat v podstatě na každý příklad stejného typu, zatímco v syntetické geometrii se musíme více přizpůsobovat zadané úloze a hledat možné nástroje, jak problém vyřešit.

V následující části této kapitoly jsou uvedeny základní definice metrických vlastností, které se poté využívají v popsáných obecných postupech, které při řešení metrických úloh lze použít. Cílem této části je poskytnout souhrn takových postupů s využitím syntetických i analytických metod. Není-li uvedeno jinak, popis syntetických postupů je inspirován třetí kapitolou knihy (Pomykalová, 2018), analytické postupy jsou inspirovány čtvrtou kapitolou knihy (Boček & Kočandrle, 2018).

1.2 Vzdálenosti

1.2.1 Vzdálenost dvou bodů

Definice 1 (Pomykalová, 2017, s. 15): Vzdálenost dvou bodů je délka úsečky, jejíž krajní body jsou dané dva body.

Vzdálenost bodů A, B značíme $|AB|$.

V syntetické geometrii určíme $|AB|$ využitím vztahů, které platí pro geometrické útvary v rovině, ve které dané body leží, zejména pomocí Pythagorovy věty v nalezeném pravoúhlém trojúhelníku. V případě, že $|AB|$ určuje délku výšky na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku, může být výhodné využít vyjádření obsahu daného pravoúhlého trojúhelníku dvěma způsoby: jako polovina ze součinu délek obou odvěsen a jako polovina ze součinu délky přepony a k ní příslušné výšky (postup bude konkrétně ukázán v druhé kapitole). Jak je již uvedeno výše, lze také v některých případech využít Euklidovy věty nebo podobnost trojúhelníků.

V analytické geometrii využíváme vzorec:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

kde $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$. Znění i odvození vzorce pomocí Pythagorovy věty uvádí Boček a Kočandrle (2018, s. 15–16).

Vzdálenost dvou bodů považujeme za základní metrickou vlastnost, jelikož se na ni převádí (v syntetické geometrii) všechny ostatní vzdálenosti dvou geometrických objektů v prostoru.

1.2.2 Vzdálenost bodu od přímky

Definice 2 (Pomykalová, 2018, s. 84): Vzdálenost bodu od přímky je vzdálenost bodu od paty kolmice, která z něj vede na danou přímku.

Vzdálenost bodu A od přímky p značíme $|Ap|$. Pokud $A \in p$, potom $|Ap| = 0$.

Jelikož bod a přímka určují rovinu (pokud bod na přímce neleží), hledanou vzdálenost můžeme synteticky určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině (v té, kterou určují). Hledáme tak délku úsečky AP , kde P je pata kolmice vedené v rovině Ap bodem A k přímce p (Pomykalová, 2018, s. 84). Hledání vzdálenosti bodu od přímky tak lze brát jako planimetrickou úlohu, kterou si převedeme na vzdálenost dvou bodů.

Je ovšem možné použít postup, který vychází ze stereometrické definice využívající kolmou rovinu k dané přímce.

Definice 3 (Pomykalová, 2017, s. 15): Vzdálenost bodu od přímky je vzdálenost bodu od průsečíku přímky a roviny, která prochází daným bodem a je k dané přímce kolmá.

Využitím této definice tak nejprve nalezneme pomocnou rovinu, která prochází zadaným bodem a je kolmá k zadané přímce, určíme průsečík pomocné roviny se zadanou přímkou a hledanou vzdálenost bodu od přímky tím máme opět převedenou na vzdálenost dvou bodů.

V analytické geometrii rovněž pracujeme se zmíněnými definicemi. Jedním z možných postupů řešení je ten, ve kterém řešíme vzdálenost bodu A od paty P kolmice na danou přímku p (dle definice 2). Směrů kolmých na přímku p vycházejících z paty kolmice je ovšem v prostoru nekonečně mnoho, hledáme tak rovnou souřadnice bodu P . Využijeme platných vztahů: bod P leží na přímce p a směrové vektory $\overrightarrow{BP}$ a $\overrightarrow{s_p}$ (směrový vektor přímky p) jsou na sebe kolmé (protože jsou k sobě kolmé přímky BP a p). Získáme tak soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých (tři souřadnice bodu P a parametr přímky p). Ze soustavy tak dostáváme hledané souřadnice bodu P a úlohu máme opět převedenou na vzdálenost bodů B, P .

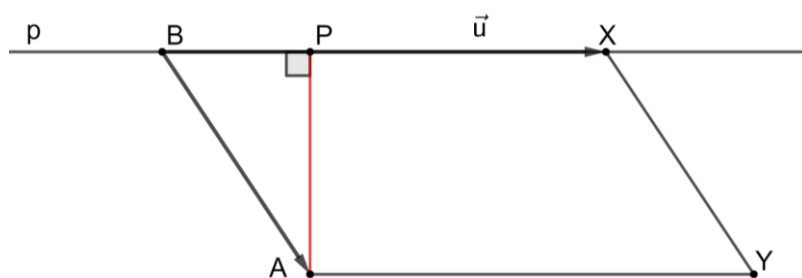
Můžeme ale využít i jiný analytický přístup využívající definici 3. Jak již bylo řečeno, směrů kolmých na p je nekonečně mnoho, ale rovina, která je kolmá na p a prochází bodem A , je pouze jedna. Naším cílem tak je nalézt rovnici roviny, která bude kolmá na přímku p a bude procházet bodem A . Její průsečík s přímkou p je pata kolmice P . Převedli jsme tak vzdálenost bodu od přímky opět na vzdálenost bodů B, P .

Boček a Kočandrlle (2018, s. 130–131) uvádí, že se poměrně často při řešení tohoto typu úlohy vyskytuje chybný postup, ve kterém se zadaným bodem A vede přímka q kolmá k zadané přímce p a za směrový vektor přímky q se zvolí libovolný vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky p . Hledaná vzdálenost se poté určí jako vzdálenost bodu A od průsečíku P přímek p a q . Jak by již díky výše popsaným korektním postupům mohlo být jasné, toto řešení je chybné, jelikož směrů kolmých k přímce p je v prostoru nekonečně mnoho, proto nelze rovnou zvolit správný směrový vektor.

Dalším možným analytickým postupem je využití vzorce pro vzdálenost bodu od přímky (Vondra, 2016, s. 50):

$$|Ap| = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{BA}|}{|\vec{u}|},$$

kde přímka p je dána rovnicí $X = B + t \cdot \vec{u}; t \in \mathbb{R}$. Odvození vzorce je patrné z obr. 1.1. Vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\vec{u}$ určují rovnoběžník $ABXY$, vzdálenost bodu A od přímky p se rovná velikosti výšky AP rovnoběžníku, která je kolmá na stranu BX . Jelikož je obsah rovnoběžníku roven součinu velikosti výšky a příslušné strany rovnoběžníku, výška rovnoběžníku je tak rovna podílu obsahu rovnoběžníku a velikosti příslušné strany, což přesně odpovídá výše zmíněnému vzorci. V čitateli je obsah vyznačeného rovnoběžníku, který zde vyjadřujeme pomocí vektorového součinu vektorů $\vec{u}$ a $\overrightarrow{BA}$, ve jmenovateli je velikost jeho strany.



Obr. 1.1: Vzdálenost bodu od přímky

1.2.3 Vzdálenost bodu od roviny

Definice 4 (Pomykalová, 2018, s. 88): Vzdálenost bodu od roviny je rovna vzdálenosti bodu od jeho pravoúhlého průmětu do dané roviny.

Vzdálenost bodu A od roviny ρ značíme $|A\rho|$. Pokud $A \in \rho$, potom $|A\rho| = 0$.

Synteticky dle definice hledáme kolmý průmět bodu do roviny, který získáme jako průsečík zadané roviny a přímky kolmé k rovině procházející zadaným bodem. V některých případech, zejména, pokud není kolmá přímka na první pohled vidět, využíváme pomocné roviny procházející zadaným bodem a kolmé k zadané rovině. Určíme průsečnici těchto dvou rovin, hledaný kolmý průmět zadaného bodu do dané roviny leží na získané průsečnici (Vondra, 2021, s. 46–48). Při hledání kolmé roviny využíváme definici kolmosti

dvou rovin¹ a kritérium kolmosti přímky a roviny². Úloha je tak opět převedena na vzdálenost dvou bodů, která je dobře vidět v sestrojené pomocné rovině.

Při řešení úlohy analytickou metodou v podstatě algebraicky popisujeme zmíněný syntetický postup. Nejprve sestavíme rovnici přímky, která prochází zadaným bodem a je kolmá na danou rovinu. Nalezneme souřadnice průsečíku přímky a roviny a vzdálenost bodu od roviny je tak opět převedena na vzdálenost dvou bodů (zadaného bodu a průsečíku přímky s rovinou).

Pro určení vzdálenosti bodu $P = [p_1, p_2, p_3]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}_\rho = (a, b, c)$ lze využít vzorec (Boček & Kočandrle, 2018, s. 132):

$$|P\rho| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Podrobné odvození vzorce uvádí v on-line učebnici Krynický (2010).

Pomocí vzdálenosti bodu od roviny se počítají i některé další vzdálenosti geometrických objektů, například vzdálenost rovnoběžných rovin, což si ukážeme později.

1.2.4 Vzdálenost dvou přímek

Před určováním vzdálenosti dvou přímek si nejprve zmíníme možné případy vzájemné polohy dvou přímek v prostoru. Dvě přímky jsou vzájemně:

- totožné (splývající), mají-li společné všechny body;
- různoběžné, mají-li společný právě jeden bod;
- rovnoběžné (různé), nemají-li společný žádný bod a zároveň leží v jedné rovině;
- mimoběžné, nemají-li společný žádný bod a zároveň neleží v jedné rovině (Pomykalová, 2018, s. 22–23).

Vzdálenost dvou totožných nebo různoběžných přímek je nulová, proto má smysl vzdálenost přímek zkoumat pouze u přímek rovnoběžných a mimoběžných.

¹ Dvě roviny jsou k sobě kolmé, jestliže jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině (Pomykalová, 2018, s. 69).

² Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám, které leží v dané rovině (Pomykalová, 2018, s. 63).

Definice 5 (Pomykalová, 2018, s. 91): Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

Vzdálenost dvou přímek p, q značíme $|pq|$.

V syntetické geometrii můžeme využít přímo definice 5 a hledanou vzdálenost rovnoběžných přímek tak převést na vzdálenost bodu jedné přímky od přímky druhé (pracujeme tak přímo v rovině určené danými rovnoběžkami). Lze ale také využít kolmou rovinu k oběma přímkám. Hledáme pak vzdálenost průsečíků kolmé roviny s rovnoběžnými přímkami.

Analyticky můžeme postupovat zcela analogicky k oběma popsaným syntetickým postupům. Buď získáme souřadnice libovolného bodu jedné přímky, a úlohu tím máme převedenou na vzdálenost bodu od přímky, nebo si vyjádříme rovnici kolmé roviny k daným rovnoběžkám a hledáme průsečíky přímek s rovinou. Úloha je tak převedena na vzdálenost dvou bodů.

Definice 6 (Pomykalová, 2018, s. 95): Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je rovna délce úsečky³, která je na obě přímky kolmá a jejíž krajní body leží na daných mimoběžkách.

U mimoběžných přímek lze synteticky postupovat tak, že dle definice 6 hledáme přímku, která je k oběma mimoběžkám kolmá. V mnoha případech ale není taková přímka na první pohled vidět. Hledáme proto rovinu, která bude kolmá k jedné z mimoběžných přímek (viz 1.2.3, kritérium kolmosti přímky a roviny) a zároveň v ní bude ležet druhá z mimoběžek. Průsečíkem této roviny se zadanou mimoběžkou, která v rovině neleží, je jeden z krajních bodů hledané nejkratší příčky. Úlohu tak máme převedenou na vzdálenost bodu od přímky.

Při řešení úlohy analytickou metodou postupujeme tak, jako bychom znali souřadnice obou krajních bodů hledané příčky, a pomocí podmínek, které musí tato příčka splňovat, najdeme hodnoty parametrů, které k vyjádření krajních bodů použijeme. Platí, že krajní body příčky leží na daných mimoběžkách, využijeme tak vyjádření obou zadaných přímek. Další podmínkou je, že příčka musí být kolmá k oběma mimoběžkám, což vyjádříme za použití skalárního součinu. Vyřešením soustavy rovnic získáme souřadnice krajních bodů příčky

³ Tuto úsečku nazýváme nejkratší příčkou mimoběžek.

mimoběžek, zbývá nám tak již pouze vypočítat vzdálenost těchto dvou bodů (Krynický, 2010).

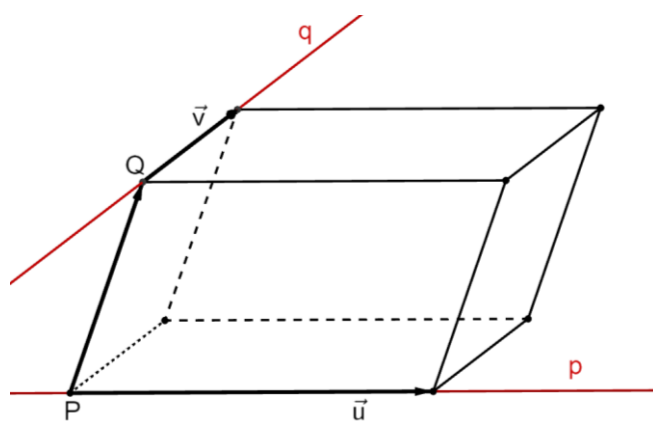
Úlohu lze také řešit jinou analytickou metodou. Hledaná příčka je kolmá na obě mimoběžné přímky, určíme tak směr příčky jako vektorový součin směrů mimoběžných přímek. Vyjádříme rovnici roviny, ve které leží hledaná příčka (máme již její směr) a také jedna z mimoběžek. Dále hledáme průsečík této roviny s druhou mimoběžkou, tím získáme souřadnice jednoho z krajních bodů příčky mimoběžek. Druhý z krajních bodů určíme například tak, že nalezneme průsečík příčky s druhou mimoběžkou. Poté nám pouze zbývá vypočítat vzdálenost těchto krajních bodů (Krynický, 2010). Lze si všimnout, že tento postup je opět algebraickou reprezentací výše zmíněného syntetického postupu řešení této úlohy.

Vondra (2016, s. 53) uvádí analytické řešení pomocí vzorce využívající smíšený součin vektorů:

$$|pq| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

kde $p: X = P + t \cdot \vec{u}$; $t \in \mathbb{R}$ a $q: X = Q + s \cdot \vec{v}$; $s \in \mathbb{R}$.

K odvození vzorce využijeme obr. 1.2. Vektory $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoří rovnoběžnostěn, hledaná vzdálenost mimoběžných přímek p , q je výškou rovnoběžnostěnu. Velikost výšky se rovná podílu objemu rovnoběžnostěnu⁴ a obsahu rovnoběžníku určeného směrovými vektory mimoběžek, což odpovídá zmíněnému vzorci.



Obr. 1.2: Vzdálenost dvou mimoběžek

⁴ Objem rovnoběžnostěnu pomocí smíšeného součinu blíže vysvětluje Boček a Kočandrlé (2018, s. 57–65).

Vondra (2016, s. 53) uvádí ještě jeden možný postup, kdy se vzdálenost mimoběžek převede na vzdálenost bodu od roviny. Posuneme jednu mimoběžku tak, aby protínala druhou. Dostaneme rovinu určenou těmito dvěma různoběžkami a počítáme vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné, což odpovídá vzdálenosti libovolného bodu přímky od roviny s ní rovnoběžné, jak si ukážeme níže.

1.2.5 Vzdálenost přímky od roviny

Nejprve se podíváme na vzájemnou polohu přímky a roviny. Přímka je s rovinou vzájemně:

- rovnoběžná, nemají-li společný žádný bod nebo mají-li společné všechny body (přímka pak leží v rovině);
- různoběžná, mají-li společný právě jeden bod (Pomykalová, 2018, s. 25–26).

Vzdálenost přímky od roviny, ve které přímka leží nebo ji protíná v jednom bodě, je rovna nule, proto se dále budeme zabývat případem, kdy nemají žádný společný bod.

Definice 7 (Pomykalová, 2017, s. 16): Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky od roviny.

Vzdálenost přímky p od roviny ρ značíme $|p\rho|$.

Pokud ověřujeme, zda je přímka s rovinou rovnoběžná, využíváme v syntetické geometrii kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny⁵. Analyticky rovnoběžnost ověříme například pomocí skalárního součinu směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny (pokud jsou k sobě vektory kolmé, přímka je s rovinou rovnoběžná). Podrobněji se zde polohovými vlastnostmi zabývat nebudeme, v případě, že v tom má čtenář nejasnosti, stručný přehled poskytuje například Krynický (2010) v on-line učebnici.

Při určování hledané vzdálenosti (v případě syntetického i analytického přístupu) vycházíme přímo z definice 7 a úlohu převádíme na vzdálenost bodu od roviny (viz pododдіl 1.2.3).

⁵ Přímka je rovnoběžná s rovinou ve které neleží, jestliže je rovnoběžná s alespoň jednou její přímkou (Vondra, 2021, s. 20).

1.2.6 Vzdálenost dvou rovin

Opět se nejprve zaměříme na vzájemnou polohu dvou rovin. Dvě roviny jsou vzájemně:

- totožné (splývající), mají-li společné všechny body;
- různoběžné, mají-li společnou jednu přímku (průsečnici);
- rovnoběžné (různé), nemají-li společný žádný bod (Vondra, 2021, s. 21).

Vzdálenost dvou různoběžných nebo totožných rovin je rovna nule. Určujeme ji tedy pro roviny rovnoběžné.

Definice 8 (Pomykalová, 2018, s. 91): Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

Vzdálenost dvou rovin ρ a σ značíme $|\rho\sigma|$.

K ověření, zda jsou roviny rovnoběžné, v syntetické geometrii využíváme kritérium rovnoběžnosti dvou rovin⁶, analyticky rovnoběžnost ověříme pomocí lineární závislosti normálových vektorů daných rovin.

I v tomto případě úlohu řešíme synteticky i analyticky přímo dle definice 8 a převádíme ji na vzdálenost bodu od roviny. V syntetické geometrii nám situaci může zjednodušit sestrojení roviny, která bude k oběma rovnoběžným rovinám kolmá a ve které tak bude ležet bod z jedné roviny a zároveň i jeho kolmý průmět do druhé roviny.

1.3 Odchylky

1.3.1 Odchylka dvou přímek

Odchylka rovnoběžných přímek je 0° , dále se proto věnujeme odchylce různoběžných a mimoběžných přímek.

Definice 9 (Pomykalová, 2018, s. 58): Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu přímky svírají.

V syntetické geometrii lze odchylku různoběžných přímek řešit jako planimetrickou úlohu v rovině, kterou nám zde určují přímo tyto různoběžné přímky. Velikost úhlu vypočítáme využitím vlastností rovinného útvaru, v němž je úhel, jehož velikost hledáme, jedním z jeho

⁶ Dvě různé roviny jsou rovnoběžné, jestliže v jedné rovině leží dvě různoběžné přímky, které jsou s druhou rovinou rovnoběžné (Vondra, 2021, s. 22).

vnitřních úhlů. Pokud je tímto útvarem trojúhelník, k výpočtu odchylky je možné využít goniometrické funkce, případně sinovou či kosinovou větu.

V analytické geometrii je výpočet odchylky různoběžných přímek založen na odchylce jejich směrových vektorů⁷. Odchylku φ dvou různoběžných přímek se směrovými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vypočítáme podle vzorce (Boček & Kočandrle, 2018, s. 132–133):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Podrobné odvození vzorce (včetně zavedení a geometrické interpretace skalárního součinu) je k nalezení v Halasovi (2018) nebo také v Kreslové (2019).

Definice 10 (Pomykalová, 2018, s. 58): Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Při syntetickém řešení odchylky mimoběžných přímek využíváme dle definice 10 rovnoběžek k daným mimoběžkám, čímž úlohu převádíme na odchylku různoběžných přímek.

Analyticky odchylku mimoběžek řešíme zcela stejně jako odchylku různoběžek, jelikož směrový vektor rovnoběžné přímky, kterou bychom dle definice 10 hledali, je nenulovým násobkem směrového vektoru původní zadané přímky.

1.3.2 Odchylka přímky a roviny

Definice 11 (Pomykalová, 2018, s. 78): Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny. Je-li přímka kolmá k rovině, je jejich odchylka rovna 90° .

Odchylku přímky p a roviny ρ značíme $|\angle p\rho|$.

Syntetickou metodou hledáme onen kolmý průmět přímky do roviny, který získáme jako průnik zadané roviny s rovinou, ve které leží daná přímka a která je na zadanou rovinu kolmá. Úlohu tak máme převedenou na odchylku dvou přímek.

⁷ Odchylka φ dvou nenulových směrových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ se vypočítá podle vzorce: $\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ (Vondra, 2016, s. 41).

V analytické geometrii výpočet pomocí kolmého průmětu není příliš efektivní, ale je také možný. Vyjádříme rovnicí roviny, která je kolmá na zadanou rovinu a ve které leží zadaná přímka. Kolmý průmět získáme vyřešením soustavy rovnic, které reprezentují dané roviny. Dále již úlohu řešíme jako odchylku dvou přímek.

Hledanou velikost úhlu můžeme však analyticky určit pomocí vzorce. Necht' je dána přímka $p: X = A + t \cdot \vec{u}$; $t \in \mathbb{R}$ a rovina $\rho: ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}_\rho = (a, b, c)$. Pro odchylku přímky p a roviny ρ platí (Vondra, 2016, s. 43):

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{u}|}, \varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Situace je znázorněna na obr. 1.3, kde $\vec{n}_\rho$ je zároveň normálovým vektorem roviny ρ a směrovým vektorem přímky q kolmé k rovině ρ , p' je pravoúhlý průmět přímky p do roviny ρ . Je patrné, že součet $|\angle q, p|$ a $|\angle p, p'|$ se rovná 90° . Můžeme nejprve využít vzorec pro odchylku $\alpha = |\angle q, p|$, pro kterou platí:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{u}|}.$$

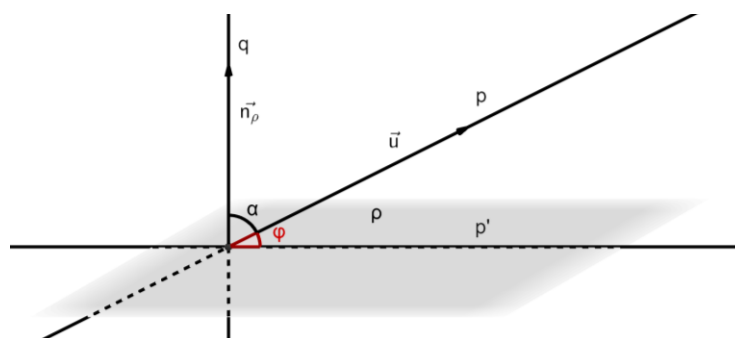
Poté si vyjádříme $\varphi = 90^\circ - \alpha$ a $\alpha = 90^\circ - \varphi$. Využitím vztahu

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

(vztah platí z vlastností funkcí sinus a cosinus) tak můžeme hledanou odchylku φ určit pomocí vzorce:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{u}|}.$$

Pro výpočet odchylky přímky od roviny je tedy možné použít vzorec s funkcí sinus, nebo nejprve vypočítat odchylku α pomocí vzorce s funkcí cosinus, kterou poté odečteme od 90° .



Obr. 1.3: Odchylka přímky a roviny

1.3.3 Odchylka dvou rovin

Definice 12 (Pomykalová, 2018, s. 74): Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnice s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

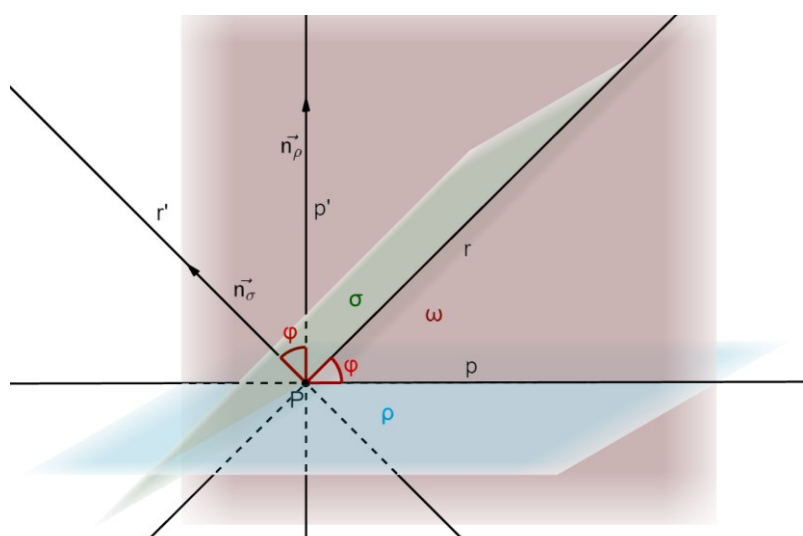
Odchylku rovin ρ a σ značíme $|\angle \rho \sigma|$.

V syntetické geometrii tak hledáme rovinu kolmou na obě zadané roviny. Využíváme toho, že rovina je zároveň kolmá na průsečnici zadaných rovin (vycházíme z definice kolmosti dvou rovin a kritéria kolmosti přímky a roviny, které již byly zmíněny v pododdílu 1.2.3). Po nalezení kolmé roviny určujeme průsečnice zadaných rovin s rovinou k nim kolmou. Úloha je tím převedena na řešení odchylky dvou přímek.

Analytickou metodou se situace zjednoduší využitím normálových vektorů zadaných rovin. Pro odchylku φ rovin ρ a σ s normálovými vektory $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ platí (Vondra, 2016, s. 44):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\sigma|}, \varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Na obr. 1.4 je rovina ω kolmá k zadaným rovinám ρ a σ , hledaná odchylka φ je odchylkou přímek p a r (průsečnic rovin ρ a ω , resp. σ a ω). Průsečíkem P rovin ρ, σ a ω vedeme kolmici p' , resp. r' k rovině ρ , resp. σ . Přímky p, r, p' a r' leží v pomocné rovině ω , a protože p' je kolmá k p a r' je kolmá k r , přímky p, r mají stejnou odchylku jako přímky p' a r' , jejichž směrové vektory jsou normálovými vektory zadaných rovin ρ a σ . Hledanou odchylku φ tak určíme právě pomocí $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ (Boček & Kočandrle, 2018, s. 134–135).



Obr. 1.4: Odchylka dvou rovin

2 Řešené metrické úlohy v krychli

Tato kapitola, která tvoří hlavní část práce, obsahuje sbírku řešených metrických úloh v prostoru, ve kterých budeme využívat postupy a definice představené v první kapitole.

Všechny úlohy jsou zadány v jednotkové krychli, která je určena vrcholy A, B, C, D, E, F, G a H . Předpokládáme, že máme zvolenou určitou jednotkovou délku, a pro zjednodušení budeme vyjadřovat veškeré vzdálenosti pouze čísly (bez jednotek). Každá vzdálenost a odchylka mezi geometrickými objekty je řešena jak syntetickým, tak analytickým přístupem, proto pro lepší orientaci v příkladech zavádím označení (S) pro syntetické řešení a (A) pro analytické řešení. Ke každému příkladu jsou vytvořeny dva obrázky v programu GeoGebra, v jednom je vždy zobrazena (v pravém nadhledu ve volném rovnoběžném promítání) krychle a v ní sestrojený řez, na druhém obrázku je znázorněn nezkreslený řez, ve kterém jsou vyznačené vzdálenosti a odchylky, které počítáme. Obrázky jsou důležitou součástí syntetických řešení, avšak budou užitečné i pro ta analytická.

Při řešení analytickou metodou krychli vždy umístíme do soustavy souřadnic takto: $A = [0,0,0], B = [1,0,0], C = [1,1,0], D = [0,1,0], E = [0,0,1], F = [1,0,1], G = [1,1,1], H = [0,1,1]$. Nebudu tak v jednotlivých příkladech souřadnice vrcholů znovu vypisovat.

První část (oddíl 2.1) této sbírky tvoří 14 příkladů, které se zaměřují na výpočet vzdáleností a odchylek v řezu krychle rovinou, která je zadána třemi různými body. Tyto body jsou buď vrcholy krychle nebo středy jejích hran. Body a přímky, mezi nimiž vzdálenosti a odchylky zkoumáme, leží právě v těchto zadaných rovinách. Podle těchto řezů byly příklady systematicky zpracovány a uspořádány. Vynechány byly ty řezy, které by byly shodné s již sestrojeným řezem, a řezy, které by byly přímo stěnou krychle. Jinak je podána kompletní sbírka takových řezů a v nich řešených metrických úloh.

V každé úloze je nejprve požadováno sestrojení řezu krychle zadanou rovinou, čtenáři je tím zároveň umožněno procvičení polohových vlastností. Práce neobsahuje teorii potřebnou pro konstrukci řezu tělesa rovinou, jelikož to není tématem této práce, a jak je uvedeno v úvodu, předpokládá se, že již čtenář tuto oblast ovládá. Postupy, které se využívají při konstrukci řezů, lze však nalézt například v Pomykalové (2018, s. 38–56). V knize jsou jednak uvedeny základní věty a jejich důsledky, které je možné při sestrojování použít, součástí je také

zavedení středové kolineace a osových afinit, jejichž využití může konstrukci řezů velmi usnadnit. Z on-line materiálů poskytuje v kapitole Stereometrie: Polohové vlastnosti podrobné vysvětlení Krynický (2010). Na webu Techambition (2021) je možné v 11 on-line lekcích projít interaktivní sestrojování řezů krychle rovinou.

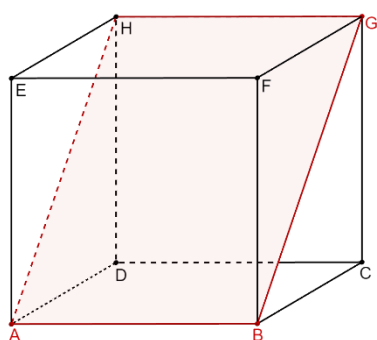
Řešení úloh je koncipováno tak, aby v případě, že se čtenář chce věnovat pouze metrickým vlastnostem, bylo možné sestrojování řezů přeskočit a zabývat se pouze výpočtem vzdáleností a odchylek. Konstrukce řezu je vždy v řešení popsána, v obrázku ale není kvůli přehlednosti vše podrobně znázorněno. Pokud má čtenář zájem, krokovanou konstrukci si může zobrazit v GeoGebra on-line knize, která je také součástí práce. U každého příkladu je také uveden obsah výsledného řezu.

Dále se v daném řezu zabýváme výpočtem vzdáleností a odchylek, typově se jedná o tyto úlohy: vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímek a odchylka dvou různoběžných přímek. Jak jsme si již ukázali v první kapitole, všechny metrické úlohy se v syntetické geometrii převádí právě do nějaké roviny, ve které se hledaná vzdálenost nebo odchylka poté vypočítá. Považuji tak tuto část za nejdůležitější, i proto bylo cílem vytvořit rozsáhlou sbírku řešených úloh k procvičení. V představených příkladech jsou vybrány některé vzdálenosti a odchylky bodů a přímek, které leží v sestrojeném řezu (za tyto body bereme opět vrcholy krychle a středy jejích hran, za přímky ty, které právě takovými body procházejí). U neřešených vzdáleností a odchylek je na konci úlohy uveden výsledek, mohou tak sloužit k dalšímu procvičení. V případě stejné vzdálenosti nebo odchylky mezi různými geometrickými objekty vždy uvádím pouze jeden takový případ. Také jsou vynechány výpočty vzdáleností a odchylek, které považuji za triviální (např. délka hrany krychle, délka úhlopříčky ve čtverci, odchylka kolmých přímek). V příkladech jsou postupně využívány různé způsoby řešení, aby si čtenář mohl dostatečně procvičit více metod, kterými lze úlohu řešit.

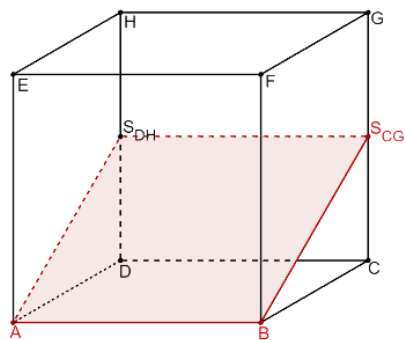
Druhá část (oddíl 2.2) této kapitoly obsahuje 14 příkladů zaměřených na ostatní metrické vlastnosti geometrických objektů v prostoru: vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost dvou mimoběžných přímek, vzdálenost přímky od roviny, vzdálenost dvou rovin, odchylka mimoběžných přímek, odchylka přímky od roviny a odchylka dvou rovin. Ke každému typu úlohy jsou vytvořeny dva vzorové příklady, které jsou opět řešeny různými postupy.

2.1 Sbírka řezů krychle a metrické úlohy pomocí nich řešené

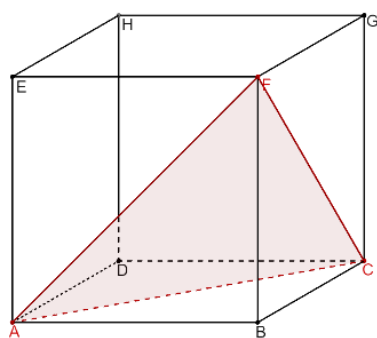
Než přejdeme na řešené úlohy v sestrojených řezech krychle zadanou rovinou, uvádím zde kompletní výčet takových řezů, kterým se budeme věnovat. Čtenář se tak může ve sbírce řešených úloh lépe orientovat.



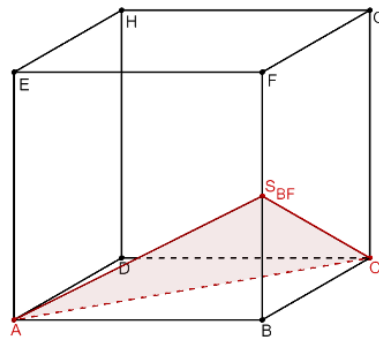
Obr. 2.1: Řez 1



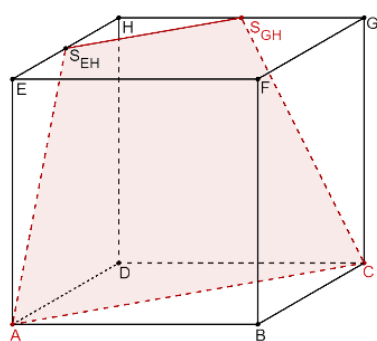
Obr. 2.2: Řez 2



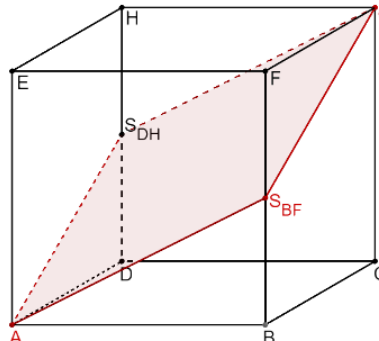
Obr. 2.3: Řez 3



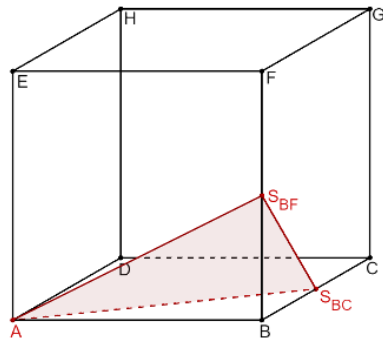
Obr. 2.4: Řez 4



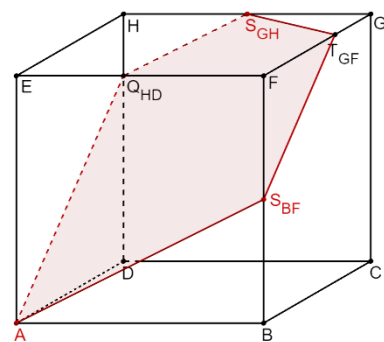
Obr. 2.5: Řez 5



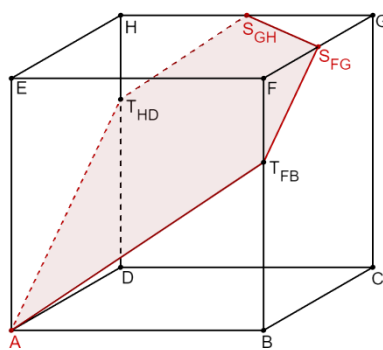
Obr. 2.6: Řez 6



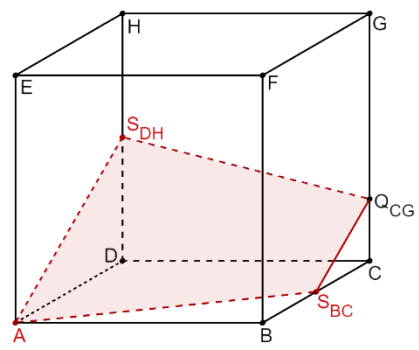
Obr. 2.7: Řez 7



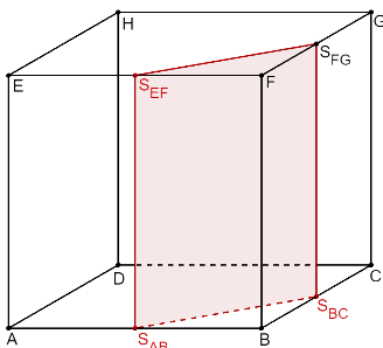
Obr. 2.8: Řez 8



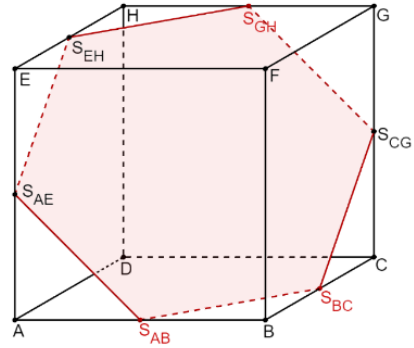
Obr. 2.9: Řez 9



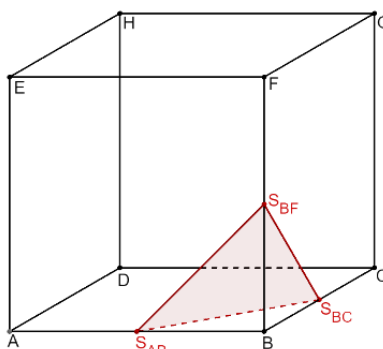
Obr. 2.10: Řez 10



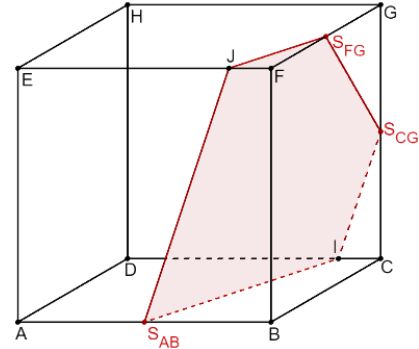
Obr. 2.11: Řez 11



Obr. 2.12: Řez 12



Obr. 2.13: Řez 13

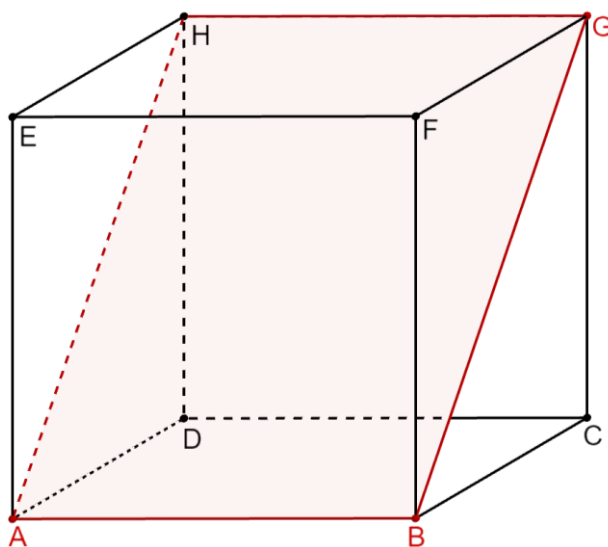


Obr. 2.14: Řez 14

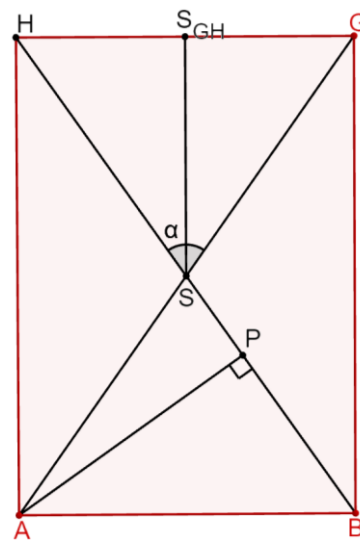
2.1.1 Řez 1: Obdélník I

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, B a G .

Bodem A vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou BG (viz obr. 2.15). V rovině řezu tak leží i bod H . Výsledným řezem je obdélník $ABGH$ (viz obr. 2.16) s délkami stran 1 a $\sqrt{2}$.



Obr. 2.15: Řez krychle rovinou ABG



Obr. 2.16: Obdélník I

b) Vypočítejte $|A, BH|$, tj. vzdálenost vrcholu od tělesové úhlopříčky jím neprocházející.

(S) Hledanou vzdálenost bodu od přímky převedeme na vzdálenost bodu A od paty P kolmice z bodu A na přímku BH . Jak je vidět na obr. 2.16, AP je výškou v pravoúhlém trojúhelníku ABH . V takovém případě lze vzdálenost vypočítat například pomocí obsahu trojúhelníku. Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABH platí:

$$S_{\Delta} = \frac{|AB| \cdot |AH|}{2} = \frac{|AP| \cdot |BH|}{2}.$$

Po dosazení získáme:

$$S_{\Delta} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{|AP| \cdot \sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = |AP| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pro hledanou vzdálenost A a BH tak platí:

$$|A, BH| = |AP| = \frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 0,82.$$

(A) Využijeme první ze zmíněných analytických postupů v pododdílu 1.2.2, který vychází ze dvou platných vztahů: $P \in BH$ a $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$. Do vztahů dosadíme $P = [p_1, p_2, p_3]$, $\overrightarrow{AP} = (p_1, p_2, p_3)$, $\overrightarrow{BH} = (-1, 1, 1)$ a parametrické vyjádření přímky BH :

$$X = [1, 0, 0] + t \cdot (-1, 1, 1); t \in \mathbb{R}.$$

Platí tak:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - t, p_2 = t, p_3 = t; t \in \mathbb{R}, \\ (p_1, p_2, p_3) \cdot (-1, 1, 1) &= 0 \Rightarrow -p_1 + p_2 + p_3 = 0. \end{aligned}$$

Dosazením vyjádřených p_1, p_2 a p_3 do rovnice $-p_1 + p_2 + p_3 = 0$ získáme:

$$-1 + t + t + t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Dosazením $t = \frac{1}{3}$ dostáváme $p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{3}$, proto $P = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Hledanou vzdálenost dopočteme podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|A, BH| = |AP| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 0,82.$$

c) Vypočítejte $|\angle AG, BH| = \alpha$, tj. odchylku tělesových úhlopříček.

(S) Hledáme odchylku tělesových úhlopříček krychle, kterou lze získat pomocí pravoúhlého trojúhelníku SGS_{GH} , kde S je střed úsečky AG (a také střed krychle) a S_{GH} je střed úsečky GH . Proto $|SG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $|GS_{GH}| = \frac{1}{2}$. Využijeme vhodnou goniometrickou funkci:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|GS_{GH}|}{|SG|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 70^\circ 32'.$$

(A) Dosadíme $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ a $\overrightarrow{BH} = (-1, 1, 1)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}|}{|\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{BH}|} = \frac{|-1 + 1 + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3} \doteq 70^\circ 32'.$$

d) *Obsah výsledného řezu ABGH.*

Pro obsah $S_{\square}$ obdélníku $ABGH$ platí:

$$S_{\square} = |AB| \cdot |AH| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \doteq 1,41.$$

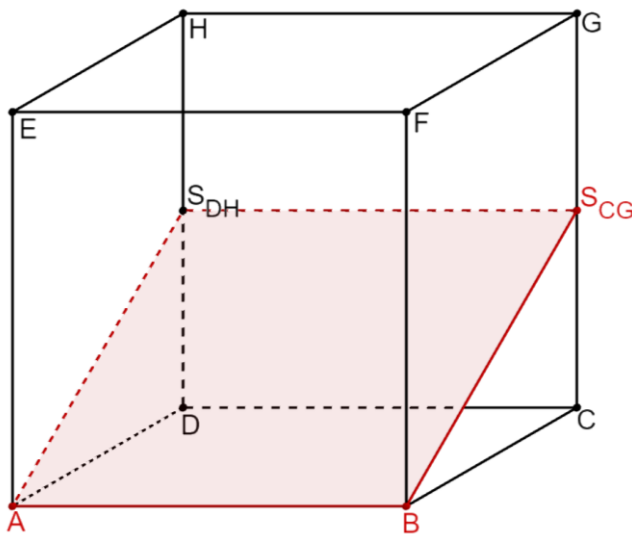
e) *Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.*

$$|\sphericalangle AB, BH| = \arctg \sqrt{2} \doteq 54^{\circ}44'.$$

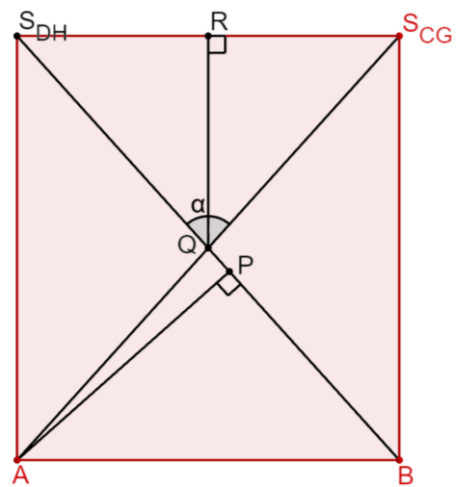
2.1.2 Řez 2: Obdélník II

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, B a S_{CG} .

Bodem A vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou BS_{CG} (viz obr. 2.17). V rovině řezu tak leží i bod S_{DH} . Výsledným řezem je obdélník $ABS_{CG}S_{DH}$ (viz obr. 2.18) s délkami stran 1 a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (lze ověřit Pythagorovou větou).



Obr. 2.17: Řez krychle rovinou ABS_{CG}



Obr. 2.18: Obdélník II

b₁) Vypočítejte $|BS_{DH}|$.

(S) Hledanou vzdálenost vypočteme pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník ABS_{DH} :

$$|BS_{DH}|^2 = |AB|^2 + |AS_{DH}|^2,$$

$$|BS_{DH}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2}.$$

(A) Vyjádříme si bod S_{DH} pomocí souřadnic: $S_{DH} = \left[0, 1, \frac{1}{2}\right]$ a dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|BS_{DH}| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

b₂) Vypočítejte $|A, BS_{DH}|$.

(S) Hledanou vzdálenost bodu od přímky převedeme na vzdálenost bodu A od paty P kolmice z bodu A na přímku BS_{DH} . AP je výškou v pravoúhlém trojúhelníku ABS_{DH} . Opět je možné vzdálenost vypočítat pomocí obsahu trojúhelníku (viz pododdíl 2.1.1), nyní si však ukážeme využití Euklidovy věty o odvěsně a o výšce. Platí:

$$|BS_{DH}| \cdot |BP| = |AB|^2.$$

Po dosazení získáme:

$$\frac{3}{2} \cdot |BP| = 1 \Rightarrow |BP| = \frac{2}{3}.$$

Platí, že $|BS_{DH}| = |BP| + |PS_{DH}|$. Do vztahu dosadíme již známé vzdálenosti a zjistíme, že $|PS_{DH}| = \frac{5}{6}$. Dále využijeme Euklidovu větu o výšce:

$$|AP|^2 = |PS_{DH}| \cdot |BP|,$$

$$|AP| = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Pro hledanou vzdálenost tak platí:

$$|A, BS_{DH}| = \frac{\sqrt{5}}{3} \doteq 0,75.$$

(A) Platí: $P \in BS_{DH}$ a $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BS_{DH}} = 0$. Do zmíněných vztahů dosadíme $S_{DH} = \left[0, 1, \frac{1}{2}\right]$,

$P = [p_1, p_2, p_3]$, $\overrightarrow{BS_{DH}} = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{AP} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$p_1 = 1 - t, p_2 = t, p_3 = \frac{1}{2}t; t \in \mathbb{R},$$

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -p_1 + p_2 + \frac{1}{2}p_3 = 0.$$

Dosadíme vyjádřené p_1, p_2 a p_3 do rovnice $-p_1 + p_2 + \frac{1}{2}p_3 = 0$:

$$-1 + t + t + \frac{1}{4}t = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{9}.$$

Dostáváme $p_1 = \frac{5}{9}, p_2 = \frac{4}{9}, p_3 = \frac{2}{9}$, a tak $P = \left[\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right]$. Zbývá vypočítat $|AP|$.

$$|A, BS_{DH}| = |AP| = \sqrt{\left(\frac{5}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{9} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{81}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \doteq 0,75.$$

c) Vypočítejte $|\sphericalangle AS_{CG}, BS_{DH}| = \alpha$.

(S) Můžeme využít vhodnou goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník $QS_{CG}R$, Q je střed úsečky AS_{CG} , R je střed úsečky $S_{CG}S_{DH}$. Platí:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|RS_{CG}|}{|QS_{CG}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3},$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{2}{3} \doteq 83^{\circ}37'.$$

(A) Dosadíme $\overrightarrow{AS_{CG}} = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{BS_{DH}} = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AS_{CG}} \cdot \overrightarrow{BS_{DH}}|}{|\overrightarrow{AS_{CG}}| \cdot |\overrightarrow{BS_{DH}}|} = \frac{\left|-1 + 1 + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9},$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{9} \doteq 83^{\circ}37'.$$

d) Obsah výsledného řezu $ABS_{CG}S_{DH}$.

Pro obsah $S_{\square}$ obdélníku $ABS_{CG}S_{DH}$ platí:

$$S_{\square} = |AB| \cdot |BS_{CG}| = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \doteq 1,12.$$

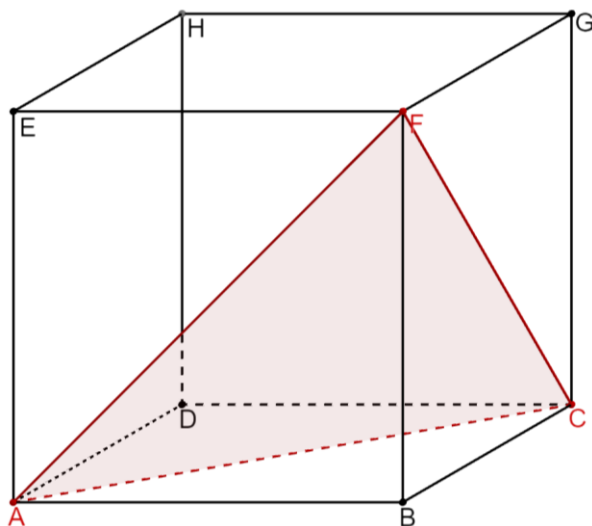
e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|\sphericalangle AB, BS_{DH}| = \arctg \frac{\sqrt{5}}{2} \doteq 48^{\circ}11'.$$

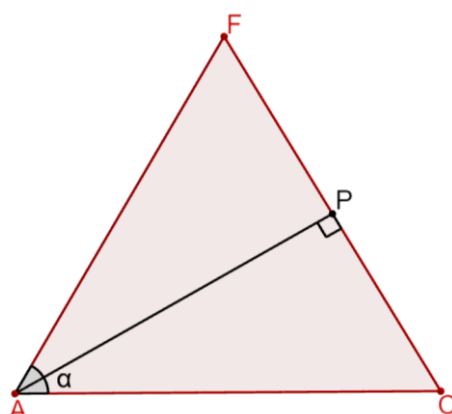
2.1.3 Řez 3: Rovnostranný trojúhelník I

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, C a F .

Při sestavení řezu nyní stačí pouze spojit zadané body A, C a F (viz obr. 2.19). Výsledným řezem je rovnostranný trojúhelník ACF (viz obr. 2.20) s délkou stran $\sqrt{2}$.



Obr. 2.19: Řez krychle rovinou ACF



Obr. 2.20: Rovnostranný trojúhelník I

b) Vypočítejte $|A, CF|$.

(S) Převádíme $|A, CF|$ na $|AP|$, kde P je pata kolmice z bodu A na přímkou CF . AP je výškou v rovnostranném trojúhelníku ACF , bod P tak leží ve středu strany CF , proto $|PF| = |PC| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nyní využijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník ACP :

$$|AP|^2 = |AC|^2 - |CP|^2,$$

$$|AP| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Pro hledanou vzdálenost tak platí:

$$|A, CF| = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

(A) Souřadnice bodu P lze vypočítat stejným postupem, který je použitý v předchozích příkladech, zde si však můžeme práci usnadnit, pokud si uvědomíme, že P je středem úsečky CF . Proto lze souřadnice určit rovnou: $P = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. A nyní už pouze dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|A, CF| = |AP| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

Pozn.: Zde se ukazuje propojení syntetického a analytického přístupu. Pokud bychom na vlastnosti rovnostranného trojúhelníku nebrali ohled, mohli bychom využít jedno z analytických řešení vzdálenosti bodu od přímky, řešení by ale bylo jistě složitější než v tomto případě.

c) Vypočítejte $|\sphericalangle AC, AF| = \alpha$.

(S) Úhel α , jehož velikost hledáme, je vnitřním úhlem rovnostranného trojúhelníku ACF , proto $\alpha = 60^\circ$.

(A) Dosadíme $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AF} = (1, 0, 1)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

d) Obsah výsledného řezu ACF .

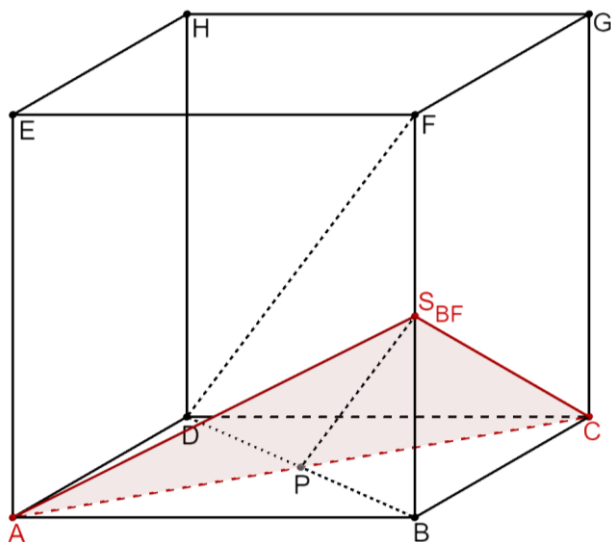
Pro obsah S_Δ rovnostranného trojúhelníku ACF platí:

$$S_\Delta = \frac{|CF| \cdot |A, CF|}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,87.$$

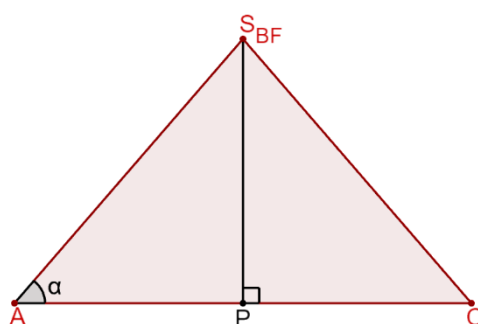
2.1.4 Řez 4: Rovnoramenný trojúhelník I

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, C a S_{BF} .

Řez získáme spojením zadaných bodů A, C a S_{BF} (viz obr. 2.21). Výsledným řezem je rovnoramenný trojúhelník ACS_{BF} (viz obr. 2.22).



Obr. 2.21: Řez krychle rovinou ACS_{BF}



Obr. 2.22: Rovnoramenný trojúhelník I

b) Vypočítejte $|S_{BF}, AC|$.

(S) Hledáme velikost výšky $S_{BF}P$ na základnu v rovnoramenném trojúhelníku ACS_{BF} . Je tak opět možné využít Pythagorovu větu. Můžeme se ale tentokrát zaměřit na vlastnost střední příčky v trojúhelníku. Pokud se podíváme mimo rovinu řezu na trojúhelník BDF (viz obr. 2.21), vidíme, že $S_{BF}P$ je jeho střední příčkou. Střední příčka $S_{BF}P$ má poloviční délku než strana FD (plyne z podobnosti trojúhelníků). Platí tak:

$$|S_{BF}, AC| = |S_{BF}P| = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,87.$$

(A) Výpočet si můžeme zjednodušit, pokud si uvědomíme, že bod P leží ve středu podstavy krychle, proto $P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]$, a $S_{BF} = \left[1, 0, \frac{1}{2}\right]$. Body dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|S_{BF}, AC| = |S_{BF}P| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,87.$$

c) Vypočítejte $|\sphericalangle AC, AS_{BF}| = \alpha$.

(S) Můžeme využít vhodnou goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník APS_{BF} :

$$\cos \alpha = \frac{|AP|}{|AS_{BF}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{5} \doteq 50^\circ 46'.$$

Pozn.: Pokud bychom chtěli vycházet přímo z trojúhelníku ACS_{BF} , mohli bychom využít kosinovou nebo sinovou větu.

(A) Dosazením $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AS_{BF}} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek platí:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS_{BF}}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AS_{BF}}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{5} \doteq 50^\circ 46'.$$

d) Obsah výsledného řezu ACS_{BF} .

Pro obsah S_Δ rovnoramenného trojúhelníku ACS_{BF} platí:

$$S_\Delta = \frac{|AC| \cdot |S_{BF, AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \doteq 0,61.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

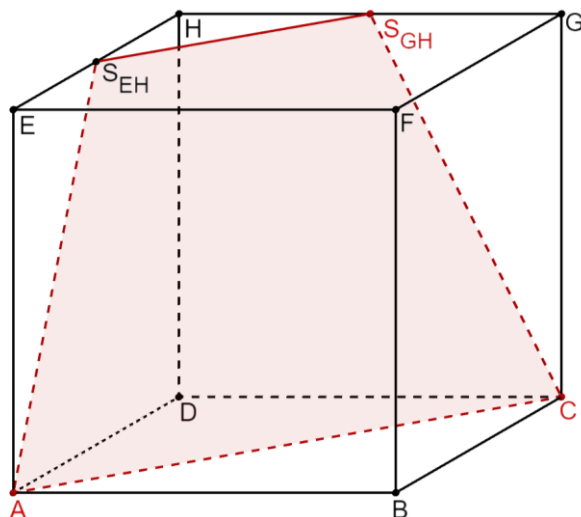
$$|A, CS_{BF}| = \frac{\sqrt{30}}{5} \doteq 1,10;$$

$$|\sphericalangle AS_{BF}, CS_{BF}| = \arccos \frac{1}{5} \doteq 78^\circ 28'.$$

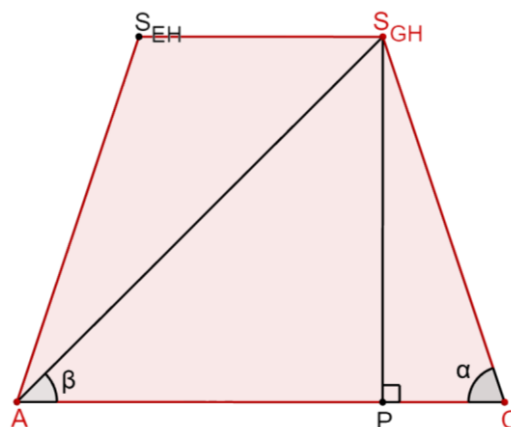
2.1.5 Řez 5: Rovnoramenný lichoběžník

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, C a S_{GH} .

Bodem S_{GH} vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou AC (viz obr. 2.23). V rovině řezu tak leží i bod S_{EH} . Výsledným řezem je rovnoramenný lichoběžník $ACS_{GH}S_{EH}$ (viz obr. 2.24).



Obr. 2.23: Řez krychle rovinou ACS_{GH}



Obr. 2.24: Rovnoramenný lichoběžník

b₁) Vypočítejte $|S_{GH, AC}|$.

(S) Hledanou vzdálenost převedeme na vzdálenost bodu S_{GH} od paty P kolmice z bodu S_{GH} na přímku AC . $S_{GH}P$ je výškou v rovnoramenném lichoběžníku $ACS_{GH}S_{EH}$. Víme, že $|AC| = \sqrt{2}$, $|S_{EH}S_{GH}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (polovina velikosti úhlopříčky stěny krychle, lze ověřit např. pomocí podobnosti trojúhelníků EGH a $S_{EH}S_{GH}H$) a $|CS_{GH}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Jelikož je lichoběžník rovnoramenný, platí:

$$|PC| = \frac{|AC| - |S_{EH}S_{GH}|}{2} = \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dále využijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník PCS_{GH} :

$$|S_{GH}P|^2 = |CS_{GH}|^2 - |PC|^2,$$

$$|S_{GH}P| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Platí: } |S_{GH}, AC| = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06.$$

(A) Ukážeme si další možný analytický postup, jímž je využití vzorce pro vzdálenost bodu od přímky (viz pododdíl 1.2.2):

$$|S_{GH}, AC| = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS_{GH}}|}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Dosazením $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AS_{GH}} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ do vzorce dostáváme:

$$|S_{GH}, AC| = \frac{|(1, 1, 0) \times \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)|}{|(1, 1, 0)|} = \frac{\left|\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06.$$

b₂) Vypočítejte $|AC, S_{EH}S_{GH}|$.

Vzdálenost rovnoběžných přímek převedeme na vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od přímky druhé. Na přímce $S_{EH}S_{GH}$ vhodně zvolíme bod S_{GH} , hledáme tak $|S_{GH}, AC|$, což je již vypočítáno (synteticky i analyticky) v části b₁), proto

$$|AC, S_{EH}S_{GH}| = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06.$$

c₁) Vypočítejte $|\sphericalangle AC, CS_{GH}| = \alpha$.

(S) Hledáme velikost vnitřního úhlu v lichoběžníku, opět je na výběr několik možností výpočtu. Využijeme vhodnou goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník PCS_{GH} :

$$\sin \alpha = \frac{|PS_{GH}|}{|CS_{GH}|} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

(A) Dosazením $\overrightarrow{CA} = (-1, -1, 0)$ a $\overrightarrow{CS_{GH}} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek platí:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CS_{GH}}|}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CS_{GH}}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

c₂) Vypočítejte $|\sphericalangle AC, AS_{GH}| = \beta$.

(S) Hledáme velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku ACS_{GH} . Víme, že $|AC| = \sqrt{2}$, $|CS_{GH}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $|\sphericalangle AC, CS_{GH}| = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}$. Pomocí Pythagorovy věty lze zjistit, že $|AS_{GH}| = \frac{3}{2}$ (výpočet je rozepsán v příkladu 2.1.8). Můžeme tak využít sinovou větu:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{|CS_{GH}|}{|AS_{GH}|},$$

$$\sin \beta = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ.$$

(A) Dosazením $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AS_{GH}} = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek platí:

$$\cos \beta = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS_{GH}}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AS_{GH}}|} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ.$$

d) Obsah výsledného řezu $ACS_{GH}S_{EH}$.

Pro obsah S_L rovnoramenného lichoběžníku $ACS_{GH}S_{EH}$ platí:

$$S_L = \frac{(|AC| + |S_{EH}S_{GH}|) \cdot |S_{GH}, AC|}{2} = \frac{(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{9}{8} \doteq 1,13.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|A, CS_{GH}| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \doteq 1,34;$$

$$|A, CS_{EH}| = 1 \text{ (délka hrany krychle);}$$

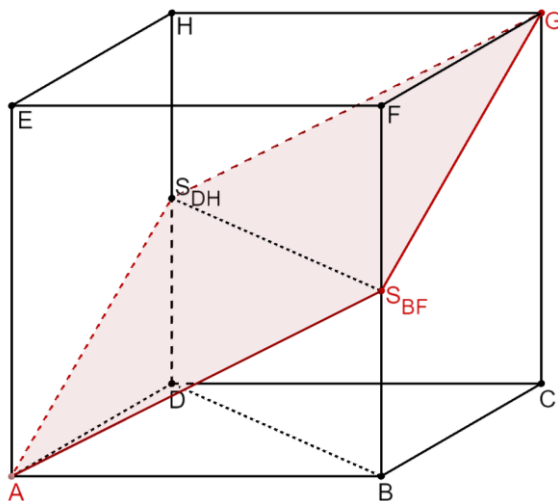
$$|\sphericalangle AS_{GH}, CS_{EH}| = 90^\circ \text{ (úhlopříčky v lichoběžníku jsou na sebe kolmé);}$$

$$|\sphericalangle AS_{GH}, CS_{GH}| = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} \doteq 63^\circ 26'.$$

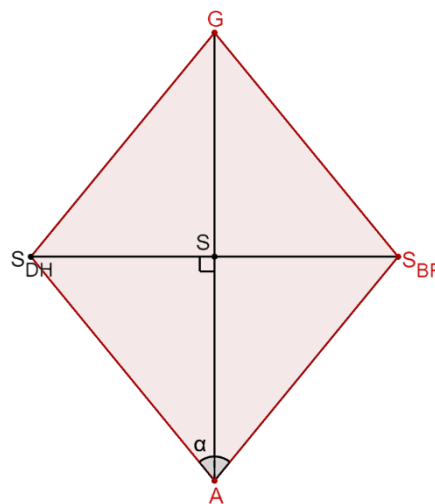
2.1.6 Řez 6: Kosočtverec

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A , G a S_{BF} .

Bodem G vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou AS_{BF} (viz obr. 2.25). V rovině řezu tak leží i bod S_{DH} . Výsledným řezem je kosočtverec $AS_{BF}GS_{DH}$ (viz obr. 2.26) s délkou stran $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Obr. 2.25: Řez krychle rovinou AGS_{BF}



Obr. 2.26: Kosočtverec

b₁) Vypočítejte $|S_{BF}S_{DH}|$.

(S) Pokud se podíváme na $|S_{BF}S_{DH}|$ na obr. 2.26, nemusí být na první pohled vzdálenost bodů patrná, pokud se však zaměříme na obr. 2.25, vidíme, že platí:

$$|S_{BF}S_{DH}| = |BD| = \sqrt{2} \doteq 1,41.$$

(A) Body $S_{BF} = \left[1, 0, \frac{1}{2}\right]$ a $S_{DH} = \left[0, 1, \frac{1}{2}\right]$ dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|S_{BF}S_{DH}| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \doteq 1,41.$$

b₂) Vypočítejte $|A, S_{BF}S_{DH}|$.

(S) Využijeme vlastnosti úhlopříček v kosočtverci, které jsou na sebe kolmé. Proto můžeme $|A, S_{BF}S_{DH}|$ převést na $|AS|$, kde S je průsečíkem úhlopříček v kosočtverci a také středem krychle. Pro úhlopříčky v kosočtverci také platí, že se navzájem půlí, proto:

$$|A, S_{BF}S_{DH}| = |AS| = \frac{1}{2} \cdot |AG| = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,87.$$

(A) Pokud do analytického řešení zahrneme výše zmíněné vlastnosti úhlopříček v kosočtverci, zjistíme, že $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Poté využijeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů:

$$|A, S_{BF}S_{DH}| = |AS| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,87.$$

Pozn.: Opět vidíme propojení syntetického a analytického přístupu. Pokud bychom na vlastnosti úhlopříček v kosočtverci nebrali ohled, mohli bychom využít jeden z obecných analytických postupů řešení vzdálenosti bodu od přímky, bylo by to ovšem jistě složitější než představené řešení.

c) Vypočítejte $|\angle AS_{BF}, AS_{DH}| = \alpha$.

(S) Hledáme velikost vnitřního úhlu v kosočtverci. Mohli bychom pracovat s některým z pravoúhlých trojúhelníků v kosočtverci, zjistit potřebné délky jeho stran a poté využít vhodnou goniometrickou funkci. Tentokrát si však ukážeme využití kosinové věty pro trojúhelník $AS_{BF}S_{DH}$, jelikož délky jeho stran již známe.

$$|S_{BF}S_{DH}|^2 = |AS_{BF}|^2 + |AS_{DH}|^2 - 2 \cdot |AS_{BF}| \cdot |AS_{DH}| \cdot \cos \alpha,$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{5} \doteq 78^\circ 28'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{AS_{BF}} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{AS_{DH}} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AS_{BF}} \cdot \overrightarrow{AS_{DH}}|}{|\overrightarrow{AS_{BF}}| \cdot |\overrightarrow{AS_{DH}}|} = \frac{\left|0 + 0 + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{5} \doteq 78^\circ 28'.$$

d) Obsah výsledného řezu $AS_{BF}GS_{DH}$.

K výpočtu obsahu S_K kosočtverce $AS_{BF}GS_{DH}$ využijeme délky jeho úhlopříček:

$$S_K = \frac{|AG| \cdot |S_{DH}S_{BF}|}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

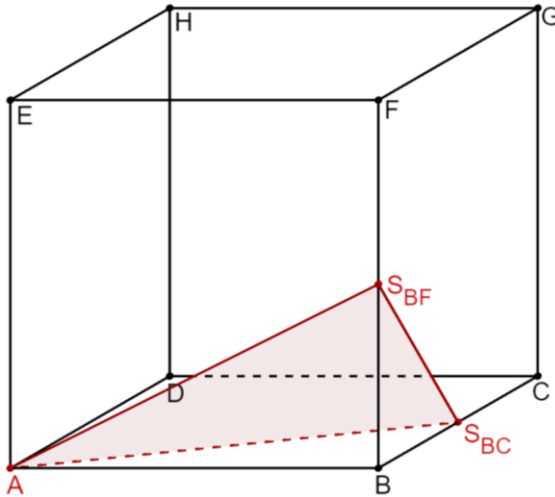
$$|A, S_{DH}G| = \frac{\sqrt{30}}{5} \doteq 1,10;$$

$$|\angle AS_{BF}, S_{BF}S_{DH}| = \arccos \frac{\sqrt{10}}{5} \doteq 50^\circ 46'.$$

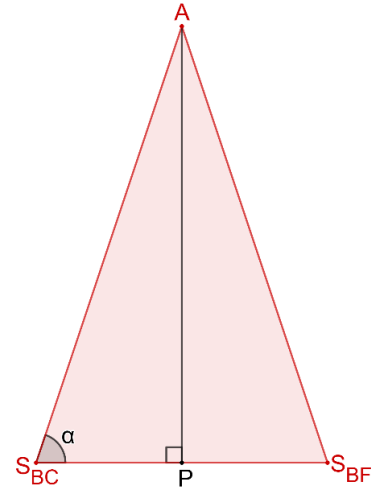
2.1.7 Řez 7: Rovnoramenný trojúhelník II

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, S_{BC} a S_{BF} .

Řez získáme spojením zadaných bodů A, S_{BC} a S_{BF} . (viz obr. 2.27). Výsledným řezem je rovnoramenný trojúhelník $AS_{BC}S_{BF}$ (viz obr. 2.28) s délkami stran $\frac{\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (obě vzdálenosti jsou již zmíněny v předchozích příkladech).



Obr. 2.27: Řez krychle rovinou $AS_{BC}S_{BF}$



Obr. 2.28: Rovnoramenný trojúhelník II

b) Vypočítejte $|A, S_{BC}S_{BF}|$.

(S) Hledanou vzdálenost opět převedeme na vzdálenost dvou bodů A a P , kde P je kolmý průmět bodu A na přímku $S_{BC}S_{BF}$. Jelikož je trojúhelník $AS_{BC}S_{BF}$ rovnoramenný (se základnou $S_{BC}S_{BF}$), P je středem strany $S_{BC}S_{BF}$. Platí tak: $|S_{BC}P| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Použijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník $AS_{BC}P$:

$$|AP|^2 = |AS_{BC}|^2 - |PS_{BC}|^2,$$

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Proto $|A, S_{BC}S_{BF}| = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06$.

(A) Pokud využijeme toho, že P je středem strany $S_{BF}S_{BC}$, potom $P = \left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

$$|A, S_{BF}S_{BC}| = |AP| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{4}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06.$$

c) Vypočítejte $|\sphericalangle AS_{BC}, S_{BC}S_{BF}| = \alpha$.

(S) Využijeme vhodnou goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník $AS_{BC}P$:

$$\cos \alpha = \frac{|S_{BC}P|}{|AS_{BC}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{AS_{BC}} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\overrightarrow{S_{BF}S_{BC}} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AS_{BC}} \cdot \overrightarrow{S_{BF}S_{BC}}|}{|\overrightarrow{AS_{BC}}| \cdot |\overrightarrow{S_{BF}S_{BC}}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

d) Obsah výsledného řezu $AS_{BC}S_{BF}$.

Pro obsah S_{Δ} rovnoramenného trojúhelníku $AS_{BC}S_{BF}$ platí:

$$S_{\Delta} = \frac{|S_{BC}S_{BF}| \cdot |A, S_{BC}S_{BF}|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{3}{8} \doteq 0,38.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|S_{BF}, AS_{BC}| = \frac{3\sqrt{5}}{10} \doteq 0,67;$$

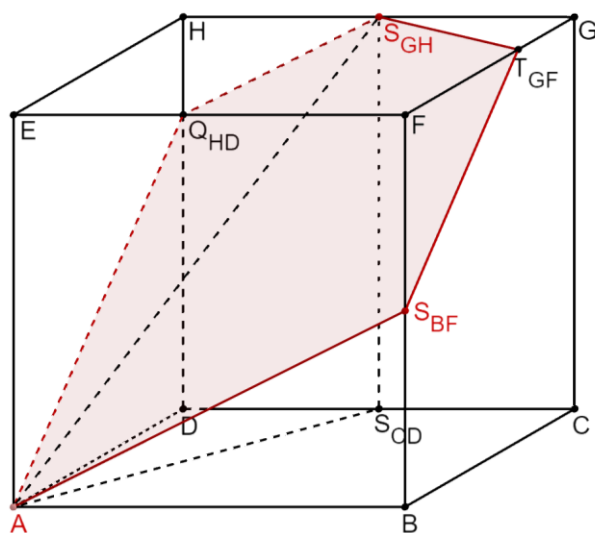
$$|\sphericalangle AS_{BF}, AS_{BC}| = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} \doteq 36^\circ 52'.$$

2.1.8 Řez 8: Pětúhelník I

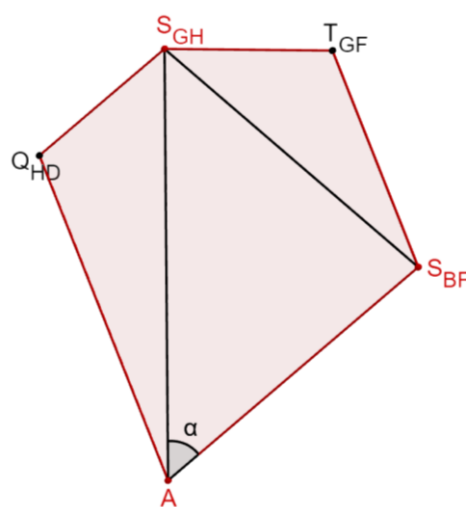
a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, S_{BF} a S_{GH} .

Bodem S_{GH} vedeme rovnoběžku s přímkou AS_{BF} (viz obr. 2.29). Průsečík rovnoběžky s hranou DH krychle nazveme Q_{HD} . Dále vedeme bodem S_{BF} rovnoběžku s přímkou AQ_{HD} , průsečík této rovnoběžky s hranou FG nazveme T_{GF} . Výsledným řezem je pětúhelník $AS_{BF}T_{GF}S_{GH}Q_{HD}$ (viz obr. 2.30).

Pozn.: Pro bod Q_{HD} platí: $|DQ_{HD}| = 3 \cdot |Q_{HD}H|$ a pro bod T_{GF} platí: $|FT_{GF}| = 2 \cdot |T_{GF}G|$ (lze ověřit pomocí podobnosti trojúhelníků).



Obr. 2.29: Řez krychle rovinou $AS_{BF}S_{GH}$



Obr. 2.30: Pětúhelník I

b) Vypočítejte $|AS_{GH}|$.

(S) Přímou v pětúhelníku je obtížné vzdálenost vypočítat, když se však podíváme na obr. 2.29, lze pro výpočet vzdálenosti využít například Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku $AS_{CD}S_{GH}$:

$$|AS_{GH}|^2 = |AS_{CD}|^2 + |S_{CD}S_{GH}|^2,$$

$$|AS_{GH}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \frac{3}{2}.$$

(A) Platí:

$$|AS_{GH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

c) Vypočítejte $|\angle AS_{BF}, AS_{GH}| = \alpha$.

(S) Využíváme obecný trojúhelník $AS_{BF}S_{GH}$, jelikož známe $|AS_{GH}| = \frac{3}{2}$, $|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $|S_{BF}S_{GH}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (lze ověřit Pythagorovou větou pro pravoúhlý trojúhelník $S_{BF}FS_{GH}$).

Použijeme kosinovou větu:

$$|S_{BF}S_{GH}|^2 = |AS_{BF}|^2 + |AS_{GH}|^2 - 2 \cdot |AS_{BF}| \cdot |AS_{GH}| \cdot \cos \alpha,$$

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{15} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4\sqrt{5}}{15} \doteq 53^\circ 24'.$$

(A) Dosadíme $\overrightarrow{AS_{BF}} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{AS_{GH}} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AS_{BF}} \cdot \overrightarrow{AS_{GH}}|}{|\overrightarrow{AS_{BF}}| \cdot |\overrightarrow{AS_{GH}}|} = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{4\sqrt{5}}{15},$$

$$\alpha = \arccos \frac{4\sqrt{5}}{15} \doteq 53^\circ 24'.$$

d) Obsah výsledného řezu $AS_{BF}T_{GF}S_{GH}Q_{HD}$.

Výpočet obsahu S_P pětiúhelníku $AS_{BF}T_{GF}S_{GH}Q_{HD}$ je náročnější než v předchozích příkladech. Lze například pětiúhelník doplnit (prodloužením stran $S_{BF}T_{GF}$ a $Q_{HD}S_{GH}$) na kosodélník a obsah S_P tak získat rozdílem obsahu kosodélníku a přidaného trojúhelníku (jímž se pětiúhelník doplnil na kosodélník). K výpočtům těchto obsahů potřebujeme zjistit některé další délky úseček, které však lze získat pomocí Pythagorovy věty. Jelikož jsou výpočty poměrně dlouhé, uvádím pouze mezivýsledky a výsledný hledaný obsah.

Pro obsah S_K kosodélníku platí:

$$S_K = |AS_{BF}| \cdot |S_{GH}, AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{145}}{10} = \frac{\sqrt{29}}{4}.$$

Pro výpočet obsahu S_Δ trojúhelníku je možné využít například Heronův vzorec,

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{29}}{48}.$$

Pro hledaný obsah S_P tak platí:

$$S_P = S_K - S_{\Delta} = \frac{\sqrt{29}}{4} - \frac{\sqrt{29}}{48} = \frac{11\sqrt{29}}{48} \doteq 1,23.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|A, S_{BF}S_{GH}| = \frac{\sqrt{174}}{12} \doteq 1,10;$$

$$|S_{BF}, AS_{GH}| = \frac{\sqrt{29}}{6} \doteq 0,90;$$

$$|S_{GH}, AS_{BF}| = \frac{\sqrt{145}}{10} \doteq 1,20;$$

$$|\sphericalangle AS_{BF}, S_{BF}S_{GH}| = \arccos \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 79^{\circ}29';$$

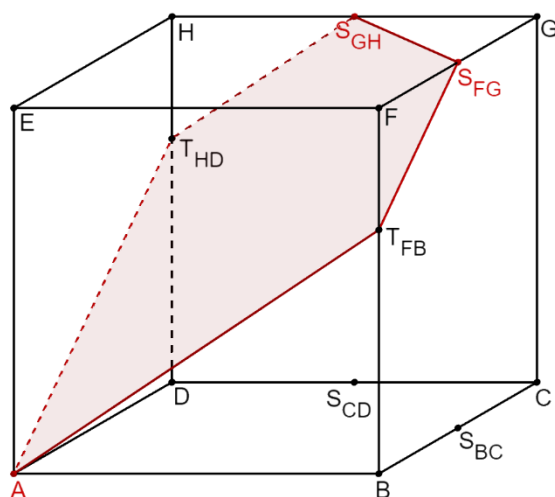
$$|\sphericalangle AS_{GH}, S_{BF}S_{GH}| = \arccos \frac{5\sqrt{6}}{18} \doteq 47^{\circ}7'.$$

2.1.9 Řez 9: Pětiúhelník II

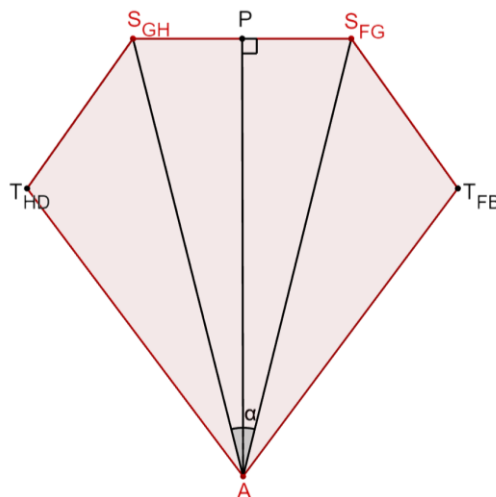
a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, S_{FG} a S_{GH} .

Při sestřování řezu se tentokrát dostáváme mimo krychli (podrobná konstrukce je k nalezení v GeoGebra knize, která je součástí této práce). Bodem A vedeme rovnoběžku s přímkou $S_{FG}S_{GH}$. Průsečík této rovnoběžky s přímkou BC označíme X , průsečík přímky $S_{FG}X$ s hranou BF je bod T_{FB} (viz obr. 2.31). Bodem A vedeme rovnoběžku s přímkou $T_{FB}S_{FG}$, v rovině řezu tak leží i bod T_{HD} , který je průsečíkem této rovnoběžky s hranou DH . Výsledným řezem je pětiúhelník $AT_{FB}S_{FG}S_{GH}T_{HD}$ (viz obr. 2.32), který je osově souměrný podle osy strany $S_{GH}S_{FG}$ (a má dvě dvojice rovnoběžných stran).

Pozn.: Pro bod T_{FB} platí: $|BT_{FB}| = 2 \cdot |T_{FB}F|$ a pro bod T_{HD} platí: $|DT_{HD}| = 2 \cdot |T_{HD}H|$.



Obr. 2.31: Řez krychle rovinou $AS_{FG}S_{GH}$



Obr. 2.32: Pětiúhelník II

b1) Vypočítejte $|AS_{FG}|$.

(S) Pokud se podíváme na obr. 2.31, zjistíme, že $|AS_{FG}| = |AS_{GH}|$ (lze ověřit ze shodnosti trojúhelníků $AS_{BC}S_{FG}$ a $AS_{CD}S_{GH}$). $|AS_{GH}|$ máme již vypočítanou v příkladu 2.1.8, platí tak:

$$|AS_{FG}| = |AS_{GH}| = \frac{3}{2}.$$

(A) Souřadnice bodů A, S_{FG} dosadíme do vzorce:

$$|AS_{FG}| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{3}{2}.$$

b₂) Vypočítejte $|A, S_{FG}S_{GH}|$.

(S) Převedeme $|A, S_{FG}S_{GH}|$ na $|AP|$, kde P je kolmý průmět A na přímku $S_{FG}S_{GH}$. Jelikož $|AS_{GH}| = |AS_{FG}|$, trojúhelník $AS_{FG}S_{GH}$ je rovnoramenný, proto je P středem základny $S_{FG}S_{GH}$. Dosazením do Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník $AS_{FG}P$ platí:

$$|AP|^2 = |AS_{FG}|^2 - |PS_{FG}|^2,$$

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

Proto $|A, S_{FG}S_{GH}| = \frac{\sqrt{34}}{4} \doteq 1,46$.

(A) Pokud do analytického řešení zahrneme to, že je P středem strany $S_{FG}S_{GH}$, potom $P = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1\right]$. Dosazením do vzorce dostáváme:

$$|A, S_{FG}S_{GH}| = |AP| = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{34}{16}} = \frac{\sqrt{34}}{4} \doteq 1,46.$$

c) Vypočítejte $|\angle AS_{GH}, AS_{FG}| = \alpha$.

(S) Využijeme goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník $AS_{FG}P$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|PS_{FG}|}{|AS_{FG}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{6} \doteq 27^\circ 16'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{AS_{FG}} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ a $\overrightarrow{AS_{GH}} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9},$$

$$\alpha = \arccos \frac{8}{9} \doteq 27^\circ 16'.$$

d) *Obsah výsledného řezu $AT_{FB}S_{FG}S_{GH}T_{HD}$.*

Obsah S_P lze počítat obdobným způsobem jako v příkladu 2.1.8. Doplněním pětiúhelníku (prodloužením stran $T_{HD}S_{GH}$ a $T_{FB}S_{FG}$) vznikne kosočtverec ($|AT_{HD}| = 2 \cdot |T_{FB}S_{FG}|$), pro hledaný obsah S_P tak opět využijeme obsah S_K kosočtverce a obsah S_Δ vzniklého trojúhelníku. Pro zmíněné obsahy platí:

$$S_K = \frac{\sqrt{17}}{3}, S_\Delta = \frac{\sqrt{17}}{24},$$

$$S_P = S_K - S_\Delta = \frac{\sqrt{17}}{3} - \frac{\sqrt{17}}{24} = \frac{7\sqrt{17}}{24} \doteq 1,20.$$

e) *Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.*

$$|S_{FG}, AS_{GH}| = \frac{\sqrt{17}}{6} \doteq 0,69;$$

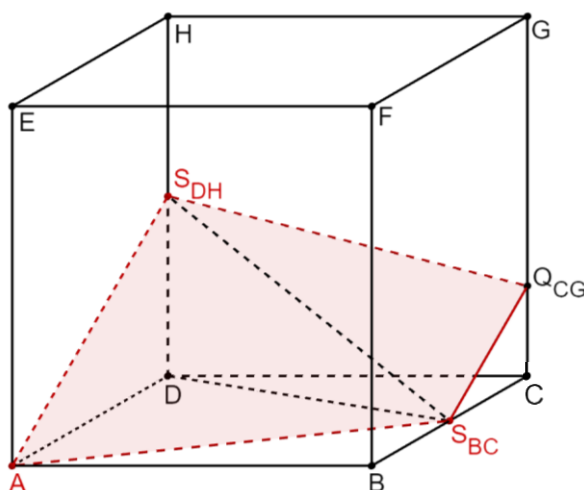
$$|\sphericalangle AS_{FG}, S_{GH}S_{FG}| = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6} \doteq 76^\circ 22'.$$

2.1.10 Řez 10: Obecný lichoběžník

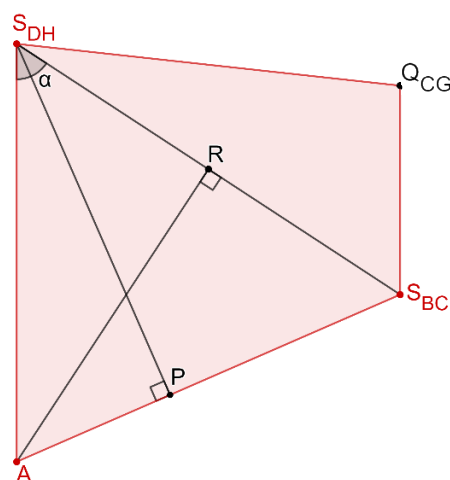
a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body A, S_{BC} a S_{DH} .

Bodem S_{BC} vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou AS_{DH} (viz obr. 2.33). Průsečík této rovnoběžky s hranou CG krychle nazveme Q_{CG} . Výsledným řezem je obecný lichoběžník $AS_{BC}Q_{CG}S_{DH}$ (viz obr. 2.34).

Pozn.: Pro bod Q_{CG} platí: $|GQ_{CG}| = 3 \cdot |Q_{CG}C|$.



Obr. 2.33: Řez krychle rovinou $AS_{BC}S_{DH}$



Obr. 2.34: Obecný lichoběžník

b₁) Vypočítejte $|S_{BC}S_{DH}|$.

(S) V rovině řezu se nám vzdálenost bude určovat obtížně, proto využijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku $S_{BC}DS_{DH}$:

$$|S_{BC}S_{DH}|^2 = |S_{DH}D|^2 + |S_{BC}D|^2,$$

$$|S_{BC}S_{DH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

(A) Dosazením do vzorce dostáváme:

$$|S_{BC}S_{DH}| = \sqrt{(0-1)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

b₂) Vypočítejte $|S_{DH}, AS_{BC}|$.

(S) Převedeme $|S_{DH}, AS_{BC}|$ na $|S_{DH}P|$, kde P je kolmý průmět S_{DH} na přímku AS_{BC} .

Hledanou vzdálenost zjistíme pomocí vzorce pro obsah S_{Δ} trojúhelníku $AS_{BC}S_{DH}$:

$$S_{\Delta} = \frac{|AR| \cdot |S_{BC}S_{DH}|}{2} = \frac{|AS_{BC}| \cdot |S_{DH}P|}{2},$$

kde R je pata kolmice z bodu A na přímku $S_{BC}S_{DH}$.

Jelikož je trojúhelník $AS_{BC}S_{DH}$ rovnoramenný se základnou $S_{BC}S_{DH}$, $|AR|$ lze zjistit pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník $AS_{BC}R$:

$$|AR|^2 = |AS_{BC}|^2 - |S_{BC}R|^2,$$

$$|AR| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce pro obsah S_{Δ} :

$$S_{\Delta} = \frac{|AR| \cdot |S_{BC}S_{DH}|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{8},$$

zároveň platí:

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{21}}{8} = \frac{|AS_{BC}| \cdot |S_{DH}P|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot |S_{DH}P|}{2}.$$

Proto $|S_{DH}, AS_{BC}| = |S_{DH}P| = \frac{\sqrt{105}}{10} \doteq 1,02$.

(A) Využíváme vztahů: $P \in AS_{BC}$ a $\overrightarrow{AS_{BC}} \cdot \overrightarrow{S_{DH}P} = 0$. Do vztahů dosadíme

$P = [p_1, p_2, p_3]$, $\overrightarrow{AS_{BC}} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{S_{DH}P} = \left(p_1, p_2 - 1, p_3 - \frac{1}{2}\right)$:

$$p_1 = t, p_2 = \frac{1}{2}t, p_3 = 0; t \in \mathbb{R},$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \left(p_1, p_2 - 1, p_3 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Dosazením vyjádřených p_1, p_2 a p_3 do $p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2} = 0$ získáme rovnici:

$$t + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}.$$

Dosazením $t = \frac{2}{5}$ dostáváme $p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{1}{5}, p_3 = 0$, proto $P = \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right]$. Hledanou vzdálenost dopočteme podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|S_{DH}P| = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{10},$$

a tak $|S_{DH}, AS_{BC}| = \frac{\sqrt{105}}{10} \doteq 1,02$.

c) Vypočítejte odchylku $|\angle AS_{DH}, S_{BC}S_{DH}| = \alpha$.

(S) Využijeme goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník ARS_{DH} :

$$\sin \alpha = \frac{|AR|}{|AS_{DH}|} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{70}}{10},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{70}}{10} \doteq 56^\circ 47'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{AS_{DH}} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{S_{BC}S_{DH}} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{6}{4}}} = \frac{\sqrt{30}}{10},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{30}}{10} \doteq 56^\circ 47'.$$

d) Obsah výsledného řezu $AS_{BC}Q_{CG}S_{DH}$.

Pro obsah S_L lichoběžníku $AS_{BC}Q_{CG}S_{DH}$ platí:

$$S_L = \frac{(|AS_{DH}| + |S_{BC}Q_{CG}|) \cdot |S_{BC}, AS_{DH}|}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{105}}{10}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{16} \doteq 0,86.$$

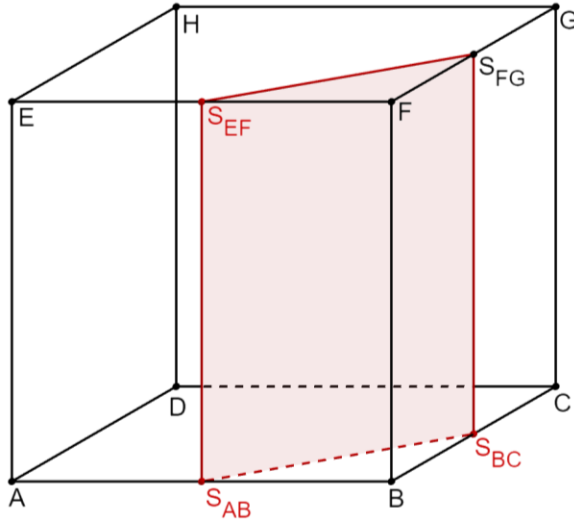
e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|\angle AS_{DH}, AS_{BC}| = \arccos \frac{2}{5} \doteq 66^\circ 25'.$$

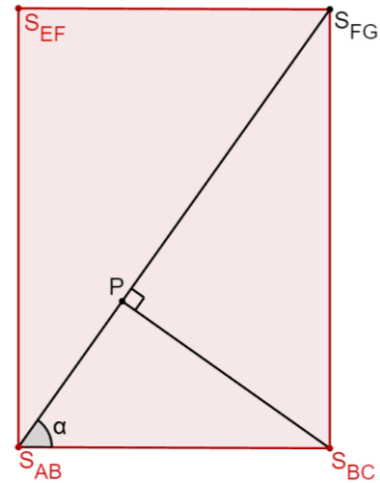
2.1.11 Řez 11: Obdélník III

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body S_{AB} , S_{BC} a S_{EF} .

Bodem S_{EF} vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou $S_{AB}S_{BC}$ (viz obr. 2.35). V rovině řezu tak leží i bod S_{FG} . Výsledným řezem je obdélník $S_{AB}S_{BC}S_{FG}S_{EF}$ (viz obr. 2.36) s délkami stran $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 1.



Obr. 2.35: Řez krychle rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{EF}$



Obr. 2.36: Obdélník III

b) Vypočítejte $|S_{BC}, S_{AB}S_{FG}|$.

(S) Převeďme $|S_{BC}, S_{AB}S_{FG}|$ na $|S_{BC}P|$, P je kolmý průmět S_{BC} na $S_{AB}S_{FG}$. Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$ platí:

$$S_{\Delta} = \frac{|S_{AB}S_{BC}| \cdot |S_{BC}S_{FG}|}{2} = \frac{|S_{AB}S_{FG}| \cdot |S_{BC}P|}{2}.$$

Po dosazení $|S_{AB}S_{BC}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|S_{BC}S_{FG}| = 1$ a $|S_{AB}S_{FG}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (již vypočítáno, viz 2.1.10):

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot |S_{BC}P|}{2}.$$

Platí tak, že

$$|S_{BC}, S_{AB}S_{FG}| = |S_{BC}P| = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58.$$

(A) Využijeme další ze zmíněných analytických postupů v pododdílu 1.2.2. Cílem je nalézt rovnici roviny ρ , která bude kolmá na přímkou $S_{AB}S_{FG}$ a bude procházet bodem S_{BC} .

Průsečíkem této roviny s přímkou $S_{AB}S_{FG}$ je bod P , který je kolmým průmětem bodu S_{BC} na přímkou $S_{AB}S_{FG}$. Jelikož $\overrightarrow{S_{AB}S_{FG}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \vec{n}_\rho$, platí:

$$\rho: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z + d = 0,$$

a protože $S_{BC} \in \rho$, dosazením souřadnic bodu S_{BC} do rovnice roviny ρ zjistíme, že $d = -\frac{3}{4}$. Rovinu ρ tak lze vyjádřit obecnou rovnicí:

$$\rho: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 4z - 3 = 0.$$

Přímka $S_{AB}S_{FG}$ má parametrické vyjádření:

$$X = \left[\frac{1}{2}, 0, 0\right] + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \cdot t; t \in \mathbb{R}.$$

Nyní vypočítáme průsečík ρ a $S_{AB}S_{FG}$:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}t\right) + 4 \cdot (t) - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right].$$

A dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodů S_{BC} a P :

$$|S_{BC}, S_{AB}S_{FG}| = |S_{BC}P| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58.$$

c) Vypočítejte $|\angle S_{AB}S_{BC}, S_{AB}S_{FG}| = \alpha$.

(S) Využijeme goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|S_{BC}S_{FG}|}{|S_{AB}S_{BC}|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2} \doteq 54^\circ 44'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{S_{AB}S_{BC}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\overrightarrow{S_{AB}S_{FG}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 54^\circ 44'.$$

d) Obsah výsledného řezu $S_{AB}S_{BC}S_{FG}S_{EF}$.

Pro obsah $S_{\square}$ obdélníku $S_{AB}S_{BC}S_{FG}S_{EF}$ platí:

$$S_{\square} = |S_{AB}S_{BC}| \cdot |S_{BC}S_{FG}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,71.$$

e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

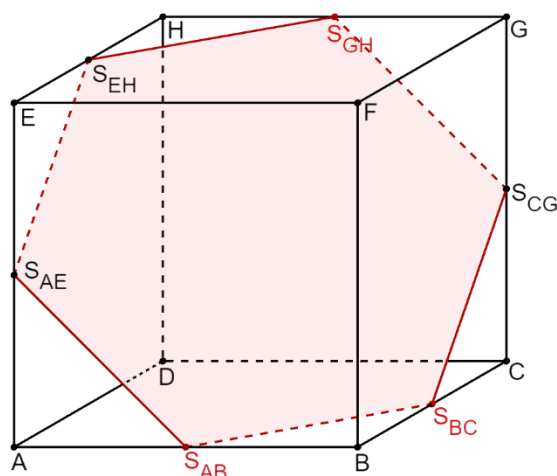
$$|\sphericalangle S_{AB}S_{FG}, S_{BC}S_{EF}| = \arccos \frac{1}{3} \doteq 70^{\circ}32';$$

$$|\sphericalangle S_{AB}S_{FG}, S_{BC}S_{FG}| = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 35^{\circ}16'.$$

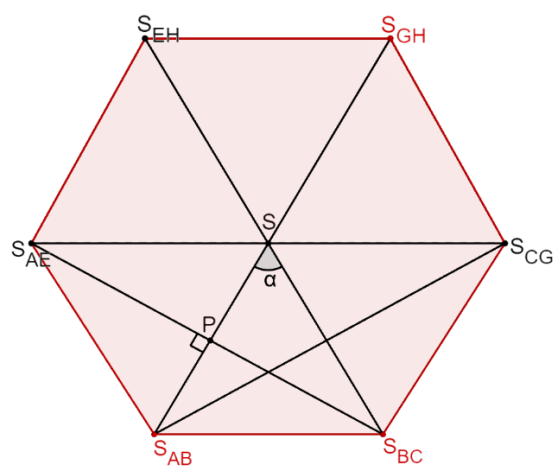
2.1.12 Řez 12: Pravidelný šestiúhelník

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body S_{AB}, S_{BC} a S_{GH} .

Bodem S_{GH} vedeme rovnoběžku s přímkou $S_{AB}S_{BC}$ (viz obr. 2.37). V rovině řezu tak leží i bod S_{EH} . Průsečík přímky $S_{EH}S_{GH}$ a přímky FG označíme X , průsečíkem $S_{BC}X$ s hranou CG je bod S_{CG} , který také leží v hledaném řezu. Bodem S_{EH} vedeme rovnoběžku s přímkou $S_{BC}S_{CG}$, v rovině řezu tak leží i bod S_{AE} . Výsledným řezem je pravidelný šestiúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{CG}S_{GH}S_{EH}S_{AE}$ (viz obr. 2.38) se stranami délky $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Obr. 2.37: Řez krychle rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{GH}$



Obr. 2.38: Pravidelný šestiúhelník

b1) Vypočítejte $|S_{AB}S_{CG}|$.

(S) Hledanou vzdálenost lze snadno vypočítat například mimo rovinu řezu z pravoúhlého trojúhelníku $S_{AB}CS_{CG}$ pomocí Pythagorovy věty:

$$|S_{AB}S_{CG}|^2 = |S_{AB}C|^2 + |CS_{CG}|^2,$$

$$|S_{AB}S_{CG}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

(A) Body $S_{AB} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0\right]$ a $S_{CG} = \left[1, 1, \frac{1}{2}\right]$ dosadíme do vzorce:

$$|S_{AB}S_{CG}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \doteq 1,22.$$

b₂) Vypočítejte $|S_{AB}, S_{BC}S_{AE}|$.

(S) Převedeme $|S_{AB}, S_{BC}S_{AE}|$ na $|S_{AB}P|$, P je kolmý průmět S_{AB} na $S_{BC}S_{AE}$. $S_{AB}P$ je výškou v rovnoramenném trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{AE}$ se základnou $S_{BC}S_{AE}$ (viz obr. 2.38). Velikost výšky by tak šla opět určit pomocí Pythagorovy věty, avšak si můžeme všimnout, že $S_{AB}P$ je zároveň polovinou strany rovnostranného trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S$, kde S je středem pětiúhelníku a zároveň i středem krychle. A jelikož délku strany tohoto rovnostranného trojúhelníku známe, platí:

$$|S_{AB}, S_{BC}S_{AE}| = |S_{AB}P| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq 0,35.$$

(A) Pokud do analytického řešení zahrneme výše zmíněné vlastnosti bodu P , které vychází z obr. 2.38, víme, že $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a $S_{AB} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0\right]$, proto $P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodů S_{AB} a P :

$$|S_{AB}, S_{BC}S_{AE}| = |S_{AB}P| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq 0,35.$$

Pozn.: Pokud bychom souřadnice bodu P neurčili využitím vlastností patrných z obr. 2.38, museli bychom použít jedno z již zmíněných obecných analytických řešení.

c) Vypočítejte $|\angle S_{AB}S_{GH}, S_{BC}S_{EH}| = \alpha$.

(S) Na obr. 2.38 vidíme, že je šestiúhelník složen z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, vnitřní úhly v trojúhelníku se tak rovnají 60° , což je zároveň naše hledaná odchylka přímk $S_{AB}S_{GH}$ a $S_{BC}S_{EH}$. Tedy $\alpha = 60^\circ$.

(A) Vektory $\overrightarrow{S_{AB}S_{GH}} = (0, 1, 1)$ a $\overrightarrow{S_{BC}S_{EH}} = (-1, 0, 1)$ dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

d) Obsah výsledného řezu $S_{AB}S_{BC}S_{CG}S_{GH}S_{EH}S_{AE}$.

Pro výpočet obsahu S_p pravidelného šestiúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{CG}S_{GH}S_{EH}S_{AE}$ využijeme toho, že je složen z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků s délkou stran $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro obsah S_Δ těchto trojúhelníků platí:

$$S_{\Delta} = \frac{|S_{AB}S_{BC}| \cdot \frac{|S_{AB}S_{CG}|}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Z toho pro obsah S_P plyne:

$$S_P = 6 \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \doteq 1,30.$$

e) *Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.*

$$|S_{AB}S_{GH}| = \sqrt{2} \doteq 1,41;$$

$$|S_{AB}, S_{BC}S_{CG}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \doteq 0,61;$$

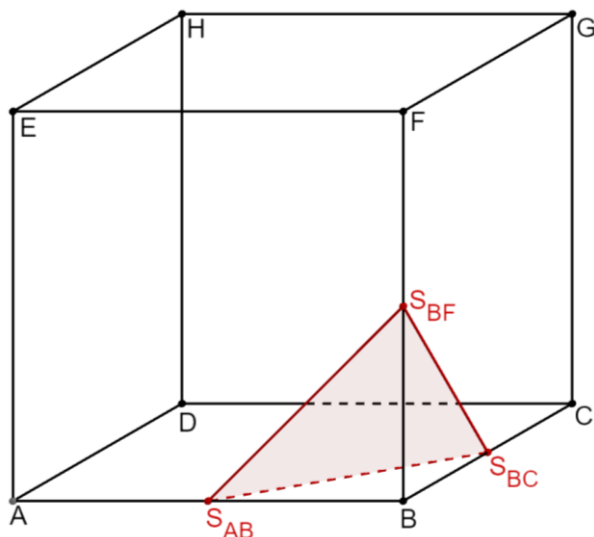
$$|S_{AB}, S_{CG}S_{EH}| = \frac{3\sqrt{2}}{4} \doteq 1,06;$$

$$|\sphericalangle S_{AB}S_{EH}, S_{AE}S_{EH}| = 30^\circ.$$

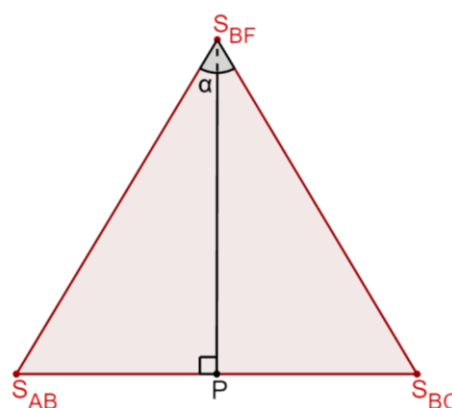
2.1.13 Řez 13: Rovnostranný trojúhelník II

a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body S_{AB} , S_{BC} a S_{BF} .

Řez získáme spojením zadaných bodů S_{AB} , S_{BC} a S_{BF} (viz obr. 2.39). Výsledným řezem je rovnostranný trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ (viz obr. 2.40) s délkou stran $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Obr. 2.39: Řez krychle rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$



Obr. 2.40: Rovnostranný trojúhelník II

b) Vypočítejte $|S_{BF}, S_{AB}S_{BC}|$.

(S) Hledaná vzdálenost je velikostí výšky $S_{BF}P$ v rovnostranném trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$, kde P je patou kolmice z bodu S_{BF} na přímku $S_{AB}S_{BC}$. Využijeme Pythagorovu větu pro trojúhelník $S_{AB}PS_{BF}$:

$$|S_{BF}P|^2 = |S_{AB}S_{BF}|^2 - |S_{AB}P|^2,$$

$$|S_{BF}P| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Platí tedy, že $|S_{BF}, S_{AB}S_{BC}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \doteq 0,61$.

(A) Využijeme toho, že bod P je středem strany $S_{AB}S_{BC}$: $S_{AB} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0\right]$, $S_{BC} = \left[1, \frac{1}{2}, 0\right]$, $S_{BF} = \left[1, 0, \frac{1}{2}\right]$ a $P = \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right]$. Body S_{BF}, P dosadíme do vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$|S_{BF}, S_{AB}S_{BC}| = |S_{BF}P| = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \doteq 0,61.$$

c) Vypočítejte $|\overrightarrow{S_{AB}S_{BF}}, \overrightarrow{S_{BC}S_{BF}}| = \alpha$.

(S) Hledáme velikost vnitřního úhlu v rovnostranném trojúhelníku, proto: $\alpha = 60^\circ$.

(A) Vektory $\overrightarrow{S_{AB}S_{BF}} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{S_{BC}S_{BF}} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

d) Obsah výsledného řezu $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$.

Pro obsah S_Δ rovnostranného trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ platí:

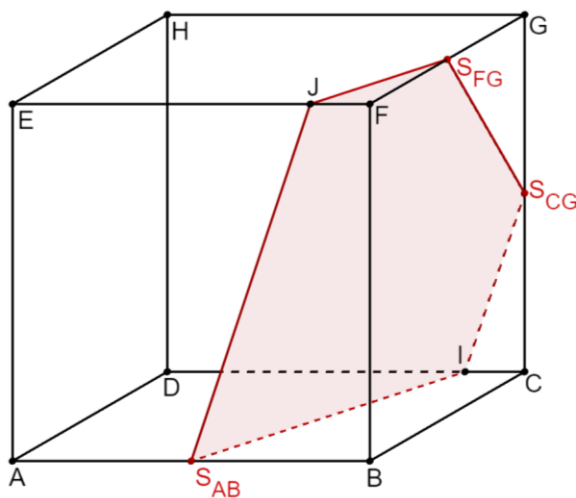
$$S_\Delta = \frac{|\overrightarrow{S_{AB}S_{BC}}| \cdot |\overrightarrow{S_{BF}, S_{AB}S_{BC}}|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \doteq 0,22.$$

2.1.14 Řez 14: Pětiúhelník III

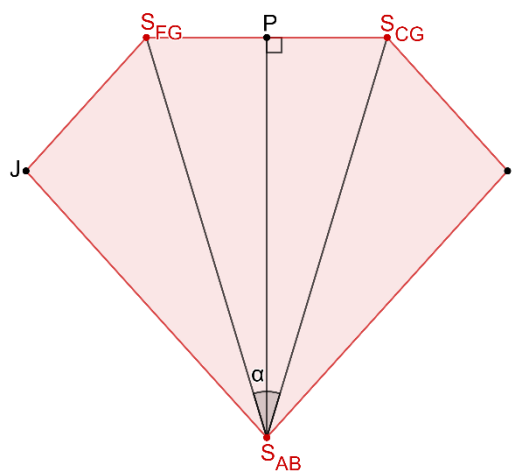
a) Sestrojte řez krychle rovinou určenou body S_{AB} , S_{CG} a S_{FG} .

Průsečík přímky BC a $S_{CG}S_{FG}$ označíme X , průsečík přímky $S_{AB}X$ s hranou DC označíme I (viz obr. 2.41). Nyní vedeme bodem S_{FG} rovnoběžku s přímkou $S_{AB}I$, v rovině řezu tak leží i bod J , což je průsečík rovnoběžky s hranou EF . Výsledným řezem je pětiúhelník $S_{AB}IS_{CG}S_{FG}J$ (viz obr. 2.42), který je osově souměrný podle osy strany $S_{FG}S_{CG}$.

Pozn.: Pro bod I platí: $|DI| = 5 \cdot |IC|$ a pro bod J platí: $|EJ| = 5 \cdot |JF|$.



Obr. 2.41: Řez krychle rovinou $S_{AB}S_{CG}S_{FG}$



Obr. 2.42: Pětiúhelník III

b) Vypočítejte $|S_{AB}, S_{CG}S_{FG}|$.

(S) $|S_{AB}, S_{CG}S_{FG}|$ převedeme na $|S_{AB}P|$, kde P je kolmý průmět S_{AB} na $S_{CG}S_{FG}$. $|S_{AB}P|$ vypočítáme pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník $S_{AB}PS_{CG}$, zároveň využíváme toho, že již víme, že $|S_{AB}S_{CG}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (viz příklad 2.1.12).

$$|S_{AB}P|^2 = |S_{AB}S_{CG}|^2 - |PS_{CG}|^2,$$

$$|S_{AB}P| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

Proto $|S_{AB}, S_{CG}S_{FG}| = \frac{\sqrt{22}}{4} \doteq 1,17$.

(A) Je možné použít jeden z obecných analytických postupů, lze ale také využít obr. 2.42. Jelikož $|S_{AB}S_{CG}| = |S_{AB}S_{FG}|$, trojúhelník $S_{AB}S_{CG}S_{FG}$ je rovnoramenný, proto P leží ve středu strany $S_{CG}S_{FG}$, a tak $P = \left[1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Nyní zbývá vypočítat vzdálenost bodů S_{AB}, P :

$$|S_{AB}P| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{22}}{4},$$

a tak $|S_{AB}, S_{CG}S_{FG}| = \frac{\sqrt{22}}{4} \doteq 1,17$.

c) Vypočítejte odchylku $|\sphericalangle S_{AB}S_{FG}, S_{AB}S_{CG}| = \alpha$.

(S) Využijeme goniometrickou funkci pro pravoúhlý trojúhelník $S_{AB}S_{CG}P$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|PS_{CG}|}{|S_{AB}S_{CG}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 33^\circ 33'.$$

(A) Vektory $\overrightarrow{S_{AB}S_{CG}} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{S_{AB}S_{FG}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

$$\cos \alpha = \frac{\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{6} \doteq 33^\circ 33'.$$

d) Obsah výsledného řezu $S_{AB}IS_{CG}S_{FG}J$.

Ve výpočtu obsahu S_P pětiúhelníku $S_{AB}IS_{CG}S_{FG}J$ můžeme využít toho, že ho lze rozdělit na tři trojúhelníky (z toho dva shodné a jeden rovnoramenný, viz obr. 2.42). Pro obsah S_1 trojúhelníku $S_{AB}S_{FG}J$ a $S_{AB}S_{CG}I$ platí:

$$S_1 = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{66}}{18}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Obsah S_2 trojúhelníku $S_{AB}S_{CG}S_{FG}$ lze vyjádřit takto:

$$S_2 = \frac{|S_{CG}S_{FG}| \cdot |S_{AB}, S_{CG}S_{FG}|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{22}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{8}.$$

Pro hledaný obsah S_P tak platí:

$$S_P = 2 \cdot S_1 + S_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{12} + \frac{\sqrt{11}}{8} = \frac{7\sqrt{11}}{24} \doteq 0,97$$

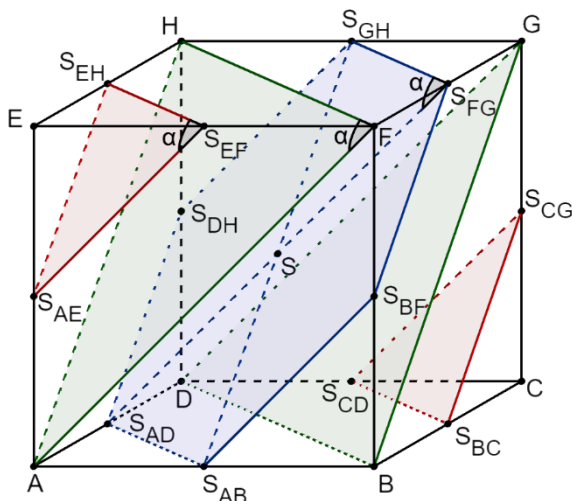
e) Výsledky dalších vzdáleností a odchylek.

$$|S_{FG}, S_{AB}S_{CG}| = \frac{\sqrt{66}}{12} \doteq 0,68;$$

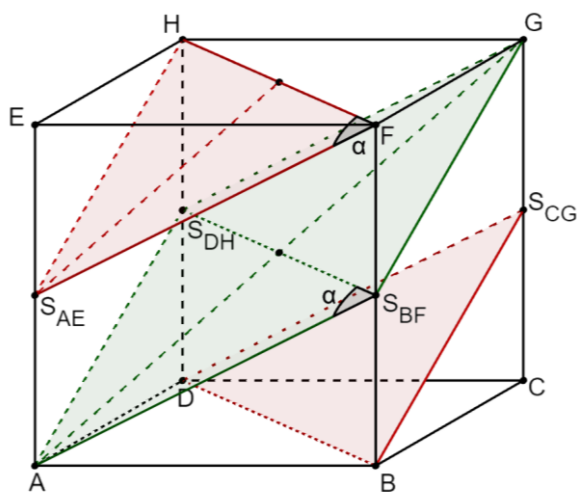
$$|\sphericalangle S_{AB}S_{CG}, S_{FG}S_{CG}| = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 73^\circ 13'.$$

2.1.15 Řezy krychle rovnoběžnými rovinami

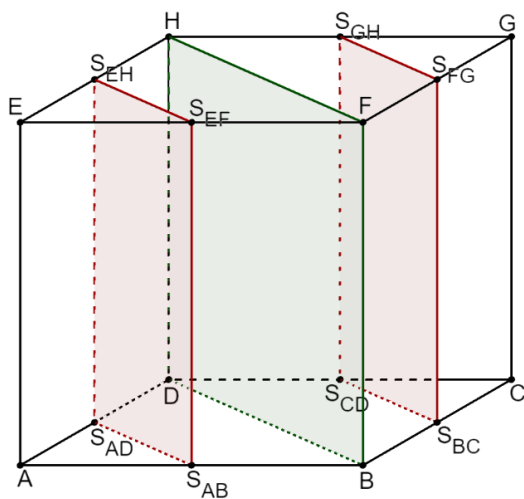
Při řešení některých úloh jsme využívali toho, že hledaná vzdálenost či odchylka byla již vypočítána v některém z předchozích řezů, nebo také toho, že byla daná metrická vlastnost v jiné rovině lépe vidět, a nemuselo tak mnohdy docházet ke zdoluhavým výpočtům. Uvedené příklady a výsledky v nich vypočítané tak lze zkoumat i z jiného pohledu, který může mimo jiné pomoci v rozvoji prostorové představivosti čtenáře.



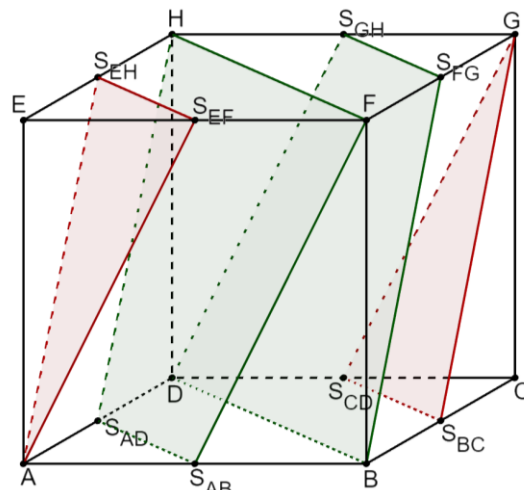
Obr. 2.43: Řezy 13, 3 a 12



Obr. 2.44: Řezy 4 a 6



Obr. 2.45: Řezy 11 a 1



Obr. 2.46: Řezy 7 a 5

Na obr. 2.43 a obr. 2.44 vidíme vybrané rovnoběžné roviny, ty jsou reprezentovány řezy krychle, které byly sestrojeny v předchozích úlohách. Na obr. 2.43 se nachází řezy 13, 3 a 12, na obr. 2.44 nalezneme řezy 4 a 6. Do krychle byly umístěny tak, aby byly

vzájemně rovnoběžné. Pokud se zaměříme na určité vzdálenosti a odchylky, které jsme v úlohách řešili, zjistíme, že nahlédnutím na tyto rovnoběžné roviny jsou některé metrické vlastnosti v různých řezech stejné. To nám může usnadnit řešení úlohy, jelikož v jednom z řezů nemusí být vzdálenost či odchylka ihned patrná, a tak ji musíme různými způsoby (mnohdy zbytečně složitě) počítat, zatímco v jiném řezu může být viditelná přímo z obrázku.

Uvedeme si pár konkrétních příkladů vztahujících se k obr. 2.43:

- $|S_{AE}S_{EF}| = |SS_{FG}|$, jelikož je úsečka SS_{FG} pouze posunutou úsečkou $S_{AE}S_{EF}$ o vektor $\overrightarrow{S_{AE}S}$, vzdálenost tak zůstane stejná.
- $|AF| = |S_{AD}S_{FG}|$, úsečka $S_{AD}S_{FG}$ je opět posunutou úsečkou AF o vektor $\overrightarrow{AS_{AD}}$. Pokud bychom tedy zjišťovali $|S_{AD}S_{FG}|$, vzdálenost bodů nemusí být každému ihned jasná, zatímco $|AF|$ je velikostí úhlopříčky ve stěně krychle.
- $|\sphericalangle S_{AE}S_{EF}, S_{EF}S_{EH}| = |\sphericalangle AF, FH| = |\sphericalangle S_{AD}S_{FG}, S_{FG}S_{GH}| = \alpha$. Jelikož jsou přímky $S_{AE}S_{EF}$, AF , $S_{AD}S_{FG}$ vzájemně rovnoběžné, stejně jako přímky $S_{EF}S_{EH}$, FH , $S_{FG}S_{GH}$, odchylky se rovnají.

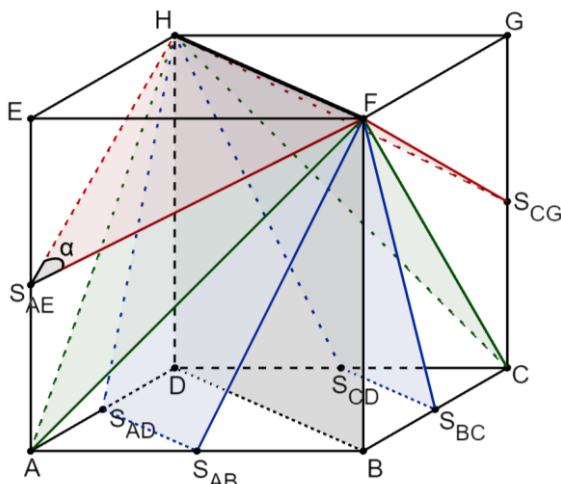
Některé příklady k obr. 2.44:

- $|\sphericalangle S_{AE}F, FH| = |\sphericalangle AS_{BF}, S_{BF}S_{DH}| = \alpha$, přímky $S_{AE}F$ a AS_{BF} , resp. FH a $S_{BF}S_{DH}$ jsou rovnoběžné. Lze si všimnout, že trojúhelník $S_{AE}FH$ je shodný s trojúhelníkem $AS_{BF}S_{DH}$, délky odpovídajících si stran jsou shodné, stejně tak vnitřní úhly.
- $|S_{AE}, FH|$ nemusí být ihned patrná, ovšem na obrázku vidíme, že je polovinou $|AG|$, která je velikostí tělesové úhlopříčky krychle.
- Také například vidíme, že obsah kosočtverce $AS_{BF}GS_{DH}$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku $S_{AE}FH$.

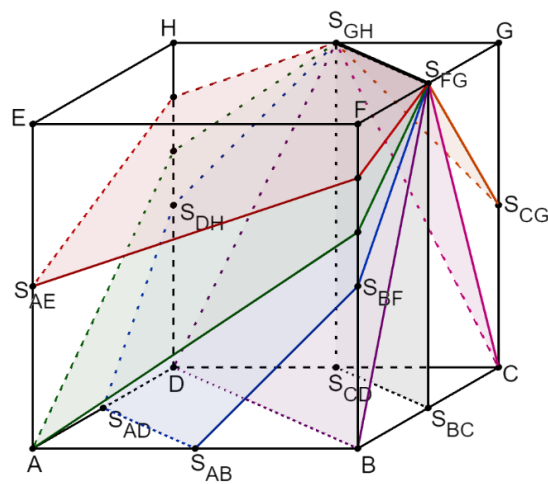
Obr. 2.45 a obr. 2.46 s dalšími rovnoběžnými řezy jsou již přiloženy bez komentáře, čtenář může sám zkoumat, jaké vzájemné souvislosti v nich lze pozorovat. Ostatní řezy, které zde nebyly zmíněny (a byly součástí předcházejících řešených úloh), tvoří s žádným dalším řezem vzájemně rovnoběžné roviny.

2.1.16 Řezy krychle rovinami se společnou přímkou

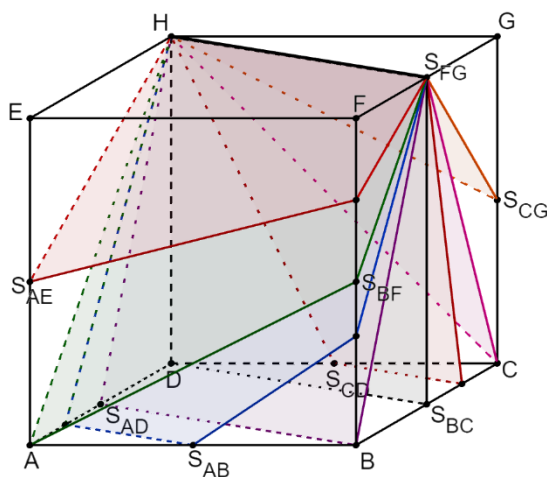
Kromě rovnoběžných rovin můžeme řezy (a v nich řešené metrické vlastnosti) zkoumat z dalšího pohledu, v němž se věnujeme rovinám se společnou přímkou (průsečnicí).



Obr. 2.47: Řezy 4, 3, 5 a 1



Obr. 2.48: Řezy 14, 9, 12, 5, 11, 7 a 13



Obr. 2.49: Řezy 10, 5, 8, 6, 2, 4 a 7

Na obr. 2.47 je průsečnicí rovin přímka FH , na obr. 2.48 přímka $S_{FG}S_{GH}$ a na obr. 2.49 přímka $S_{FG}H$. Pro představu si opět uvedeme konkrétní příklady využití obr. 2.47:

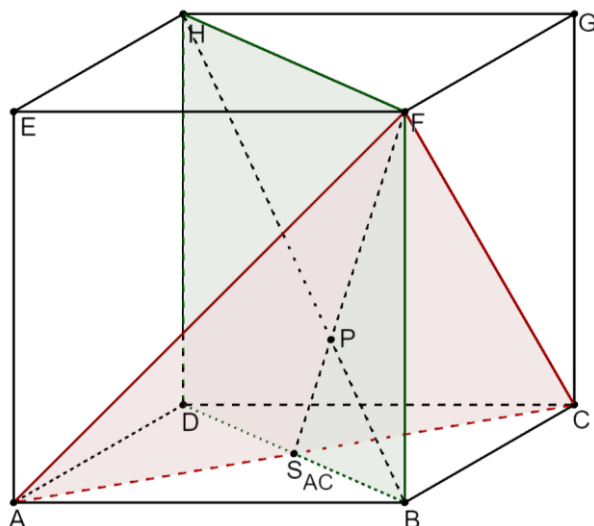
- Pro $|\angle HS_{AE}, S_{AE}F| = \alpha$ lze jednoduše určit, mezi kterými hodnotami se bude nacházet. Přímou v obrázku je možné vidět, že $|\angle HE, EF| = 90^\circ$ a $|\angle HA, AF| = 60^\circ$. Pro hledanou odchylku tak platí: $\alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$.
- Pro $|FS_{AB}|$ platí, že se nachází mezi hodnotami $|FB| = 1$ a $|FA| = \sqrt{2}$.

Tato omezení pro hledané odchylky či vzdálenosti je možné provádět například už před samotným výpočtem zadané úlohy. Mohou poté sloužit ke kontrole správnosti výsledku.

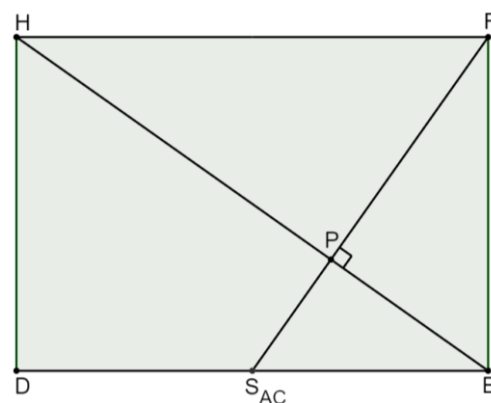
2.2 Ostatní metrické úlohy v krychli

Příklad 1

Vypočítejte vzdálenost bodu B od roviny ACF .



Obr. 2.50: Vzdálenost B od ACF



Obr. 2.51: Vzdálenost B od P

(S) Využijeme pomocnou rovinu BFH (viz obr. 2.50), která je kolmá k rovině ACF . Jelikož je přímka AC kolmá k BD i BF , je tak kolmá k celé rovině (viz 1.2.3). Kromě bodu F je tak průsečíkem rovin i bod S_{AC} , průsečnicí rovin je proto přímka $S_{AC}F$. Kolmý průmět bodu B do roviny ACF označíme P , je to pata kolmice z B do ACF . Tato kolmice leží v rovině BFH , a proto P leží na $S_{AC}F$. $|B, ACF|$ jsme tak převedli na $|BP|$, kterou vypočítáme v obdélníku $DBFH$ (viz obr. 2.51). Pro obsah S_{Δ} pravoúhlého trojúhelníku $S_{AC}BF$ platí:

$$S_{\Delta} = \frac{|S_{AC}B| \cdot |BF|}{2} = \frac{|BP| \cdot |S_{AC}F|}{2}.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník $S_{AC}BF$ vypočítáme $|S_{AC}F|$:

$$\begin{aligned} |S_{AC}F|^2 &= |S_{AC}B|^2 + |BF|^2, \\ |S_{AC}F| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Dosadíme do vyjádření pro obsah S_{Δ} :

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{|BP| \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2}.$$

Pro hledanou vzdálenost tak dostáváme:

$$|B, ACF| = |BP| = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58.$$

(A) Hledáme rovnici přímky procházející bodem B a kolmé k rovině $\rho = ACF$. K nalezení normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ využijeme vektorový součin vektorů $\vec{AC} = (1, 1, 0)$ a $\vec{AF} = (1, 0, 1)$:

$$\vec{AC} \times \vec{AF} = (1, -1, -1) = \vec{n}_\rho.$$

Rovinu ρ vyjádříme obecnou rovnicí (jelikož v rovině ρ leží bod A , hodnota d v obecném předpisu roviny $ax + by + cz + d = 0$ je rovna nule):

$$\rho: x - y - z = 0.$$

Přímka p procházející bodem B , která je kolmá k ρ , má parametrické vyjádření:

$$X = [1, 0, 0] + (1, -1, -1) \cdot t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Počítáme průsečík p a ρ :

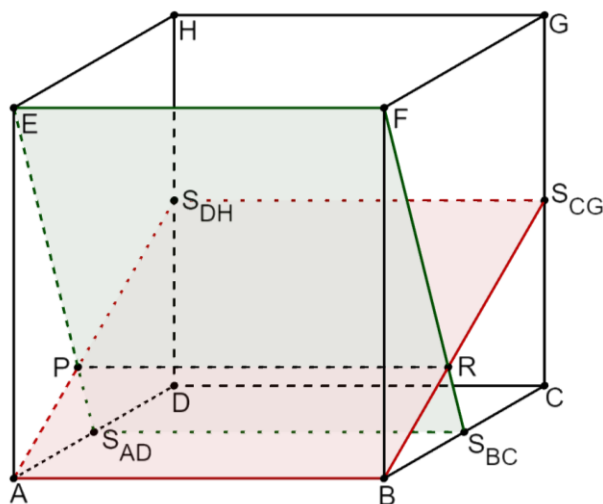
$$1 + t - (-t) - (-t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Dosazením $t = -\frac{1}{3}$ do vyjádření přímky získáme $P = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Zbývá vypočítat $|BP|$:

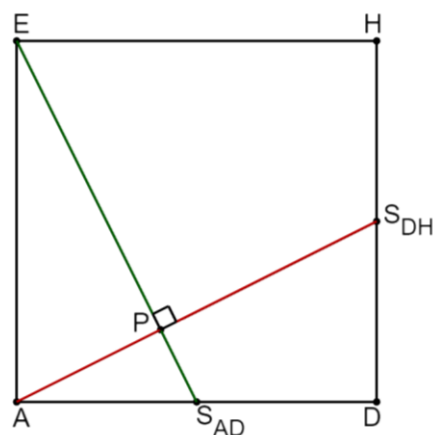
$$|B, ACF| = |BP| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58.$$

Příklad 2

Vypočítejte vzdálenost bodu E od roviny ABS_{CG} .



Obr. 2.52: Vzdálenost E od ABS_{CG}



Obr. 2.53: Vzdálenost E od P

(S) Využijeme pomocnou rovinu $ES_{AD}S_{BC}$ (viz obr. 2.52), která je kolmá k rovině ABS_{CG} (přímka ES_{AD} je kolmá k AB i AS_{DH} , je tak kolmá k celé rovině ABS_{CG}). Průsečnicí rovin je přímka PR . $|E, ABS_{CG}|$ máme převedenou na $|EP|$, tu vypočítáme ve čtverci $ADHE$ (viz obr. 2.53). Využijeme Euklidovu větu o odvěsně pro pravoúhlý trojúhelník EAS_{AD} :

$$|AE|^2 = |ES_{AD}| \cdot |EP|,$$

$$1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot |EP| \Rightarrow |EP| = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Proto $|E, ABS_{CG}| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \doteq 0,89$.

(A) Využijeme další možný analytický postup, kterým je využití vzorce pro vzdálenost bodu od roviny (viz 1.2.3). Rovina $\rho = ABS_{CG}$ má normálový vektor $\vec{n}_\rho = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$ a lze ji vyjádřit obecnou rovnicí:

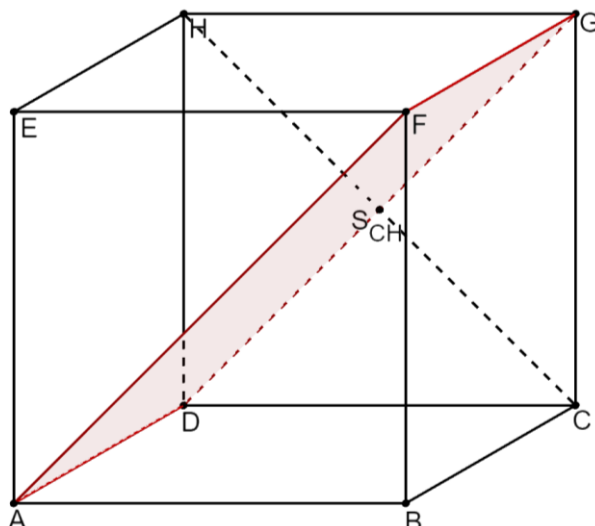
$$\rho: -\frac{1}{2}y + z = 0.$$

Bod $E = [0, 0, 1]$ dosadíme do vzorce:

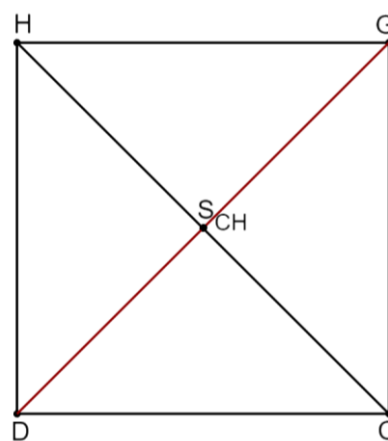
$$|E, ABS_{CG}| = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot y + z \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \doteq 0,89.$$

Příklad 3

Vypočítejte vzdálenost mimoběžných přímek AD a CH .



Obr. 2.54: Vzdálenost AD a CH



Obr. 2.55: Vzdálenost S_{CH} od D

(S) Využijeme pomocnou rovinu, která bude kolmá k jedné z mimoběžek a ve které bude ležet druhá mimoběžka. Rovina, ve které leží přímka AD a která je kolmá k přímce CH , je AFG (viz obr. 2.54). Průsečíkem AFG a CH je bod S_{CH} , který je jedním z krajních bodů příčky mimoběžek, jejíž velikost hledáme.

Určíme tak $|S_{CH}, AD|$. Přímka DG , na které leží S_{CH} , je kolmá k přímce AD , kolmým průmětem S_{CH} na AD je bod D . Úloha je tak převedena na $|S_{CH}D|$, tato vzdálenost je rovna polovině délky úhlopříčky ve čtverci $DCGH$ (viz obr. 2.55), proto:

$$|AD, CH| = |S_{CH}D| = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,71.$$

(A) Pracujeme s krajními body příčky mimoběžek, jejíž velikost hledáme, označíme je P, R . Víme, že jeden krajní bod leží na přímce AD , druhý na přímce CH . Zvolíme, že $P \in AD$ a $R \in CH$. Vyjádříme si přímku AD :

$$X = [0, 0, 0] + (0, 1, 0) \cdot t; t \in \mathbb{R}$$

a přímku CH :

$$X = [1, 1, 0] + (-1, 0, 1) \cdot s; s \in \mathbb{R}.$$

Body P, R tudíž lze vyjádřit takto: $P = [0, t, 0]$ a $R = [1 - s, 1, s]$. Hledaná příčka musí být k oběma mimoběžkám kolmá, využijeme proto skalární součin:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (0, 1, 0) \cdot (1 - s, 1 - t, s) = 0 \Rightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \cdot (1 - s, 1 - t, s) = 0 \Rightarrow -1 + s + s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}.$$

Dosazením $t = 1$ a $s = \frac{1}{2}$ do vyjádření P a R získáme: $P = [0, 1, 0]$ a $R = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$. Nyní vypočítáme vzdálenost těchto dvou bodů:

$$|AD, CH| = |PR| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (1 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,71.$$

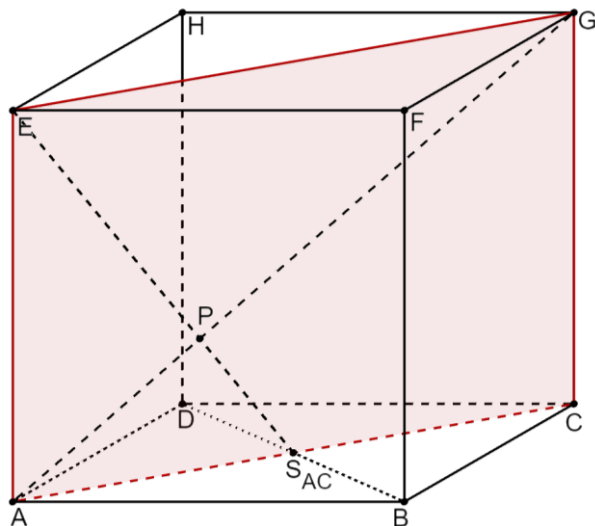
(A) Ukážeme si ještě jedno možné analytické řešení pomocí vzorce využívající smíšený součin vektorů $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{CH} = (-1, 0, 1)$ a $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$:

$$|AD, CH| = \frac{|(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{CH}|} = \frac{|(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)|}{|(1, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,71.$$

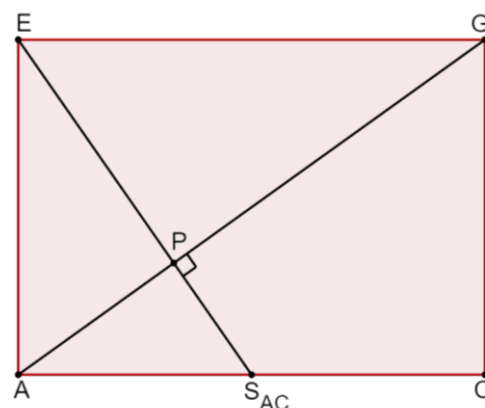
Pozn.: Vidíme, že tento postup je početně méně náročný než analytické řešení představené výše.

Příklad 4

Vypočítejte vzdálenost mimoběžných přímek AG a BD .



Obr. 2.56: Vzdálenost AG a BD



Obr. 2.57: Vzdálenost S_{AC} od P

(S) Rovina, ve které leží přímka AG a která je kolmá k přímce BD , je ACG (viz obr. 2.56). Průsečíkem roviny ACG a přímky BD je bod S_{AC} , který je jedním z krajních bodů příčky mimoběžek. Určujeme tak $|S_{AC}, AG|$.

Kolmý průmět bodu S_{AC} na přímku AG nazveme P . Jelikož je rovina BDE , ve které leží bod S_{AC} , kolmá k přímce AG , bod P leží na přímce $S_{AC}E$. V obdélníku $ACGE$ (viz obr. 2.57) počítáme $|S_{AC}P|$. Využijeme podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $AS_{AC}P$ a $ES_{AC}A$:

$$\frac{|S_{AC}P|}{|S_{AC}A|} = \frac{|S_{AC}A|}{|S_{AC}E|} \Rightarrow |S_{AC}P| = \frac{|S_{AC}A|^2}{|S_{AC}E|}.$$

Do vyjádření dosadíme $|S_{AC}A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (polovina úhlopříčky stěny krychle) a $|S_{AC}E| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (viz Příklad 1):

$$|S_{AC}P| = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Proto $|AG, BD| = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0,41$.

(A) Ukážeme si další analytický postup, který v podstatě algebraicky popisuje syntetický postup popsany výše. Využijeme vlastnosti, že hledaná nejkratší příčka mimoběžek je na obě mimoběžky kolmá. Směr $\vec{s}$ příčky tak můžeme určit jako vektorový součin směrových vektorů mimoběžných přímek $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ a $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{BD} = (-1, -1, 2).$$

Vyjádříme rovnici roviny ρ , ve které leží hledaná příčka a jedna z mimoběžek (volíme přímku AG). Normálový vektor $\vec{n}_\rho$ roviny ρ získáme jako vektorový součin směrových vektorů $\vec{s} = (-1, -1, 2)$ a $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$:

$$\vec{n}_\rho = \vec{s} \times \overrightarrow{AG} = (-3, 3, 0).$$

Rovinu ρ tak vyjádříme obecnou rovnicí:

$$\rho: -3x + 3y = 0.$$

Přímku BD vyjádříme parametricky:

$$X = [1, 0, 0] + (-1, 1, 0) \cdot t; t \in \mathbb{R}$$

a dále určujeme průsečík roviny ρ s přímkou BD :

$$-3 \cdot (1 - t) + 3 \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Průsečík R má souřadnice $R = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]$. Druhý krajní bod P příčky mimoběžek určíme jako průsečík příčky PR :

$$X = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right] + (-1, -1, 2) \cdot s; s \in \mathbb{R}$$

s přímkou AG :

$$X = [0, 0, 0] + (1, 1, 1) \cdot u; u \in \mathbb{R}.$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých s a u :

$$\frac{1}{2} - s = u,$$

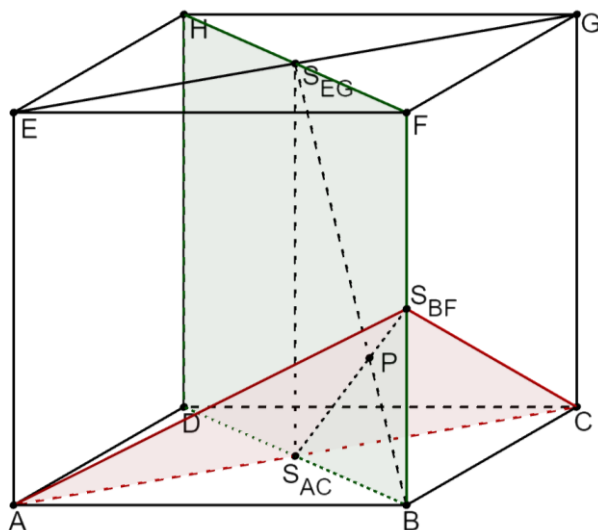
$$2s = u.$$

Vyřešením soustavy obdržíme vyjádření $s = \frac{1}{6}$ a $u = \frac{1}{3}$. Dosazením $s = \frac{1}{6}$ do předpisu příčky PR získáme $P = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Nyní zbývá vypočítat vzdálenost bodů P, R :

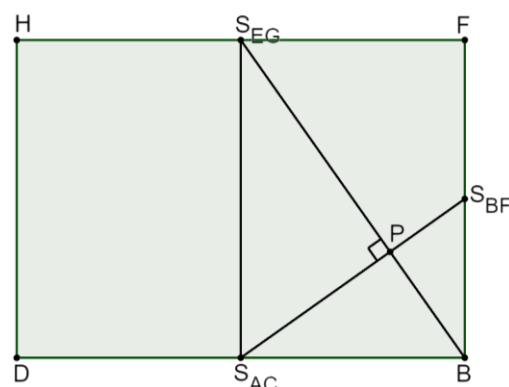
$$|AG, BD| = |PR| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0,41.$$

Příklad 5

Vypočítejte vzdálenost přímky EG od roviny ACS_{BF} .



Obr. 2.58: Vzdálenost EG od ACS_{BF}



Obr. 2.59: Vzdálenost S_{EG} od P

(S) Nejprve můžeme ověřit, zda je přímka EG s rovinou ACS_{BF} rovnoběžná (viz obr. 2.58). Jelikož je přímka EG rovnoběžná s přímkou AC , je tak rovnoběžná s celou rovinou ACS_{BF} (používáme kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny, viz 1.2.5).

Využijeme kolmé roviny DBF k rovině ACS_{BF} (přímka AC je kolmá k přímce $S_{AC}S_{BF}$ i přímce $S_{AC}S_{EG}$, roviny jsou tak vzájemně kolmé) a vzdálenost přímky od roviny převedeme na vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny. Na přímce EG tak volíme bod S_{EG} a patu kolmice z bodu S_{EG} na rovinu ACS_{BF} označíme P .

Zjišťujeme $|S_{EG}P|$, kterou dopočítáme v obdélníku $DBFH$ (viz obr. 2.59) využitím podobnosti trojúhelníků $S_{EG}S_{AC}B$ a $S_{EG}PS_{AC}$:

$$\frac{|S_{EG}P|}{|S_{AC}S_{EG}|} = \frac{|S_{AC}S_{EG}|}{|S_{EG}B|}.$$

Do vyjádření dosadíme $|S_{AC}S_{EG}| = 1$ a $|S_{EG}B| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (viz Příklad 1):

$$|S_{EG}P| = \frac{|S_{AC}S_{EG}|^2}{|S_{EG}B|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Proto $|EG, ACS_{BF}| = \frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 0,82$.

(A) Analytickým přístupem vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné také převádíme na vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny. I zde můžeme nejprve ověřit, že je přímka EG s rovinou ACS_{BF} skutečně rovnoběžná, což nastává v případě, když je směrový vektor $\overrightarrow{EG} = (1, 1, 0)$ zadané přímky kolmý na normálový vektor $\vec{n}_\rho$ zadané roviny $\rho = ACS_{BF}$, který získáme vektorovým součinem vektorů $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AS_{BF}} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$:

$$\vec{n}_\rho = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS_{BF}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right).$$

Využijeme skalární součin pro vektory $\overrightarrow{EG}$ a $\vec{n}_\rho$:

$$(1, 1, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Směrový vektor přímky a normálový vektor roviny jsou tedy na sebe kolmé, přímka je tak s rovinou rovnoběžná.

Na přímce EG volíme bod $S_{EG} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right]$ a vyjádříme rovinu ρ obecnou rovnicí:

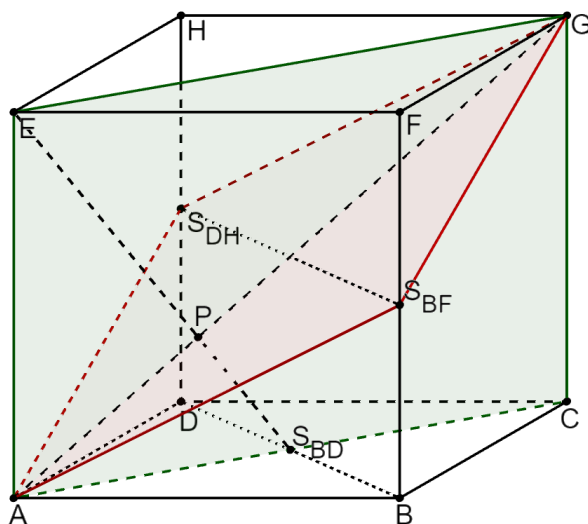
$$\rho: \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z = 0 \Rightarrow x - y - 2z = 0.$$

Nyní už pouze dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu S_{EG} od roviny ρ :

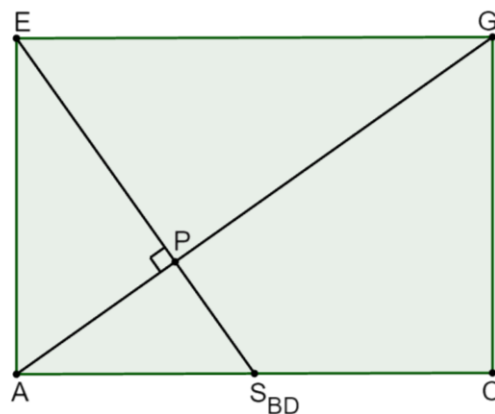
$$|EG, ACS_{BF}| = |S_{EG}, ACS_{BF}| = \frac{|x - y - 2z|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2\right|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 0,82.$$

Příklad 6

Vypočítejte vzdálenost přímky BD od roviny $AS_{BF}G$.



Obr. 2.60: Vzdálenost BD od $AS_{BF}G$



Obr. 2.61: Vzdálenost S_{BD} od P

(S) Přímka BD je s rovinou $AS_{BF}G$ rovnoběžná, jelikož je BD rovnoběžná s přímkou $S_{BF}S_{DH}$ (viz obr. 2.60), je tak rovnoběžná s celou rovinou $AS_{BF}G$.

Za libovolný bod přímky BD volíme bod S_{BD} a k nalezení $|S_{BD}, AS_{BF}G|$ využíváme rovinu ACG , která je k rovině $AS_{BF}G$ kolmá (přímka $S_{BF}S_{DH}$ je kolmá k přímce AG i k přímce AC , roviny jsou tak navzájem kolmé). Patu kolmice z bodu S_{BD} na rovinu $AS_{BF}G$ označíme P , $|S_{BD}P|$ dopočítáme v obdélníku $ACGE$ (viz obr. 2.61) pomocí Euklidovy věty o odvěsňe pro pravoúhlý trojúhelník $AS_{BD}E$:

$$|AS_{BD}|^2 = |ES_{BD}| \cdot |S_{BD}P|.$$

Dosazením $|ES_{BD}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (viz Příklad 1) a $|AS_{BD}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ získáme:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot |S_{BD}P| \Rightarrow |S_{BD}P| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

A tak $|BD, AS_{BF}G| = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0,41$.

(A) Rovnoběžnost přímky BD s rovinou $AS_{BF}G$ ověříme skalárním součinem směrového vektoru $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$ přímky BD a normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny $\rho = AS_{BF}G$, který vyjádříme pomocí vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{AS_{BF}} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ a $\overrightarrow{AS_{DH}} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$:

$$\vec{n}_\rho = \overrightarrow{AS_{BF}} \times \overrightarrow{AS_{DH}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Jelikož platí:

$$\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}_\rho = (-1, 1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

přímka BD je s rovinou ρ rovnoběžná.

Obecná rovnice roviny ρ má předpis:

$$\rho: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 0 \Rightarrow x + y - 2z = 0.$$

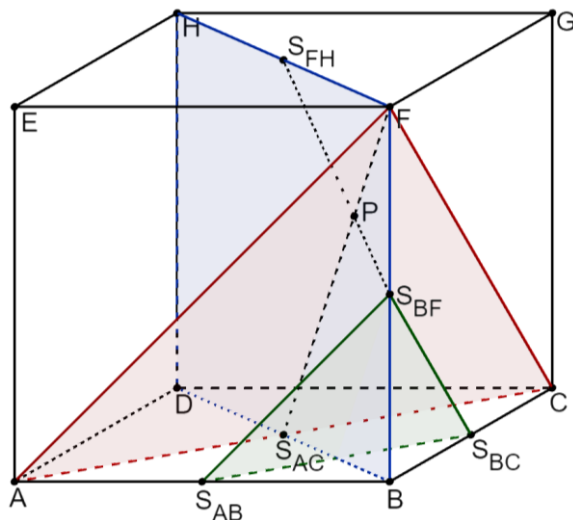
Dále využijeme vzorec pro vzdálenost bodu $S_{BD} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]$ od roviny ρ :

$$|BD, AS_{BF}G| = |S_{BD}, AS_{BF}G| = \frac{|x + y - 2z|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0,41.$$

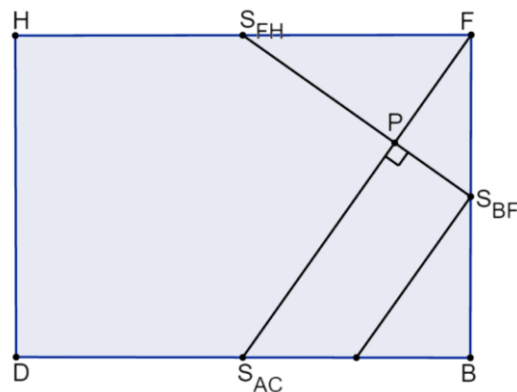
Pozn.: Vidíme, že vypočítaná vzdálenost přímky BD od roviny $AS_{BF}G$ je stejná jako vzdálenost mimoběžných přímek AG a BD (viz Příklad 4).

Příklad 7

Vypočítejte vzdálenost rovin ACF a $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$.



Obr. 2.62: Vzdálenost ACF a $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$



Obr. 2.63: Vzdálenost S_{BF} od P

(S) Ačkoli je zde rovnoběžnost rovin patrná přímo z obr. 2.62, můžeme ji ověřit pomocí kritéria rovnoběžnosti dvou rovin (viz 1.2.6). Jelikož rovina ACF obsahuje přímky AC a AF , které jsou s rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ rovnoběžné (kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny), je rovina ACF rovnoběžná s celou rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$.

K rovinám ACF a $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ hledáme kolmou rovinu, tou je například rovina BFH (přímka AC je kolmá jak přímce BD , tak k přímce BF). Průsečnicí rovin ACF a BFH je přímka $S_{AC}F$. Hledanou vzdálenost rovnoběžných rovin převedeme na vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé. V rovině $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ volíme bod S_{BF} a jeho kolmý průmět do roviny ACF označíme P . V obdélníku $DBFH$ (viz obr. 2.63) tak počítáme $|S_{BF}P|$, kterou lze zjistit například pomocí podobnosti trojúhelníků $S_{BF}FS_{FH}$ a $S_{BF}PF$. Platí:

$$\frac{|S_{BF}P|}{|S_{BF}F|} = \frac{|S_{BF}F|}{|S_{FH}S_{BF}|}.$$

Do vztahu dosadíme $|S_{BF}F| = \frac{1}{2}$ a $|S_{FH}S_{BF}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (polovina délky tělesové úhlopříčky):

$$|S_{BF}P| = \frac{|S_{BF}F|^2}{|S_{FH}S_{BF}|} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Proto $|ACF, S_{AB}S_{BC}S_{BF}| = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,29$.

(A) K ověření rovnoběžnosti rovin $\rho = ACF$ a $\sigma = S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ využijeme jejich normálové vektory. Jelikož $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{AF} = (1, 0, 1)$:

$$\overrightarrow{n}_\rho = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AF} = (1, -1, -1).$$

Obdobně $\overrightarrow{S_{AB}S_{BC}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\overrightarrow{S_{AB}S_{BF}} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$:

$$\overrightarrow{n}_\sigma = \overrightarrow{S_{AB}S_{BC}} \times \overrightarrow{S_{AB}S_{BF}} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Vektory $\overrightarrow{n}_\rho$ a $\overrightarrow{n}_\sigma$ jsou lineárně závislé (jeden je nenulovým násobkem druhého), proto jsou roviny rovnoběžné.

I v tomto případě volíme v rovině σ bod $S_{BF} = \left[1, 0, \frac{1}{2}\right]$ a zjišťujeme $|S_{BF}, \rho|$. Rovinu ρ vyjádříme obecnou rovnicí:

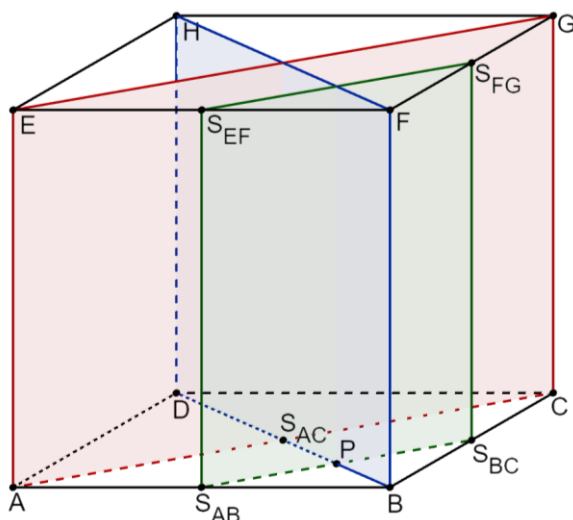
$$\rho: x - y - z = 0$$

a využijeme vzorec pro vzdálenost bodu od roviny:

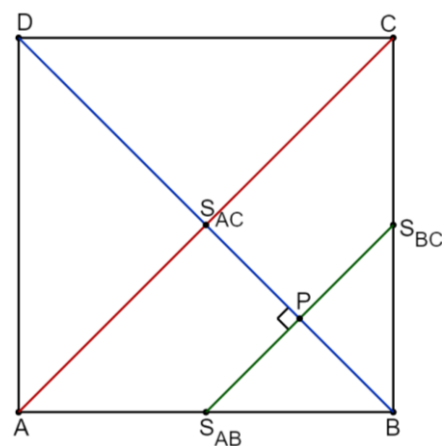
$$|ACF, S_{AB}S_{BC}S_{BF}| = |ACF, S_{BF}| = \frac{|x - y - z|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|1 - 0 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,29.$$

Příklad 8

Vypočítejte vzdálenost rovin ACG a $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$.



Obr. 2.64: Vzdálenost ACG a $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$



Obr. 2.65: Vzdálenost S_{AC} od P

(S) Opět je rovnoběžnost rovin patrná přímo z obr. 2.64. V rovině ACG leží přímky AC a AE , které jsou s rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$ rovnoběžné, rovina ACG je tak rovnoběžná s celou rovinou $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$.

K rovinám ACG a $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$ je kolmá rovina BFH (přímka AC je kolmá jak přímce BD , tak k přímce BF). Hledanou vzdálenost rovnoběžných rovin převedeme na vzdálenost bodu S_{AC} roviny ACG od roviny $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$. Kolmý průmět bodu S_{AC} do roviny $S_{AB}S_{BC}S_{FG}$ označíme P . Ve čtverci $ABCD$ (viz obr. 2.65) vyjádříme $|S_{AC}P|$ pomocí vztahů pro obsah S_{Δ} trojúhelníku $S_{AB}BS_{BC}$:

$$S_{\Delta} = \frac{|S_{AB}B| \cdot |BS_{BC}|}{2} = \frac{|S_{AB}S_{BC}| \cdot |BP|}{2}.$$

Po dosazení:

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |BP|}{2}.$$

Z toho plyne, že $|BP| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Dosazením do vztahu $|S_{AC}P| = |S_{AC}B| - |BP|$ dostáváme:

$$|ACG, S_{AB}S_{BC}S_{FG}| = |S_{AC}P| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq 0,35.$$

(A) Ověření rovnoběžnosti rovin $\rho = ACG$ a $\sigma = S_{AB}S_{BC}S_{FG}$ lze provést analogicky k příkladu 7, nebudeme ho zde proto uvádět.

V rovině ρ volíme bod S_{AC} a zjišťujeme $|S_{AC}, \sigma|$. Rovina σ má normálový vektor $\vec{n}_\sigma = (1, -1, 0)$, dosazením $\vec{n}_\sigma$ a libovolného bodu roviny σ do obecného předpisu rovnice roviny ji lze vyjádřit obecnou rovnicí takto:

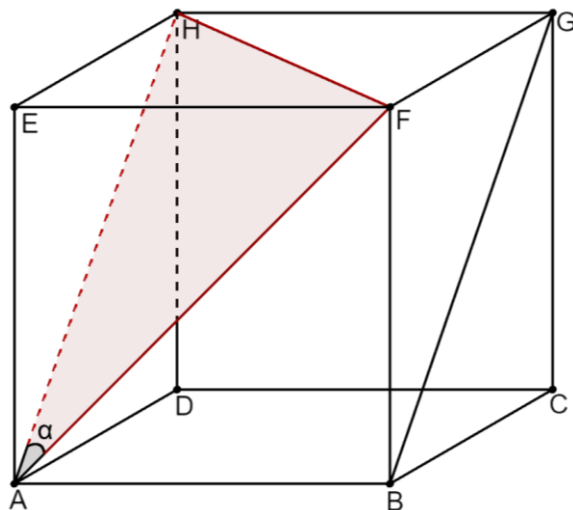
$$\sigma: x - y - \frac{1}{2} = 0.$$

Platí:

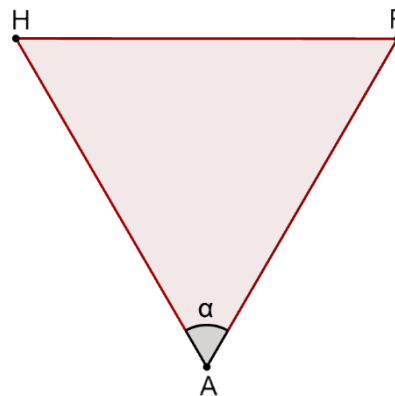
$$|ACG, S_{AB}S_{BC}S_{FG}| = |S_{AC}, \sigma| = \frac{\left|x - y - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq 0,35.$$

Příklad 9

Vypočítejte odchylku přímek AF a BG .



Obr. 2.66: Odchylka AF a BG



Obr. 2.67: Odchylka AF a AH

(S) Na obr. 2.66 vidíme, že jsou přímky AF a BG mimoběžné. Jejich odchylku určíme pomocí rovnoběžné přímky k jedné z mimoběžek. Bodem A vedeme rovnoběžnou přímku k přímce BG , takovou rovnoběžkou je přímka AH . Hledání odchylky mimoběžných přímek tak máme převedené na hledání odchylky různoběžných přímek AF a AH . Tyto přímky nám určují rovinu AFH , řezem krychle touto rovinou je rovnostranný trojúhelník AFH (viz obr. 2.67), hledaná odchylka je tak velikostí vnitřního úhlu α v tomto trojúhelníku. Proto

$$\alpha = |\sphericalangle AF, BG| = |\sphericalangle AF, AH| = 60^\circ.$$

(A) V analytické geometrii ani nemusíme s rovnoběžnou přímkou pracovat, jelikož nám k výpočtu postačí směrové vektory zadaných přímek. Proto $\overrightarrow{AF} = (1, 0, 1)$ a $\overrightarrow{BG} = (0, 1, 1)$ dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

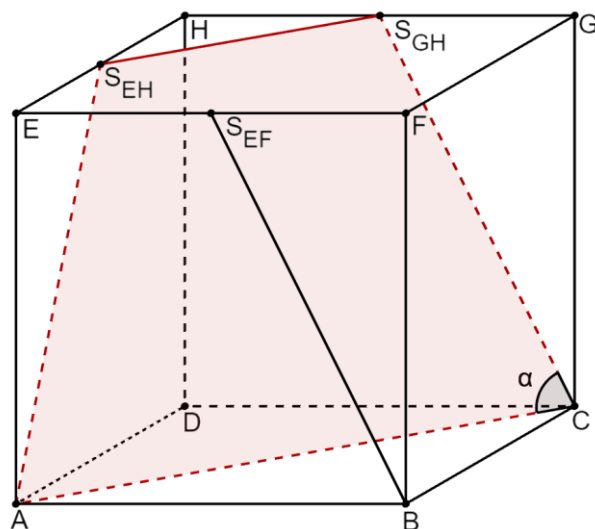
$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{|(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Platí, že

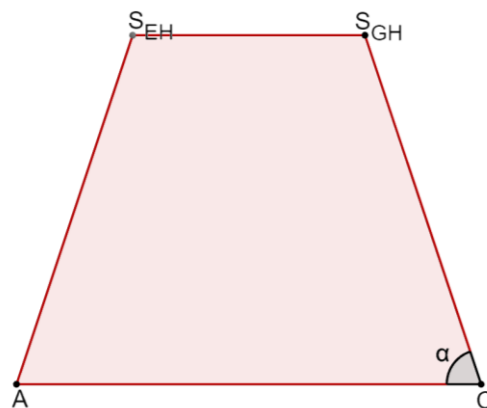
$$\alpha = |\sphericalangle AF, BG| = 60^\circ.$$

Příklad 10

Vypočítejte odchylku přímek AC a BS_{EF} .



Obr. 2.68: Odchylka AC a BS_{EF}



Obr. 2.69: Odchylka AC a CS_{GH}

(S) Na obr. 2.68 vidíme, že jsou přímky AC a BS_{EF} mimoběžné. Bodem C tak vedeme rovnoběžnou přímku k přímce BS_{EF} , což je přímka CS_{GH} . Zjistíme odchylku různoběžných přímek AC a CS_{GH} . Řezem krychle rovinou ACS_{GH} je rovnoramenný lichoběžník $ACS_{GH}S_{EH}$ (viz obr. 2.69), hledaná odchylka je velikostí vnitřního úhlu α v tomto lichoběžníku. Tuto odchylku však již máme vypočítanou (viz příklad 2.1.5), výpočet proto nebudeme znovu uvádět.

$$\alpha = |\sphericalangle AC, BS_{EF}| = |\sphericalangle AC, CS_{GH}| = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

(A) Směrové vektory $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ a $\overrightarrow{BS_{EF}} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ přímek AC a BS_{EF} dosadíme do vzorce pro odchylku dvou přímek:

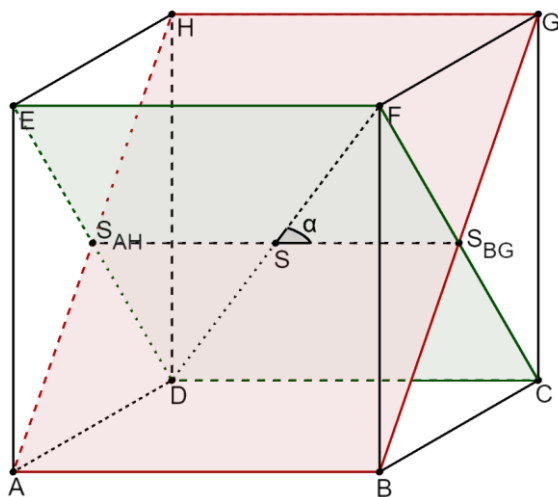
$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BS_{EF}}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BS_{EF}}|} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Platí tak, že:

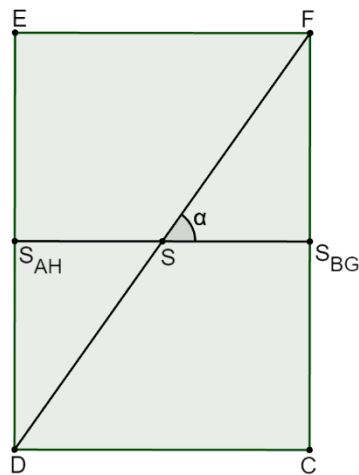
$$\alpha = |\sphericalangle AC, BS_{EF}| = |\sphericalangle AC, CS_{GH}| = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \doteq 71^\circ 34'.$$

Příklad 11

Vypočítejte odchylku přímky FD a roviny ABG .



Obr. 2.70: Odchylka FD od ABG



Obr. 2.71: Odchylka FD a $S_{BG}S_{AH}$

(S) Při výpočtu odchylky přímky FD od roviny ABG hledáme kolmý průmět přímky FD do roviny ABG , který získáme jako průnik zadané roviny ABG s rovinou obsahující přímku FD a kolmou na rovinu ABG . Kolmá rovina k rovině ABG , ve které zároveň leží přímka FD , je rovina DEF (viz obr. 2.70). Průnikem rovin ABG a DEF je přímka $S_{BG}S_{AH}$, je tak kolmým průmětem FD do roviny ABG .

Úlohu máme převedenou na odchylku dvou různoběžných přímek FD a $S_{BG}S_{AH}$, kterou vyřešíme v obdélníku $DCFE$ (viz obr. 2.71). Jelikož $|FS_{BG}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $|SS_{BG}| = \frac{1}{2}$, velikost úhlu α v pravoúhlém trojúhelníku $SS_{BG}F$, kde S je střed obdélníku $DCFE$, vypočteme pomocí vhodné goniometrické funkce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FS_{BG}|}{|SS_{BG}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = |\angle FD, ABG| = \arctg \sqrt{2} \doteq 54^\circ 44'.$$

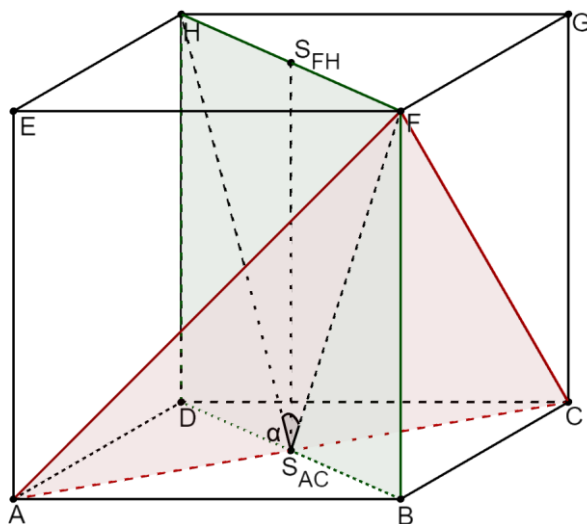
(A) Hledanou odchylku můžeme určit pomocí směrového vektoru $\overrightarrow{FD} = (-1, 1, -1)$ zadané přímky FD a normálového vektoru $\overrightarrow{n}_\rho = (0, 1, -1)$ zadané roviny $\rho = ABG$ (viz 1.3.2).

Vektory dosadíme do vzorce:

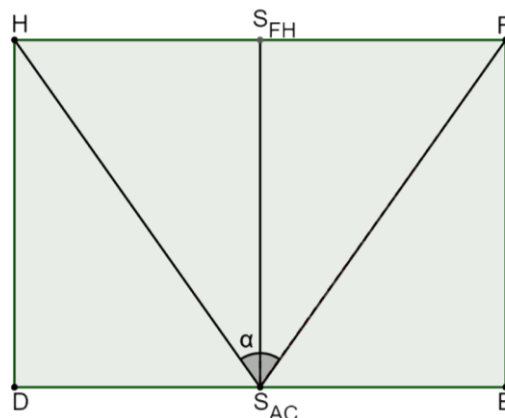
$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{n}_\rho \cdot \overrightarrow{FD}|}{|\overrightarrow{n}_\rho| \cdot |\overrightarrow{FD}|} = \frac{|1 + 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = |\angle FD, ABG| = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 54^\circ 44'.$$

Příklad 12

Vypočítejte odchylku přímky $S_{AC}H$ a roviny ACF .



Obr. 2.72: Odchylka $S_{AC}H$ od ACF



Obr. 2.73: Odchylka $S_{AC}H$ a $S_{AC}F$

(S) Kolmá rovina k rovině ACF , ve které zároveň leží přímka $S_{AC}H$, je rovina DBF (viz obr. 2.72). Průnikem rovin ACF a DBF je přímka $S_{AC}F$, která je kolmým průmětem přímky $S_{AC}H$ do roviny ACF . Úlohu máme převedenou na hledání odchylky dvou různoběžek.

Odchylku dvou různoběžných přímek $S_{AC}H$ a $S_{AC}F$ řešíme v obdélníku $DBFH$ (viz obr. 2.73). Úhel α , jehož velikost hledáme, je vnitřním úhlem v rovnoramenném trojúhelníku $HS_{AC}F$. Pro pravoúhlý trojúhelník $S_{AC}FS_{FH}$ platí:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|FS_{FH}|}{|S_{AC}S_{FH}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = |\angle S_{AC}H, ACF| = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 70^\circ 32'.$$

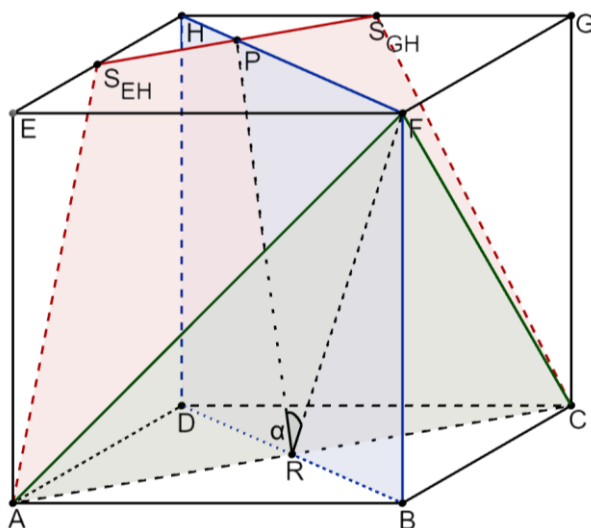
(A) Hledanou odchylku určíme pomocí směrového vektoru $\overrightarrow{S_{AC}H} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ zadané přímky $S_{AC}H$ a normálového vektoru $\vec{n}_\rho = (1, -1, -1)$ zadané roviny $\rho = ACF$. Vektory dosadíme do vzorce:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \overrightarrow{S_{AC}H}|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\overrightarrow{S_{AC}H}|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

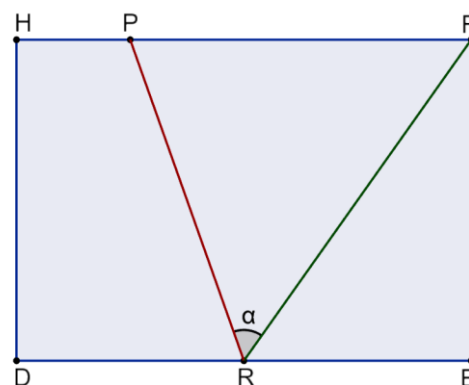
$$\alpha = |\angle S_{AC}H, ACF| = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 70^\circ 32'.$$

Příklad 13

Vypočítejte odchylku rovin ACS_{GH} a ACF .



Obr. 2.74: Odchylka ACS_{GH} a ACF



Obr. 2.75: Odchylka PR a RF

(S) Hledáme rovinu kolmou k oběma zadaným rovinám ACS_{GH} a ACF . Takovou rovinou je BFH (viz obr. 2.74). Průsečnicí rovin ACS_{GH} a BFH je přímka PR , průsečnicí rovin ACF a BFH je přímka RF . Zjišťujeme tak odchylku různoběžných přímek PR a RF , kterou vypočítáme v obdélníku $BFHD$ (viz obr. 2.75). Hledaná odchylka je velikostí úhlu α v trojúhelníku PRF , ve kterém známe $|PR| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ (viz 2.1.5), $|RF| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (viz Příklad 1) a pro $|PF|$ platí:

$$|PF| = |FH| - |PH| = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Proto pro výpočet odchylky využijeme kosinovou větu:

$$|PF|^2 = |PR|^2 + |RF|^2 - 2 \cdot |PR| \cdot |RF| \cdot \cos \alpha,$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = |\angle ACS_{GH}, ACF| = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 54^\circ 44'.$$

(A) Hledanou odchylku určíme pomocí normálových vektorů $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ rovin $\rho = ACS_{GH}$

a $\sigma = ACF$. Pro $\vec{AC} = (1, 1, 0)$ a $\vec{AS_{GH}} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ platí:

$$\vec{n}_\rho = \vec{AC} \times \vec{AS_{GH}} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right).$$

Pro $\vec{AC} = (1, 1, 0)$ a $\vec{AF} = (1, 0, 1)$:

$$\vec{n}_\sigma = \vec{AC} \times \vec{AF} = (1, -1, -1).$$

Vektory $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ dosadíme do vzorce:

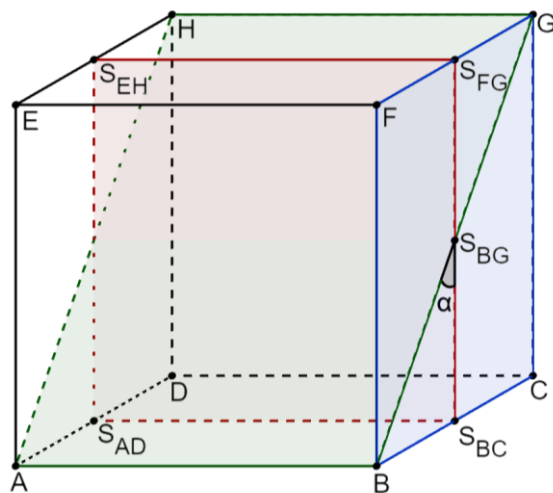
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\sigma|} = \frac{\left|1 + 1 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Platí tak:

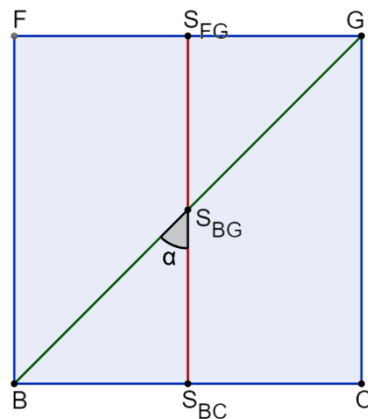
$$\alpha = |\sphericalangle ACS_{GH}, ACF| = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 54^\circ 44'.$$

Příklad 14

Vypočítejte odchylku rovin ABG a $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$.



Obr. 2.76: Odchylka ABG a $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$



Obr. 2.77: Odchylka BG a $S_{BC}S_{FG}$

(S) Rovina kolmá k oběma zadaným rovinám ABG a $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ je například stěna BCG krychle (viz obr. 2.76). Průsečnicí rovin ABG a BCG je přímka BG , průsečnicí rovin $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ a BCG je přímka $S_{BC}S_{FG}$. Místo odchylky rovin ABG a $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ nyní počítáme odchylku různoběžných přímek BG a $S_{BC}S_{FG}$, kterou vypočítáme ve čtverci $BCGF$ (viz obr. 2.77). Hledaná odchylka je velikostí úhlu α v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku $BS_{BC}S_{BG}$. Proto:

$$\alpha = |\angle ABG, S_{AD}S_{BC}S_{FG}| = 45^\circ.$$

(A) Hledanou odchylku určíme pomocí normálových vektorů $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ rovin $\rho = ABG$ a $\sigma = S_{AD}S_{BC}S_{FG}$. Z obr. 2.76 lze jednoduše určit, že $\vec{n}_\rho = (0, 1, 0)$ a $\vec{n}_\sigma = (0, 1, -1)$. Vektory dosadíme do vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z toho plyne, že

$$\alpha = |\angle ABG, S_{AD}S_{BC}S_{FG}| = 45^\circ.$$

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo představit možné postupy řešení metrických úloh v prostoru z pohledu syntetické a analytické geometrie, které budou následně použity ve vytvořené sbírce řešených metrických úloh v krychli.

Práce obsahuje vymezení syntetické a analytické geometrie. Dále je součástí souhrn analytických a syntetických postupů, vzorců a definic, které lze k řešení metrických úloh využít. Sbíрка řešených úloh, která tvoří hlavní část práce, obsahuje podrobně zpracované příklady zaměřující se na výpočet vzdáleností a odchylek v sestrojených řezech krychle zadanou rovinou. Sbíрка se také skládá z příkladů zaměřených na ostatní metrické vlastnosti, které nebyly řešeny v první části. Stanovený cíl práce se dle mého názoru povedlo naplnit.

Na velkém množství řešených metrických úloh bylo umožněno porovnání obou geometrických přístupů (syntetického a analytického). Uvedli jsme si mnoho postupů, kterými lze úlohy řešit, čtenář se tak může nyní lépe rozhodovat, kterou metodu při řešení úlohy použije. To, že lze úlohy řešit více způsoby, může být vhodné například i pro ověřování správnosti vypočteného výsledku (vypočítáme úlohu jedním způsobem, dalším můžeme řešení ověřit).

Práce může sloužit jak žákům, tak učitelům na středních školách, ať už jako materiál vhodný k využití přímo ve výuce nebo jako sbírka úloh k procvičování či k tvorbě testů. Vytvořená GeoGebra on-line kniha (obsahující krokované konstrukce) může čtenáři pomoci řešenou úlohu lépe pochopit, zvláště v druhé části sbírky příkladů, ve které nepracujeme pouze v určité rovině, ale v celé krychli. Může ovšem sloužit také samostatně.

Jelikož se v práci pracuje s řezy krychle, bylo by možné ji rozšířit rovněž o teoretický podklad k sestrojování řezu tělesa rovinou, avšak jelikož bylo hlavním tématem řešení metrických úloh analytickou a syntetickou metodou, rozhodla jsem se to do práce nezařazovat.

Seznam použitých zdrojů

Boček, L., & Kočandrle, M. (2018). *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie* (3. vyd.). Prometheus.

Halas, Z. (Ed.). (2018). Cesta ke skalárnímu součinu. In J. Hromadová & A. Slavík (Eds.), *Cesty k matematice III* (s. 23–29). MatfyzPress.

<https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2018/sbornik.pdf>

Holešová, M. (2011). Analytická a syntetická geometria vo vyučovaní matematiky. *Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky* (s. 36–41).

http://kybermatika.uniza.sk/images/document/zbornik2013/4Holesova_2013.pdf

Hurtová, L. (2012). *Sbírka řešených úloh z analytické geometrie doplněná o jejich konstrukční řešení* [Diplomová práce, Technická univerzita v Liberci].

<https://dspace.tul.cz/handle/15240/11850>

Kreslová, I. (2019). *Analytický a syntetický přístup k řešení metrických úloh v prostoru* [Diplomová práce, Univerzita Karlova].

<http://hdl.handle.net/20.500.11956/109184>

Krynický, M. (2010). *Matematika SŠ*. Realisticky.cz.

<http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=4>

Pomykalová, E. (2017). *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Prometheus.

Pomykalová, E. (2018). *Matematika pro gymnázia – Stereometrie* (4. vyd.). Prometheus.

Šindel, L., & Vlach, O. (2012). Analytická geometrie.

https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/analyticka_geometrie_tisk.pdf

Techambition. (2021). <https://cze-cs.techambition.com/>

Timmer, M., & Verhoef, N. (2012). Increasing insightful thinking in analytic geometry. *Nieuw archief voor wiskunde*, 5/13(3), 217–219.

<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2012-13-3-217.pdf>

Vondra, J. (2016). *Matematika pro střední školy – 7. díl: Analytická geometrie v prostoru – Učebnice*. Didaktis.

Vondra, J. (2021). *Matematika pro střední školy - 6. díl: Stereometrie – Učebnice (2. vyd.)*. Didaktis.