

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Výuka algebraických výrazů pomocí algebraických dlaždic

Teaching algebraic expressions using algebra tiles

Gabriela Kuchaříková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

Studijní obor: Navazující magisterské studium

Praha 2022

Odevzdáním této diplomové práce na téma Výuka algebraických výrazů pomocí algebraických dlaždic potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 19. 4. 2022

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí mé práce, prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za vedení mé diplomové práce. Za její velkou podporu, pomoc a podnětné připomínky. Musím také poděkovat svým žákům, kteří se mého výzkumu účastnili a projevovali nadměrnou aktivitu i v navazujících výzkumech. Velké díky patří i mé matce Evě Kuchaříkové a zejména partnerovi Janu Rudolfovi za jejich podporu a trpělivost při psaní diplomové práce.

ABSTRAKT

Primárním cílem předkládané práce je připravit a realizovat výuku výrazů s proměnnými v osmém ročníku základní školy za podpory algebraických dlaždic tak, aby žáci pochopili základní principy úprav jednoduchých algebraických výrazů. Sekundárním cílem bylo zjistit, zdali je možné tuto výukovou metodu aplikovat i v online prostředí, které bylo nutné na základě pandemie Covid-19 využít.

Teoretická část práce se zmiňuje o zavedení symbolického jazyka algebry a o způsobech chápání písmene (proměnné). Její součástí jsou definice základních pojmů algebry na základní škole a řešerše vybraných učebnic. Jako podklad pro přípravu výzkumné části sloužila i zmínka o hladinách práce žáků s algebraickými výrazy a kategorizování chyb, kterých se žáci při úpravách dopouštějí. Nechybí zde ani představení dvou typů algebraických dlaždic.

Experimentální část práce je orientována na propedeutiku dlaždic prostřednictvím operací s celými čísly, výuku výrazů s proměnnou s využitím algebraických dlaždic a rozšíření výuky výrazů na základní škole (Vietovy vzorce, doplnění na čtverec). V dílčích oddílech, které se zaměřují na jednotlivé operace s výrazy, jsou uvedeny použité úlohy během výuky a průběh řešení vybraných úloh je zaznamenán v rozhovorech mezi žáky a vyučujícím. Uvedena jsou zde pochybení žáků s jejich řešením (případně návrhem řešení) včetně možností, jak jim přistě předejít.

Algebraické dlaždice jsou vhodným doplňkem výuky výrazů s proměnnou, je potřeba je však doprovázet symbolickým zápisem. Jsou omezeným nástrojem, ale pro odvození základních principů úprav jednoduchých algebraických výrazů jsou nenahraditelným přínosem.

KLÍČOVÁ SLOVA

Algebraické dlaždice, algebraický výraz, rozklad na součin, roznásobit, pravoúhelník, ekvivalentní úpravy, doplnění na čtverec, Vietovy vzorce.

ABSTRACT

The primary goal of this thesis is to prepare and carry out an education programme on algebraic expressions with variables for eight grade primary school students. This is so they can understand the basic principles of operations with simple algebraic expressions. The secondary goal was to determine whether this education method can also be applied in an online environment, which became a necessity during the Covid-19 pandemic.

The theoretical chapter of the thesis covers the introduction of the symbolic language of algebra and the ways of understanding a letter (variable). It contains the definition of basic algebraic terminology in a primary school environment as well as an analysis of select textbooks. Additionally, student work levels with algebraic expressions and a categorization of students' mistakes in operations are used as supplementary grounds for the experimental chapter of the thesis. Finally, the two types of algebra tiles are presented.

The experimental chapter of the thesis is aimed at the propaedeutics of algebra tiles via operations with integers, at teaching variable expressions using algebra tiles and at expanding the method of teaching expressions in primary school (Vieta's formulas, completing the square). This chapter's sections cover the respective expression operations and detail the problems used in class. The process of solving select problems is recorded in dialogues between the students and the teacher. The students' mistakes are presented along with the solutions (or solution suggestions) and the possible ways of preventing them.

Algebra tiles are a fitting accessory to teaching variable expressions, however they need to be accompanied by symbolic notation. As a tool, they have limited use, but are an irreplaceable benefit for deriving the basic principles of operations with simple algebraic expressions.

KEYWORDS

Algebra tiles, algebraic expression, factorization, expand, rectangle, equivalent operations, completing the square, Vieta's formulas.

Obsah

Úvod	7
1 Teoretická část	9
1.1 Jazyk písmen a algebraické výrazy	9
1.2 Prostředí algebraických dlaždic pro výuku algebraických výrazů	16
1.2.1 Algebraické dlaždice podle Hejného	17
1.2.2 Druhý druh algebraických dlaždic	19
1.2.3 Shrnutí	23
1.3 Výklad algebraických výrazů v učebnicích	23
1.3.1 Učebnice C, D, E, nakladatelství H-mat	23
1.3.2 Matematika: výrazy a rovnice 1, nakladatelství Nová škola	25
1.3.3 Matematika 8, nakladatelství Prodos	27
1.3.4 Matematika pro 8. ročník základní školy, nakladatelství Prometheus	28
1.3.5 Shrnutí provedené rešerše učebnic	30
2 Praktická část	32
2.1 Příprava na výuku a výroba podkladů	32
2.2 Odvození hodnot dlaždic, základní manipulace	36
2.3 Propedeutika dlaždic na celých číslech	38
2.3.1 Znázorňování, čtení a základní manipulace s jednotkovými dlaždicemi	38
2.3.2 Sčítání a odčítání celých čísel pomocí dlaždic	43
2.3.3 Násobení celých čísel pomocí dlaždic	51
2.3.4 Rozklad na součin a dělení	65
2.3.5 Závěr propedeutiky	68
2.4 Algebraické výrazy s proměnnou	70
2.4.1 Zápis a znázornění algebraických výrazů	70

2.4.2	Sčítání a odčítání algebraických výrazů, hodnota výrazu, dosazení do výrazu	74
2.4.3	Násobení algebraických výrazů.....	76
2.4.4	Vytýkání z algebraického výrazu, rozklad na součin, dělení	92
2.5	Další možné využití dlaždic	99
2.5.1	Ekvivalentní úpravy rovnic	100
2.5.2	Vietovy vztahy.....	109
2.5.3	Doplnění na čtverec	111
Závěr.....		113
Seznam použité literatury		116
Seznam příloh		118
Seznam obrázků.....		118

Úvod

V diplomové práci se věnuji výuce algebraických výrazů na základní škole se zapojením manipulace s algebraickými dlaždicemi. Algebraické dlaždice propojují obsahy pravoúhelníků s algebraickými výrazy, manipulace s dlaždicemi pak odpovídá úpravám výrazů. Důvodů, které mě přiměly k volbě tohoto tématu, je více. Prvním z nich je má osobní zkušenost při výuce matematiky v osmých a devátých ročnících základní školy, kdy jsem se setkala s nepochopením, nelibostí a nesprávnými úpravami při práci s výrazy. Druhým důvodem bylo mé studium didaktiky matematiky na pedagogické fakultě, kde jsem se díky N. Vondrové měla možnost poprvé setkat s algebraickými dlaždicemi. Posledním důvodem byla má účast na zadávání a opravování zkušebních přijímacích testů na střední školy a studium výsledků mezinárodního testování PISA a mezinárodního šetření TIMSS, ve kterém byla při řešení úloh zaměřených na algebraické výrazy úspěšnost našich žáků menší než 50 %.

Cílem diplomové práce je připravit a realizovat výuku výrazů s proměnnými za podpory algebraických dlaždic tak, aby žáci pochopili základní principy úprav jednoduchých algebraických výrazů. Druhotným cílem bylo zjistit, zda je takovou výuku možné realizovat i v online prostředí při distanční výuce. Bylo se proto potřeba nejprve teoreticky seznámit s problémy, které žáci mají, a dále náležitě pochopit aparát algebraických dlaždic. Na základě zjištěných poznatků byla připravena a následně analyzována výuka. Výzkum byl realizován v osmém ročníku základní školy během distanční výuky. Hodiny proto bylo možné zaznamenat. Posléze byla provedena rešerše získaných záznamů, která tvořila klíčový podklad pro experimentální část této diplomové práce.

Teoretická část práce se zmiňuje o zavedení symbolického jazyka algebry a o způsobech chápání písmene (proměnné). Její součástí jsou definice základních pojmů z využívaných souhrnných publikací matematických poznatků základní a střední školy. Pozornost je věnována rozdělení práce s výrazy do několika úrovní a klasifikaci nejčastějších žakovských chyb podle Hejného (1990). Díky zaměření výzkumné části práce na výuku výrazů pomocí algebraických dlaždic je součástí teoretické části i představení dvou základních typů dlaždic včetně několika modelových situací. V neposlední řadě je zde provedena analýza učebnic, které jsou zkoumány z hlediska přístupů k dané problematice.

Praktická část práce je rozdělena do čtyř oddílů. První je věnován přípravě výuky a výrobě podkladů. Následující oddíly se zabývají propedeutikou dlaždic, a to prostřednictvím operací s celými čísly, samotným průběhem výuky výrazů s proměnnou za doprovodu algebraických dlaždic a rozšířením výuky výrazů na základní škole. Poslední tři oddíly jsou rozdělené na části, které se věnují jednomu typu úpravy výrazů. Součástí oddílů jsou přehledně sepsaná zadání úloh. Průběh jejich řešení je zaznamenán v navazujících rozhovorech mezi žáky a vyučujícím.

V přílohách práce jsou materiály, které mohou sloužit jako podklad pro výuku dalším vyučujícím. Patří mezi ně soubory s dlaždicemi, které jsou připraveny pro žáky, aby se mohli do výuky s podporou dlaždic efektivně zapojit. Dále jsou zde zařazené pracovní listy, které jsem vytvořila jako doprovodný materiál pro rozšíření výuky algebraických výrazů na základní škole. Zaměřují se na odvození Vietových vztahů a doplnění na čtverec.

1 Teoretická část

1.1 Jazyk písmen a algebraické výrazy

Algebraickou symbolikou se zabývala celá řada významných matematiků několik staletí, například Descartes (1596 – 1650), Leibniz (1646 – 1716) aj. (Struik, 1963). Avšak právě francouzský advokát dvora Jindřicha IV. a matematik Francois Viete (1540 – 1601) je považován za zakladatele písmenové symboliky algebry takové, jakou ji známe dnes. Stalo se tak na konci 16. století, kdy se ve svém díle *In artem analyticam isagoge* z roku 1591 zasloužil

o zdokonalení teorie rovnic. Zároveň v tomto díle vyjadřoval jako jeden z prvních čísla pomocí písmen. V dalším díle *Logistica speciosa* používal písmena k vyjádření číselných koeficientů, v dnešním významu užíval i znamének početních operací sčítání a odčítání, ale například místo A^2 používal spojení „A quadratum“. Díky symbolice písmen byla umožněna obecná diskuse nad algebraickými problémy. Algebraikům 16. století se též přezdívalo „cosisté“ podle italského slova „cosa“, v překladu neznámá věc. Vietovo nahrazení čísel písmeny otevřelo nové možnosti matematice a podpořilo dílo Leibnize (symbolika infinitesimálního počtu) a Descarta, který aplikoval algebru na geometrii.

Podle Küchemanna (1978) můžeme písmeno obecně chápat čtyřmi způsoby. Jedním ze způsobů může být tzv. **písmeno jako zkratka** (letter as object) pro označení předmětu, například d jako děti, l jako listy apod. Může zde však nastat jistý spor v chápání množství, které písmeno označuje. Pod písmenem d si lze představit počet dětí, případně $3d$ může označovat tři děti – d je v roli jednotky. Obdobně se do sporu může dostat algebra a aritmetika, kde písmeno m může značit počet metrů, nebo označení metru. Dále může být písmeno chápáno jako **určitá neznámá** (letter as specific unknown), kdy reprezentuje právě jednu hodnotu, kterou neznáme a hledáme ji. Jako třetí možnost je písmeno v roli **zobecněného čísla** (letter as generalised number), kdy reprezentuje více než jednu hodnotu. Například obecný vzorec pro nákup kilogramu ovoce, kdy je cena 15 Kč/kg a každý kupuje jiný počet kilogramů, symbolicky $15 \cdot x$. Poslední čtvrtou možností nazývá letter as variable (**proměnná**), kdy se větší počet proměnných navzájem ovlivňuje. Zde Küchemann uvádí příklad: Modré pastelky stojí 5 pencí, červené stojí 6 pencí. Koupíme několik modrých a červených pastelek a nákup nás bude stát 90 pencí. Pokud písmeno r označuje počet

červených pastelek a písmeno b počet modrých pastelek, zápis řešení pomocí proměnných je $5b + 6r = 90$. Jak můžeme vidět, písmena b, r jsou v zápise ukotveny vzájemným vztahem.

Capewell et al. (2004, p. 38) se na funkci písmene dívají z jiného pohledu. První pohled je **písmeno v roli neznámé** v zápisu rovnice, například $3x - 7 = 5$, kde nabývá konkrétní hodnoty. V další roli je součástí **předpisu funkce**, kupříkladu $y = 7 - 5x$. Zde jsme schopni najít konkrétní hodnotu y pro zvolenou hodnotu x . Dále může být písmeno **součástí vzorce**, který používáme i v jiných vědách. Například vzorec z fyziky pro výpočet výkonu $U = I \cdot R$. Výkon, proud i odpor nabývají různých hodnot. Když známe dvě z nich, třetí jsme schopni dopočítat. Jako poslední typ zmiňují autoři **identitu**, kdy porovnáváme dva stejné, ale jinak vyjádřené výrazy, např. $4(x + 3) = 4x + 12$.

Pomocí písmen, číslic a početních operací tvoříme v matematice tzv. **algebraické výrazy**. Definice tohoto pojmu se mohou různit napříč jednotlivými stupni škol a učebnicemi. Na základní škole většinou sousloví algebraický výraz nenalezneme, název nahrazujeme pojmem výraz s proměnnou, případně používáme označení mnohočlen.

Pojem mnohočlen uvádí například Odvárko a Kadleček. Ve svém přehledu matematiky pro základní školy ho definují následovně.

Výrazy $3x$; $-6ab$; $1,4k^2lm^5$; y ; -29 ; 6 jsou příklady **jednočlenů**.

Koeficient jednočlenu je číslo. **Mnohočlen** se nazývá jednočlen nebo výraz, který je vyjádřen jako součet jednočlenů.
(Odvárko a Kadleček, 2004, s. 66)

Jako mnohočleny pak představují dva příklady:

$$5x^3 + 8xy^3 + (-11)y^2 + 0,4z^5$$

$$a^9 + 13a^5 + (-4)a^3 + a^2 + 5a.$$

Pouze v jednom z mnou prohlížených přehledů matematiky základní školy se vyskytuje název algebraický výraz.

Výraz s proměnnou (algebraický výraz) je matematický zápis (početní výraz), kterým vyjadřujeme početní operace (úkony) s čísly

a číselnými proměnnými (obsahuje čísla a číselné proměnné vyjádřené písmeny). Číselný **koeficient (konstanta)** je číslo ve výrazu. **Mnohočleny** jsou výrazy s více členy s jednou nebo více proměnnými. Za mnohočleny považujeme výrazy, které jsou součtem nebo rozdílem několika **jednočlenů**. (Kuzma a Reiterová, 2017, s. 52)

V přehledech středoškolské matematiky se již vyskytuje přímo definice algebraického výrazu, občas doplněná o rozdělení na racionální a iracionální algebraický výraz a o definici úpravy výrazu.

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořený z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Neobsahuje-li algebraický výraz odmocniny, nazývá se **racionální** algebraický výraz (výraz s odmocninami se nazývá **iracionální**). (Vošický, 2007, s. 34)

Jiné přehledy uvádějí podrobnější popis a zahrnují i lomené výrazy, se kterými se žáci setkávají v devátém ročníku základní školy, případně až na středních školách. Součástí uváděných definic je i definiční obor proměnných, rovnost algebraických výrazů a v neposlední řadě vymezení pojmu úprava algebraického výrazu.

Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací. K výrazům obsahujícím proměnné se připojuje **obor proměnných...** **Úprava algebraického výrazu** spočívá v nahrazení daného algebraického výrazu jiným výrazem, který se mu rovná ve společném definičním oboru proměnných. Tento **definiční obor D** určíme z **podmínek, za nichž daný výraz i jeho úpravy mají smysl**. (Polák, 1991, s. 104 – 105)

Dovednost **upravovat a pracovat s výrazy** (hladina standardní manipulace podle Hejného) je zcela nezbytná při řešení matematických úloh. Může se jednat o pokyny: uprav výraz na součin, odstraň z výrazu podíl nebo odmocninu apod. Cílem může být i **zjednodušení výrazu**. Pod tímto pojmem se rozumí úprava, díky níž dostaneme výraz s menším počtem proměnných, členů, závorek aj. Na středních a vysokých školách se může student navíc setkat i s pojmy, jako je tranzitivnost rovnosti. Pomocí logických spojek z výrokové logiky lze vyjádřit definici úpravy algebraického výrazu.

Hejný (1990) rozděluje práci s algebraickými výrazy celkem do třech hladin: **modelování, standardní manipulace a strategická manipulace**.

Nejnižší, ale zároveň nejdůležitější hladinou je **modelování**. Umění modelovat znamená chápat význam metody. V této hladině zapisujeme slova textu pomocí symbolů. Přepisu využíváme například při počítání délek, obsahů, objemů a povrchů, při určování velikosti úhlů, v analytické geometrii a nejčastěji pak při zápisu slovních úloh a rovnic. Podle Hejného je pro žáky největší chybou napodobování učitelova postupu. Sami žáci by totiž měli objevovat výhody symbolického zápisu a dostat při tomto pátrání dostatečný časový prostor včetně vhodně zvolených úloh učitelem. Například při zápisu vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku by měl učitel použít nejprve slovní vyjádření – základna krát výška lomeno dvěma. Až následně při opětovném použití výpočtu by žáci sami měli vyžadovat symbolický zápis, kterému budou plně rozumět. V opačných případech se pak stává, že žáci zápisu nerozumí, případně neumí do vzorce dosadit. Svá tvrzení Hejný doprovází několika příklady (viz obrázek 1) a úlohami, na kterých ukazuje, jak žáky motivovat k objevování.

Navazující hladinou je **standardní manipulace** se symboly. Představuje úpravy algebraických výrazů, ke kterým používáme odvozená a dokázaná pravidla. Hejný at al. (1990) poukazují na důležitost této hladiny přirovnáním k dirigentovi orchestru. Pokud se jen stěží dokáže soustředit na to, jak dirigovat různé takty, nedokáže se soustředit na celou hudbu a její dynamiku. Orchestr potom nemůže dobře hrát. Tedy pokud žákovi dělají potíže základní úpravy algebraických výrazů, nemůže řešit matematické úlohy, ve kterých jsou úpravy podružné a hlavním úkolem je něco jiného. Bez dobré znalosti úprav algebraických výrazů je znemožněno další matematické vzdělání. Znalosti nezávisí pouze na učiteli, ale

hlavne na usilovné práci žaka, ktorý musí vyriešiť mnoho úloh, aby jazyku písmen porozumel a umel jej používať. Aby sa učiteli nestalo, že jednoduchými opakujúcimi sa typy úloh odradí od snažení schopnejši žaky, alebo naopak náročnými úlohami odstraní z poznávacího procesu slabši žaky, nabízejí autoři metodu třeoh cest jako v pohádkách. Navrhují vytvořit celkem tři obtížnosti zadání, ze kterých si sami žáci zvolí variantu pro ně nejpřijatelnější. Učitel tím zajistí pracovní nasazení všech svých žáků a umožní jim, aby aspoň základní vzorce ovládali všichni. Na následujícím obrázku (obrázek 2) můžeme vidět příklad skupin zadání.

Příklad 1

Štvrtá trieda. Učiteľ sa zahrá na jasnovidca. Povie „každý z vás si pomyslí číslo — pripočíta k nemu 2 — výsledok vynásobí tromi — odpočíta 7 — odpočíta pôvodné číslo. Povie mi, čo mu vyšlo a ja mu poviem, čo si myslel“. Táto mágia deti vzrušuje, chcú ju odhaliť. Urobí veľa konkrétnych príkladov a dôjdu k poznaniu, že pôvodné číslo je výsledok plus jedna delené dvoma.

Učiteľ ukáže druhé, tretie, štvrté také kúzlo. Žiaci ho dešifrujú čoraz ľahšie. Potom sami začnú vymýšľať podobné triky, nech učiteľ objaví tajomstvo ich mágie. Učiteľ pristane. Žiak chrbtom k tabuli diktuje: „Napište číslo, pridajte 6, vynásobte 3, odoberte pôvodné číslo, odoberte 10, deľte dvoma, povedzte výsledok.“ Učiteľ pred zrakmi triedy píše

$$8 \mapsto 8 + 6 \mapsto 3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 3 \cdot 8 + 18 \mapsto 3 \cdot 8 + 18 - 8 = 2 \cdot 8 + 18 \rightarrow 2 \cdot 8 + 18 - 10 = 2 \cdot 8 + 8 \rightarrow (2 \cdot 8 + 8) : 2 = 1 \cdot 8 + 4.$$

Potom pri ďalšom pokuse už píše namiesto 8 priamo n . Nič nevysvetľuje, ale dá možnosť, aby hrou motivovaná žiacka zvedavosť nazrela do kuchyne jeho úvah. Najprv ukázal aký je múdry, a potom ponúkol tento poklad každému, kto tiež chce byť múdry.

Obrázek 1 – Hladina modelování, příklad (Hejný at al., 1990, s. 145)

Chceme naučiť žiakov používať vzťah $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Zostavíme dve postupnosti úloh:

- I. Rozložte na súčin: $r^2 - s^2$, $a^2 - 4^2$, $25 - c^2$, $4a^2 - b^2$, $9 - 25a^2$, $36r^2 - 9$, $25k^3 - k$, $a^2 - 3$, $12 - 3t^2$, $x^2 - x^4$, $3y^2 - 9$, $p^4 - r^4$, $(3x + y)^2 - z^2$, $(a - c)^2 - (b - c)^2$, $(a - 6b)^2 - (3a - 2b)^2$, $25 - (2u + 5)^2$, $25m^2 - (2m - n)^2$, $a^6 - 64$, $(\sqrt{2} + 2)^2 - (\sqrt{2} + 1)^2$.
- II. Roznásobte: $(a - b)(a + b)$, $(x - x^2)(x + x^2)$, $(t^2 - 2)(2 + t^2)$, $(p - 2 + r) \cdot (p - 2 - r)$, $(r - s)(r^2 + s^2)(r + s)$, $(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$, $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$, $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)$, $(-a + b + c)$.

Z týchto úloh vytvoríme tri súbory. Do súboru **A** dáme prvých 10 úloh z I a prvé tri z II. Do súboru **B** dáme z I. úlohy 2, 5, 6, 9, 11 až 14 a z II. úlohy 2 až 6. Do súboru **C** dáme z I. úlohy 4, 6, 12, 14 až 19 a z II. úlohy 4 až 8.

Každý zo súborov predstavuje jednu cestu. Žiaci si sami, podľa vlastného uváženia volia ten súbor — tú cestu poznávania — ktorá sa im zdá primeraná. Slabši si volia mierne stúpanie po ceste **A**, najzdatnejši stúpajú po strmej ceste **C**.

Obrázek 2 – Hladina standardní manipulace, příklad (Hejný at al., 1990, s. 147)

Nejvyšší hladinou práce s algebraickými výrazy je **strategická manipulace**. Již z názvu lze usoudit na rozdíl od standardní manipulace. Na rozdíl od druhé hladiny, kde postačí nácvik pravidel pro správné řešení úloh, zde musí žák přinést nějaký svůj nápad, svou myšlenku. Strategie postupu není od začátku zřejmá, žák je nucen zkoumat různé cesty a najít místo, ze kterého je již jednoduchými úpravami schopen dojít k cíli. Na následujícím obrázku (obrázek 3) můžeme vidět příklad z 25. polské matematické olympiády, který strategickou manipulaci ilustruje.

Příklad 1

Nájdite aspoň jednu dvojici $[a, b]$ prirodzených čísel, aby platilo:

$$7 \nmid ab(a+b) \quad \text{a} \quad 7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7).$$

Obrázek 3 – Hladina strategické manipulace, příklad (Hejný et al., 1990, s. 149)

Na rozdíl od první hladiny, která je přesně vymezená, se hranice mezi posledními dvěma hladinami může pohybovat. Záleží na schopnostech žáka, co bude ještě vnímat jako jednoduché úpravy a co pro něj bude znamenat větší úsilí. Například úlohu z obrázku 2 $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ může žák základní školy vnímat jako obtížnou, zatímco žák gymnázia (nebo střední školy) ji může chápat jako standardní.

V praktické části své diplomové práce se budu zabývat zavedením symboliky v matematice a výukou algebraických výrazů. Součástí bude i popis a případná náprava žakovských chyb, které brání úspěšnému řešení. Nejčastěji se vyskytované chyby lze rozdělit do několika skupin. Hejný (1990) je klasifikuje na sedm druhů.

1. Numerické chyby

Numerické chyby jsou chyby v číselných operacích. Žáci se soustředí například na způsob roznásobení závorky konstantou nebo třeba na zjednodušení zápisu mnohočlenu. V tu chvíli však nevěnují dostatečnou pozornost číslům, se kterými pracují, a mohou se tak dopustit chyby, viz následující příklady.

$$3 \cdot (X + 2) = 3X + 5$$

$$1 + 2X - 3X + 4 = 1X + 5$$

2. Úkonové chyby

Mezi tyto chyby řadíme špatné zapamatování pravidel pro počítání s výrazy. Takovou chybu je potřeba od základu prozkoumat a napravit, nenabídnout pouze řešení, jako například vzorec.

$$12^2 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2^2$$

$$\sqrt[5]{\frac{C}{D}} = \frac{\sqrt[5]{C}}{\sqrt[5]{D}} = \frac{C}{D}$$

3. Grafické chyby

Mezi grafické chyby můžeme zařadit mylné přepsání číslic/písmen/zlomku aj., které může mít katastrofální následky – úprava se stane například velmi obtížnou, nebo se naopak zjednoduší, případně se stane nemožnou, nebo změní celý výsledek. Jde zejména o písemné vyjádření žáka, kdy se v průběhu úprav a soustředěnosti na všechny operace stane, že na symbol zapomene, nebo jej postupně přemění na jiný. Abychom těmto metamorfózám předcházeli, je potřeba dodržovat úpravu výpočtů. Například při počítání s rovnicemi psát všechna rovnítká pod sebe a úpravy oddělovat zpětným lomítkem, nebo při pochybení svůj postup škrtnout a začít na novém místě od začátku – nepřepisovat. Obzvláště žáci s dysgrafií či dyslexií mohou mít v této oblasti velké obtíže. Náznak, vývoj a vznik těchto chyb můžeme vidět na následujícím obrázku 4.

The image shows four lines of handwritten mathematical expressions illustrating common graphical errors:

- $d \rightarrow d \rightarrow a$
- $0 \rightarrow 6 \rightarrow 6$
- $\sin \frac{x}{3} \rightarrow \sin \frac{x}{3} \rightarrow \frac{\sin x}{3}$
- $\sqrt{a+b} \rightarrow \sqrt{a+b} \rightarrow \sqrt{a} + b$

Obrázek 4 – Grafické chyby žáků (Hejný et al., 1990, s. 156, o. 4)

4. Chyby velkých skoků

S chybou při provádění více úprav najednou jsme se setkali nejspíše všichni. Nejčastěji nás k tomu donutí časový nátlak na práci, například v písemných zkouškách. Případně nás k chybě může dovést i mylné přesvědčení, že dané operace již ovládáme, a jsme tak schopni provést více úkonů naráz. Příkladem

může být následující úprava výrazu jednoho žáka, který přeskočil zápis mezikroku roznásobení závorek a ihned se pustil do operací sčítání a odčítání.

$$3 \cdot (4 + X) - 2X + 8 \cdot (X + 2) = 20 + 7X$$

5. Strategické chyby

Ke strategickým chybám dospívá většina žáků a studentů při necelostním vnímání algebraického výrazu. Na výraz se nedívají jako na celek, ale rozdělí si ho na části, které se snaží vyřešit zvlášť. Bývá tomu například při úpravách lomených výrazů, kdy žák není schopen objevit správnou strategii řešení, a tak se pouští do první úpravy, která ho napadne. V následujícím příkladu můžeme vidět nesprávné umocnění dvojčlenu podle vzorce, místo vnímání operace sčítání zlomků a uvědomění si potřeby společného jmenovatele. Při opomenutí této potřeby se pak výraz stává zbytečně komplikovaným a téměř nemožným k celkové úpravě.

$$\frac{2}{X-4} + \frac{15}{(X-4)^2} = \frac{2}{X-4} + \frac{15}{X^2 - 8X + 16} \dots$$

6. Bezradnost, bloudění

Tuto skupinu nelze vnímat přímo jako chyby. Jde spíše o žakovu neschopnost se v zadání zorientovat a najít strategii řešení. Může se stát, že se ve svých výpočtech vrátí opět k původnímu zadání, nebo si celou úlohu utvoří ještě složitější. Hejný (1990, str. 156) uvádí příklad

$$(X+1)(X+2)(X+3)(X+4) = 0$$

$$(X^2 + 3X + 2)(X^2 + 7X + 12) = 0,$$

kde místo rozložení na jednotlivé činitele žák přijal výzvu roznásobení závorek, přičemž ve svém výsledném zápise jen stěží objeví kořeny rovnice.

7. Jiné chyby

Do této skupiny Hejný zařazuje všechny chyby, které nespádají do žádné z předchozích.

1.2 Prostředí algebraických dlaždic pro výuku algebraických výrazů

Při výuce algebraických výrazů můžeme volit z několika cest. Úkolem učitele je, aby zvolil nejlepší směr pro své žáky a dopřál jim dostatek času na adaptaci v novém prostředí.

Jednou z možných cest jsou algebraické dlaždice. Jedná se o obrazce tvaru čtverce a obdélníku se stanoveným obsahem. Při jejich tvorbě si musíme dát pozor, aby hodnoty, které používáme nebyly vzájemně násobkem. Mohlo by dojít k falešné domněnce, že je lze mezi sebou zaměňovat (například by nám vždy mohlo platit $2X = 6$, mohla bych tak použít jednotkové dlaždice místo dlaždice hodnoty X). Prostředí algebraických dlaždic umožňuje ukázat žákům vztah mezi symbolickým zápisem výrazu a obsahem plochy. Poukazuje na fakt, že plochou může být znázorněn i výraz, který neobsahuje druhou mocninu. Dává žákům příležitost porozumět početním operacím s výrazy a jejich pravidlům bez nutnosti memorování pouček a pravidel.

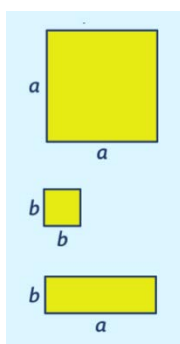
Na začátku je tato metoda výuky pro žáky časově náročnější. Musí si vyrobit své dlaždice a naučit se s nimi pracovat. Práce s nimi je však intuitivní a pomáhá nám vyhnout se častým pochybením při počítání s výrazy, které uvádí ve svém rozdělení například Hejný (1990). Obětování většího časového úseku při začátku studia výrazů se tak rozhodně vyplatí.

Algebraických dlaždic máme několik druhů. Pokud pomineme barvu a proměnné, kterými označujeme jejich hodnoty, můžeme je rozdělit na dva základní typy. V prvním případě používáme skládání dlaždic přes sebe, v druhém případě je skládáme vedle sebe. Oba druhy jsou popsány v následujících oddílech.

1.2.1 Algebraické dlaždice podle Hejného

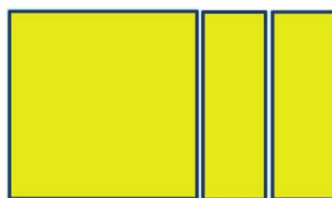
M. Hejný ve svých učebnicích využívá několik prostředí, která by člověku, jež není s jeho metodou obeznámen, mohla připadat nesrozumitelná. Časem si však člověk na toto prostředí přivykne, pochopí jejich smysl a následná orientace v nich není složitá. Prostředí, ve kterém se Hejného metoda věnuje algebraickým výrazům, se nazývá Jazyk písmen a poprvé se objevuje v učebnici C.

Hejný využívá dlaždice bílé a žluté barvy. Žluté dlaždice reprezentují kladné hodnoty a bílé dlaždice reprezentují záporné hodnoty. Od samého začátku používá dvě proměnné – a, b . Hodnoty dlaždic jsou žákům sděleny ihned v začátku první kapitoly, ale většinou se nezapisují na dlaždice. Žáci musí vědět, že větší čtverec má hodnotu a^2 a menší b^2 , obdélník je pak ab (obrázek 5).



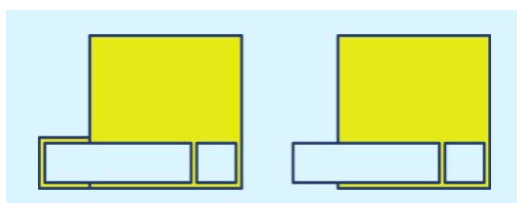
Obrázek 5 – Vzhled kladných dlaždic a^2 , b^2 , ab (Hejný a kol., Učebnice D, s. 25)

Při sčítání proměnných, které dlaždice reprezentují, dávají žáci jednoduše dlaždice k sobě. Žlutý obrazec je pak výsledek úlohy. Příkladem může být úloha $a^2 + 2ab$, jejíž řešení vidíme na obrázku 6.

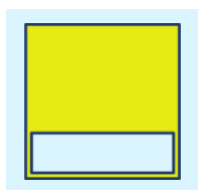


Obrázek 6 – Zobrazení výrazu $a^2 + 2ab$

Při odčítání využívají žáci bílé dlaždice, které se smějí pokládat pouze na žluté plochy, žádná část bílé dlaždice nemůže ležet mimo žlutou plochu (obrázek 7). Zbylá žlutá plocha pak znázorňuje výsledek, jak je to naznačeno například u úlohy $a^2 - ab$ na obrázku 8.

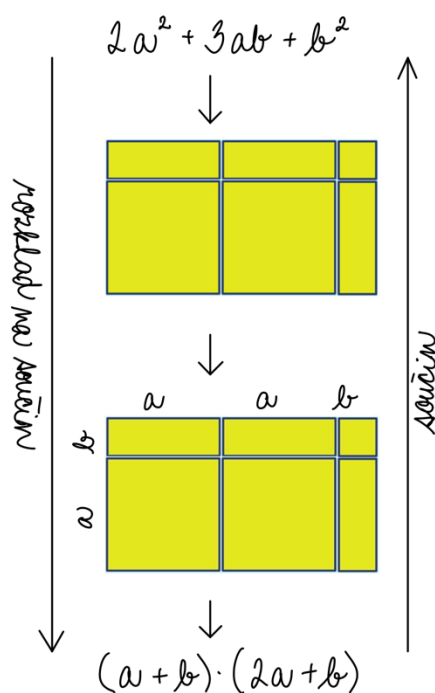


Obrázek 7 – Ukázka správného a špatného umístění bílé dlaždice (Hejný a kol., Učebnice D, s. 26)



Obrázek 8 – Znáznornění výrazu $a^2 - ab$ (Hejný a kol., Učebnice D, s. 26)

Pro zaznamenání násobení a rozkladu na součin (dělení) se dlaždice skládají do tvaru pravoúhelníku. U úloh na součin jsou zadány násobené výrazy, které předepisují strany pravoúhelníku, který se příslušnými dlaždicemi vyplňuje. V úlohách, které se zabývají rozkladem na součin (případně dělením), musí žáci z předem zadaných dlaždic poskládat pravoúhelník. U něj pak následně zapisují délky stran, které určují násobené výrazy. Obě operace jsou zaznamenány pomocí šipek u rozkladu výrazu $2a^2 + 3ab + b^2$ na obrázku 9.

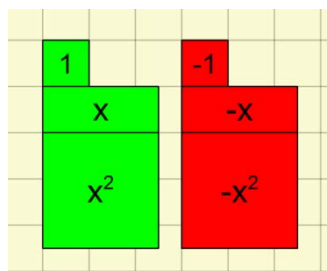


Obrázek 9 – Ukázka součinu a rozkladu na součin

1.2.2 Druhý druh algebraických dlaždic

Druhým typem dlaždic jsou dvou a vícebarevné dlaždice, a to často v barvách zelené pro kladné hodnoty a červené pro záporné hodnoty. Zpočátku se pracuje s jednou proměnnou a jednotkovou dlaždicí. Jedná se tak například o pravoúhelníky s obsahem x^2 , x , 1 a jejich

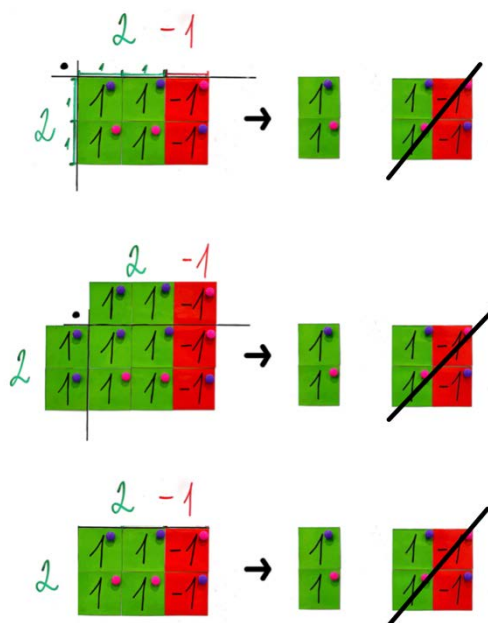
opačnými hodnotami (obrázek 10). Jako další proměnná se nejčastěji přidává y , případně se volí proměnné a, b jako u Hejného dlaždic. Nejdůležitější podmínkou při tvorbě dlaždic je, aby žádná proměnná nebyla nahraditelná jinou proměnnou, případně jednotkovými dlaždicemi (toto pravidlo by mělo platit alespoň pro malé násobky). Opět tím zaručíme, že v žákovi nevznikne dojem, že lze proměnné nahrazovat, tedy vyjadřovat jednu pomocí násobku druhé.



Obrázek 10 – Ukázka dlaždic

Operace sčítání nám dává příkaz seskupit dlaždice k sobě, je tedy velmi intuitivní. Odčítání je mírně komplikovanější. Musíme si jej „přepsat“ na přičítání opačného členu (čísla). Vytvořit takový člen by neměl být pro žáky problém díky již probraným celým číslům. Jakmile máme výraz přepsaný, postupujeme stejně jako u sčítání. Žáci většinou sami rozpoznají, jak upravit výraz s opačnými členy. Pravidlo zní, že stejný počet kupříkladu zelených a červených dlaždic se stejnou absolutní hodnotou se tzv. vyruší. Máme svolení je beze změny hodnoty počátečního výrazu ze znázornění (i symbolického zápisu) odebrat.

Pro násobení případně rozklad na součin je pak více možností znázorňování. Máme možnost využít tabulku, k jejímž okrajům budeme přikládat úsečky délky (dlaždice se stranou délky) násobených výrazů a vnitřní část vyplňovat příslušnými dlaždicemi, které následně tvoří výsledek. Případně můžeme vše řešit bez tabulky a pouze seskupovat požadované dlaždice do tvaru pravoúhelníků, obdobně jako při práci s prvním druhem dlaždic. Všechny tři možnosti zachycuje obrázek 11.



Obrázek 11 – Tři možnosti práce s dlaždicemi při operaci násobení

Aplikace algebra tiles

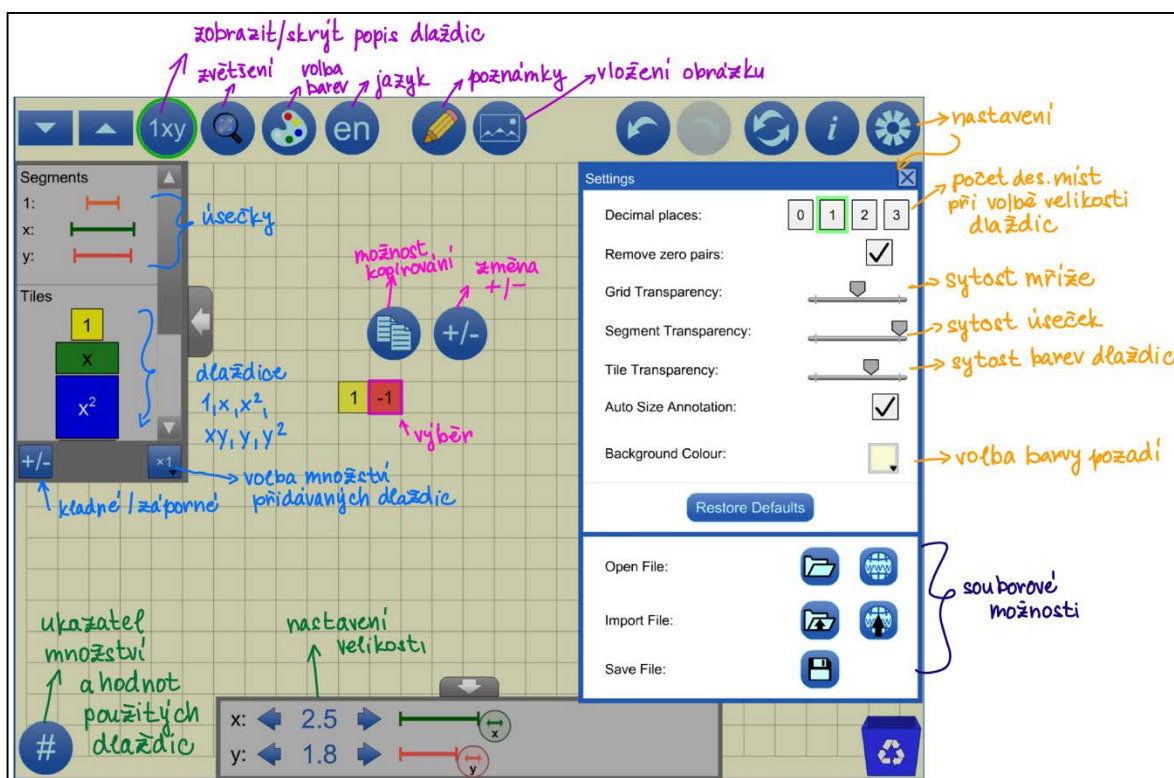
Pro práci s tímto typem dlaždic je možné využít aplikace, které jsou volně dostupné na internetu pro používání na počítači, případně v Google Play a App Store je možné stáhnout aplikaci do telefonu nebo tabletu.

Jednou z aplikací je Algebra Tiles (mathies). Jedná se o virtuální manipulaci s dlaždicemi, která je obdobou jejich fyzické podoby. Při otevření aplikace vám program nabízí výběr z předdefinovaných barevných kombinací dlaždic. Nemusíte se však obávat, že jejich barvu již posléze nezměníte, naopak. Po volbě dlaždic vás aplikace přesune na pracovní plochu, kde bude umístěn pohyblivý panel vlevo s vyobrazenými dlaždicemi. Pouhým kliknutím na jednu z dlaždic máte možnost vybrat ze 42 barev. Součástí panelu jsou i úsečky a jiné dlaždice, které můžete, ale nemusíte využívat. Velikost dlaždic si libovolně upravíte na panelu v dolní části pracovní plochy (pozor však na volbu velikosti jako násobku jedna druhé). V nastavení (ozubené kolečko vpravo nahoře) je možné upravit pozadí, určit možnosti velikostí a transparentnost dlaždic. Po kliknutí a podržení myši (resp. prstu) na dlaždici ji můžeme jednoduše přesunout na pracovní plochu. Zde mohou být dlaždice přesouvány, kopírovány, obráceny (kladné – záporné a naopak) a upravovány ve vybraných skupinách.

Aplikace je sice v anglickém jazyce, ale je velmi intuitivní, proto by žákům při jejím používání nemělo ovládání v cizím jazyce působit větší potíže.

Díky distanční výuce mohli žáci během mého experimentu aplikaci neomezeně používat. Ve škole by tomu tak být nemohlo, protože ne každý žák disponuje dotykovým telefonem nebo tabletem. Podařilo se mi tak i v nelehké distanční výuce propojit zábavné prostředí aplikace s výukou. Její bezspornou výhodou oproti fyzické manipulaci s tištěnými dlaždicemi je přesnost, možnost změny barvy, velikosti a použitých dlaždic (bez větších potíží jako například rozhození ostatních dlaždic) a neomezené množství úseček i dlaždic. V neposlední řadě i nulová časová náročnost před začátkem práce s výrazy.

Na následujícím obrázku (obrázek 12) jsem se pokusila popsat nejdůležitější nástroje aplikace.



Obrázek 12 – Aplikace Algebra tiles

1.2.3 Shrnutí

Jak můžeme vidět, vzhledově jsou si oba typy dlaždic velmi podobné. Liší se pouze v pravidlech pro manipulaci. Výhodou prvního druhu je, že žlutý pravoúhelník, který vznikne, symbolizuje odčítání hodnot přesně tak, jak jsme zvyklí v běžném životě – čím více odčítáme, tím více zmenšujeme (pozor, hodnoty a, b musí být z oboru kladných čísel). Avšak znázornění záporného výrazu není kvůli stanovenému pravidlu o pokládání bílých dlaždic možné. Druhý typ dlaždic má též své výhody. Žáci mají možnost sestavit jakýkoliv výraz včetně záporného. Dlaždice jsou názornější a žák má možnost přesně vidět, co přidal/odebral i díky kontrastně zvoleným barvám. Nevýhodou je však představa, že ačkoliv máme od výrazu odebírat, jeho plocha se před očima žáka zvětšuje.

Je třeba žáky upozornit, že dlaždice jsou omezeným modelem, slouží pro nastínění principu úpravy výrazů a neumožňují přesně vymodelovat všechny situace. Při práci s dlaždicemi je též důležité nezapomenout postup zapisovat i pomocí symbolického jazyka, tj. pomocí čísel, písmen a příslušných operací. Pokud budou oba přístupy používány společně, neodděleně, dobře vynikne podstata zkoumaných operací.

1.3 Výklad algebraických výrazů v učebnicích

Vzhledem k zaměření práce na výuku algebraických výrazů bylo potřeba se podívat i do učebnic ze základní školy, které se tomuto tématu věnují. Podle mého průzkumu jsou na základních školách v Praze 11 nejrozšířenější učebnice matematiky (na druhém stupni) od nakladatelství Nová škola, Prodos a Prometheus. Do výběru učebnic jsem navíc zařadila i učebnice nakladatelství H-mat, které jsou známé svým specifickým uspořádáním a používáním prvního typu algebraických dlaždic.

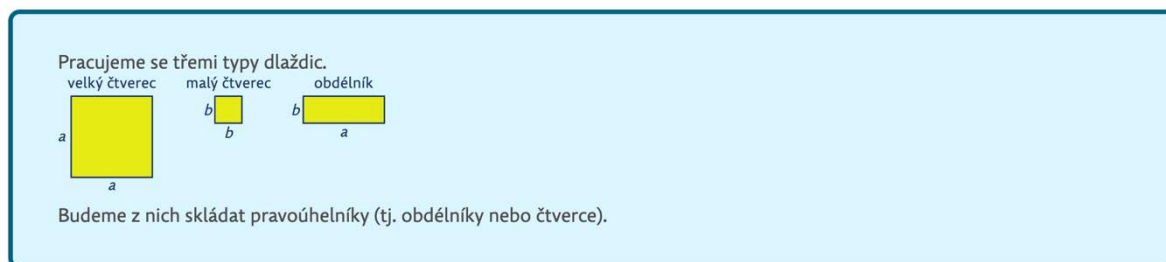
Provedla jsem rešerši zmíněných učebnic a na jejím základě se pokusím objasnit, jakým způsobem je v nich látka zavedena a kolik prostoru je vyčleněno pro procvičování a samostatné objevování žáky.

1.3.1 Učebnice C, D, E, nakladatelství H-mat

Jak jsem již zmínila výše, v Hejného metodě se místo názvů probírané látky objevují názvy prostředí, která jsou k tomu určena. Pro výrazy s proměnnou je určeno prostředí Jazyk písmen, se kterým se poprvé setkáme v učebnici C. Někomu by mohlo připadat, že se

v učebnicích postupuje velmi rychle, avšak na obecné zápisy například pomocí „ n “ jsou žáci již navyklí, proto by jim rychlá adaptace na nové prostředí neměla dělat větší potíže.

Kapitola začíná obrázkem s vyobrazenými kladnými dlaždicemi (obrázek 13) a jejich odvozenými hodnotami v zadání prvního cvičení. Zde si můžeme i povšimnout, že nejsou použity dlaždice s jednou proměnnou hodnot $X^2, X, 1$, nýbrž a^2, b^2, ab .



Obrázek 13 – Zavedení dlaždic (Hejný a kol., Učebnice C, s. 70)

Prvních několik úloh se věnuje skládání pravoúhelníků ze zadaných dlaždic a zapisování jejich stran jako součinu dvou výrazů – jedná se o rozklad na součin. Následně jsou zadány součiny výrazů a žáci mají za úkol zjistit, kolik kterých dlaždic bylo použito (obrázek 14).

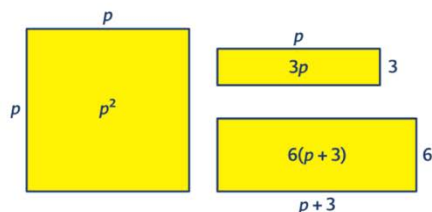
- 4** Z dlaždic je poskládán pravoúhelník o obsahu:
- a) $a \cdot (3a + 2b)$
 - b) $(a + b) \cdot (3a + 4b)$
 - c) $(a + 3b) \cdot (a + 4b)$
 - d) $(a + 5b) \cdot (a + 7b)$
 - e) $(2a + 5b) \cdot (3a + 7b)$
 - f) $(13a + 5b) \cdot (2a + 10b)$
- Zjistěte, kolik kterých dlaždic bylo použito.

Obrázek 14 – Zadání úlohy 4 (Hejný a kol., Učebnice D, s. 25)

Teprve v Učebnici D se zavádí práce s bílými zápornými dlaždicemi. Žáci však neřeší úlohy se samotnou operací odčítání, jako například úlohu $5a - 2a$. Odčítání je zařazeno do kontextu součinu a rozkladu na součin, například úloha $a^2 - 3ab + 2b^2$ ze strany 26 učebnice D, kde mají žáci za úkol poskládat z vybraných dlaždic pravoúhelník a vyjádřit jeho obsah.

Dalším krokem jsou pak úlohy, kde mají žáci nabídnuty dlaždice, se kterými mají pracovat. Například x^2 , x , 1 a p^2 , $3p$, $6(p+3)$. Viz úloha 5 v učebnici E (obrázek 15).

- 5** Máme čtverec o straně p , obdélník $p \times 3$ a obdélník $6 \times (p+3)$. Složte z těchto útvarů pravoúhelník.



Obrázek 15 – Ukázka úlohy s jiným typem dlaždic (Hejný a kol., Učebnice E, s. 30)

V průběhu práce v prostředí Jazyk písmen Hejný zařazuje i úlohy, u kterých se pravoúhelníky využívat nemají a žáci se učí zobecňování svých postřehů pomocí proměnné n (obrázek 16). Zařazuje i rovnice s neznámou x .

- 10** Zjistěte počet modrých teček i počet všech teček v každém ze tří obrazců. Zjistěte počet teček v obrazci pro
a) $n = 5$ b) $n = 6$ c) $n = 10$ d) $n = 20$ e) libovolné n



Obrázek 16 – Ukázka zobecňující úlohy (Hejný a kol., Učebnice E, s. 75)

Teprve závěr Učebnice E se věnuje krátce terminologii. Jsou zde uvedeny příklady, co považujeme za dvojčlen, trojčlen a následně mnohočlen. Sousedí algebraický výraz (výraz s proměnnou) není ani v jedné z učebnic použito.

1.3.2 Matematika: výrazy a rovnice 1, nakladatelství Nová škola

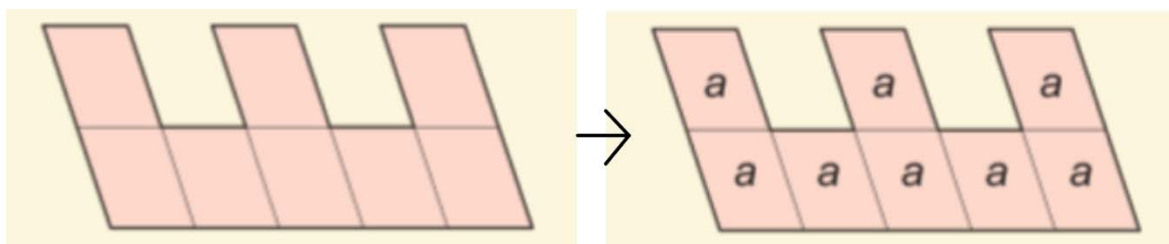
Kapitola výrazy navazuje na předchozí látku mocniny a odmocniny. Autoři ji otvírají motivační úlohou s obrazcem sestaveným z osmi stejných kosodélníků. Po žácích požadují určení jeho obsahu. Žáci však nevědí, jaký je obsah jednoho malého kosodélníku, tudíž se zdá nemožné vyjádřit obsah celého obrazce. Autoři žákům nabízejí několik hodnot až dospějí k obecnému zápisu $S = 8 \cdot a$, kde a je obsah kosodélníku (obrázek 17). Na tomto

příkladu autoři popisují, co je to proměnná, výraz s proměnnou (algebraický výraz), dosazení do výrazu a hodnota výrazu.

„Písmeno použité ve významu čísla, jehož hodnota není přesně stanovená nebo známá, se nazývá proměnná. Zápisu matematických výpočtů, ve kterém vystupuje proměnná, říkáme výraz“

„...pokud v zápisu vystupují pouze čísla, můžeme jej nazvat číselný výraz.“

„Když místo proměnné zapíšeme výraz s konkrétním číslem, říkáme, že jsme toto konkrétní číslo za proměnnou dosadili. Když pak vypočítáme číselný výraz, který po dosazení vznikne, říkáme, že jsme určili hodnotu výrazu pro tuto konkrétní hodnotu proměnné.“

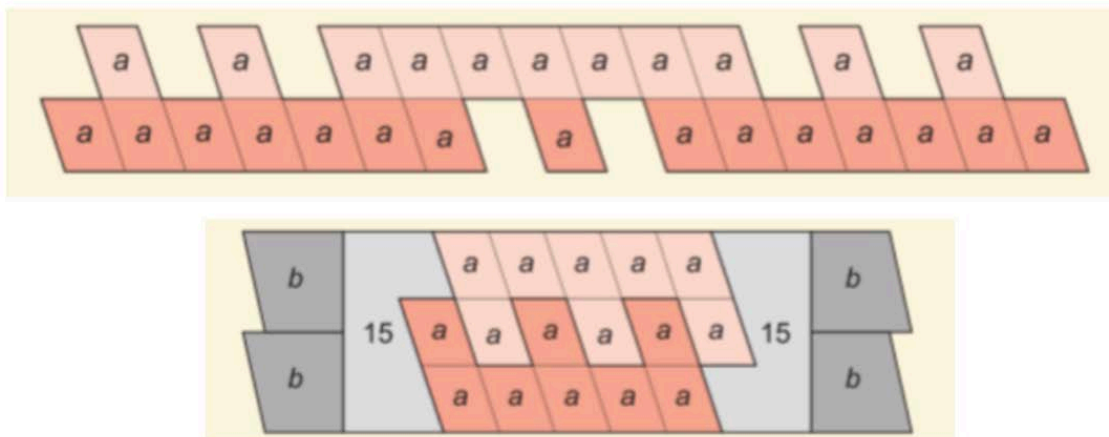


Obrázek 17 – Ilustrace z motivační úlohy (Matematika NNS, s. 36-37)

Na straně 38 je úkolem žáka přepsat slovní výrok pomocí symbolického zápisu (výrazu s proměnnou). Začíná pracovat s výrazy na úrovni první hladiny podle Hejného – modelování.

Díky obdobným obrázkům (obrázek 18) mají žáci dospět do hladiny standardní manipulace. Věnují se úpravám výrazů, jejich sčítání, odčítání, vytýkání a roznásobování. Později je v této knize pouze pomocí šipkových zápisů naznačeno odstraňování závorek (roznásobování) a práce se znaménky.

Zajímavá je definice mnohočlenu jako „Výraz, který je součtem jednočlenů s proměnnou v různých mocninách.“. Podle této definice autoři nepřipouštějí, že by mnohočlen mohl obsahovat více proměnných, což nastává například ve cvičeních na násobení výrazů. Na rozdíl od jiných mnou popisovaných učebnic zde najdeme zmínku o stupni mnohočlenu.



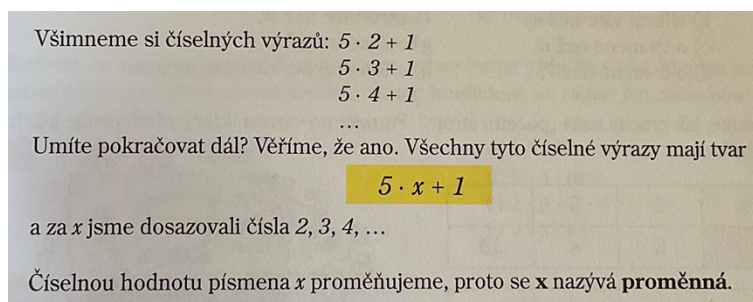
Obrázek 18 – Ilustrace příkladů (Matematika NNS, s.39-40)

Bohužel v celé knize není ponechán žádný prostor pro samostatné objevování žáků. Vše je popsáno a souhrnně definováno v barevných rámečcích. Záleží jen na tom, jak učebnici použije učitel. Žáci mohou výklad učebnice vnímat pouze jako obrázkový „film“ a později si všechny poučky pouze zapamatovat jako pravidla. Kniha je kvůli rozsáhlým textům v rámečcích z mého pohledu nepřehledná a obsahuje malý počet úloh.

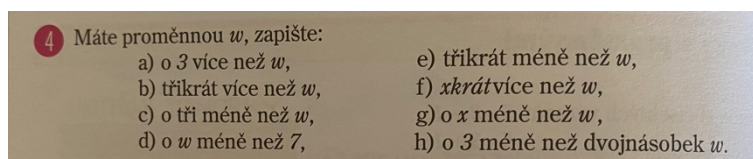
1.3.3 Matematika 8, nakladatelství Prodos

Oproti ostatním doposud hodnoceným učebnicím má učebnice nakl. Prodos jasnou strukturu a řád, je přehledně uspořádána. Velká kapitola výrazy je rozdělena do podkapitol číselné výrazy, výrazy s proměnnými, mnohočleny, sčítání a odčítání mnohočlenů, násobení mnohočlenů a dělení mnohočlenu jednočlenem.

Podkapitola výrazy s proměnnými plynule navazuje na číselné výrazy (obrázek 19). Využívá je k zavedení pojmu výraz s proměnnou, jež definuje jako výraz, který má některé číslo nahrazené písmenem. Zmiňuje se o předchozích žakových zkušenostech s výrazy, například o vzorci pro obsah obdélníku. Oproti jiným učebnicím nezačíná žádnou motivační úlohou. Na druhou stranu obsahuje navíc tabulky, ve kterých mají žáci možnost nácviku dosazení za proměnnou, a porozumět tak jejímu smyslu. Stejně jako Matematika od NNS využívá první hladinu podle Hejného, modelování. Úkolem žáků je nahradit několik slovních tvrzení symbolickým zápisem. Objevují se spojení jako: o dva více, třikrát méně, x –krát více apod. (obrázek 20).



Obrázek 19 – Zavedení výrazu s proměnnou (Matematika Prodos, s. 21)

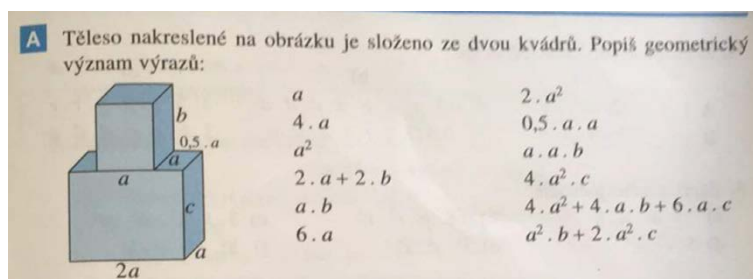


Obrázek 20 – Modelování (Matematika Prodos, s. 22)

Následují další podkapitoly, věnující se úpravám výrazů (standardní manipulaci), ve kterých se dostáváme ke klasické stavbě učebnice. Na vzorových příkladech je ukázán proces, který je doplněn o barevný rámeček se shrnutou teorií, definicemi a návodem, jak postupovat v navazujících úlohách. Výhodou učebnice je přehlednost a poměrně velké množství úloh. Velkou nevýhodou je z mého pohledu nulový prostor pro samostatné objevování žáků a absence grafického znázornění operací s výrazy, například právě pomocí algebraických dlaždic.

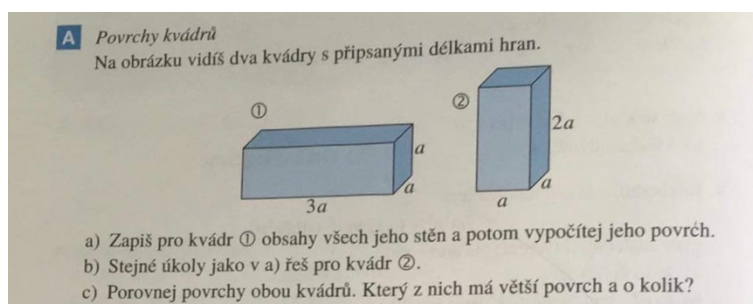
1.3.4 Matematika pro 8. ročník základní školy, nakladatelství Prometheus

V této knize se výrazům s proměnnou věnují v jedné velké kapitole Mnogočleny. Jako motivační úlohu autoři použili obrázek tělesa s popsányými rozměry a k němu vypsali několik výrazů, u kterých má žák určit, co zastupují (obrázek 21). Počítá se zde se znalostí první algebraizace základní školy – vzorce, díky nimž se žáci již setkali s některými výrazy s proměnnými. V návaznosti na úlohu autoři definují jednočlen a mnohočlen a uvádějí několik příkladů jejich zápisu.

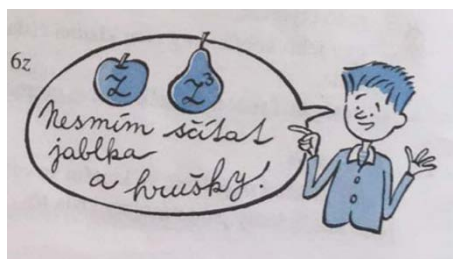


Obrázek 21 – Motivační úloha (Matematika Prometheus, s. 65)

Zajímavé je zavádění operací sčítání a odčítání, kde se autoři snaží o maximální podporu žáků, aby měli možnost dospět k pravidlům sami. Opět uvádí úlohu s vyobrazenými dvěma kvádry s doplňujícími úkoly (obrázek 22). Setkáme se zde s poučkou, že nesmíme sčítat jablka a hrušky (obrázek 23). Je to jedno z nejčastějších přirovnání, které ve výuce můžeme zaslechnout, avšak má svá úskalí. Při sčítání a odčítání je možné si těmito slovy pomoci, ale jak žákům vysvětlíme, že lze jablka a hrušky násobit? Druhým úskalím je nahrazení proměnné rolí zkratky případně jednotky. Člen $3j$ může být chápán jako tři jablka (jednotka), nebo jako tři pytle jablek (počet), kdy zkoumáme, kolik jablek je v jednom pytli. Nesprávné uchopení proměnné může vést ke špatné matematizaci například při řešení slovních problémů. Z didaktického hlediska je lepší použití symbolů (hvězdička, kolečko apod.), u kterých se s tímto problémem nepotkáme. O úskalí interpretace písmen výrazů píše M. McNeil et al. (2010) ve studii *A is for apple: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions*.



Obrázek 22 – Počáteční úloha pro operaci sčítání a odčítání (Matematika Prometheus, s. 68)



Obrázek 23 – Poučka pro operaci sčítání (Matematika Prometheus, s. 68)

V dalším oddíle se autoři věnují násobení, které již žákům sami předvádějí. Nemají zde zavedení jako v předchozích případech, aby pravidlo pro násobení výrazů odvodili žáci. Zde uvádí i pravidlo pro násobení mocnin se stejným základem.

Poslední dva oddíly se věnují rozkladu mnohočlenu na součin a vzorcům pro umocnění dvojčlenu. Uvádějí zde příklady, na kterých ukazují, jak může vytknutí a umocnění vypadat. Za nimi následují souhrnně zapsaná pravidla v modrých tabulkách. Nezmiňují se však o operaci dělení, ani jako související část operace vytýkání.

Učebnice mimo jiné obsahuje velké množství úloh k procvičení a také úlohy na závěr, které jsou rozdělené na dva oddíly (A, B) a dle mých zjištění jsou často využívány jako podklad pro písemné opakování v hodinách matematiky.

1.3.5 Shrnutí provedené rešerše učebnic

V České republice se kromě učebnic Hejného matematiky žáci spíše nesetkávají s algebraickými dlaždicemi (platí pro výše prostudované a často používané učebnice na našich školách). Je to nástroj, který u nás prozatím není zcela rozvinut. Studenti učitelství s ním přijdou do kontaktu až na pedagogické fakultě v didaktice matematiky. Ti pak mají možnost své zkušenosti aplikovat v budoucím povolání, a tím povědomost o dlaždicích rozšířit mezi žáky a kolegy.

V zahraničí se tento nástroj užívá poměrně běžně. Prostředí algebraických dlaždic je věnována velká pozornost napříč odbornými publikacemi, učebnicemi a články. Příkladem nám může být Hall (1999). Jeho článek se zaměřuje na workshop pro učitele a podrobně popisuje přípravu potřebných materiálů, nachystání a správné rozestavení lavic v učebně a potřebu audiovizuálních pomůcek. Výuka sestává celkem z deseti základních částí včetně osmi aktivit (obrázek 24). V tabulce Hall přehledně uvádí formou tabulky, co bude jejich

obsahem, co k nim budeme potřebovat, kdo všechno by se na nich měl podílet a časovou náročnost.

Activity	Level	Materials	Time
WORKSHOP OPENING Examining the Algebra Tiles	All Participants	Visual Aid 1	10 minutes
ACTIVITY 1 Adding Integers	Middle School Teachers	Tiles: x , $+1$, -1 Visual Aid 2	10 minutes
ACTIVITY 2 Subtracting Integers	Middle School Teachers	Tiles: x , $+1$, -1 Visual Aid 3	10 minutes
ACTIVITY 3 Simplifying Algebraic Expressions	Middle School and Algebra I Teachers	Tiles: x , $+1$, -1 Visual Aid 4	10 minutes
ACTIVITY 4 Solving Linear Equations	Middle School and Algebra I Teachers	Tiles: x , $+1$, -1 Visual Aids 5A, 5B	15 minutes
ACTIVITY 5 Solving Word Problems with Algebra Tiles	Middle School and Algebra I Teachers	Tiles: x , $+1$, -1 Visual Aids 6A, 6B	10 minutes
ACTIVITY 6 Adding and Subtracting Polynomials	Algebra I and Algebra II Teachers	Tiles: x^2 , x , $-x$, $+1$, -1 Visual Aids 7A, 7B	15 minutes
ACTIVITY 7 Multiplying Polynomials	Algebra I and Algebra II Teachers	Tiles: x^2 , $-x^2$, x , $-x$, $+1$, -1 Visual Aids 8A, 8B	15 minutes
ACTIVITY 8 Factoring Polynomials	Algebra I and Algebra II Teachers	Tiles: x^2 , $-x^2$, x , $-x$, $+1$, -1 Visual Aids 9A, 9B	15 minutes
WORKSHOP CLOSING	All Participants	Recordings from each group	10 minutes

Obrázek 24 – Rozpis workshopu, Hall, 1999, s. 2

2 Praktická část

V praktické části zachycuji přípravu výuky a následně práci žáků s výrazy ve třech oddílech. První oddíl slouží jako propedeutika algebraických dlaždic. Pracuje se zde pouze s jednotkovými dlaždicemi a jejím cílem je odvození základních pravidel pro manipulaci s dlaždicemi. Ve druhém oddíle se přidává proměnná, která počet druhů dlaždic a obtížnost navýší. V posledním oddíle uvádím příklad dalšího možného využití dlaždic včetně myšlenkového postupu některých žáků.

Celou experimentální část jsem prováděla na základní škole, ve které působím jako učitelka již pátým rokem. Do výzkumu jsem zapojila třídu, se kterou jsem v kontaktu od začátku mé pedagogické praxe, tedy před zahájením výuky jsem žáky znala již více než tři roky. Jedná se o poměrně spolehlivé žáky, kterým na jejich vzdělání záleží. Jsou povětšinou cílevědomí a ochotní se věnovat škole nad rámec stanovených povinností. Celkem se do výuky zapojilo 28 žáků, kteří jsou rozděleni přibližně na tři skupiny z pohledu výuky matematiky: žáci s převahou početních dovedností, žáci s potřebou větší míry názornosti a žáci využívající spíše možnost memorování postupů a poznatků. Všechny tři skupiny žáků jsem se ve výzkumu snažila plně propojit.

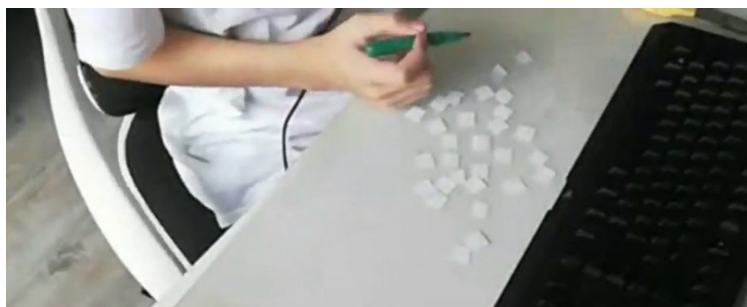
2.1 Příprava na výuku a výroba podkladů

Vzhledem k tomu, že byla práce vytvářena v době covidových opatření, bylo nutné absolvovat výuku a celý výzkum distančně. To bylo pro obě strany značnou výzvou. Nejdříve bylo zapotřebí zvolit vhodnou platformu, přes kterou bude možné výuku realizovat. Po vícero pokusech se při daných možnostech ukázal jako nejvhodnější nástroj Google Classroom (dále jen GC), který byl používán napříč celou základní školou, kde výzkum probíhal. Bylo možné vytvořit svou vlastní učebnu a v ní i sdílet potřebné materiály.

Základ celé mé a žakovské práce tvořily kartičky, tzv. dlaždice. Aby nebyla kvalita výuky ovlivněna způsobem jejich zpracování, definovali jsme jejich přesné parametry.

Pro zjednodušení jsem vytvořila dokument (Příloha 1 – Dlaždice) s celou sadou dlaždic a sdílela ho žákům na GC. Při jeho tvorbě mi byl inspirací soubor od N. Vondrové. Černobílé dlaždice byly následně popsány svou hodnotou a byly připraveny na tisk, vystřihání, slepení a vybarvení. Lepeny k sobě byly vždy dvě – jedna kladná a jedna

s odpovídající zápornou hodnotou. Výsledkem byly oboustranné dlaždice, které si každý žák připravil sám doma (obrázek 25). Pro vytvoření maximální možné podpory všech žáků, tedy i těch, kteří neměli v době distanční výuky přístup k tiskárně, byla možnost již vytištěný dokument vyzvednout na vrátnici školy. Tím bylo zajištěno, že spolupracovat mohl opravdu každý.



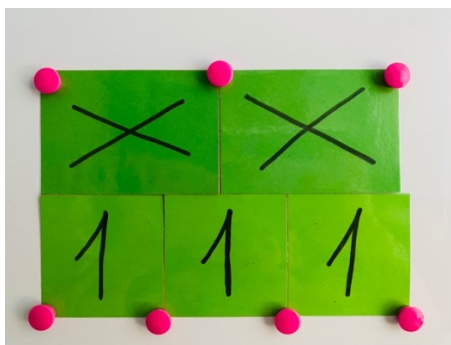
Obrázek 25 – Domácí příprava dlaždic

Dlaždice byly navrženy následovně: pro náš účel stačily tři druhy kartiček $1, X, X^2$ a jejich opačné hodnoty $-1, -X, -X^2$. Aby u žáků nedošlo k falešné informaci, že je například $X = 2$, nebo jinému celému číslu, musela jsem určit specifickou jednotku. Potřebovala jsem zajistit, aby ani po naskládání několika dlaždic s hodnotou 1 vedle sebe nešlo hodnotu X nahradit (obrázek 26). Nakonec jsem zvolila jednotku tak, aby teprve 8j odpovídalo $3X$ (Příloha 1 – Dlaždice). Pro lepší vizualizaci a rozlišení bylo zapotřebí přidat barvy. Zvolila jsem klasické semaforové, tedy zelenou pro tzv. kladné dlaždice $1, X, X^2$ a červenou pro tzv. záporné (později jsme začali používat termín opačné) dlaždice $-1, -X, -X^2$ (obrázek 27). Celkem měl každý k dispozici šestnáctkrát kartičku hodnoty 1, dvanáctkrát X a šestkrát X^2 .

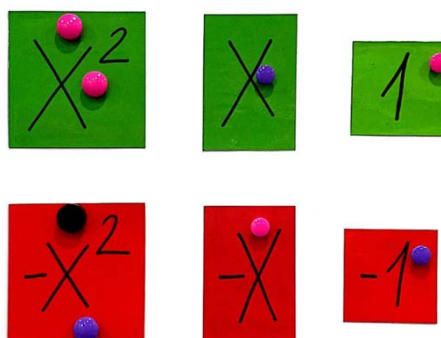
Počtu jednotlivých dlaždic pak musely být přizpůsobeny zvolené úlohy do výuky. Alespoň zpočátku jsem potřebovala docílit názornosti, proto nešlo použít např. úlohu $5X - 8X$, protože by na to žákům nestačil počet dlaždic s hodnotou X .

Jako pedagogickou pomůcku jsem vytvořila stejný počet dlaždic ve větším měřítku. Použila jsem barevný papír a pro větší trvanlivost byly dlaždice zalaminovány do průhledné voděodolné folie. Tyto dlaždice jsem následně připevňovala pomocí magnetů k bílé tabuli, která byla snímána kamerou a posléze sdílena žákům. Tato konfigurace umožňovala názornou práci s kartičkami a vzájemnou kontrolu výsledků. Každý žák dostal čas na

rozmyšlení dané úlohy a poté mě vybraný žák navigoval při řešení na tabuli. Ostatním žákům pak byl poskytnut prostor reagovat na vzniklou situaci, doptávat se a nabízet alternativy. Celkově lze říct, že výuka tak mohla probíhat téměř klasickým způsobem. Snažila jsem se eliminovat negativní dopady distanční formy výuky.



Obrázek 26 – Porovnání hodnoty X a 1



Obrázek 27 – Ukázka všech dlaždic

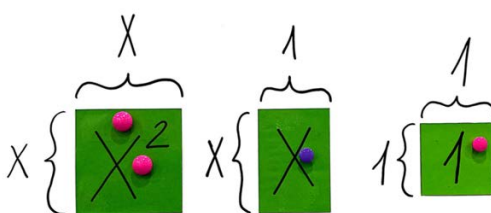
Přípravu na výuku jsem rozčlenila do deseti výukových celků vždy s navazujícím cvičením. Každý výukový celek byl dlouhý 60 minut a měl předem zvolené téma, kterým jsme se s žáky měli zabývat. Až na mírné odchylky (přesah jedné hodiny do druhé) bylo rozvržení správné a zvolený harmonogram bylo možné dodržet. Díky online prostředí jsem měla možnost výuku zaznamenávat a ze vzniklých videí následně provést rešerši žakovských řešení a pochybení. V následující tabulce uvádím rozčlenění témat do výukových celků se základními informacemi. Podrobněji se každé části budu věnovat v následujících oddílech práce.

Číslo výukového celku	Téma	Pomůcky	Poznámky	Oddíl
1. vyučovací hodina	obsah pravoúhelníku	dlaždice (typ s proměnnou X)	opakování výpočtu obsahu čtverce a obdélníku, jednotka ve čtvercové síti, odvození hodnot našich dlaždic	hodnoty dlaždic a základní manipulace
	práce se čtvercovou sítí			
	hodnoty našich dlaždic			
2. vyučovací hodina	základní manipulace s dlaždicemi	dlaždice (typ s proměnnou X)	vyrušení dlaždic s opačnou hodnotou	propedeutika dlaždic na celých číslech
	znázornění celých čísel a čísel opačných	kladné a záporné jednotkové dlaždice	operace sčítání = dát dohromady/spojit, zavedení odčítání jako přičítání opačného čísla	
	sčítání a odčítání celých čísel			
3. vyučovací hodina	násobení celých čísel	kladné a záporné jednotkové dlaždice, tabulka pro umístění dlaždic	využití násobilky, způsoby zobrazení násobení pomocí dlaždic	propedeutika dlaždic na celých číslech
4. vyučovací hodina	rozklad na součin (vytýkání), dělení	kladné a záporné jednotkové dlaždice, tabulka pro umístění dlaždic	vztah vytýkání a dělení, závěr propedeutiky	
5. vyučovací hodina	zápis a znázornění výrazů s proměnnou	dlaždice (typ s proměnnou X)	připomenutí hodnot dlaždic, zkrácení zápisu součinu konstanty a proměnné, vhodné a možné sčítání/odčítání výrazů, dosazení	algebraické výrazy s proměnnou
	sčítání a odčítání výrazů s proměnnou			
6. vyučovací hodina	násobení výrazů s proměnnou	dlaždice (typ s proměnnou X)	násobení dvou jednočlenů, roznásobení závorek	
7., 8. vyučovací hodina	vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu	dlaždice (typ A, B)	roznásobení dvou závorek, odvození základních třech vzorců	
9. vyučovací hodina	procvičení vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu, další využití dlaždic (typu A, B)	dlaždice (typ A, B)	dosazení do vzorce, propojení vzorců, složitější úlohy	
10. vyučovací hodina	rozklad na součin (vytýkání) a dělení výrazů s proměnnou	dlaždice (typ s proměnnou X)	vytknutí konstanty, proměnné, proměnné s konstantou, vztah k dělení	
další využití	ekvivalentní úpravy rovnic, Vietovy vztahy, doplnění na čtverec	dlaždice (typ s proměnnou X)	další možné využití dlaždic, dobrovolné rozšíření učiva	ree, výrazy

2.2 Odvození hodnot dlaždic, základní manipulace

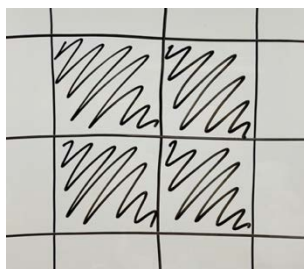
1. vyučovací hodina

Ještě před tím, než jsem s žáky začala probírat algebraické výrazy za pomoci algebraických dlaždic, rozhodla jsem se s nimi zopakovat obsahy pravoúhelníků – tedy čtverce a obdélníku. Tato znalost byla klíčová pro uchopení významu jednotlivých dlaždic – jejich vzhledu a hodnot, které představují. Tomuto jsme věnovali přibližně polovinu vyučovací hodiny. Zbylou polovinu jsme se zabývali odvozováním obsahu námi vytvořených dlaždic (obrázek 28).

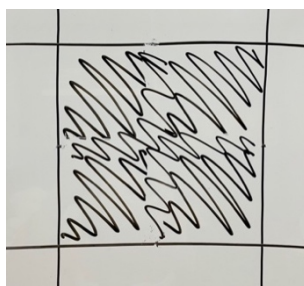


Obrázek 28 – Hodnoty dlaždic

Některé žáky překvapil fakt, že jednotka obecně neznamená 1 cm, ale zvolili jsme větší měřítko, aby se nám s pomůckou lépe pracovalo. V tento moment jsme si připomněli několik cvičení z minulých měsíců, kdy jsme pracovali s poměrem, měřítkem mapy a s obsahy ve čtvercové síti, kde pro nás jednotlivé čtverečky měly šířku a výšku 1 j a jednotky délky jako takové jsme nepoužívali. Celé jsme si to ještě demonstrovali na obrázku čtverce rozděleného na 4 menší čtverečky (obrázek 29). K danému obrázku proběhla i diskuse (rozhovor 1), ve které jsme zkoumali, jak se změní obsah vybarvené části sítě v závislosti na jemnosti zvolené čtvercové sítě. Jedna žákyně poznamenala, jak by situace vypadala po vymazání dvou dělicích čar mříže.



Obrázek 29 – Jemnější čtvercová síť



Obrázek 30 – Hrubší čtvercová síť

Rozhovor 1

U: Jaký by byl obsah vybarvené části?

Chvilka na rozmyšlenou...

Ž11: Takto ty malé čtverečky by byly 4, ale kdyby to byl jeden samotný velký čtverec, tak by to bylo 1.

U: Dobře, děkuji. Správně. Platí tedy, že v tomto stavu by byl obsah 4 (obrázek 29), ale kdybych tu síť udělala hrubší, tedy umazala bych každou druhou dělicí čáru v celé čtvercové síti (obrázek 30), pak by skutečně byl obsah roven 1.

2. vyučovací hodina

Pro budoucí práci s algebraickými dlaždicemi bylo nutné, aby žáci věděli, jak postupovat v případě, kdy se ve znázorněném výrazu objeví obě barvy stejného typu dlaždice, tedy červená i zelená. Mým cílem bylo, aby na to žáci přišli samostatně. Proto jsem se na ně obrátila s otázkou a čekala, jak dopadne jejich komunikace a řešení problému.

Rozhovor 2

U: Co se stane, když se v jednom výrazu potká zelená a červená dlaždice o stejné absolutní hodnotě?

...chvilka přemýšlení...

U: Tedy například dlaždice s hodnotou 1 a -1 ?

Začalo mluvit několik žáků přes sebe, což se ovšem v online prostředí špatně koriguje. Počkala jsem tedy, koho nechají mluvit.

Ž20: No, bude to 0. Protože příklad $1 - 1$ vychází 0. Ono se to vlastně vynuluje.

Ž21: Ono se to prostě „vymínusuje“ a nic tam nezůstane.

U: Ano, souhlasím. Proved'me tedy společnou úmluvu. Pokud budeme mít v jenom výrazu zelenou i červenou dlaždici se stejnou absolutní hodnotou, tedy stejného typu, pak se tyto dlaždice překryjí a tzv. vyruší. Tedy obě dlaždice můžeme z výrazu odebrat, aniž bychom změnili jeho hodnotu.

Během doby na přemýšlení nad odpovědí jsem si uvědomila, že položené otázce žáci nemusí rozumět. S tímto stylem pomůcek ještě nikdy nepracovali, jsou známé spíše u výuky Hejného metodou. Příště by tedy bylo zřejmě vhodnější zařadit zmíněnou otázku až do prvního cvičení v propedeutice dlaždic na celých číslech. Žákům to ale nedělalo problém a rychle odvodili chtěné pravidlo. Je možné, že se jim to podařilo právě proto, že jsem svou otázku doplnila ještě o příklad. Nakonec jsme si tuto úmluvu procvičili i na zbylých dvou typech dlaždic.

2.3 Propedeutika dlaždic na celých číslech

2.3.1 Znázorňování, čtení a základní manipulace s jednotkovými dlaždicemi

Jako propedeutiku dlaždic jsem vybrala množinu celých čísel. S těmi se všichni žáci na školách setkávají již od první třídy, proto jsem nepředpokládala, že by mohl nastat nějaký problém v číselném zápisu, nebo v poznávání manipulace s dlaždicemi.

O tomto svém předpokladu jsem se přesvědčila u dlaždic s hodnotou 1 a -1 , pomocí kterých lze utvořit různá celá čísla. Jediné úskalí v tomto případě spatřuji ve volbě čísel, která jsou žáci s pomůckou schopni znázornit. Příliš velká čísla by totiž zabrala nejen mnoho času při skládání, ale též při výrobě dlaždic. Zároveň by žáci již v tomto případě mohli nabýt pocitu, že dlaždice vlastně nepotřebují, a mohlo by tak dojít k odmítnutí tohoto nástroje.

Prvním úkolem (I.) bylo znázornit napsaná čísla, zapsat k nim čísla opačná, a ta následně též zobrazit dlaždicemi. Součástí druhého úkolu (II.) bylo několik obrázků a žáci

měli zjistit, jaké číslo bylo těmi obrázky myšleno, případně vymyslet další možnost zobrazení.

Důvod, který mě přivedl k myšlence, že je potřeba od začátku zařadit tvorbu opačného čísla (následně opačného výrazu), zde nemusí být zcela zřetelný. V následujících oddílech se však bez této znalosti neobejdeme. Žáci si budou pomocí tohoto faktu odůvodňovat například možnost prohození členů výrazu.

I. Znázorni čísla a zapiš k nim čísla opačná:

- a. 4
- b. -2
- c. 1
- d. -6
- e. 0

II. Přečti a zapiš čísla:



Obrázek 31 – Zadání celých čísel pomocí dlaždic

Rozhovor 3

U: Tak jistě už máte hotové, je to tak?

Žáci: Ano, to je jednoduché.

U: Poprosila bych Ž11, jestli by nám popsala postup ve cvičení I. a.

Ž11: No to jsem znázornila čtyřmi zelenými čtverečky.

Naskládala jsem čtyři zelené čtverečky vedle sebe do řady na tabuli za Ž11. V obvyklých hodinách by to tvořili na tabuli sami žáci.

U: Myslela jsi to takto?

Ž11: Ano.

U: Skvělá práce. Souhlasí s tím takto všichni, nebo to má někdo jinak?

...třída pokyvovala (pokud měli kameru), případně na souhlas zvedli virtuální ruku (jedna z možností GC).

U: Jak bychom zobrazili -2 ?

Ž12: Tak to jsem zvýraznila dvěma červenými čtverečky.

U: Ano. Jak bude vypadat 1 a -6 ?

Ž23: Jeden zelený čtvereček.

Ž18: Já jsem si dal u d) 6 červených čtverečků.

...žáci přikyvuji...

U: Jak bychom znázornili 0?

Ž8: Jednoduše, žádným čtverečkem.

Ž11 a Ž21: Jeden červený a jeden zelený.

U: Dobře, šlo by to ještě jinak?

Ž18: Dva červené a dva zelené.

Ž20: Může jich být, kolik chce, ale musí se vzájemně „vymínusovat“.

Zde jsme se vrátili k první otázce ohledně různých barev dlaždic, kdy jsme vytvořili úmluvu, že stejný počet zelených a červených čtverečků se vyruší.

U: Tak co cvičení 2? Co je to opačné číslo?

Ž21: No, když je to -1 , tak je k tomu 1 opačné číslo.

U: Dobře, co třeba číslo 5?

Žáci: Tak je to -5 ?

U: A když chci opačné číslo k 0?

Žáci: Tak je to 0, ne počkat... žádné číslo.

Ž18: 0 nemá opačné číslo.

Ž11: No tak ona nemá znaménko, není přece -0 .

U: A co by bylo -0 a co $+0$?

Žáci: No prostě 0.

U: Dobře. Jaká je definice opačného čísla?

Žáci: No, že ta dvě čísla mají stejnou vzdálenost od 0, akorát jedno je $+$ a druhé $-$.

U: A má $+0$ od 0 a -0 od 0 stejnou vzdálenost?

Žáci: No je to 0, takže ano. Takže opačné je prostě 0.

U: Dobře, tak mi tedy teď daná čísla předělejte na čísla opačná.

Jakmile se u čísla přímo nevyskytuje znaménko, které lze pouze nahradit jeho opakem, je pro žáky těžší rozhodnout se o existenci opačného čísla, případně o jeho zápisu. Tento fakt pozorují ve více třídách a vyskytuje se i v pozdějším věku.

Ž3: U toho a) je to -4 .

U: A jak jsi to znázornil?

Ž3: 4 červené dlaždice.

Ž21: Je to jednoduché, stačí obrátit ty zelené na červené.

U: Dobře. Jak to bude s -2 ?

Ž8: Můžu? Zase jen obrátíme ty dvě červené a vzniknou nám dva zelené čtverečky. Takže je to $+2$.

Tímto způsobem jsme dodělali celou úlohu a mohli jsme pokračovat úlohou II.

U: Nyní zkusíme přepis znázorněných čísel. Sestavím vám několik čísel na tabuli a vy zkusíte zapsat, o jaká čísla se jedná.

Ž9: No tak to první jsou 3. To druhé je -4 .

U: Hmm. Co ostatní, souhlasí? Je v pořádku i takovéto uspořádání dlaždic?

...žáci přikývli, odsouhlasili...

Zde bylo zajímavé, že nikomu ani na chvíli nepřekážel tvar, do kterého jsem dlaždice poskládala. Ze začátku jsem očekávala, že to může být problémem.

Ž18: Tam jde o to, že to je prostě pořád ten samý obsah.

U: Super, ano, přesně. Šlo by ještě jiným způsobem znázornit to -4 ?

Ž18: Ano, třeba pětkrát -1 a jednou 1 .

...znázornila jsem na tabuli... (obrázek 32 první část)

Žáci: Ano, takhle.

U: Co kdybych to zkombinovala a zařadila tu zelenou dlaždici někam dovnitř? (obrázek 32 druhá část)

	-1	-1	-1	-1	-1	1	
	-1	-1	-1	1	-1	-1	

Obrázek 32 – Návrh žáka na zobrazení čísla -4

Žáci: Tak to ničemu nevádí. To je pořád to samé. Ono se na tom nic nezmění.

U: Zavedeme tedy úmluvu. Tedy záleží na tom, jaké dlaždice použijeme, ale nezáleží nám, do jakého tvaru si je poskládáme. Stejně jako u tangramu nebo jiných skládacích her.

Ž18: Je to vlastně stejný, jako když vezmete nějakou tyč, a tu ohnete. Ale tím, že jí ohnete, stejně nezměníte, jak je dlouhá.

Vlastnost obsahu ve hře tangram tím Ž18 převedl na problém délky, která je většině žáků (i co se jednotek týká) bližší.

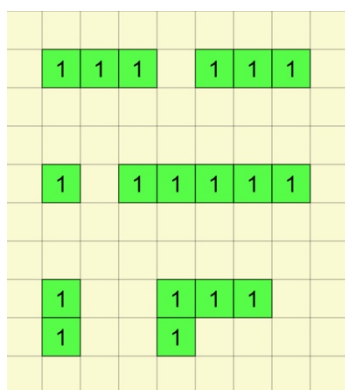
V těchto prvních cvičeních nastalo několik zajímavých situací. Příkladem je jednak spor o opačné číslo k 0, případně přidávání dalších dlaždic k výrazu a zjišťování, zda se jeho hodnota změní, či zůstane stejná. Žáci si tuto situaci propojili s předchozím úkolem, který se týkal stejného počtu „opačných“ dlaždic, čímž byl pro ně problém vyřešen. Nejvíce ze všeho mě však zaujala diskuse o přeskládávání dlaždic. Očekávala jsem, že se nad touto

Základní práci s jednotkovou dlaždicí žáci velmi rychle ovládli. Ani při distanční výuce jsem nezaznamenala problém s pochopením principu, spíše právě naopak. Můj předpoklad bych tedy vyhodnotila jako správný. Pro žáky to byla úplně nová strategie učení, u které jevíli nadšení a radost z objevu, že formou „hry s obrázky“ lze řešit úlohy.

Při výuce jsme věnovali pozornost i sčítání a odčítání celých čísel. Žáci pracovali s kladnými a zápornými dlaždicemi. Zadání tvořilo několik aritmetických úloh a obrázky vyskládaných dlaždic, u kterých měli žáci zjistit, o jakou úlohu se jedná. Všechny úlohy žáci řešili pomocí dlaždic, samotný aritmetický výpočet jim sloužil jako ověření správnosti.

Vzhledem k tomu, že jsem viděla, že je takto probíraná látka pro žáky zajímavá a práce s dlaždicemi jim šla v úlohách velmi dobře, rozhodla jsem se jejich vlastní poznávání nepřerušovat svým výkladem. I proto jsem je nechala samostatně vyřešit několik následujících úloh (III., IV.).

- $5 + 2$
- $4 + 3$
- $1 + 6$



e. $-1 + 1$
f. $-4 + 7$



g.

Obrázek 34 – Zadání přičítání k zápornému číslu

IV. Znázorni/přečti a počítej pomocí dlaždic:

- a. $5 - 3$
- b. $8 - 2$
- c. $4 - 5$



d.

Obrázek 35 – Zadání odčítání

Rozhovor 4

U: Zkuste mi nyní sami znázornit a dopočítat pomocí dlaždic následující úlohu $5 + 2$.

Sám se přihlásil žák 21, protože chtěl sdělit jako první svou odpověď.

Ž21: Výsledek bude 7, protože je to $5 + 2$.

U: A jak jsme na to přišli pomocí dlaždic? Je tu někdo, kdo si příklad poskládal?

Již jsem se zde snažila dávat najevo, že někdo tento nástroj může chtít používat a někdo jej ke své práci potřebovat nebude. Mým záměrem bylo, aby ho někdo radikálně nezavrhł. Rozhodla jsem se tedy počkat, jak se sami žáci rozhodnou.

Ž21: No mám tam prostě 7 zelených dlaždic.

Žáci: No máme 5 zelených čtverečků a potom 2 zelené čtverečky.

Ž18: Teď tam máme +, takže to jenom dáme dohromady. A je to 7.

...žáci přikyvují...

Úmluva: Znaménko + nám značí „dát dohromady/spojit“.

Zkusili jsme ještě další úkoly, až jsme se dostali k zadání i pomocí obrázku. Následně jsme se přesunuli na cvičení IV.

U: Jak byste znázornili tyto úlohy, a naopak zapsali ty znázorněné?

Ž8: Můžu prosím ten první? Je to -5 a $+2$. A vyjde to tři záporné čtverečky, tedy ty červené.

U: A jak jsme to udělali?

Ž11, Ž21: Dáme je k sobě. A dvě a dvě kartičky se nám „vynulují“. Nakonec nám zbydou tři záporný, a to je -3 .

Tato látka byla pro žáky zatím jednoduchá, tedy zbytek úloh jsme prošli velmi rychle.

Mohli jsme tak přejít k odčítání...

U: Úloha $5 - 3$. Jak budeme postupovat zde?

Ž11: Tak vezmeme si těch 5 kladných a odebereme to od 3 červených. Dáme to k sobě. Prostě máme ty červené a ty si budu zase odebírat s těmi zelenými, takže odeberu 3 zelené. Vlastně nám pak zbydou 2 kladné, a to je výsledek.

U: Dobře, ale my jsme se domluvili, že spojení dlaždic nám značí sčítání. Zde mám pouze čísla 5 a 3 a mezi nimi znaménko $-$. Mohu se tedy zeptat, co jsi přičetla k číslu 5? Jak mohu přepsat tuto úlohu, aby se v ní místo odčítání objevilo sčítání?

Ž27: No $5 + (-3)$.

U: Ano, přesně. Tedy odčítání je pro nás jako přičítání opačného čísla.

Ž11: No jasně. Hmm.

Žákyni bylo zřejmé, že se jedná o „přičítání záporného čísla“, ale váhala nad přepisem úlohy jako takové s operací sčítání.

...počítání dalších úloh...

Pro ozvláštnění výuky jsem nechala žáky vymýšlet i vlastní úlohy.

Ž13: Co třeba $3 - 5$ (obrázek 36)?

Ž22: Tak pod 3 si dám tři zelené a pod 5 si dám pět zelených. Pak to dám k sobě.

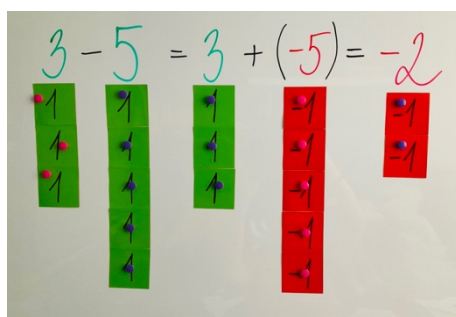
Ž27: No ano, ale... můžu to říct? Bude to podobně jako u těch minulých úloh, takže to přepíšeme na $3 + (-5)$.

U: Hmm. Protože my ty dlaždice odečítat jen tak neumíme, že ano? My umíme operaci sčítání. Jak to tedy bude dál?

Ž27: Dáme tedy tři zelené a pět červených a vše spojíme.

Ž18: A zůstanou nám 2 záporné.

Ž27: Tedy výsledek je -2 (obrázek 36).



Obrázek 36 – Řešení příkladu zadaného žákem

Vypadalo to, že žákyni 27 je vše zřejmé, ale i tak se chtěla ujistit a položila mi následující dotaz. I tak lze podle žáků vyložit přičtení opačného čísla.

U tohoto obrázku je také možné si povšimnout, že jsem ze začátku používala odlišné barvy pro kladná a záporná čísla, které odpovídaly i použitým dlaždicím. Mělo to sloužit pro přehlednost a větší zřetelnost pro žáky. V pozdějších hodinách jsem používala pouze černou fixu.

Ž27: Když máme třeba těch $3 - 5$, tak to mínus se mění vlastně v plus, ale to mínus se nám ještě přenesse na vedlejší číslo, tady třeba tu pětku?

Zde nastala těžká situace – Jak zareagovat? Myšlenka je správná, avšak matematická formulace problému není vhodná.

U: Zjednodušeně, laicky řečeno, ano. Spíše bych však preferovala „přičtení opačného čísla“.

Myšlenka přičítání opačného čísla namísto operace odčítání zde měla svou roli. Jak jsem se již zmínila na začátku tohoto oddílu, povede k principu a pravidlům zaměňování pořadí členů ve výrazech. Tento proces je zdrojem častých žakovských pochybení, a to i ve starším věku. Komutativita sčítání je pro žáky fakt, který nezpochybňují a denně používají. Otázkou pro ně však zůstává, jak je to s odčítáním a jak je možné zaměnit pořadí členů i v případě, kdy se kombinují znaménka $+$, $-$. Ve výše uvedených cvičeních si žáci připomněli operace z kapitoly celá čísla ze šestého a sedmého ročníku a dokázali se dostat

k přepsání úloh pouze s operací sčítání, která napomáhá odstranění chybovosti při záměně pořadí členů. Znaménko mínus je v takovém případě připsáno do závorky ke správnému číslu a celý výraz obsahuje pouze operaci sčítání, záměně tak nic nebrání.

V tento moment jsem se již začala lehce potýkat s tím, že se někteří z rychlejších žáků začínali nudit. Byli ihned se vším hotovi, protože znázorňování takto jednoduchých výpočtů již nepovažovali za nutné a nechtěli tomu věnovat svou další energii.

3. vyučovací hodina

Třetí hodinu jsme využili pro opakování látky z předešlých dvou hodin. Vyřešili jsme i několik úloh (V.) na odčítání od záporného čísla a poté úlohy ve cvičení VI., kde byly již v zadání použity závorky.

V minulých hodinách, kdy jsme ještě nepracovali s dlaždicemi, jsme každou hodinu s žáky řešili úlohy s využitím aritmetických výpočtů. Nejčastější chybou v počítání bylo nesprávné odstranění závorky a následně i nesprávný směr pohybu po číselné ose. Tedy například $-6 - 2 = -4$, nebo $-6 + 2 = -8$, kde se místo v záporném směru pohybovali žáci ve směru kladném a naopak. I z těchto důvodů jsem zařadila úlohy V. a VI. Zajímalo mě, zda chyba nastane i při práci s dlaždicemi, či právě tento nástroj pomůže žákům k lepšímu pochopení a názornosti při práci se znaménky.

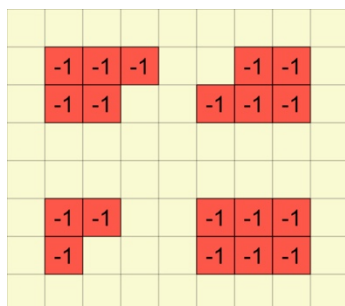
V. Znázorni/přečti a počítej pomocí dlaždic:

a. $-2 - 1$

b. $-3 - 5$

c. $-1 - 8$

d. $-4 - 5$



e.

Obrázek 37 – Zadání odčítání od záporného čísla

VI. Vypočítej za pomoci dlaždic, výsledek ověř klasickým výpočtem:

- a. $6 - (+4)$
- b. $8 - (-2)$
- c. $(-4) + (-5)$
- d. $-3 - (+9)$
- e. $0 - (+7)$
- f. $-2 - (1)$

Rozhovor 5

Ž20: Mohu ten první, tu šestku a? Dáme si 6 červených čtverečků pod šestku a vedle toho dáme 4 zelené. Potom jednoduše odeberu 4 zelené a 4 červené, aby se mi správně vyrušily. A zbydou mi 2 červené, tedy výsledek je -2 .

Zde se bohužel stalo to, co se děje velmi často. Žák vidí znaménko mínus a přisoudí ho předchozímu, a ne následujícímu členu. Iz tohoto důvodu jsem se snažila ihned od začátku prosazovat pouze operaci sčítání (dlaždic), aby žáci dokázali připojit záporné znaménko ke správnému členu. V takových případech totiž použijí i závorku a je pak větší pravděpodobnost, že nedojde k obdobné chybě, jako došlo nyní.

Při pozdější komunikaci s žákem jsem zjistila, že se mu tento fakt opravdu plete a projevuje snahu se zlepšit. Po několika hodinách společného počítání a doučování jsme tento problém odstranili, a i nyní je žák v počítání úspěšný. U zmíněného žáka zůstaly dlaždice myšlenkovou pomůckou pro počítání nejen s celými čísly.

Ž21 a další: Ale však to je špatně, ne? Je tam operace $-$.

Dokud žák nedokončí svou odpověď, tak se snažím do ní nezasahovat. Maximálně nechávám spolužákům prostor pro vlastní názor a diskusi nad řešením. O správnosti vždy mluvíme až vzápětí.

Ž20: Ehm. A jo vlastně. To byl jakoby tím pádem jiný příklad.

Ž27: Ž20, máme tam přeci $+6$, tak nemůžeme používat červené dlaždice. Mohu zkusit říct řešení?... Dáme si na tabuli 6 zelených a pak zelené i pod $+4$. Příklad máme znázorněný, ale ještě nebudeme počítat. Převodla bych si ho na $6 + (-4)$.

Vše znázorňuji a zapisuji na tabuli.

U: Ano. Opět platí stejné pravidlo. Při odčítání čísla $+4$ přičítáme číslo k němu opačné, tedy -4 .

Ž27: Nyní 4 zelené přeměníme na 4 červené a těch prvních 6 pouze posuneme. Teď se nám 4 červené a zelené vyruší. Zbydou nám 2 zelené jako výsledek, a to je 2.

Ž15: Takže tedy opět prohodíme jen ta znaménka.

U: Vlastně ano. Chtěla bys zkusit další příklad?

Ž15: Ani ne. Já se bojím, že to mám špatně. Mně toto moc nejde.

U: Zkus a uvidíš, že to i lépe pochopíš.

Žáci vědí, že jsem ráda za jejich přítomnost u tabule, i když třeba takto virtuálně – diktováním. Většinou se podaří, že látce porozumí, nebo alespoň objeví, kde dělají chybu. Pokud však sedí v lavicích, nic je v tu chvíli nenutí přemýšlet a pouze opisují z tabule, jejich výkon se tak nemůže zlepšit.

Ž15: Dobře. Tak já bych si tento příklad zase přepsala. Bylo by to jenom $8 + 2$, protože mám přičítat opačné číslo, a to je od -2 číslo $+2$. Tedy měli bychom 8 a 2 zelené kartičky, celkem 10.

...následovalo dopočítání cvičení VI a zajímavá poznámka jednoho z žáků...

Ž16: Mohu? Mně to tedy občas přijde komplikovanější s těmi kartičkami, i na vysvětlení toho, jak jsem počítal.

U: Myslíš kvůli jejich skládání, že je to zdlouhavý proces? Nebo proč?

Ž16: Ano. Ale zase lze říci, že je celkové počítání s kartičkami vlastně jednodušší. Jen jsem se bál toho vysvětlení, jak jsem postupoval.

U tohoto žáka jsem se přesně obávala „lenosti“ v používání dlaždic, ale tušila jsem, že právě jemu by mohly pomoci. Má zvýšenou potřebu názornosti napříč všemi předměty, abstrakce ho spíše děsí. Bohužel ne vždy je ochoten věnovat trochu více úsilí pomůckám, které mu ve výsledku práci zjednoduší. Naštěstí ho v následujících hodinách dlaždice více zaujaly, že byl ochoten dělat i práci navíc, kterou ode mě měli všichni žáci k dispozici jako dobrovolné domácí procvičování.

Za žákem Ž16 se ozval Ž8, který se v „klasických“ hodinách nechce velmi zapojovat, ale v online (v tomto tematickém celku) je velmi aktivní.

Ž8: No třeba pro mě je to lepší s těmi dlaždicemi. Mně vyhovuje, že si to mohu nějak znázornit, líp to pak vidím.

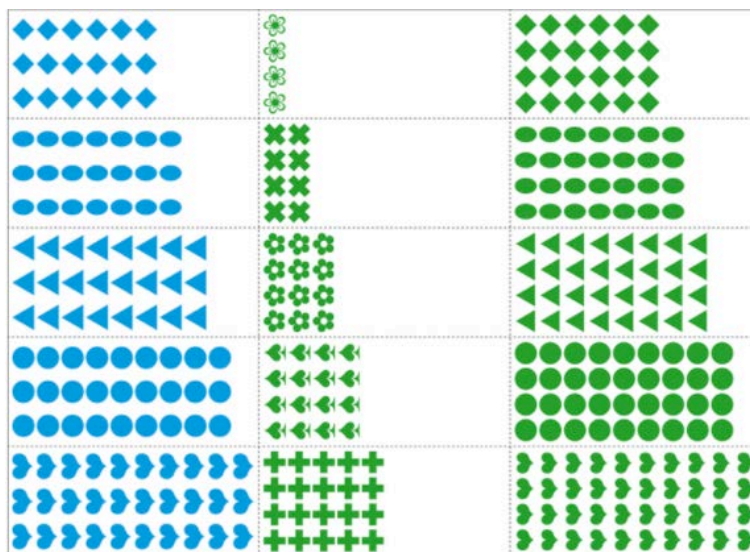
Až na prvního žáka, který si svou chybu vzápětí uvědomil, se mi potvrdilo, že při práci s dlaždicemi dochází k menší chybovosti ve znaménkách. Při správném poskládání karet a jejich případném odebrání žáci jasně vidí, která barva a jaký počet kartiček zůstává jako výsledek. Dlaždice lze tedy využít, kdykoliv si bude situace vyžadovat větší míru názornosti, i když se v tu chvíli bude počítat například s desetinnými a velkými čísly.

2.3.3 Násobení celých čísel pomocí dlaždic

Součástí propedeutiky dlaždic je i operace násobení. U této operace jsme s žáky zavítali do druhé třídy základní školy, kde se začíná s malou násobilkou. Ta je v učebnicích a na kartách znázorňována pomocí různých tvarů sestavovaných do pravoúhelníků.

Například na kartách od nakladatelství Alter (obrázek 38) můžeme vidět, že pro násobilku každého čísla (zde ukázka 3, 4) je zvolena jedna barva a pro každý násobek je zvolen stejný tvar – například trojúhelník pro osmý násobek.

Právě tohoto uspořádání tvarů jsme mohli využít pro vysvětlení a pochopení násobení výrazů pomocí dlaždic. Ty též uspořádáváme do tvaru pravoúhelníků, u kterých pak počítáme jejich obsahy. Onen výpočet obsahu nás následně vyzývá k vyřešení úlohy na násobení (zatím dvou čísel, později i dvou výrazů s proměnnou).

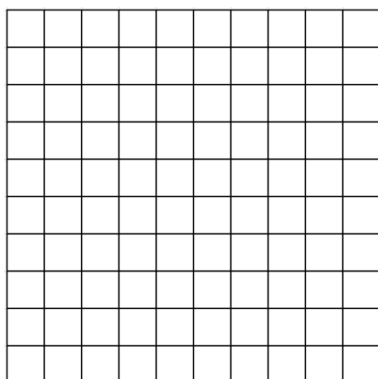


Obrázek 38 – Ukázka demonstračních karet pro výuku násobilky od nakladatelství Alter

Druhou možností, jak na násobení pohlížet, je opakované sčítání. Žáci v rozhovoru uvedli jako příklad $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$, neboli $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$. Pokud zvolené příklady znázorníme a dlaždice pak uspořádáme do sloupců, nebo do řádků, přeneseme se plynule k prvnímu způsobu, tedy k obsahu pravoúhelníku.

Pozn. Cvičení VII-XI slouží jako podklad pro několik následujících oddílů. V nich také blíže specifikuji, z jakého důvodu jsem tato cvičení zařadila do výuky.

VII. Zkus do mřížek 10×10 znázornit následující úlohy:



Obrázek 39 – Mřížka 10x10

a. $7 \cdot 6$

b. $6 \cdot 7$

c. $4 \cdot 5$

VIII. Vypočti pomocí dlaždic:

a. $3 \cdot 4$

b. $2 \cdot 7$

c. $5 \cdot 3$

d. $1 \cdot 4$

e. $0 \cdot 5$

IX. Vypočti pomocí dlaždic:

a. $5 \cdot (-2)$

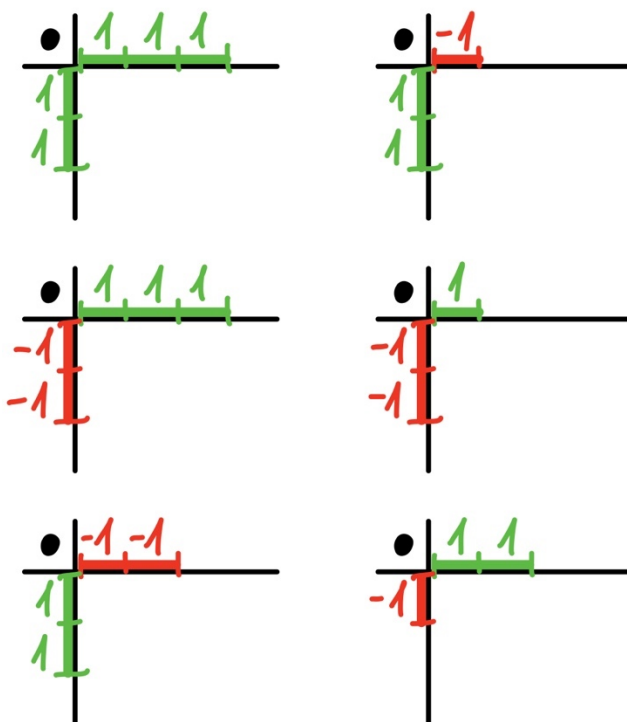
b. $3 \cdot (-3)$

c. $-2 \cdot 7$

d. $-8 \cdot 2$

e. $0 \cdot (-7)$

X. Dopln čísla, modeluj a zapiš výsledek:



Obrázek 40 – Zadání násobení

XI. Počítej a zobrazuj:

- $(1 + 2) \cdot 4$
- $(3 - 1) \cdot 4$
- $-2 \cdot (3 + 1)$
- $(6 - 2) \cdot 2$
- $(4 - (-1)) \cdot 3$
- $(2 - 1) \cdot (3 - 1)$

Násobení dvou kladných čísel

Před samotnou prací s dlaždicemi dostali žáci za úkol zakreslit několik úloh do mřížky 10×10 právě pro uchopení (připomenutí) významu obsahu. U první úlohy jsme se ihned potkali se zajímavou situací, která měla nakonec rychlé řešení.

Rozhovor 6

U: Jak bych do této mřížky mohla zaznamenat $7 \cdot 6$?

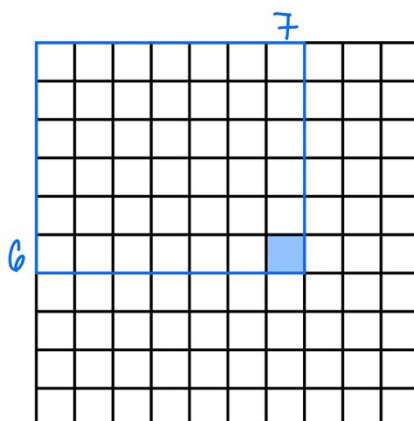
Ž3: Nahoře, v té horní řadě, si najdeme sedmé políčko. V té dolní pak šesté. Teď tam, kde se nám to protíná, bych to vyznačil, tam bude ten výsledek.

U: A co když nemám napsaná žádná čísla? Kde ten výsledek pak mohu najít?

Ž3: Mohu to vzít jako obsah toho čtverce, vlastně obdélníku, který vzniknul...

Ž18: ...když spojíme tu 6 a 7 s tím vyznačeným čtverečkem, tak nám to dá vlastně ten výsledek.

Vyznačila jsem podle navigace na tabuli (obrázek 41).



Obrázek 41 – Žákovské řešení v mřížce

Ž18: Ano, přesně tohle obsah, počet těch čtverečků.

U: Dobře. Jaký mám tedy počet těch čtverečků uvnitř?

Ž3: 42. Je to to stejné jako opakované sčítání, akorát je to prostě jinak zapsané.

Jediný nesoulad, který se při práci ve cvičení VII. objevil, bylo vyjádření Ž3. Žák si zřejmě představil násobkovou tabulku, ve které jsou po stranách umístěna čísla 1 – 10 a uvnitř výsledky jejich součinu. S touto tabulkou mají někteří žáci možnost pracovat i ve

vyšších ročnících jako s první dopomocí při řešení úloh. Zde nám však mohla mírně uškodit, protože naším cílem mělo být znázornění obsahu, ne samotný výsledek součinu. Avšak při jiném „pohledu“ na násobilkovou tabulku lze náš zmíněný cíl objevit. Posléze může mít naopak dvojnásobný přínos pro žáka.

Úkolem úlohy VIII. bylo znázornění součinu jako obsahu pravoúhelníku bez podpory mříže, kterou jsme využívali v předchozím cvičení. Zároveň sloužilo pro nácvik zaznamenání obtížnějších úloh.

Rozhovor 7

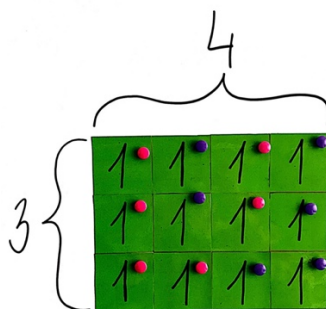
U: Dokázal by mi někdo vyřešit úlohu $3 \cdot 4$ ze cvičení VIII.?

Ž20: Dali bychom si vedle sebe 4 zelené. A vlastně to udělám 3 krát a musí v tom být jakoby ten pravý úhel. Takže to musí být dolů. Dolů musí být ty 3 čtverečky.

Upozornila jsem na možnost použít slova: řádek a sloupec.

Ž20: Vlastně každý sloupec bude obsahovat 3 kartičky. Takže budou 3 řádky a doplníme ten zbytek.

Po celou dobu jsem skládala dlaždice na tabuli, abych tak doprovodila jeho vysvětlování postupu pro ostatní žáky (obrázek 42). To se pravděpodobně povedlo a žáci pochopili. Důkazem je následující komentář Ž13.



Obrázek 42 – Žákovské řešení

Ž13: Ty jo, to dává fakt mega logiku. Já to chápu už.

U: Tak to jsem ráda. A když se na to nyní podíváte, šlo by to jinak?

Zde jsem se snažila žáky dovést k jedné z vlastností operace násobení, kterou je komutativita. Jedná se o záměnu pořadí výrazů, která neovlivní řešení.

Ž3: Šlo. Dáme 4 dolů a 3 doprava a máme to samé akorát obráceně. Budou tedy prohozené strany.

Opět jsem znázornila na tabuli (obrázek 42 pootočený o 90 stupňů).

U: Co byste řekli, že je tedy násobení?

Ž3: Obsah čtverce nebo obdélníku vlastně. A tady to bude 12.

Zbylé úlohy řešili žáci takřka bez problémů. Jedenkrát se stalo, že se žáci nemohli shodnout, zda vyjde stejný výsledek při naskládání dlaždic vodorovně, nebo svisle. Znázornili jsme na tabuli tedy obě tyto možnosti a žáci si po diskusi mezi sebou uvědomili, že se jedná o stejný případ jako předchozí úloha $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$.

Zajímavé pozastavení nastalo při úloze $0 \cdot 5$. Někteří žáci tvrdili, že to nemá řešení, další jen, že to prostě nelze znázornit. Nakonec se přihlásil Ž20 a úlohu vysvětlil na principu minulých úloh, a tím ji i vyřešil.

„No to vezmu 5 zelených čtverečků a dám je tam nulakrát, takže je tam vlastně nedám. A výsledek je 0.“

Bohužel rozdíl v chápání významu slov: úloha nemá řešení/nemá smysl/nelze řešit/má výsledek 0, je velmi častý.

Násobení záporným číslem

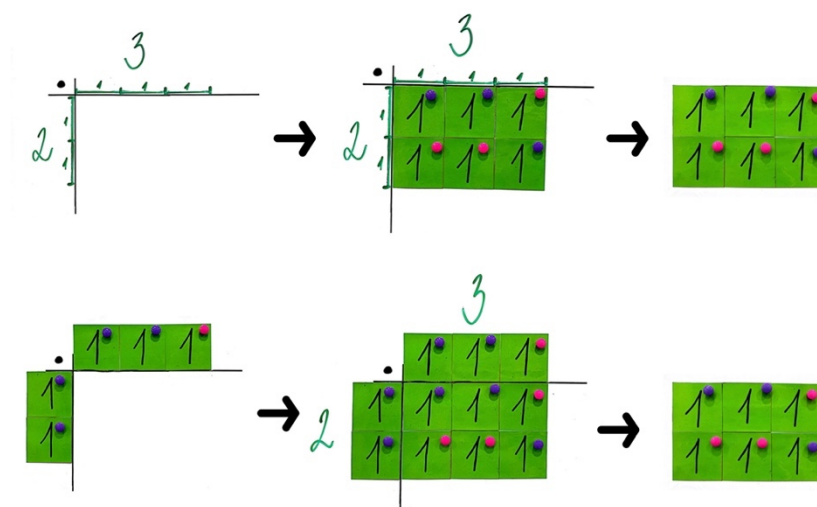
V této kapitole jsme již využili tabulky, které si žáci připravili podle zadaných instrukcí sami doma (obrázek 43). Látka byla obtížnější, a navíc jsme si potřebovali ukázat postupy při počítání se záporným členem výrazu. Tuto znalost jsme posléze využili při násobení dvou výrazů s proměnnou.



Obrázek 43 – Tabulka pro násobení

V předchozích úlohách jsme se s žáky shodli, že násobením vytvoříme pravoúhelník o stranách, jejichž délka je rovna násobeným číslům. Při použití tabulky (obrázek 43) zaznameneáme na jednu stranu (vodorovně) první z násobených čísel, na druhou stranu (svisle) druhé z násobených čísel. Díky komutativitě násobení máme možnost strany libovolně zaměňovat. Po jejich zapsání si k nim přiřadíme úsečky odpovídající délky, nebo samotné dlaždice. Vnitřní část tabulky pak vyplníme pomocí ostatních dlaždic tak, abychom zaplnili přesně prostor vymezený úsečkami/dlaždicemi po jejím obvodu a zachovali sloupečky a řádky dané šíře (jako bychom si představili ulice a křižovatky Manhattanu). Tzv. zachování ulic pro nás bude velmi důležité při počítání s proměnnou.

Na následujícím obrázku (obrázek 44) můžeme vidět příklad zpracování oběma způsoby při násobení dvou kladných čísel. Pokud se na to lépe podíváme, vidíme výhody a nevýhody každé metody. V prvním případě musí žáci k dlaždicím vyrobit další kartičky – úsečky, které budou skládat po obvodu tabulky. Nevýhodou tedy je větší časová náročnost na přípravu. Avšak nespornou výhodou zde je, že všechny dlaždice, které použijí, udávají konečný výsledek. V druhém případě, kdy jsou dlaždice nejen v poli, ale i po okrajích tabulky, může nastávat problém s nedostatkem kartiček, nebo že při vyjadřování výsledku do něj žáci zahrnou i dlaždice po obvodu, tedy výsledek bude chybný. Navíc si jako pomyslnou délku budou umisťovat útvary o určitém obsahu – dostáváme se ke střetu 1D a 2D prostoru. Výhodou však je, že si žáci budou stále procvičovat délky stran jednotlivých čtverců a obdélníků. Budou tedy rozlišovat, jaké strany musí mít obdélník o obsahu X , jaké strany mají čtverce 1 a X^2 .

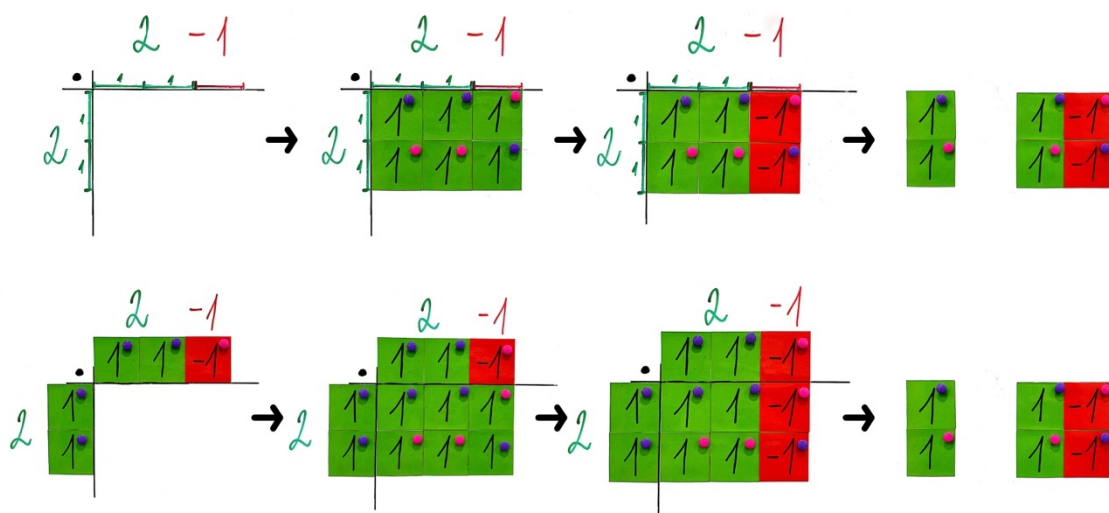


Obrázek 44 – Násobení kladných čísel pomocí tabulky

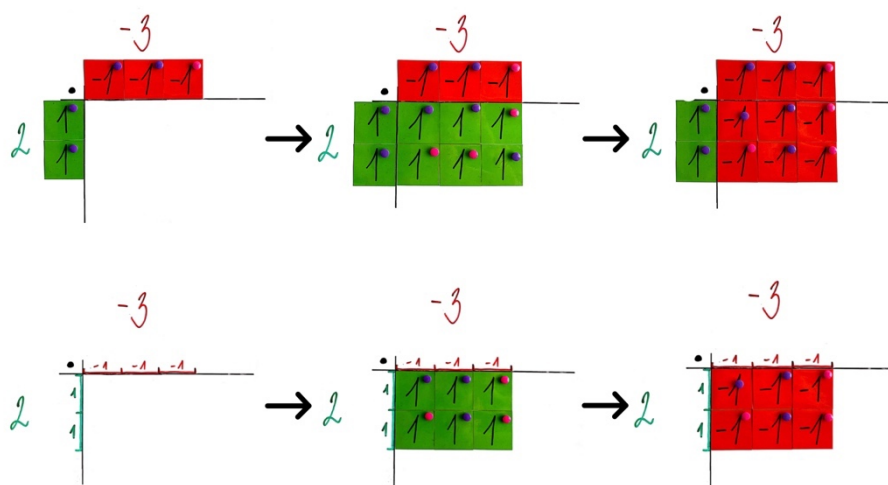
V této hodině jsme se však potřebovali věnovat násobení kladného čísla záporným. Museli jsme proto přejít k otázce „Co se stane, pokud na jedné straně tabulky budeme mít záporné číslo?“. Otázka má celkem jednoduchou odpověď. Pokud se objeví záporné číslo ve vodorovném směru, pak se celý sloupeček dlaždic pod ním převrátí na opačnou barvu. Pokud se záporné číslo objeví ve svislém směru, pak se to stejné bude dít s řádkem, u kterého je číslo zapsáno. S pochopením nám pomohla úloha $2 \cdot (2 - 1)$, jejíž řešení můžeme vidět oběma způsoby na následujícím obrázku (obrázek 45). Nejprve jsme si popsali strany tabulky, následně vyznačili úsečky/umístili potřebné dlaždice, poté jsme vymezenou plochu vyplnili zelenými dlaždicemi, a nakonec jsme převrátili dlaždice ze zelené barvy na červenou v posledním sloupci, kde se nám nahoře vyskytlo číslo -1 . Dlaždice v poli nám pak ukázaly výsledek, který po vyrušení 4 karet odpovídá číslu 2.

Tímto způsobem pak mohou žáci snadno objevit, že při násobení jednoho kladného a druhého záporného čísla máme jako výsledek číslo záporné (obrázek 46). Tedy platí oblíbené pořekadlo „Nepřítel mého přítele je též můj nepřítel.“, neboli pomocí znamének činitelů $(-) \cdot (+) = (-)$.

S žáky jsme si vysvětlili, jak se pracuje s tabulkou při násobení kladných čísel. Chtěla jsem, aby žáci sami přišli na to, jak pracovat s tabulkou se zařazením záporných čísel. Lépe si to poté zapamatují a mohou mít radost z nového objevu.



Obrázek 45 – Obrácení dlaždic při násobení záporným číslem



Obrázek 46 – Násobení kladného a záporného čísla

Rozhovor 8

U: Jak bychom spočetli úlohu $5 \cdot (-2)$?

Ž3: Já vím. Dáme 2 do řádku a 5 do sloupce a celé to vyplníme.

A pokud se nepletu, jelikož to je minusová hodnota, tak to půjde celé do mínusu.

Žáci: Výsledek by byl teda -10 .

U: A zvládneme to i do té tabulky? Ona se nám pak bude hodit při pracování s proměnnou X , tak abychom si to nacvičili.

Ž3: Uděláme jednu řadu, která bude minusový číslo, pak druhou, ta bude plusový... pak to jen doplníme zeleně a spojíme a je to.

Na tabuli jsem znázornila podle návodu – popsala jsem strany tabulky 5 a -2 a vyplnila zelenými čtverečky. Během zaznamenávání na tabuli byla zmíněna poznámka, že opět mohu čísla prohodit.

U: Jak to bude dál? Co nám způsobí násobení číslem -1 ?

Žáci: Převrátí nám dlaždice na opačné.

U: Dobře a kde přesně?

Žáci: No v celém tom řádku.

U: Skvěle. A my ty řádky máme dva, že? Tak jak to bude?

Ž20: Převrátíme oba řádky, tedy nakonec všechny dlaždice.

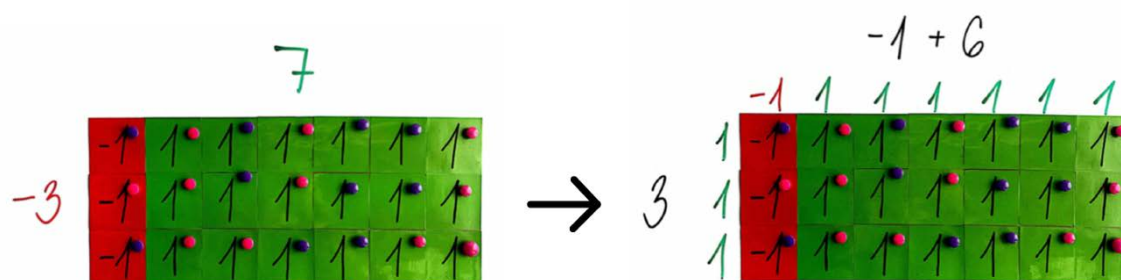
A výsledek je -10 .

Žáci: Ano, -10 .

Na konci třetí vyučovací hodiny jsme s žáky ještě stihli projít a téměř dokončit úlohu X ., dvě úlohy z levého sloupce nám zůstaly na samostatné procvičení. U této úlohy šlo jednak o procvičení násobení záporným číslem pomocí dlaždic a jednak o ujištění, že pořadí násobených čísel není rozhodující. Nezáleží dokonce ani na tom, ke kterému číslu jsme přidali znaménko minus.

4. vyučovací hodina

Na začátku hodiny jsme zkusili jednu úlohu na rozcvičení. Zadání znělo $-3 \cdot 7$. Setkala jsem se zde se zajímavým znázorněním (obrázek 47). Poměrně rychle jsme však došli k závěru, že takto to nebude. Žákům nedával smysl výsledek, který vzniknul. Odvodili, že toto znázornění by zobrazovalo jinou úlohu, přesněji $3 \cdot (-1 + 6)$, které by odpovídal i jejich výsledek 15. Žáci, kteří si vše zaznamenávali do tabulky, chybu v řešení neudělali. Ti, co si to chtěli nějakým způsobem zkrátit/urychlit a tabulku nevyužili, častěji chybovali.



Obrázek 47 – Řešení úlohy $(-3) \cdot 7$

Po několika úlohách se žáci opět plně zapojili a my se mohli posunout k dalším typům úloh.

Kombinovaná cvičení s operací sčítání, odčítání a násobení (roznásobování závorky)

K ověření pochopení předchozího obrácení dlaždic při násobení záporným číslem jsem využila úlohu XI. To se již značně podobalo úlohám, které byly plánovány pro výuku výrazů s proměnnou. Bylo tedy velmi důležité, aby žáci práci ovládli. Očekávala jsem, že by mohly nastat obtíže při uchopení úlohy. Žáky by mohlo lákat závorku nejprve klasicky vypočítat a až poté znázorňovat řešení. Ze začátku jsem ale požadovala, aby si výpočtem nepomáhali. Jakmile jsem viděla, že princip ovládají, nechala jsem je, ať si výrazy upravují (výrazy s proměnnou pak bude také výhodnější co nejvíce upravit a až poté začínat se znázorněním). Další možnou komplikací mohl být fakt „dvojitého otočení“, kdy je dlaždice kvůli záporné úsečce v řádku i sloupci dvakrát otočena, tedy vrátí se na svou původní barvu. Předpokládala jsem, že by někteří žáci mohli záměrně již jednou otočenou dlaždici podruhé neotočit, čímž by dospěli ke špatnému výsledku.

Rozhovor 9

U: Tak, jak by vypadala úloha b. $(3 - 1) \cdot 4$?

Ž3: Je to $3 + (-1)$ a potom dolů krát 4.

U: Ano, tak já to sem zapíšu.

Ž3: No a my to uděláme tak, že... $3 + (-1)$ si dáme 3 zelené dlaždice (úsečky) a 1 červenou. Dolů pak dáme 4 zelené

a vyskládáme to. No a jelikož je to zápor, tak to pak bude celé v záporu.

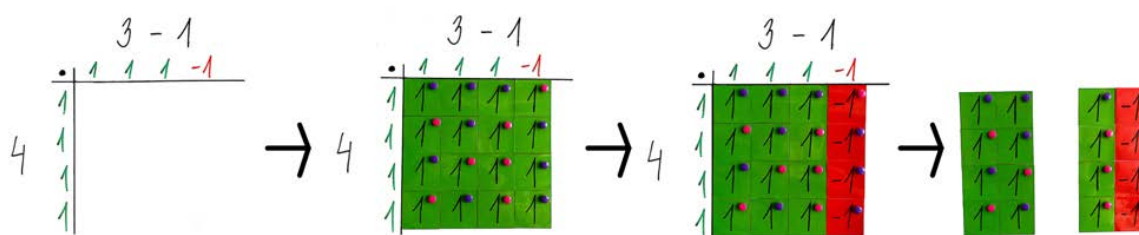
Vše jsem znázornila na tabuli tak, jak žák diktoval (první část obrázku 48), až na poslední indicii, kterou jsem chtěla, aby upřesnil.

U: Dobře, takže takto to máme naskládané a nyní co? Jak to je se sloupečky a řádky?

Ž3: Ten poslední sloupeček je záporný, takže to jde vše do záporu. Teda obrátíme vše na druhou stranu (třetí část obrázku 48). No a teď, protože je jeden sloupeček v záporu, tak se to s tím jedním sloupečkem vyruší (závěr obrázku 48). Takže...

U: Dobře. Mohu k tomu využít ten předposlední třeba?

Ž3: Hmm. A zbyde nám tam 8.



Obrázek 48 – Roznásobení závorky celým číslem

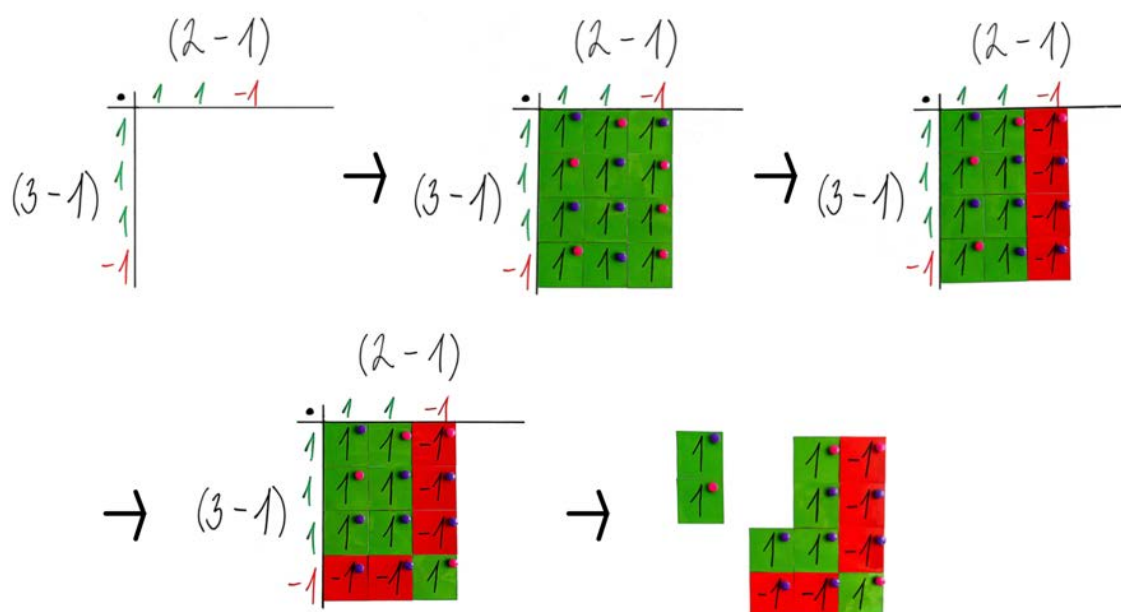
U: Dobře. A souhlasí to? Zkuste si ještě provést zkoušku výpočtem, zda jsme opravdu postupovali správně. S celými čísly už počítat umíte, tak by to neměl být problém...

Žáci: Ano, souhlasí to. $2 \cdot 4$ je 8.

U: Dobře tedy. Takže platí, že pokud je nad sloupečkem nebo vedle řádku záporná úsečka/dlaždice, tak se celý sloupeček (řádek) převrátí.

Úlohy e. a f. byly o něco těžší. Teprve u těchto posledních úloh jsme narazili na můj předpoklad – dopomoc částečným (odstranění první závorky), nebo kompletním výpočtem, a až poté znázornění úlohy. Úlohu e. $(4 - (-1)) \cdot 3$ žáci zvládli bez problémů. Úloha

f. $(2-1) \cdot (3-1)$ pak byla ta, u které se žáci poprvé potkali s dvojitým obrácením. K mému překvapení se u druhého obrácení ani nepozastavili a jednoduše obrátili vždy vše, co v řádku/sloupci bylo. Následně dali dlaždice dohromady, odebrali nadbytečné dlaždice a vyjádřili výsledek (obrázek 49). Svůj postup opět ověřili klasickým výpočtem.



Obrázek 49 – Roznásobení závorek

Poté si sami zkoušeli zadávat další úlohy, přičemž u jedné z nich došlo k položení dotazu, který souvisel s předchozím cvičením.

Rozhovor 10

Ž15: Paní učitelko? Já jsem se Vás jenom chtěla zeptat. Jak jsme tam měli dole ta červená políčka jakoby... ale tam byl jeden zelený. Tak to vlastně nechápu.

U: Tak si to ukážeme ještě jednou, to nevadí.

Naskládala jsem opět na tabuli předchozí příklad.

U: Podívejme se nejprve na řádky. Jaké jsou?

Ž15: No první je kladný, druhý taky, třetí taky. A čtvrtý je záporný, tak ten bych celý obrátila na červenou stranu.

U: Dobře, tedy. Obrátíme ten poslední řádek. Nyní musíme zkontrolovat ještě sloupce.

Ž15: Tam je záporný ten třetí, tedy ten obrátíme a bude celý záporný.

U: Pozor, myslíš, že ho celý obrátíme, ano? On nám nakonec nezůstane celý záporný.

Ž15: No.

U: Tedy z těch třech zelených se nám stanou červené a z toho posledního červeného čtverečku se nám stane...

Ž15: Aha, zelený. Už to chápu.

U: Jinak je jedno, zda začneš napřed řádky, nebo sloupečky, musíš jen projít obojí. Tedy vždy dlaždice, která je na průniku záporného řádku i záporného sloupečku, ve finálním výsledku zůstane stejné barvy jako na začátku – zelená.

Jak můžeme vidět, z rozhovoru 10 vyplývá, že ačkoliv může vypadat látka jednoduše a žáci nemají dotazy, neznamená to, že je vše správně a zcela pochopeno. Některá fakta nám mohou přijít nejasná až při jejich použití v jiných cvičeních. Teprve v nich si uvědomíme, že je potřeba látku procvičovat a opakovat na co nejvíce různorodých úlohách.

2.3.4 Rozklad na součin a dělení

XII. Počítej a zobrazuj:

- a. $14:2$
- b. $15:5$
- c. $-9:3$
- d. $-16:(-8)$

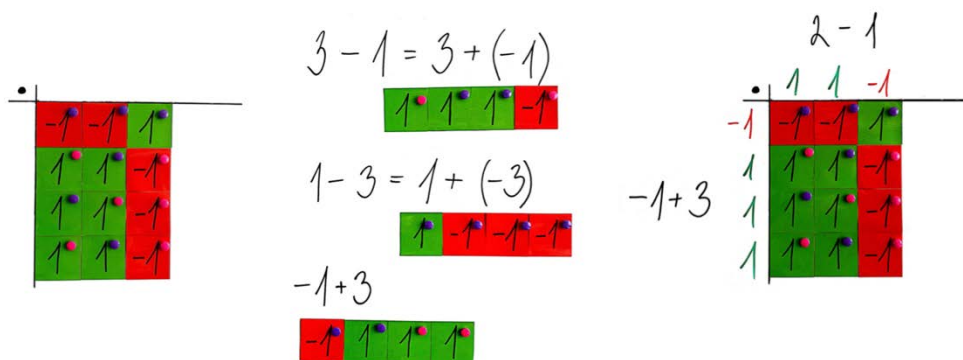
XIII. Rozlož daná čísla na součin. Existuje více možností? Pokud ano, dokážeš všechny nalézt? Jakými čísly jsou zadaná čísla dělitelná?

- a. -12
- b. 8
- c. -20 a 13

Nejprve jsme se věnovali několika znázorněním, ze kterých žáci měli přečíst, o jaký součin se jedná, a zaznamenat jeho výsledek. Pro tuto fázi jsem využila úlohy z doby, kdy jsme počítali součin. Žáci postupovali opačným směrem, než byli doposud zvyklí. Následně řešili několik úloh na dělení (úloha XII.).

Důležitým faktem, který si zde žáci měli uvědomit, byla souvislost mezi rozkladem na součin a dělením. K tomuto propojení sloužily úlohy XIII. Tyto jednoduché úlohy žákům nepůsobily žádné velké obtíže. Přesunuli jsme se proto k úlohám stejného typu, jako je cvičení XI. Zadání obsahovalo buď obrázek bez popisu (rozklad na součin), nebo obrázek s jednou popsanou stranou (dělení).

Pro žáky jsem měla připravené například cvičení na obrázku 50 (první část). Na tabuli jsem vyplnila vnitřní část tabulky na násobení. Úkolem žáků bylo odhadnout, jak mohla vypadat původní úloha zapsaná pomocí čísel a závorek. Jejich postup je zaznamenán v následujícím obrázku a rozhovoru 11.



Obrázek 50 – Rozklad na součin

Rozhovor 11

U: Dokážete vymyslet, co mohlo být na okraji tabulky napsáno?

... delší odmlka. Doplňili jsme spolu horní část tabulky.

Ž8: No tak $3 - 1$?

Ž9: Nebo spíš $1 - 3$?

U: Souhlasíte ostatní s jedním z těchto návrhů, nebo myslíte, že to má být třeba zcela jinak?

Ž18 navrhnul jiné uspořádání, aby se mu lépe počítalo.

Ž18: Já bych vyměnil nahoře tu 1 a -1 , tu první dlaždici v posledních dvou sloupečcích, aby nám vzniknul celý záporný a celý kladný sloupeček, a ty se navzájem vyrušily.

U: Ano, to je možné, pokud budeme řešit již samotný výsledek úlohy. Ale nyní hledáme druhého činitele, ne výsledek. A uspořádání sloupečků v tabulce musí zůstat. Je to takto zadané a my s tím nijak hýbat nemůžeme.

Ozvala se žákyně Ž15, která se před touto úlohou dotazovala na „dvojitě“ obrácení dlaždice.

Ž15: Paní učitelko. No ono se tam... právě, jak tam je v tom posledním sloupečku, jak tam je -1 , tak vlastně... se to jako by propojilo a ten jeden se zase obrátil. Takže vlastně celý ten horní řádek je také v záporu.

U: Ano, skvěle. Máš správný postřeh. A co bych tedy měla doplnit k prvnímu řádku?

Ž15: No -1 . No a dál bychom doplnili jakože 3, jakože 1, 1, 1.

U: Celkově tedy $-1 + 3$. Souhlasíte?

Žáci: Jo.

U: Odpovídalo by to jedné z předchozích navržených možností na začátku?

Žáci: Ne. Ups. Hmm, ne.

U: Když si zapíšeme tu naši možnost pod ty ostatní...

Žáci: Ne.

Rozhodla jsem se žáky navést k tomu, aby si všechny tři možnosti znázornili a poté se teprve rozhodli.

U: Tak jak bychom to znázornili, to $-1 + 3$?

Ž15: No -1 a 3 kladné.

U: Jak znázorníme $1 - 3$?

Ž15: Přepíšeme to na $1 + (-3)$.

Žáci: 1 zelená a 3 červené.

Ž15: A to první je $3 + (-1)$. Tedy 3 kladné a 1 záporná. Takže to se shoduje s tím naším.

Dostali jsme se opět ke komutativitě sčítání. Jakmile do příkladu zakomponujeme i přičítání záporných čísel, není pro všechny tato vlastnost zcela zřejmá. Je tedy dobře, že jsme zde měli opět možnost připomenutí.

U: Ano. Jsme u komutativity sčítání. Vrátili jsme se o pár příkladů zpět. Tedy výrazy jsou shodné, avšak do tabulky se nám hodí ten spodní zápis $-1 + 3$, aby nám to krásně pasovalo.

Provedli jsme závěrečnou kontrolu, zda barvy a počet dlaždic opravdu odpovídají. Zápis úlohy pak žáci správně realizovali jako součin dvou závorek.

Zajímavé je, že se jedná o identickou úlohu z předchozí hodiny, ale přesto jsme s ním strávili poměrně velkou část vyučovací hodiny.

Další úlohy si opět vytvářeli žáci sami, aby byli, pokud možno, co nejvíce zapojeni do celého procesu. Každý měl za úkol vymyslet alespoň jednu úlohu (díky omezenému počtu dlaždic se samozřejmě některé shodovaly). Na čtvrtou vyučovací hodinu navazovalo cvičení, na kterém jsme se věnovali obdobným úlohám včetně propojování pojmů dělení a rozklad na součin. Pro budoucí práci bylo zapotřebí, aby si žáci uvědomili úzkou vazbu mezi zmíněnými pojmy. K tomuto propojení byly určeny například úlohy ve cvičení XIII.

2.3.5 Závěr propedeutiky

Celá čísla jsou obor, se kterým se žáci setkávají nejdříve, a to již od mateřské školy. Jsou jim blízká a používají je každý den. Proto jsem i množinu celých čísel zvolila pro propedeutiku dlaždic. Pracovali jsme s číselnými výrazy, které byly znázorňovány pomocí

jednotkových dlaždic. Předpokládala jsem, že si žáci připomenou a upevní znalost základních principů úpravy číselných výrazů a sami si odvodí obecná pravidla pro manipulaci s dlaždicemi.

Oddíl jsem rozdělila do několika tematických celků, které na sebe přirozeně navazovaly. V každém z nich jsme s žáky kombinovali manipulaci se symbolickým zápisem.

Nejdříve jsme se věnovali znázorňování, čtení a základní manipulaci s jednotkovými dlaždicemi. Zde jsme se zvláště věnovali tvorbě opačných čísel, abychom snížili možnost pochybení při prohození členů výrazu. Navíc si žáci odvodili pravidlo pro odebírání dlaždic z výrazu bez změny jeho hodnoty, které posléze využíváme při dalších operacích.

Následovalo sčítání a odčítání celých čísel. Žákům nedělalo obtíže přeformulování znaménka plus na sousloví „dát dohromady“ a využívat tento povel i při odčítání čísla jako přičítání čísla opačného. V předchozím roce tito žáci začínali se zápornými čísly, jejich chybovost při úpravách a práci se znaménky byla poměrně vysoká. Jednalo se buď o přehlédnutí, nebo o přiřazení znaménka nesprávnému číslu. Při počítání úloh v tomto oddíle se mi potvrdilo, že při práci s dlaždicemi dochází v této oblasti k menší chybovosti.

Dále jsme se věnovali operaci násobení, kterou jsme propojili s počítáním obsahů pravoúhelníků. Žáci si měli poprvé možnost vyzkoušet, co to znamená krát (-1). Tento povel nám prikazoval otočit dlaždice na druhou stranu. Díky úloze ($0 \cdot 5$) jsme si vysvětlili i rozdíl mezi spojenými úloha nemá smysl/nemá řešení/nelze řešit/má výsledek 0. Odlišnost chápání těchto slov je velmi častá a je potřeba se s žáky podělit o jejich význam co nejdříve.

V kratším oddíle jsme vyzkoušeli kombinaci třech probraných operací ($+$, $-$, $\cdot$). Úlohy tohoto typu se již více přibližovaly budoucím úlohám s výrazy s proměnnou.

V závěru propedeutiky jsme propojili pojmy rozklad na součin a dělení.

Z uplynulé části experimentu jsem dospěla k poznatku, že je používání dlaždic vhodné již od prvního stupně základní školy, kde se žáci setkávají s přirozenými čísly a operacemi mezi nimi. Dále mohou posloužit i při rozšiřování přirozených čísel na celá čísla.

2.4 Algebraické výrazy s proměnnou

5. vyučovací hodina

Na začátku hodiny jsme se věnovali opakování a procvičování již probraných typů úloh. Žáci si vše připomněli a začali počítat. Plánovala jsem zakončit propedeutiku na celých číslech a začít se věnovat výrazům s proměnnou X .

Nejdříve jsme si zopakovali vzorce pro obsah pravoúhelníků a obsahy dvou nově zařazených dlaždic X, X^2 . Jejich strany jsme navzájem porovnávali a srovnávali je i s jednotkovou dlaždicí. Žáci si znovu museli připomenout, že jsme již na začátku volili X větší než 1. Proměnná X není obecně násobkem jednotky, nelze její hodnotu nahradit celým číslem a ani její dvojnásobek nebo trojnásobek (tak byly dlaždice konstruovány). Ke stranám dlaždice X^2 mohu proto přiložit pouze dlaždici X , a to její delší stranou.

2.4.1 Zápis a znázornění algebraických výrazů

Ještě před samotným prováděním operací s algebraickými výrazy bylo zapotřebí s žáky procvičit zápis a znázorňování jednotlivých členů výrazu (viz cvičení I. až III.). Poprvé se měli setkat s vynecháním znaménka krát, a zkrátit tak zápis součinu konstanty a proměnné.

Domnívala jsem se, že tvorba zkráceného zápisu problémy tvořit nebude, jelikož tento tvar používají i v běžné řeči: mám třikrát míč = mám tři míče aj. Předpokládala jsem však, že by žáky mohl zmást zápis celého čísla spolu s proměnnou při znázorňování, i díky propedeutice, kde pracovali pouze s celými čísly.

I. Zkrat' zápis a znázorni:

- a. $1 \cdot X$
- b. $2 \cdot X$
- c. $4 \cdot X$
- d. $-3 \cdot X$
- e. $0 \cdot X$

II. Znázorni, případně i vypočítej:

- | | |
|--------------|--------------|
| a. $X + 1$ | g. $X - 4$ |
| b. $2X + 3$ | h. $2X - 6$ |
| c. $5X + 2$ | i. $3X - 5$ |
| d. $-3X + 2$ | j. $-X - 4$ |
| e. $-X + 4$ | k. $-3X - 6$ |
| f. $-8X + 5$ | l. $-2X - 1$ |

III. Znázorni, případně vypočítej:

- a. $X^2 + 6$
- b. $7 - 6X^2$
- c. $3X - 2X^2$
- d. $-4X^2 + 4X - 5$

Rozhovor 12

U: Jak bychom zkrátili a znázornili $1 \cdot X$?

Ž27: No zapsali bychom to jako $1X$, což je X , a znázornili jedním obdélníčkem hodnoty X .

U: Dobře. A co $2 \cdot X$?

Ž8: Zapišeme to normálně bez toho krát a pak si vezmeme dvě jednotkový dlaždice a jednu X -ovou.

U: Hmm. Má někdo ještě jiný nápad?

Ž10: No podle mě je to jen, že vezmu dva obdélníky X .

Ž14: Já bych to udělal stejně jako Ž10.

Žáci: Jo.

U: A proč myslíte, že to tak bude?

Ž27: No ta dvojka nám jen říká, kolikrát mám vzít to X .

U: Ano, přesně. Pokud bychom vzali dvě jednotkové dlaždice, znamenalo by to, že je k tomu jen přidáváme, tedy jednalo by se o operaci...?

Ž21: sčítání.

U: A zde máme násobení. Již jsme se zmiňovali, že se tomuto číslu říká konstanta. Ta nám opravdu určuje, kolikrát, i v tom slově to krát ukazuje na násobení... tedy kolikrát musím vzít tu proměnnou X . Je to srozumitelné Ž8, i ostatním? Jak bychom znázornili $4X$?

Ž8: No, takže čtyři obdélníky.

U: Hmm. Správně.

Nyní přispěl jeden žák se zajímavým dotazem...

Ž13: Paní učitelko? Mohly by být třeba $4X$ znázorněny, že by byly dva obdélníky, ale měly by dvakrát větší hodnotu, než ten náš jeden?

U: Jasně, skvělý nápad. Musela by se nám akorát jedna ta strana změnit z 1 na 2. Myslel jsi to tak?

Ž13: Jo. No a byly by 4 celkově ne samostatně. Tak jsem to myslel.

U: Super. Jak by vypadalo $-3X$?

Ž8: No dáme vedle sebe tři červený.

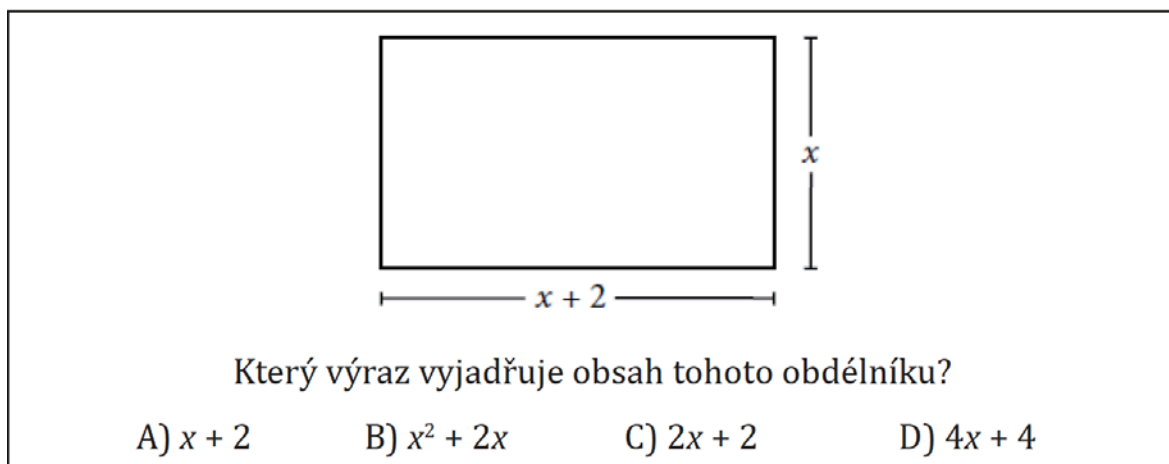
Ž3: Nebo si dáme normálně tři zelený, a to mínus nám je převrátí na červený. Takže jako říká Ž8.

U: Ano, super.

Poslední znázornění $0X$ nedělalo problém. Žáci dospěli ke stejnému pravidlu, které jsme využívali u jednotkových dlaždic v propedeutice. Stejný počet zelených a červených dlaždic stejné absolutní hodnoty se vyruší.

Můj předpoklad se ukázal jako správný. Žáci měli opravdu tendenci znázorňovat například $2X$ pomocí 2 jednotkových dlaždic a jedné dlaždice X . Tento fakt by měl pro naše

budoucí počítání neblahé následky. Poukazoval totiž na skutečnost, že někteří žáci mají obtíže v rozlišování operace sčítání a operace násobení. To je i jeden z faktorů, který zkoumá ve svých úlohách testování žáků 8. ročníků v TIMSS 2007. Například úloha M10-08 (obrázek 51), kde odpověď C) přímo odpovídá záměně zmiňovaných operací.



Obrázek 51 – Úloha M10-08, TIMSS 2007

Do úloh II. a III. jsem zařadila znázorňování výrazů, které jsou již složené z více druhů dlaždic. Hlavním důvodem pro tato cvičení bylo uvědomění si nenahraditelnosti jedné dlaždice jinou/jinými – tedy i nemožnost úpravy takového výrazu. Fakt, že nelze X (případně X^2) sečíst (odečíst) s celým číslem (případně s X) a za výsledek se považuje již samotný zápis úlohy, byl pro žáky, které jsem učila v minulých letech, velkým problémem. Domnívám se, že problém vznikal ve znaménkách $+$, $-$, která až doteď vybízela žáky k provedení operace. Od dlaždic jsem tedy očekávala, že žákům umožní jiný náhled do situace, díky kterému již nebude docházet k úpravám typu $3X + 2 = 5X$, nebo $3X^2 - 1X - 2 = 0$.

Pozn. V momentě, kdy jsme pracovali s dlaždicemi, to vypadalo, že k žádné takové situaci nemají žáci tendenci. Bohužel u některých se později podobné početní úkony objevily. V takových případech jsme se společně vraceli (případně byli žáci pobídnuti) ke znázornění pomocí dlaždic. Jiní žáci využívali dlaždice, dokud to bylo možné, tedy v nesnázích po nich sahal automaticky. Někteří posléze poznamenali, že si je představují pouze v hlavě.

2.4.2 Sčítání a odčítání algebraických výrazů, hodnota výrazu, dosazení do výrazu

IV. Vypočítej:

- $X + 3X$
- $2X - X$
- $-2X + 3X$
- $4X + 2X$
- $X - 5X$

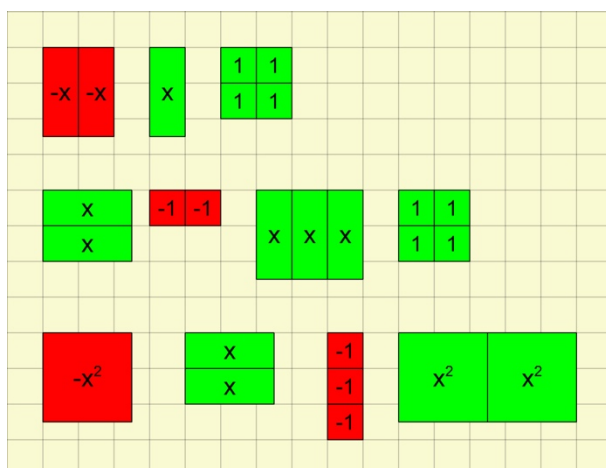
V. Vypočítej:

- $X + 2 - X + 3$
- $2X - 1 + X + 2$
- $4X - 3 - 1$
- $7 - 2X + 5X - 3$

VI. Vypočítej:

- $2X^2 + 3X - X^2 - 2X$
- $3X - 4X^2 - 5 + 3X$
- $X + 2X^2 - X - X^2 + 4$
- $2 + 5X - 3 + 3X^2 - X^2 - 2X$

VII. Vypočítej a úlohu zapiš:



Obrázek 52 – Zadání (+) a (-) s proměnnou

Ve cvičeních IV. – VII. již bylo možné výrazy upravit. Žákům cvičení nedělala žádný problém. Nakonec i sami v závěrečné diskusi odvodili pravidlo, jak a kdy můžeme sečíst případně odečíst členy výrazu. Ž18 to připodobnil jednotkám: „To X nebo X^2 je vlastně jednotka. Že prostě, když sčítáte třeba centimetry a centimetry nebo metry a metry, tak to též spočítáte úplně normálně, jako kdyby tam nebylo napsaný to cm nebo m . A pak to tam jen dopíšete.“

Poznámka žáka Ž18 mě přivedla k myšlence, že je třeba s žáky zkusit i do těchto složitějších výrazů dosadit a spočítat jejich hodnotu. V závěru této hodiny jsme si tak vyzkoušeli dosazování za proměnnou X a X^2 . Hlavním záměrem tohoto procvičování bylo zjistit, zda žáci správně uchopili pojem proměnná a zda jim dlaždice pomohou rozpoznat, že se hodnota X v průběhu úlohy nemění. Celý postup a diskusi nad prvním úkolem zachycuji v následujícím rozhovoru 13.

Rozhovor 13

U: Pokud bych si dosadila do úlohy $X - 5X$ za první X číslo 10 a druhé X číslo 8. Jaký bych dostala výsledek?

Ž13: No prostě $10 - 5 \cdot 8 = 10 - 40 = 30$.

Ihned vzápětí reagovalo několik žáků, kteří se nenechali zmást zadáním.

Ž11: Ale to přece nejde. Když si zvolím, že $X = 10$, tak už z toho mám určitou, takže tam už není X , za které bych dosadila 8. Je to trochu divný napsat, ehmm... že by se to muselo prodloužit. Že by se třeba muselo napsat všude 10, nebo všude 8.

Ž18: No to by se muselo použít ještě jiný písmeno, třeba hned Y . Takže třeba $2X + 3Y$ a mohl bych dosadit jiný hodnoty.

U: Tedy spíše se shodujete na tom, že pouze za více „písmen“, tedy proměnných, bych mohla dosadit více hodnot, ale do zmíněné úlohy pouze s proměnnou X musím za X dosadit všude to stejné. Je to tak?

Žáci: Ano. Stejně písmeno by mělo být i stejné číslo.

Ž22: No, když mám třeba použitý jen dvakrát to X , tak vím, že přičítám pouze nějaké stejně velké věci. A když mám X a Y , tak vím, že Y je jiný než X .

U: Ano, takto tomu rozumíte víceméně správně. Tedy pozor. Příklad, co jsem zmínila na začátku, je špatně zadán. Čekala jsem, zda to někomu bude připadat zvláštní. Opravdu platí, že za stejnou proměnnou volíme v jedné úloze jedno číslo. Což neznamená, že v další úloze nemůže být hodnota stejně nazvané proměnné jiná, proto je to proměnná, že ano. Zároveň není však obecně pravidlem, že X nesmí představovat stejnou hodnotu jako například Y . Existují případy, kdy za obě proměnné můžeme dosadit stejné číslo. Rozdíl je však v tom, že u různých písmen to neplatí obecně, kdežto stejná písmena pod sebou nesou stejnou hodnotu vždy.

Zajímalo mě, zda žáci vnímají výuku a pouze si neopisují vše z tabule do sešitu – zda někdo poukáže na dvojí hodnotu dosazenou za X . Velmi mě překvapilo, že dosazení hodnoty za proměnnou žáci nevnímali jako problém, ale zaujalo je dosazení právě dvou hodnot za proměnnou X . Tedy přímo fakt, který jsem nesprávně zadanou úlohou zkoumala. Sami formulovali pravidla, jak si svá tvrzení odůvodnit. Dokonce se objevil i návrh na druhou proměnnou, se kterou jsme do té doby nepracovali.

Pozn. Dlaždice je možné rozšířit na více proměnných. Například výše zmíněná aplikace tuto možnost přímo nabízí. Práce s více proměnnými je však komplikovaná, proto jsem se spíše snažila o pochopení principu na jednom typu dlaždic s jednou proměnnou, který si pak budou moci žáci aplikovat při výpočtech s libovolným počtem proměnných.

2.4.3 Násobení algebraických výrazů

6. vyučovací hodina

Násobení konstantou a proměnnou

VIII. Vypočítej:

a. $1 \cdot (X + 2)$

b. $3 \cdot (X + 3)$

c. $2 \cdot (1 - 3X)$

- d. $(2X + 3) \cdot 4$
- e. $(X - 3) \cdot 2$
- f. $2 \cdot (-2 - X) \cdot 2$

IX. Vypočítej:

- a. $X \cdot (X + 1)$
- b. $3X \cdot (4 + 2X)$
- c. $(3 - X) \cdot 2X$
- d. $(2X - 3) \cdot X$
- e. $-X \cdot (X + 2)$

V propedeutice na celých číslech jsme sice roznásobovali nejednu závorku určitým číslem, ale nikdy jsme se nedostali k pravidlu, jak roznásobení vlastně funguje. Žáci pouze správně použili „množení“/kopírování výrazu v závorce tolikrát, kolikrát byla násobena. Obecné pravidlo pro roznásobení závorky posléze i s proměnnou X jsme odvodili společně až v této hodině – na úloze $2 \cdot (3 + 1)$. Celé odvození je zachyceno v rozhovoru 14.

Rozhovor 14

Ž3: No vezmeme si 3 zelený čtverečky 1, dáme je klidně vedle sebe, a k tomu přičteme ten jeden další zelenej, takže máme 4 čtverečky zelený. To je to $(3 + 1)$. A teďka dáme ještě to samý hned pod to, takže... vyjdou nám dva řádky a čtyři sloupce. A vyjde nám to 8.

U: Ano, dobře. Kdybychom to normálně počítali, jako tomu bylo pro ověření v kapitole pouze s celými čísly, tak jsme vypočítali hodnotu závorky a vynásobili. Ale ne vždy půjde přesně hodnota závorky určit, takže bychom se měli pokusit o objevení jiného způsobu, který pak budeme aplikovat hlavně početně. Když vám trochu pomůžu a udělám toto. Pomůže nám to v něčem?

Pouze jsem rozdělila obdélník 2×4 na 2×3 a 2×1 (první a druhá část obrázku 53).

Ž3: Tak to je pořád $4 \cdot 2$.

U: No ale co, když jsem to takto rozdělila?

Ž11: Tak tam už je $+$. Protože násobení by mělo bejt u sebe. A když to takhle rozdělíte, jakože v uvozovkách do dvou ostrůvků, tak už je to sčítání. Takže to je jako $6 + 2$.

U: Hmm, to je zajímavé přirovnání. Takže je to $6 + 2$. A jak bych mohla jinak zapsat tu první 6?

Ž13 a Ž3: Hmm $2 \cdot 3$.

Ž3 a Ž10: Pak $2 \cdot 1$.

U: Dobře. A mezi tím je teda co za znaménko?

Žáci: Plus.

U: Když to máme takto zapsané (obrázek 53 poslední část), vidíte v tom nějaké pravidlo? Když vám třeba barevně vyznačím ty dvojky...

Ž11: No tu dvojku jsme tam dali víckrát. Že ta samotná dvojka jakoby nenásobila sama, ale že ty čísla v závorkách se vlastně jakoby rozdělily a ta dvojka násobila jako každé to číslo zvlášť. Takže jako dvojka násobila trojku a dvojka násobila jedničku, a to se pak dohromady sečetlo.

U: Hmm. A proč myslíš ještě, že jsme sčítali?

Ž11: No protože tam předtím bylo v závorce $+$. Tak aby se to tam zachovalo stejný.

Nechtěla jsem ihned zavést pravidlo pro roznásobení závorek, protože jsem si nebyla zcela jista tím, že i ostatní žáci princip vnímají a rozumí mu. Proto jsem nechala vše provést a zapsat ještě na jedné úloze $3 \cdot (4 + 2)$ každého žáka samotného. Následně se o slovo přihlásil žák Ž13.

Ž13: To by bylo $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$.

Po této úloze žáci celý princip sami shrnuli a vzájemně se doplňovali. Použili jsme šipky pro zaznamenání, mezi jakými členy bude operace násobení.

$$2 \cdot (3 + 1) = 8 \rightarrow 2 \cdot (3 + 1) = 8 \rightarrow 2 \cdot (3 + 1) = 8$$

6
 $2 \cdot 3$

2
 $2 \cdot 1$

Obrázek 53 – Odvození pravidla pro roznásobení závorky

Obecně jsme si pak celý postup zaznamenali pomocí barevných útvarů jako je na obrázku 54.

$$\boxed{\text{red}} \cdot \left(\triangle \pm \bigcirc \right) = \boxed{\text{red}} \cdot \triangle \pm \boxed{\text{red}} \cdot \bigcirc$$

Obrázek 54 – Obecný zápis roznásobení závorky

Díky pochopení principu roznásobování závorky v oboru celých čísel žáci neměli problém s úlohami s proměnnou. Velmi rychle se opět adaptovali na fakt, že součet proměnné a čísla (resp. proměnné v druhé mocnině a proměnné v první mocnině/čísla) nelze dále upravovat, proto je k výpočtu potřeba vynásobit každý člen závorky zvlášť. Postup žáků například v úlohách VIII. b. a IX. e. je znázorněn na následujících obrázcích (obrázek 55, obrázek 56).

$$3 \cdot (x + 3) \rightarrow 3 \cdot x + 3 \cdot 3 = 3x + 9$$

x

3

Obrázek 55 – Roznásobení závorky s proměnnou celým číslem

$$\begin{array}{ccccc}
 -X \cdot (X+2) & \rightarrow & -X \cdot (X+2) & \rightarrow & -X \cdot X + (-X \cdot 2) = \\
 \begin{array}{c} X+2 \\ \text{X} \end{array} & & \begin{array}{c} X+2 \\ -X \end{array} & & \begin{array}{c} X \\ -X \end{array} \begin{array}{c} X \\ 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 & & & & = -X^2 - 2X
 \end{array}$$

Obrázek 56 – Roznásobení závorky proměnnou X

Úloha občas vyžadovala předchozí úvahu nebo výpočet (například VIII d. – f.). Pro některé žáky bylo jednodušší mít číslo jako prvního činitele, tedy před závorkou. V poslední úloze VIII. f. též bylo několik způsobů, jak ji uchopit a vyřešit – buď se využilo komutativity násobení, nebo se vynásobili první dva činitele a posléze výsledek s třetím činitelem. Žáci zkoušeli obě možnosti.

Vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu, roznásobování závorek

7. vyučovací hodina

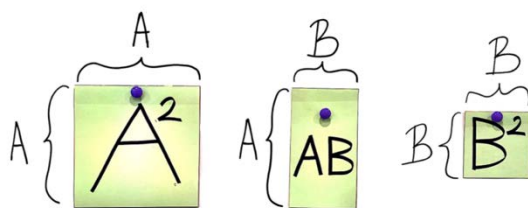
Pro odvození vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu jsem se rozhodla využít zcela nový typ dlaždic. Je zřejmé, že se k výuce daly použít i naše stávající dlaždice, ale vzhledem k tomu, že v nich figurovaly čtverce s hodnotou (obsahem) $1^2 = 1$, mohlo dojít k falešnému přesvědčení, že v každém vzorci se bude od teď vyskytovat číslo 1. Proto jsem se rozhodla ve prospěch nových dlaždic.

Výroba nových dlaždic nebyla časově náročná. Stačilo nám jen několik čtverců a obdélníků, pomocí kterých jsme již mohli vyjádřit vše potřebné. Dlaždice měly hodnoty A^2, B^2, AB (obrázek 57). Velká písmena byla zvolena z důležitého důvodu. Žáci se setkají s velkým množstvím cvičení, ve kterých budou úlohy s různými proměnnými a neznámými. Mohou se v nich vyskytnout malá písmena a, b v různých násobcích a tvarech a žáky by mohl vzorec a zadání úlohy zmást. Nemuseli by proto rozlišit, co je v dané úloze podle vzorce a, b , případně a^2, b^2 . Například v úloze $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

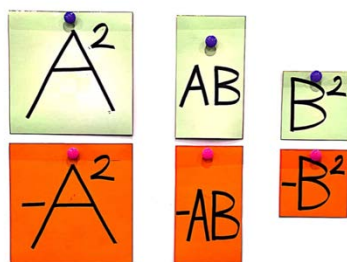
Podobně jako v předchozím případě, kde byla hodnota X větší než 1 a zároveň nebyla možnost ji nahradit jednotkovými dlaždicemi, jsme i zde museli zvolit jednu z hodnot větší a nenahraditelnou tou druhou. Rozhodla jsem se pro $A > B$. Na tento fakt volby velikosti

bylo třeba žáky upozornit, aby nedošlo k falešné domněnce, že A vždy bude znamenat větší číslo.

Jako pedagogickou pomůcku jsem opět vytvořila stejný počet dlaždic ve větším měřítku. Použila jsem též barevný papír jako u předchozího typu dlaždic. Bohužel jsem však v době covidových opatření nemohla sehnat chtěné barvy, proto jsem tentokrát využila světle zelenou pro kladné hodnoty a oranžovou pro záporné hodnoty (obrázek 58). Pro větší trvanlivost byly dlaždice opět zalaminovány do průhledné voděodolné folie.



Obrázek 57 – Hodnoty dlaždic



Obrázek 58 – Ukázka dlaždic

Mým cílem bylo, aby si žáci sami díky dlaždicím uvědomili, že nelze dvojčlen umocnit na druhou způsobem, že umocníme každý člen zvlášť, tedy $(x + 2)^2 \neq x^2 + 2^2$. Druhým cílem bylo nalezení způsobu, jak roznásobit dvě závorky.

V předchozích hodinách, kde se žáci seznamovali s druhou mocninou, se stávalo, že se sami žáci ptali, proč nelze umocnit ve dvojčlenu každý člen zvlášť. V minulé hodině jsme tento problém řešili s Ž18 a Ž20 u úlohy 12^2 . Ž20 si pravděpodobně nemohl vzpomenout, kolik se rovná $12 \cdot 12$, tak si úlohu rozložil, aby si tím problém zjednodušil (viz rozhovor 15).

Rozhovor 15 a 16

U: Kolik by tedy bylo 12^2 ?

Ž20: No to bych spočítal jako $10 \cdot 10$ a $2 \cdot 2$ v podstatě. A vlastně je tam... potom je výsledek 104.

U: A opravdu to takto smíme vypočítat? Jsi si jistý, že to tak platí?

Ž20: No to nejsem, ale doufám.

Ž18: Jsme si to jen přepsali jako $(10 + 2)^2$, což je 10^2 a 2^2 .

U: Dobře tedy, nějak jste to přepsali. Pojd'me na chvíli od toho dál a zamyslete se, čemu se rovná 12^2 , když víme, že $a \cdot a = a^2$?

Ž20: No tohle je $12 \cdot 12$.

Ž18: Jo.

U: Hmm. A to by vyšlo kolik? Zkuste si to všichni stranou vynásobit pod sebou.

Žáci: Takže 144.

U: Dobře, tedy tím prvním postupem by nám to nevycházelo a rozložit by to tak zřejmě nešlo. Příští hodinu si ukážeme a dokážeme, proč to ani vyjít nemohlo a jak by se to muselo rozepsat, aby to bylo správně.

Napojili jsme na to rozhovor následující hodinu, kdy jsme si celý příklad napsali znovu na tabuli. Číslo 10 a 2 jsme si po domluvě nahradili písmeny A, B, abychom celou úlohu mohli prodiskutovat a shrnout pro jakákoliv dvě čísla (obrázek 59)...

$$\begin{array}{l} (10 + 2)^2 \begin{cases} = 12^2 = \underline{144} \\ \neq 10^2 + 2^2 = \underline{104} \end{cases} \\ \downarrow \\ (A + B)^2 \end{array}$$

Obrázek 59 – Příklad jak (ne)umocnit součet

U: Tedy nahradili jsme si čísla písmeny A, B , abychom to měli obecně pro jakákoliv dvě čísla. Zatím se domluvme na tom, že tato písmena pro nás budou představovat čísla kladná.

Zatím jsem nechtěla, aby je pletlo znaménko a přemýšleli nad zápornými čísly. Nijak by to našemu důkazu neprospělo.

Jelikož probíhala celá výuka online, rozhodla jsem se žákům trochu pomoci...

U: Vás již v tom předchozím příkladu napadlo, že se v té úpravě budou vyskytovat druhé mocniny našich dvou čísel/písmen. Ale úplně nám to nevycházelo. Zkuste tedy nyní sami zjistit, čemu se tento výraz rovná.

Vy víte, že druhá mocnina je obsah čtverce, ten jsme schopni i vytvořit. Použijte k tomu jednu dlaždici A^2, B^2 , které představují druhou mocninu čísel v závorce. Následně k nim přidejte potřebný počet dlaždic s hodnotou AB . Máme takto možnost vytvořit čtverec, který by řešil náš problém?

Na tabuli jsem opět znázorňovala s žáky. Připnula jsem na ni jednu dlaždici od každé druhé mocniny a poté celkem šest dlaždic AB , abych jejich počtem žáky neovlivnila.

Ž20: No jen takhle z toho čtverec neudělám.

Ž3: Já možná vím, ale nevím, zda to vlastně vyjde. Když vezmu to A , pod to doleva dám to B .

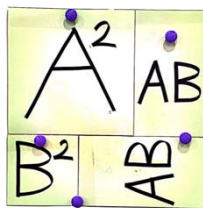
Pozn. A a B byly myšleny čtverce s jejich druhou mocninou.

U: Takto?

Ž3: Ano. Potom vezmu jedno AB , dám ho naležato vedle toho B^2 ...

Ž18: No, podle mě taky, když si dám jedno to AB naležato vedle toho B^2 a pak hnedka vedle A^2 , tak to vyjde.

Podle pokynů jsem naskládala na tabuli (obrázek 60).



Obrázek 60 – První vyjádření druhé mocniny součtu pomocí dlaždic

Ještě jsem je neupozorňovala, že nedodržují systém ulic a křižovatek, na kterém jsme se již zcela na začátku domluvili. Předpokládala jsem, že k tomu dojdeme při zápisu stran čtverce a následné kontrole jeho vyplnění. Nakonec se tak stalo dříve.

U: Vychází to?

Ž3: No čtverec to podle mě je.

Ž11: Jen se musí vyměnit ty dvě dole, protože to jinak nevychází.

U: Hmm, skvěle, ano. Přišel někdo na jiné řešení? Použil někdo jiný počet dlaždic AB? Nebo s tím takto souhlasíte?

Žáci: No. Souhlasíme.

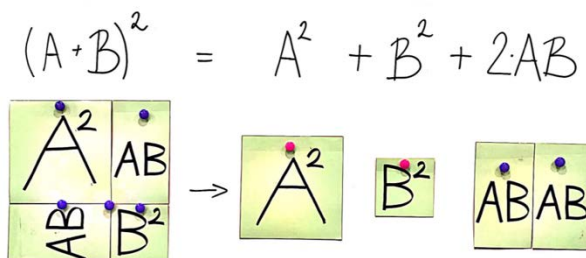
U: Jak bych tedy mohla zapsat ten výsledek? Když se podíváte na ten čtverec, přečtete z něj tu hodnotu? Kolik to vychází?

Ž3: $A^2 + B^2 + 2AB$

Žáci: Jo.

Ž11: Není to AB^2 spíš?

U: Tak si to pod to naše rozepsané zkuste naskládat (obrázek 61).



Obrázek 61 – Rozepsání vzorce pro druhou mocninu součtu $A+B$ pomocí dlaždic

Ž11: Jo, tak to asi souhlasí.

U: Jaká by byla strana tohoto velkého čtverce?

Ž3: No tak ta strana horní, nebo ta dolní, nebo ta horní prostě je $A^2 + AB$. Celá ta strana.

U: Tak já sem napíšu tvou odpověď. Zdá se ti tedy, že ta strana horní je jiná než dolní, ano?

Ž3: No je, protože dole je ještě B^2 . A ta levá strana je $A^2 + B^2$.

Vypadá to, že si žák spletl délky stran a dlaždice, které jsou k té straně přiložené. Navíc si neupravil dvě spodní dlaždice, na které upozornila Ž11. V následném rozhovoru po skončení online výuky se ukázalo, že si žák v předchozích hodinách (při propedeutice s celými čísly) ke stranám násobící tabulky přikládal dlaždice 1 – žil v domněnku, že si strany vyjadřuje pomocí dlaždic. U hodnoty 1 to totiž vycházelo „stejně“. Právě tuto situaci jsem zmiňovala jako riziko u násobící tabulky.

Zde jsme se pozastavili nad tím, zda vyjadřujeme stranu druhou mocninou. Navíc jsme se vrátili ke čtverci jako takovému a zopakovali si, že má všechny strany stejně dlouhé.

U: Opravdu to může s těmito stranami být čtverec?

Ž3: No... ne.

Ž11: Nejsou to spíše všechno strany $A + B$? Protože přeci nemůže být A^2 délka strany. Takže nahoře mám napřed A a potom tam je dlaždice AB , takže podle toho, jak si ji dáme, tam máme A , nebo B .

Ž3: Aha. No jo. No tak u toho pravého AB je to nahoře B .

U: A co je tedy na levé straně?

Ž3, Ž11: To samé.

U: Dobře, skvěle. Dokážete to zapsat ještě jiným způsobem než tou mocninou a rozepsaným tvarem, který jsme již použili?

Zde mi šlo o to, aby si opět uvědomili, co to je druhá mocnina. Že každé $X^2 = X \cdot X$. Otázkou zůstávalo, zda tento poznatek zvládnou aplikovat u druhé mocniny závorky, nebo jim to bude dělat potíže.

U: No, jak bych vypočítala obsah tohoto velkého čtverce, pokud vím jeho strany?

Ž11: Aha, no tak to bude jako... $A + B$ krát $A + B$.

Podle diktování žákyně jsem zapsala na tabuli $A + B \cdot A + B$ bez použití závorek.

U: Tedy bylo by to takhle?

Ž11: No asi ano, ale spíše by se to mělo dát ještě do závorek. Nebo ne, nebo... No já si myslím, že jelikož krát má přednost před plus, prostě před sčítáním a odčítáním, ono by se to jako vlastně mohlo plést. No já bych to raději dala takto do těch závorek.

Ž3: No musí to být v závorkách.

U: Tak si zkusme vedle vypočítat, co nám vznikne, pokud závorky nepoužijeme, tedy co je výsledkem příkladu $A + B \cdot A + B$?

Ž11: No $AB + A + B$.

Pro jistotu jsem vše opět zapisovala na tabuli (obě varianty) (obrázek 62).

$$(A+B) \cdot (A+B) = A^2 + B^2 + 2AB$$
$$\underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{A} + \underline{B} = \underline{AB} + \underline{A} + \underline{B}$$

Obrázek 62 – Důležitý význam použití závorek

U: Ano, kdežto zde u závorek mi vyjde co?

Ž3: Tam bychom doplnili to, co máme rozepsané nahoře. Takže tomu spodnímu by to neodpovídalo.

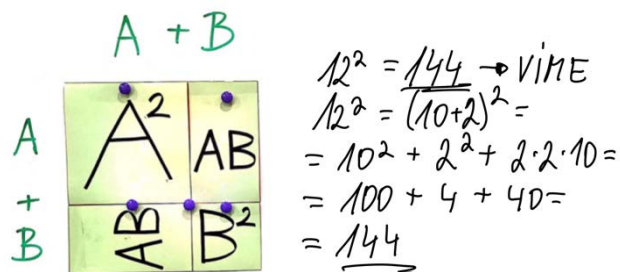
U: Tedy? Určitě musíme závorky použít. Ještě jedna otázka. Je $(A + B) \cdot (A + B)$ stejné jako náš začátek $(A + B)^2$?

Žáci: Ano/Jo.

Ž11: Je to vlastně to stejné, akorát je to jinak zapsané.

Následně jsme se znovu vrátili k úpravě rozvržení dlaždic. Znovu jsme si popsali, proč k tomu došlo – abychom dodrželi „ulice a křižovatky“ a odpovídalo i násobení sloupce a řádku. Rozepsanou druhou mocninu jsme zapsali jako vzorec.

Poté jsme se vrátili k původnímu výpočtu $12^2 = (10 + 2)^2$, vyřešili jsme, kde se v předchozích úvahách stala chyba, a správně ho rozepsali podle již dokázaného vzorce (obrázek 63).



The diagram illustrates the expansion of the square of a sum using algebra tiles. On the left, a large square is divided into four smaller squares by a horizontal and a vertical line. The top-left square is labeled A^2 , the top-right is AB , the bottom-left is BA , and the bottom-right is B^2 . To the left of the tiles, the expression $A + B$ is written vertically, with A and B aligned with the horizontal and vertical lines respectively. To the right of the tiles, the algebraic expansion is shown:

$$\begin{aligned}
 12^2 &= 144 \rightarrow \text{VÍME} \\
 12^2 &= (10+2)^2 = \\
 &= 10^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10 = \\
 &= 100 + 4 + 40 = \\
 &= 144
 \end{aligned}$$

Obrázek 63 – Příklad využití vzorce pro druhou mocninu

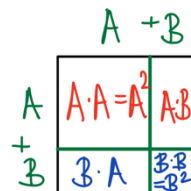
Na této hodině jsem uvítala, že žáci spolupracovali. Doplnovali se poznámkami navzájem a společně dospěli k řešení. Pro lepší zapamatování jsme si na konci vzorec zapsali do sešitů a k němu si i nalepili čtverec z dlaždic, který ho vyjadřoval. Mělo to žáky upozorňovat, aby nezapomněli na člen $2AB$, bez kterého čtverec stěží poskládají.

8. vyučovací hodina

Automatickým následovníkem vzorce $(A + B)^2$ je zpravidla vzorec $(A - B)^2$. Já se však rozhodla, že pro snadnější odvození druhého vzorce by bylo lepší umět zjistit rozepsání prvního vzorce pomocí roznásobení dvou závorek, tedy početně. Mým cílem bylo, aby se objevování druhého vzorce mohli účastnit i ti, kteří již v tuto chvíli dlaždice A^2, B^2, AB odmítali. Inspirací k tomuto rozhodnutí mi bylo vyjádření jedné žákyně, která se na konci minulé hodiny ptala: „Paní učitelko? Bylo by možné si pro ty vzorečky udělat nějaké pravidlo, jak jsme na ně přišli, nebo se je prostě musíme naučit? Mně se teď už ty kartičky trochu pletou a dostat pravidlo, které si zapamatuji, je pro mě jednodušší.“ Snažila jsem se proto vyhovět oběma skupinám, které jsem ve třídě v tu chvíli měla. Avšak tato hodina nebyla o nadiktování si pravidla, ale o jeho objevení. Poté ho zejména početně nadaní žáci mohli uplatňovat místo práce s dlaždicemi. I tak se stávalo, že po kartách sáhli v momentě, kdy si početně nebyli zcela jisti – například právě u druhého vzorce s rozdílem dvojčlenu.

Vzhledem k tomu, že žáci již věděli, jak vynásobit závorku celým číslem, kde se daným číslem roznásobí oba (všechny) členy závorky, nebylo pro ně obtížné objevit pravidlo pro součin dvou závorek. Takovým součinem si totiž nahradili $(A + B)^2$, tedy $(A + B) \cdot$

$(A + B)$. Následně pouze zkoušeli, mezi kterými členy tvořit součin, aby se výsledek shodoval s rozepsáním vzorce z konce minulé vyučovací hodiny. Podle popisu několika žáků si napřed vše roznásobili A a poté druhou proměnnou, tedy B . Nejtěžší pro ně prý bylo nalézt člen $2AB$, protože si museli uvědomit, že $AB = BA$. Poté již měli jasno. Ž23 to shrnul následovně: „Jednoduše se roznásobí každý člen s každým členem, kromě těch vedle sebe, protože ty mají mezi sebou $+$. Pak jenom otočíme $BA = AB$ a dáme ty dva členy, co jdou, k sobě. No a je to hotové, protože nám tam vznikne to $2AB$, což jsme potřebovali.“ (obrázek 64).

$$\begin{aligned}
 (A+B)^2 &= (A+B) \cdot (A+B) = \\
 &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = \\
 &= A^2 + AB + AB + B^2 = \\
 &= A^2 + 2AB + B^2
 \end{aligned}$$


Obrázek 64 – Vzorec pro druhou mocninu součtu početně

Celou problematiku roznásobování dvojčlenu dvojčlenem jsme aplikovali i u dlaždic, kde byla zapotřebí mírná dopomoc z mé strany, aby stejný postup při výpočtu viděli i při skládání dlaždic.

Následovala část vyučovací hodiny, kterou měli žáci využít k tomu, aby objevili vzoreček pro $(A - B)^2$ jakýmkoliv způsobem. Pokud byli dříve hotovi než ostatní, mohli čas využít pro ověření svého výsledku druhou metodou.

Rozhovor 17

U: Ví někdo z vás... přišel někdo z vás na řešení, tedy na obecné rozepsání této mocniny dvojčlenu?

Ž10: Nevyjde to úplně stejně, akorát místo $+$ tam bude všude $-$? Že A^2 bude kladný a pak tam bude $-2AB - B^2$.

Nerada hned zasahuji do řešení a komunikace žáků. Tuto možnost jsem tedy zapsala na tabuli a obrátila se směrem k ostatním přítomným žákům.

U: Tedy máme první návrh, jak by to asi mohlo být.

Ž1: No já to mám v podstatě to samý. Akorát mi přijde, že jsou tady vyměněný znamínka, a to je všechno.

U: A jakým způsobem jste došli k tomuto závěru? Jakým způsobem jste to udělali?

Ž1: Ty kartičky dám v podstatě stejně jako byly minule, teda do toho čtverce, akorát je jenom musím všechny obrátit.

Ž21: No tak jenom bych si prakticky otočil ty dlaždice ze zelených na červený.

Na tabuli jsem znázornila stejný „čtverec“ jako minule a vše podle návodu otočila. Nedávala jsem nijak najevo, zda je postup žáků správný či nikoliv. Žáky však ani nenapadlo, že tímto způsobem by změnili znaménko i u A^2 , což na začátku tvrdili, že nechtějí.

U: Dobře, takže takto to mám poskládané. Mohu se zeptat, jaké strany by tento čtverec měl? (obrázek 65)

Žáci: Tam to bude $A + AB$. Nebo spíše $-A - AB$. Ne tak $A - AB$?

U: Dala bych si pouze pozor opět na rozdíl dlaždic a délek jejich stran.

Ž11: Ne, tak u toho AB je ta kratší B a ta delší A . Takže nahoře je jenom A a B . A já si myslím, že tam musí být... že to A musí být kladný a to B záporný. A směrem dolů bude to stejný.

U: Dobře, takže nyní jsme si určili, jak mají vypadat ty strany čtverce. Asi i kvůli zápisu úlohy, kvůli tomu $(A - B)^2$. Vychází nám teď to uvnitř? Kolik je $A \cdot A$, atd.?

Žáci: No to je A^2 . Takže kladný, a to nám nevychází.

U: A je možné si tu dlaždici zpět otočit?

Ž11: Ano, pak to bude dobře.

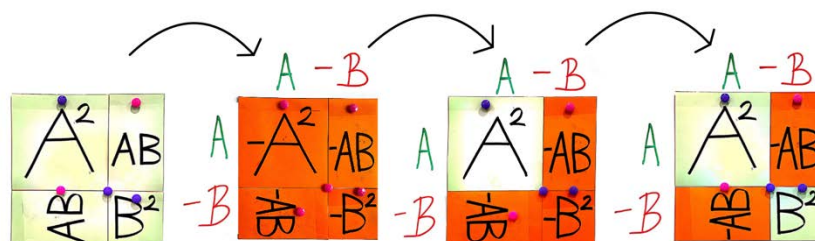
U: A ta další dlaždice odpovídá?

Žáci: Jo i ta dole. To taky vychází.

U: A co $(-B) \cdot (-B)$

Ž11: No to je kladné B^2 , protože $(-) \cdot (-) = (+)$.

Ž8 a Ž3: Jo. Ano, vlastně.



Obrázek 65 – Zaznamenaný postup žáků z Rozhovoru 15

Mezi žáky se samozřejmě objevují tací, kteří odvození přijmou a stačí jim to. Poté jsou však i takoví, co se rádi přesvědčí o postupu i jiným způsobem, případně stojí o kontrolu svého řešení. Příkladem jsou následující dva žáci, kteří bezprostředně po zápisu z dlaždic vyžadovali i početní úpravu.

Ž21: Paní učitelko? Tohle už chápu, ale jak bych to měl udělat bez dlaždic, abych to měl správně?

Ž23: Já jsem to dělal početně, tak můžu to zkusit udělat?

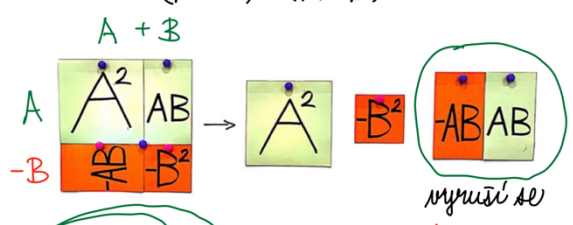
Stihli jsme probrat a zapsat i druhou možnost vyjádření. Hlavními moderátory byli opět sami žáci, kteří společnou komunikací dospěli k závěru.

Po dokončení odvozování vzorce $(A - B)^2$ výpočtem jsme si s žáky udělali souhrnný přehled nově odvozeného vztahu na tabuli (obrázek 66). Opět si vzniklý čtverec z dlaždic nalepili do sešitu.

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot AB$$

Obrázek 66 – Rozepsání vzorce pro druhou mocninu rozdílu $A-B$ pomocí dlaždic

Z vypsanych vzorců nám ještě jeden scházel, respektive nám scházela poslední možná kombinace dvou násobených závorek, a to sice $(A + B) \cdot (A - B)$. Poprosila jsem žáky, aby se sami zamysleli, zda neexistuje ještě jiná kombinace závorek, které máme v prostřední části zápisu (obrázek 67). Objevilo se několik návrhů, například $(-A - B)^2$, $(-A + B)^2$ a případně přenásobení konstantou, které jsme postupně jako další možnost vyloučili. Pomocí odpovědí na návodné otázky vždy žáci přišli na to, že se jedná již o jeden z odvozených vzorců. Případně někteří ze žáků sami sáhli po dlaždicích, aby si to vyzkoušeli. Jiní na to šli opět početně – roznásobením závorek. Problematika objevení posledního vzorce žáky zaujala a skutečně se snažila většina z nich zapojit. Přibližně po deseti minutách zkoumání a odvozování přispěl svým nápadem, spojení závorčky se sčítáním a závorčky s odčítáním, Ž8. Tomuto žákovi dlaždice jako pomůcka opravdu vyhovovaly, tak jsme se ihned pustili do znázornění. Společně se spolužáky dospěl k výsledku, který žáci posléze ověřili výpočtem. Do jejich diskuse nebylo potřeba zasahovat, pouze jsem jejich poznámky doprovázela zápisem na tabuli (obrázek 67).

$$\begin{aligned}
 (A+B)^2 &= (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\
 (A-B)^2 &= (A-B) \cdot (A-B) = A^2 - 2AB + B^2 \\
 &\quad (A+B) \cdot (A-B)
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 (A+B) \cdot (A-B) &= A^2 - \cancel{AB} + \cancel{AB} - B^2 = \\
 &= A^2 - B^2
 \end{aligned}$$

Obrázek 67 – Objevení posledního vzorce

Očekávala jsem, že po vyjádření třetího vzorce některý z žáků položí dotaz, jak by vypadalo $A^2 + B^2$, a stalo se. Sami žáci však znovu vyzkoušeli všechny možné kombinace závorek a dospěli k závěru, že jsou jen tři možnosti a že jim nikde takový výraz nevzniknul, a tudíž to nelze rozložit na součin.

9. vyučovací hodina

Začátek nové hodiny jsme využili pro opakování a procvičování nalezených vzorců. Zrušila jsem předpoklad, že za proměnné A, B dosazujeme pouze kladné hodnoty, a žáci měli plynule přecházet mezi vzorci podle zadání úlohy. Již jsme používali hlavně početní řešení. Například $(Y - 5)^2$ měli žáci upravit jak podle vzorce se znaménkem $-$, tak podle vzorce, ve kterém se vyskytuje znaménko $+$. Toto procvičování mělo sloužit k uvědomění si propojenosti mezi vzorci a jejich vzájemné nahraditelnosti.

Abychom nevyužili vyrobené dlaždice pouze pro vzorce, sepsala jsem pro žáky několik úloh, ve kterých si procvičili rozklady na součin, roznásobování závorek a další. Při utváření těchto úloh jsem se inspirovala i v učebnici Hejného metody.

Vypočítej:

- a. $(A + 2B)^2$
- b. $(2A - B)^2$
- c. $4A^2 + 12AB + 9B^2$
- d. $A^2 - 8AB + 16B^2$
- e. $(3B - 2A)^2$

2.4.4 Vytýkání z algebraického výrazu, rozklad na součin, dělení

Vytýkání konstanty

10. vyučovací hodina

X. Rozlož na součin:

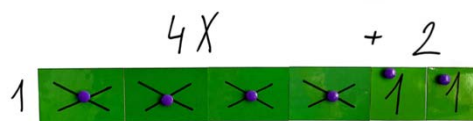
- a. $3X + 9$
- b. $4X + 2$
- c. $10 + 5X$
- d. $6 - 3X$
- e. $8X - 4$

Během 6. vyučovací hodiny (oddíl 2.3.3) žáci odvozovali pravidlo pro roznásobení závorky konstantou a proměnnou. Nyní v 10. hodině měli přijít na opačný proces v úloze X., zatím šlo pouze o vytýkání konstanty. Díky přechozím úlohám jsem předpokládala, že seskupení dlaždic do pravoúhelníku nebude obtížné. Otázkou zůstávalo, zda žáci sami dokáží přechíst délky stran vzniklého útvaru. Již u vzorců délky stran pravoúhelníků zapisovali, proto by to opět měli zvládnout bez větších problémů. U některých úloh jsem očekávala návrh více variant a zajímalo mě, jak budou žáci vzájemně reagovat. Řešení úlohy b. je popsáno v rozhovoru 18.

Rozhovor 18

U: Tak $3X + 9$ jsme společně zvládli. Dokážeme teď z dlaždic $4X, 2$ též vytvořit pravoúhelník? Početně... dokážeme z tohoto výrazu něco vytknout neboli ho rozložit na součin?

Ž3: No, vezmu si ty čtyři, dám si je vedle sebe naležato a k tomu přidám ty dvě jednotky.



Obrázek 68 – Návrh pravoúhelníku z dlaždic

U: A jak tam je tedy ten součin?

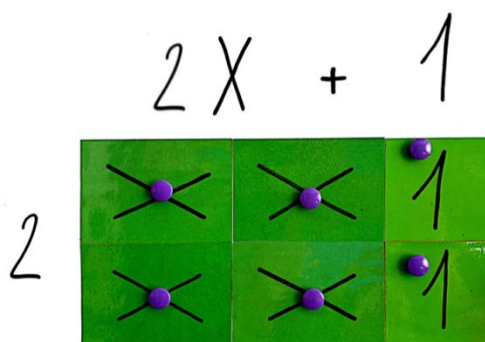
Ž3: No 1 a $4X + 2$.

U: Takže jsi vlastně vytknul 1. Lze vytknout i více než 1?

Ž6: Lze ještě 2. Sebereme ty dvě dlaždice X a dáme je pod to, a to stejné s jednou dlaždicí 1.

U: Dobře. A co nám tedy vzniklo za výraz?

Ž6: $2X + 1$ a krát 2.



Obrázek 69 – Rozklad na součin pomocí dlaždic

Můj předpoklad, že seskupení do pravoúhelníku a určení délek jeho stran nebude pro žáky obtížné, byl správný. Avšak očekávání sporu mezi žáky při více variantách vytýkání nenastalo. U druhé úlohy jsem žáky k návrhu jiné varianty pobídla já sama, posléze již sami hledali všechny možnosti, jak výraz rozložit. Na mou otázku, kterou variantu zvolit a zda jich vždy existuje více, odpověděla Ž22: „Je to stejné jako u násobilky. Vždycky můžeme násobit a dělit jedničkou. A třeba číslo 12 může vzniknout jako $2 \cdot 6$ nebo $3 \cdot 4$. Pak vybereme to, co budem potřebovat do příkladu. Třeba jako škrtnání ve zlomcích. Podle toho, co mám dole, rozdělím to, co mám nahoře, abych to mohla vykrátit. Potřebuju tam prostě dělit stejným číslem a podle toho vyberu.“ Její poznatek byl zajímavý zejména proto, že mírně předcházela naše budoucí učivo. Využití operace vytýkání bude důležité při práci s lomenými výrazy.

Vytýkání proměnné a proměnné s konstantou

XI. Rozlož na součin (vytkni) a svůj výsledek ověř:

- a. $X^2 + X$
- b. $X - X^2$
- c. $6X + 3X^2$
- d. $-2X^2 - 2X$
- e. $X - 2X^2$

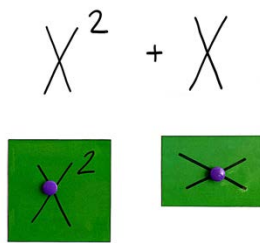
Úloha XI. Byla dalším pomyslným stupněm vytýkání (rozkladu na součin, dělení). Více variant řešení již nespočívalo pouze v záměně čísel, která vytkneme, ale v možnosti

vytýkání samotné konstanty nebo konstanty s proměnnou. Mou obavou byla záměna druhé mocniny za koeficient v případě, že početně nadaní žáci nevyužijí alespoň v prvních úlohách znázornění dlaždicemi. Byla jsem však připravena tuto možnost pomocí manipulace s dlaždicemi vyvrátit a navést žáky ke správnému řešení. Zároveň měli žáci za úkol si u výsledků procvičovat zpětné roznásobování, aby si zafixovali operace roznásobování a vytýkání jako inverzní úkony.

Rozhovor 19

U: Jak bych rozložila nebo znázornila a poté zapsala součinem úlohu $X^2 + X$?

Ž11: No vezmu si přímo ty dlaždice a dám je pod to.



Obrázek 70 – Znázornění výrazu $X^2 + X$

Ž3: Tady to jde násobit jenom jedničkou?

Ž18: Dáme to jako $3 \cdot X$.

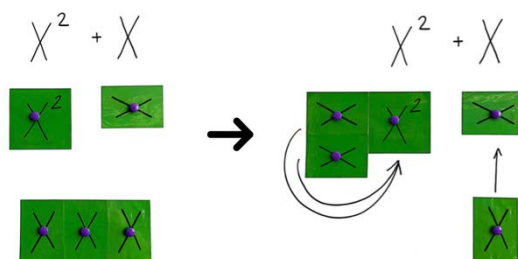
U: Opravdu pouze jedničkou? A jak doopravdy vypadá výraz $3X$?

Ž18: No vlastně... to nejde. Jsou to tři x-ový.

Žáci si znázornili $3X$ a měli to porovnat se zadáním.

U: Tím pádem by nám $2X$ musely odpovídat X^2 . A platí to?

Přesunula jsem $2X$ vedle X^2 a čekala na reakci žáků.



Obrázek 71 – Porovnávání hodnoty dlaždic $2X, X^2$

Žáci: Ne, to se nerovná.

Ž3: Já bych to napsal jako $1 \cdot (X^2 + X)$, protože krát 2 to tady nejde.

Toto triviální řešení navrhl žák, který již minulou hodinu pracoval s násobením 1. Číslo 2 se tam zřejmě snažil najít právě kvůli úloze z minulé hodiny. Ž3 je spíše početní typ nežli vizuální. Výraz si zřejmě neznázornil, protože by navíc zjistil, že se stranou 1 pravoúhelník nevytvoříme.

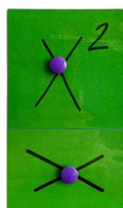
U: Takže $3X$ jsme vyloučili. Násobení 1 je „triviální“ řešení. Tímto číslem si mohu násobit co chci a kdy chci a nic se mi nemění. Není tam přeci jenom i jiná možnost?

Ž11: Nejde to jako $(X) \cdot (X + 1)$?

U: A jak jsi to zjistila?

Ž11: No, že $X^2 = X \cdot X$, takže to rozdělíme. Takže všude nám tam zbývá X .

Ž18: No a ten obdélník je tak, že to X můžeme dát nad to nebo pod to X^2 .



Obrázek 72 – Pravoúhelník $X^2 + X$

Znázorněno na tabuli. Již to vypadalo, že se blížíme k řešení, ale ozval se Ž21, kterému pořád v hlavě zůstávala myšlenka na $3X$. Zkusila jsem tedy najít jiný způsob, jak si ukázat, že to tak být nemůže. Využila jsem již znázorněného obdélníku $X^2 + X$.

Ž21: Takže jsou to ty $3X$.

U: A kde bychom našli tu 3?

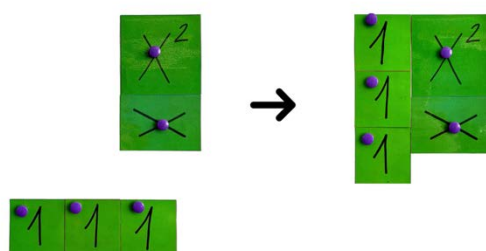
Ž21: Vlevo, dolů.

U: Jak můžeme znázornit 3 pomocí dlaždic?

Ž21: 3 jednotky vedle sebe.

U: A odpovídá to?

Přesunula jsem tři jednotkové dlaždice vlevo od našeho znázorněného výrazu.



Obrázek 73 – Porovnávání hodnoty dlaždic

Žáci: Ne.

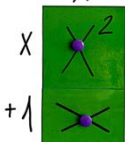
Ž18: No hlavně jsme už zkoušeli, že ani dvoum to neodpovídá.

Ž21: Jo, aha.

U: Je to takto jasné?... Tak se na to podívejme zvlášť. Kolik je strana toho čtverce X^2 ?

Ž11: To je X .

Ž18: A to další je 1. Pak rovně máme X .

$$X^2 + X = (X) \cdot (X + 1)$$


Obrázek 74 – Rozklad výrazu $X^2 + X$

U: Odpovídá to tedy součinu, který navrhovala Ž11 $(X) \cdot (X + 1)$?

Žáci: Ano. Teď už jo.

U: Dokážete se početně vrátit zpět a zkontrolovat, že nám to opravdu vyšlo?

Jak jsem zmínila před začátkem této úlohy, cílem bylo stále procvičovat i předchozí nabyté znalosti, tedy roznásobení závorek. A ukázat si propojenost těchto operací. Žáci byli zvyklí při sčítání provádět zkoušku odčítáním a při násobení dělením. Tento fakt opačných operací jim byl tedy blízký. Roznásobení nedělalo žákům problém.

Podle předpokladu žákům v těchto úlohách často působila potíže druhá mocnina. Měli tendenci porovnávat X^2 se zápisem $2X$. Zde jsme podle plánu všichni společně využili dlaždice, abychom zmíněné dva výrazy porovnali a ujistili se (i do budoucna), že je obecně nelze zaměnit. Pro vyloučení dalších pochybností jsme vztah nezaměnitelnosti vymodelovali celkem dvěma způsoby. Vrátili jsme se i k definici druhé mocniny a k několika početním úlohám s číselnými výrazy s využitím problematické druhé mocniny. Uvědomění si vztahu operace roznásobování a vytýkání se obešlo bez potíží.

Dělení algebraických výrazů

Poslední operací, které jsme se prozatím plně nevěnovali, bylo dělení. Tato operace je zahrnuta v oddíle vytýkání neboli rozkladu na součin. Žáci sami v průběhu řešení úloh zmiňovali dělení. „Příbuzenský“ vztah mezi operacemi rozklad na součin a dělení jim byl blízký i díky násobilce z prvního stupně základní školy. Pro procvičení jsem pro žáky

připravila několik úloh. Nejprve pracovali samostatně, posléze jsme práci společně kontrolovali. V závěru žákyně Ž25 shrnula dělení vlastní poučkou: „To dělení je vlastně stejný jako násobení závorky, akorát každý ten člen dělíme tím číslem a nenásobíme ho.“ K obdobnému pravidlu došli i ostatní žáci. Dokonce jsem zjistila, že u těchto úloh již nepotřebovali dlaždice, ale používali pouze symbolický zápis. Jediný problém, se kterým jsme se u řešení potýkali, bylo opomenutí závorky při zkoušce roznásobením, případně občasné přehlédnutí záporného znaménka.

XII. Vypočítej a proveď zkoušku:

a. $(3X + 9):3$

b. $(4 - 8X):2$

c. $(6X - 12):6$

d. $(6X + 3X^2):X$

e. $(-2X + 4X^2):2X$

f. $(8X^2 - 2X + 4):(-2)$

2.5 Další možné využití dlaždic

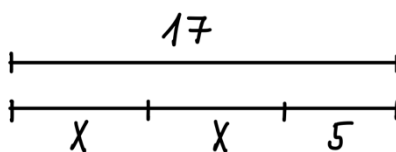
Od osmého ročníku na základní škole jsou výrazy součástí celého našeho studia, někdy i pracovního života. Chtěla jsem, aby žáci viděli, že si pomocí dlaždic mohou vypomoci i v jiných situacích. A jelikož je látku středoškolské matematiky již nebudu vyučovat já, využila jsem příležitosti online prostředí a jejich volného času k tomu, abychom si rozšířené použití dlaždic ukázali, a objevili tak látku mimo osnovy základoškolské matematiky. Rozhodla jsem se nejprve spolupracovat se všemi žáky, a to na objevování ekvivalentních úprav rovnic. Následně nám již nezbývalo tolik času, proto jsem na tématu Vietovy vzorce a doplnění na čtverec spolupracovala již jen s dobrovolníky, kterých však byla více než polovina dosavadních žáků.

V následujících podkapitolách se pokusím přiblížit, jakým způsobem jsme dlaždice využili, jak na jejich používání žáci reagovali a které situace mě i mé žáky během práce překvapily.

2.5.1 Ekvivalentní úpravy rovnic

Žáci se setkávali pouze s číselnými výrazy, s výrazy s proměnnou a s rovnostmi. Po práci s výrazy s proměnnou následovalo téma rovnice, které již podprahově znali ze cvičení, kde doplňovali čísla za otazník/trojúhelníček/čtvereček apod. U rovnic se využívají tzv. ekvivalentní úpravy, které jsem se rozhodla s žáky objevit pomocí našich již vyrobených dlaždic.

Nejprve jsme si s žáky vysvětlili rozdíl mezi pojmem rovnost a rovnice, aby bylo zřejmé, že v rovnicích hledáme hodnotu, která nám z ní po dosazení za neznámou udělá rovnost. Následně jsem žákům zadala úlohu $17 = 2X + 5$, kde si sami měli možnost nalézt způsob, jak ji vyřešit. První formou řešení je pokus/omyl, pomocí které se k výsledku většina z nich dostala. Výslednou hodnotu jsme si označili pojmem kořen rovnice a dosadili ji zpět do zadání, abychom zkontrolovali, že nám opravdu vznikla rovnost. Jako druhý model jsme využili úsečky (obrázek 75). Popsali jsme si, jak s takovým nástrojem pracovat, a vyzkoušeli ho na několika úlohách.

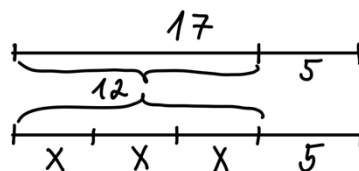


Obrázek 75 – Úsečkový model rovnice $17 = 2X + 5$

Po zakreslení úlohy se jeden ze žáků zeptal, co je v této rovnici kořenem, zda to jsou $2X$, nebo jak by to bylo, když je více X na jedné straně. Tato otázka mě překvapila, neboť jsem neočekávala, že by v tomto ohledu mohl nastat nějaký problém. Jako příklad navrhl sám žák rovnici $17 = 2X + X + 5$. Úlohu jsme si popsali, vysvětlili i upravili (obrázek 76). Zpětně však vidím, že by pro příště bylo lepší nechat žáky nejprve samostatně zkusit zakreslit a přijít na řešení a až následně vyřešit rovnici společně. Zároveň šlo v této situaci žáky upozornit, do které rovnice (původní, nebo upravené) se zjištěný kořen dosazuje, čímž bude provedena zkouška.

$$17 = 2X + X + 5$$

$$17 = 3X + 5$$



Obrázek 76 – Úsečkový model a úprava rovnice $17 = 2X + X + 5$

Velkým překvapením a potěšením pro mě bylo, že po dokončení úsečkového modelu se žáci sami zeptali, zda by k řešení rovnic nebylo možné využít naše algebraické dlaždice. Přesně ty jsem měla v plánu představit jako třetí model rovnic. Úvodem bylo potřeba žáky upozornit, že se jedná opět o omezený model. Tedy lze si na něm ukázat úpravy, kterým budeme říkat ekvivalentní, ale ve složitějších případech již nebude znázornění možné. Proto je třeba pochopit, jak zmíněné úpravy fungují, abychom je následně byli schopni používat již pouze početně.

Jednotlivé ekvivalentní úpravy jsem žáky nechala objevovat postupně na několika úlohách. Společně jsme si je potom formulovali včetně jejich podmínek a zapisovali.

Pro první objevování jsem zvolila úlohu $2X = 6$. Počátečním úkolem pro žáky bylo, aby si výrazy na obou stranách rovnice znázornili. To zvládli všichni bez problémů. Pro lepší spolupráci jsem opět zaznamenávala vše i na tabuli (obrázek 77).

Rozhovor 20

U: Tedy mám dvakrát nějakou skupinu, nějaké číslo, co se mi rovná šesti. Dvakrát to stejné číslo... tak co udělám, abych našla to číslo?
Na kolik skupin to musím rozdělit?

Žáci: Na dvě.

U: Hmm a musím tak učinit na obou stranách.

Rozdělili jsme na dvě stejné skupiny na obou stranách (obrázek 77).

$$\begin{array}{c}
 2X = 6 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 2X = 6 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow X = 3$$

Obrázek 77 – Znázornění ekvivalentní úpravy dělení

Ž21: No, takže jedno X se rovná 3.

U: Ano, super. A co jsem vlastně udělala s tou celou rovnicí teda? Vydělila jsem ji číslem...?

Žáci: Dva.

Na závěr jsme společně provedli kontrolu a rekapitulaci našeho postupu. Žáci pak dostali za úkol rovnici $3X = 9$, kde opět používali rozdělení do třech skupin jako reprezentaci dělení třemi (obrázek 78).

$$\begin{array}{c}
 3X = 9 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 3X = 9 \quad / :3 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow X = 3$$

Obrázek 78 – Výpočet a znázornění rovnice $3X = 9$ za využití ekv. úpr. dělení

U: My jsme z toho tedy udělali $X = 3$.

Ž8: A to je kořen.

Reakce Ž8 bez otázky byla potěšující, protože právě on měl ze začátku problém s pochopením toho, co je ten kořen rovnice.

U: Co jsem teda udělala s celou tou rovnicí? Když se podíváte na tu první a na tu upravenou?

Ž21: No všechny čísla jsme dali doprava, že jo. A X jsme nechali vlevo.

U: Dobře, ale jak jsem dala tu 3 doprava? Co to znamená?

Ž21: No jako prostě jsme 9 vydělili 3 a vyšlo nám, že $X = 3$.

U: Dobře. 9 jsme vydělili 3 a tady (vlevo) jsme vydělili kolika?

Ž21: No taky 3.

U: Hmm. Takže můžu tedy zapsat, že jsem celou rovnici, tedy obě její strany, dělila 3?

Žáci: Jo, to jo.

Po tomto shrnutí jsme si ještě vysvětlili, jak budeme takové operace zaznamenávat (využití lomítka za rovnici).

U: Tedy první operací, kterou můžeme s rovnicemi provádět, je jaká?

Žáci: Dělení.

Pravidlo bylo potřeba ještě doplnit...

U: A čím se nesmí dělit?

Žáci: Nulou.

Následoval zápis a definice první ekvivalentní úpravy:

I. Můžeme dělit celou rovnici stejným číslem různým od nuly.

Jako druhou rovnici jsem zvolila $-3X = -9$, kterou jsem společně s žáky řešila (obrázek 79). Rozdělení do třech skupin již díky předchozímu poznatku nebyl problém, dostali jsme se tak k $-X = -3$. V tento moment jsem vedla žáky k možnosti převrácení všech kartiček, tedy převrácení na obou stranách. Po dokončení úlohy a kontrole výsledku jsme se k této úpravě vrátili a sami žáci odvodili, že se jednalo o násobení (případně dělení) číslem (-1) .

$$\begin{array}{c}
 -3X = -9 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 -3X = -9 \quad /:3 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 -X = -3 \quad / \cdot (-1) \\
 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 X = 3 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Obrázek 79 – Postup při řešení rovnice $-3X = 9$

Následovala další úloha, ve které bylo potřeba opět vynásobit obě strany rovnice stejným (nenulovým) číslem. Tu již žáci měli za úkol řešit sami a následně se pokusit odvodit další ekvivalentní úpravu. Jejich postup a mé otázky jsou zaznamenány v rozhovoru 21.

Rozhovor 21

U: Když budeme mít nový příklad $X = 3$.

Znázornění...

Mohla bych to znázornit i jinak? Třeba pomocí $2X$ se rovná něčemu, abych tu rovnici nezměnila?

Žáci: No rovná se jakoby 6.

U: Skvěle, takže tady si to můžu znázornit pomocí šesti kartiček, je to tak?

Žáci: Jo.

U: když se na ty rovnice podíváte, rovnají se? Jsou stejné neboli tak zvané ekvivalentní?

Ž8: Eee, jo.

U: Hmm. Dobře. A co jsem změnila odsud sem?

Ukazovala jsem na první a druhou rovnici.

Ž21, Ž8: Vynásobila dvěma. Obojí.

Zapsali jsme si operaci k první rovnici. (obrázek 80)

$$\begin{array}{lcl}
 X = 3 & & X = 3 \quad | \cdot 2 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{X} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline \text{X} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 2X = ? & & 2X = 6 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{X} \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Obrázek 80 – Znázornění ekvivalentní úpravy násobení

U: Tedy jaké máme asi druhé pravidlo?

Ž21: Násobení jakýmkoliv číslem.

U: Bude platit jakýmkoliv?

Ž21, Ž8: No až na 0, ne?

U: Hmm. A proč zde nesmím násobit 0? Co by se mi po vynásobení stalo?

Ž21: No tak jakoby tady se nic nestane, ne?

Ž11: No byla by to 0.

U: Proč myslíš, že se nic nestane? A co by byla 0?

Ž21: No všechno by to byla 0.

U: Tedy $3 \cdot 0 = 0$ a $X \cdot 0$, tedy jakékoliv číslo vynásobené 0, by byla...

Žáci: No taky 0.

U: Sice to vychází, ale co nám řekne $0 = 0$? Řekne nám to, čemu se rovná X ?

Žáci: Ne. No to ne.

U: Tedy tohle by nám vyšlo, i kdybych měla třeba rovnici $X = 5$, je to tak?

Jednotlivé uváděné příklady jsme zapisovali na tabuli a do sešitů, aby to žáci nejen slyšeli, ale měli možnost vizuálního porovnání.

Ž8: Hmm.

U: I kdybych měla jakýkoliv výraz vlevo rovná se jakémukoliv výrazu vpravo. Je to tak?

Ž26: Ano.

U: Takže platí, že bych z každé rovnice udělala to stejné? A všechny rovnice nejsou stejné, ne? Tedy vznikne $0 = 0$, a to nám nic neřekne o X . Mám pravdu, nebo ne?

Žáci: Ano, jo.

U: Tedy zase tam přidáme tu stejnou podmínku jako u dělení.

Následoval zápis a definice druhé ekvivalentní úpravy:

II. Můžeme násobit celou rovnici stejným číslem různým od nuly.

Dále jsem zvolila úlohu $6 = 2X + 2$. Při řešení jsem se s žáky vrátila i k původní úsečkové metodě. Využili jsme dvě reprezentace – dlaždice a úsečky. Na úsečce si žáci uvědomili, co na obou stranách mohou odebrat. Díky dlaždicím a předešlým cvičením pak věděli, jak řešení rovnice dokončit.

Rozhovor 22

...

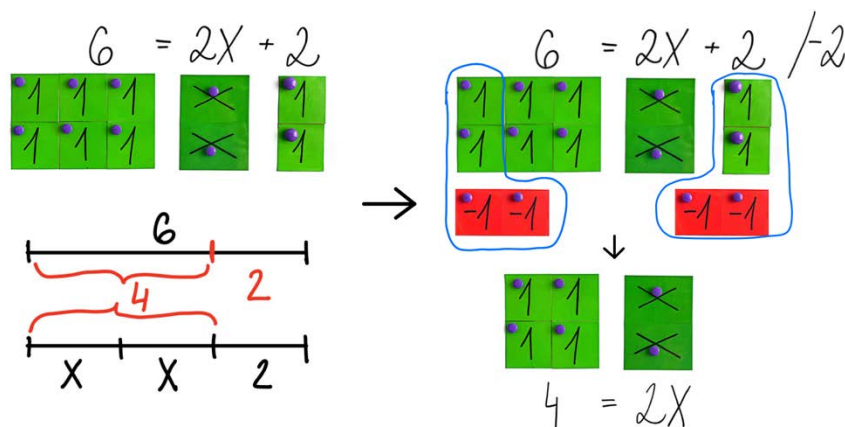
U: Zapišeme si, že $2X = 4$, tedy pardon $4 = 2X$. Když se podíváte, co jsme udělali s tou původní rovnicí, aby nám vzniklo tohle?

Ž26: Odečetli jsme tu 2 od té 6. A i od celého toho příkladu (myšleno části vpravo).

Ž8: Odečetli jsme od všeho 2.

U: Hmm. Tedy odebrali jsme 2 na obou stranách.

Zaznamenání operace za lomítko, znázornění pomocí dlaždic a porovnání s úsečkovou reprezentací (obrázek 81).



Obrázek 81 – Znázornění ekvivalentní úpravy odčítání

Dopočítání.

U: Věděli byste teda, co dalšího mohu dělat za operaci s rovnicemi, aniž bych změnila jejich řešení? Můžu... Měli jsme dělení, měli jsme násobení a nyní máme?

Ž26: Mínus.

Žáci: Odčítání.

U: Ano. Dokázal by mi někdo nové pravidlo formulovat?

Ž26: Můžu odčítat od obou stran rovnic jakékoliv číslo...

Ž13: ...ale různý od nuly.

U: Ano, skoro správně. Proč nesmíme odčítat podle tebe nulu? Co se stane po jejím odečtení?

Žáci: No tady nic.

Zkusili jsme společně odečíst nulu.

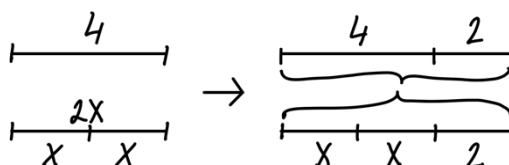
U: Je to tak teda? Takže mi nic nezmění. Takže mi tedy ale ani nedělá žádný...

Ž8: ...problém.

Porovnání odčítání nuly s násobením jedničkou.

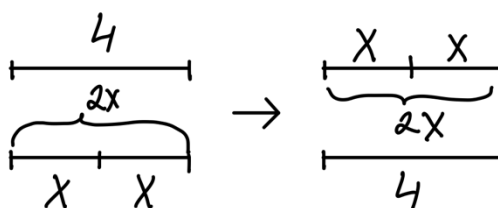
III. Můžeme odečíst jakékoliv stejné číslo od obou stran rovnice.

Intuitivně jsme posléze společně odvodili i pravidlo pro přičítání. Využili jsme druhou část předešlé úlohy $4 = 2X$ a upravili zpět na $6 = 2X + 2$ (obrázek 82).



Obrázek 82 – Úsečkový model pro ekvivalentní úpravu přičítání

Následně jsme ze stejné úlohy zdůvodnili i prohození stran rovnice. Využili jsme mnou omylem provedenou záměnu $4 = 2X \Leftrightarrow 2x = 4$, kterou jsme opět reprezentovali i úsečkami, kde jsme prohazovali jejich pořadí (obrázek 83).



Obrázek 83 – Úsečkový model pro záměnu stran rovnice

IV. Můžeme přičíst jakékoliv stejné číslo k oběma stranám rovnice.

V. Můžeme zaměňovat celé strany rovnice.

Původně jsem očekávala komplikace v práci s oběma stranami rovnice najednou, ale žáci ji zvládli na výbornou. Kladně bych ohodnotila i jejich reakce a komunikaci při objevování úprav. V online prostředí je však velmi obtížné soudit, do jaké míry by byli sami žáci schopni dané reprezentace provést. Existuje zde totiž riziko, že někteří měli hodinu jako video, které pouze pozorovali, ale plně se do tvorby poznatků nezapojovali.

Pozn. Dalším modelem pro zjištění ekvivalentních úprav rovnic jsou například váhy. U vah je ale obtíž se zaznamenáváním záporného čísla. Lze však využít internetové aplikace, které jako znázornění záporných

hodnot používají heliové balonky – mají miskou vah nadnášet a ne zatěžovat. Modelů existuje celá řada a je na učitelích, aby pro svůj styl výuky a pro své žáky vybral ty nejvhodnější.

2.5.2 Vietovy vztahy

Díky dobré spolupráci s třídami v daném školním roce jsem se rozhodla s žáky zajít dál, než bylo nezbytně nutné pro práci s algebraickými výrazy na základní škole. Bohužel nám však v běžné výuce nezbývalo dostatečné množství času, abychom se tomuto tématu mohli více věnovat. Využila jsem proto možnosti, které nám nabízela online výuka, a tuto práci zadala navíc jako nepovinnou. Měli jsme online konzultaci, na kterou navazoval pracovní list sdílený v GC. Během dvouhodinového online setkání jsme si zopakovali roznásobování závorek a vysvětlili jednotlivá cvičení ve zmíněném pracovním listě, který je v této práci zahrnut v přílohách.

Součástí pracovního listu byla tři cvičení s celkem deseti úlohami. V prvním cvičení měli žáci uvedený jeden vzorově vyřešený příklad i se zkouškou formou zpětného roznásobení závorek (obrázek 84). V roznásobování měli dvě čísla vyznačená modrou a zelenou barvou pro lepší budoucí orientaci v tabulce. Následovalo osm úloh, které měli žáci obdobným způsobem sami vyřešit, opět při zkoušce vyznačit hledané dvě hodnoty a zaznamenat je na příslušná místa do tabulky pod cvičením (obrázek 84). Zmíněná tabulka měla ještě další dva sloupce, ve kterých měl být zaznamenán součet a součin vyznačených čísel.

DOBROVOLNÝ PRACOVNÍ LIST

1) Máte zde několik cvičení. Pokuste se dané mnohočleny rozložit na součin – pomocí dlaždic, nebo „svého vhledu do příkladu“.
(Rada – součin dvou závorek.)

Př: $x^2 + 6x + 8$

x^2	x	x	x	x
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1

$= (x + 2) \cdot (x + 4)$

Zkouška:

$$(x+2) \cdot (x+4) = x \cdot x + 2x + 4x + 4 \cdot 2 = x^2 + 6x + 8$$

Obrázek 84 – Vzorový příklad z prvního cvičení

- a) $x^2 + 2x - 8$
- b) $x^2 - 2x - 8$
- c) $x^2 - 6x - 7$
- d) $x^2 + 6x - 7$
- e) $x^2 + 8x + 7$
- f) $x^2 + 5x + 6$
- g) $x^2 - x - 6$
- h) $x^2 + 6x + 5$

Zkus vyplnit následující tabulku podle uvedeného příkladu.

Který příklad	1.číslo (v první závorce)	2.číslo (v druhé závorce)	Součet 1. a 2. čísla ze závorek	Součin 1. a 2. čísla ze závorek
př.	+2	+4	$2 + 4 = +6$	$2 \cdot 4 = +8$
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				
h)				

Obrázek 85 – Ukázka úloh a tabulky z prvního cvičení

Již zde byli někteří žáci schopni objevit určité pravidlo. Pro ty, kteří jen vyplnili tabulku a nic nezkoumali, bylo určeno druhé cvičení. To obsahovalo několik otázek (následující ukázka), které měly žáky přimět k zamyšlení nad principem řešení předchozích úloh.

Když se podíváš na vyplněnou tabulku (včetně znamének) a podíváš se na součet a součin čísel ze závorek u každého příkladu zvlášť – nepřipadá ti tam něco podezřelého? Není tam vidět určitý vztah se zadáním úlohy?

Pokud žáci vztah objevili, měli za úkol jej vlastními slovy popsat a pomocí nalezeného principu vyřešit poslední úlohu ve cvičení 3. Formulace odpovědí žáků byly celkem přesné, například:

„Číslice, které vyhovují při rozkladu na součin, pokud sečteme či vynásobíme, získáme číslo u X a číslo ve členu bez neznámé.“

Po uplynutí časového limitu, který byl na práci vyčleněn, jsem s dobrovolníky opět absolvovala dvouhodinovou online konzultaci, ve které jsme zkontrolovali řešení, zodpověděli dotazy a společně jsme formulovali závěry. Pokud měl někdo při řešení potíže, mohl se doptat buď soukromě, nebo právě na zmíněné online konzultaci.

Následující ukázky jsou úryvky z rozhovorů s žáky po dokončení tohoto tématu. Někteří z nich si díky objevu vytvořili ještě bližší vztah s dlaždicemi.

„Prostě s plusy to šlo samo, mínusy mě mátly. Pak už to šlo jednoduše a všechno jsem rozdlaždicoval, pak jsem udělal tabulku, pochopil jsem, jak to funguje se součtem a součinem, zkusil jsem si to na všech mnohočlenech a na tom dalším příkladu, že to fakt funguje. Pak mi máma prozradila, že ten součet a součin si našla na internetu, když se snažila pochopit naše dlaždicování.“

„Řešení mám z druhé strany v sešitu, jen tedy je to místy abstraktní umění. Tak příště pošlu všechno mé snažení. Jen doufám, že už to v hlavě drží a další řešení bude jen hřebenová túra.“

2.5.3 Doplnění na čtverec

Názvem doplnění na čtverec se rozumí úprava algebraického výrazu, které se například v přehledu středoškolské matematiky od Poláka (1991) celým názvem říká **doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu**. Je to důležitá modifikace výrazu, která se využívá v mnoha partiích matematiky. Na střední škole se bez ní žák neobejde. Slouží například k určení umístění grafu kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic Oxy , zjištění vrcholu paraboly a jejího posunutí po osách x, y .

Do dobrovolné práce pro mé žáky na základní škole jsem toto téma zařadila z několika důvodů. Modelování úpravy na čtverec pomocí algebraických dlaždic je jednoduché, intuitivní a žáci mají možnost tuto operaci objevit sami fyzickou manipulací s dlaždicemi doprovázenou symbolickým zápisem, ne pomocí pouček jako tomu často bývá právě na středních školách. Já sama jsem se setkala s tím, že studenti středních škol pouze dosazují do učitelem odvozeného vzorce, ale netuší, co s výrazem dělají, co je jejich výsledkem a jak se vztah (vzorec) odvodí.

Vzhledem k náročnosti zápisu obecného postupu jsem jej nevyžadovala. Úkolem žáků bylo pouze vyřešit několik úloh, u kterých jim určitý počet jednotkových dlaždic scházelo, nebo přebývalo. Po vymodelování výrazu museli žáci své zjištění zapsat obdobným způsobem jako jsem jim nabídla u tří příkladů na začátku pracovního listu. Pomocí zmíněných úloh

měli možnost nahlédnout, co se za úpravou na čtverec skrývá. Část této úpravy již zvládli a na střední škole mohou navázat obecným zápisem – vzorcem.

Závěr

Cílem mé práce bylo připravit a realizovat výuku výrazů s proměnnými za podpory algebraických dlaždic tak, aby žáci pochopili základní principy úprav jednoduchých algebraických výrazů. K jeho naplnění měla přispět vlastní manipulace každého žáka s algebraickými dlaždicemi doprovázená symbolickým zápisem a samostatné objevování žáků. Druhotným cílem bylo zjistit, zda je takovou výuku možné realizovat i v online prostředí při distanční výuce.

V teoretické části jsem se seznámila s možnostmi chápání písmene, s hladinami manipulace s výrazy a s chybami při žákovských řešeních. Tyto poznatky byly klíčové pro přípravu výukového experimentu. Zejména mi pomohlo uvědomění si rozdělení jednotlivých chyb, díky čemuž jsem poté ve výuce byla schopna předvídat možné problémy a dopředu se na ně připravit.

Podmínky výzkumu byly ztíženy nastalou situací pandemie COVID-19. Celá výuka probíhala distanční formou v prostředí Google Classroom. Znamenalo to všechnu přípravu přizpůsobit online prostředí a umožnit rovnocenné podmínky i žákům, kteří neměli přístup k tiskárně. Pro tuto situaci jsem využívala vrátnici naší školy, kde byly všechny podklady k dispozici. Já sama jsem si pořídila tabuli a vyrobila jsem algebraické dlaždice ve větším formátu, abych žákům mohla pomocí kamery na notebooku sdílet zápisy a postupy jako v běžné výuce.

Výzkumné části se účastnilo celkem 28 žáků z osmého ročníku základní školy. Každý z nich měl k dispozici své vyrobené algebraické dlaždice. Učivo výrazů jsme probírali postupně od opakování práce s celočíselnými výrazy, přes výrazy s proměnnou až po rovnice a další využití dlaždic.

Během propedeutiky algebraických dlaždic s celými čísly jsem dospěla k poznatku, že by bylo vhodné využít dlaždice již při zavádění přirozených čísel a operací na prvním stupni základní školy. Využití mohou mít i při výuce celých čísel v sedmém ročníku základní školy. Odvozování pravidel počítání se znaménky a operace sčítání a odčítání celých čísel ve výzkumné části této práce jsou toho příkladem.

Druhou část výzkumu jsem věnovala objevování pravidel pro počítání s výrazy s proměnnými. Zde jsem se utvrdila v předpokladu, že žákům nestačí symbolický zápis výrazu a zapsání pravidel pro jejich úpravy. Žáci mají potřebu názornosti a radosti z objevu, kterou jim algebraické dlaždice mohou dopřát. Měla jsem příležitost žakovská pochybení napravit a dopomoci žákům k úspěšnému řešení úloh s algebraickými výrazy.

Presvědčila jsem se, že dlaždice mohou posloužit jako vhodný nástroj i při zavádění rovnic a jejich ekvivalentních úprav. Oproti využití modelu vah mají jednu hlavní výhodu, a sice lze pomocí nich modelovat i záporné hodnoty.

Měla jsem dopředu připravená další témata, kterými žáky zaujmout a rozvinout jejich znalosti výrazů za předepsanou hranici na základní škole. Žáci díky dlaždicím zvládli objevit Vietovy vztahy a doplnění na čtverec. Jistě by šlo pomocí dlaždic a jejich modifikací dospět i k dalším poznatkům. To mohu nechat jako otevřenou nabídku pro další experimentální činnost v této oblasti.

Kombinací komunikace, znázorňování a zapisování na tabuli jsem se snažila zapojit všechny komunikační typy osobností. Na závěr jsem od všech žáků obdržela zpětnou vazbu, kterou mi poskytli anonymně vyplněním online formuláře v GC. Z odpovědí jsem některé vybrala jako příklad důležitosti zapojení i jiných metod výuky než pouhý výklad a zápis, které jsou ovšem také důležitou součástí poznávacího procesu.

„Dlaždice jsou pro mě lepší na zapamatování, protože jde o obrázek. Písmenkové výrazy, třeba také ve fyzice, jsou pro mě za trest.“

„Máma je milovnice hlavolamů, takže dlaždice ji nadchly a litovala, že oni ve škole nic takového neměli.“

„Jen možná budu ještě potřebovat podívat se před novým příkladem pro osvěžení do sešitu a říci si: „Jasně! Takhle jsem na to šel!“ Nedokáži přísahat, že už si to budu nadosmrti pamatovat.“

I přes všechny přínos, které nám dlaždice poskytují, je potřeba říct, že ani dlaždice nejsou dokonalým nástrojem pro práci s výrazy. Slouží pouze pro základní představu a orientaci v početních operacích, jsou omezeným pomocníkem stejně jako počítání na

prstech. Je u nich náročné pracovat s více hodnotami a nelze pracovat s vyšší mocninou než dva.

Při práci s dlaždicemi se mi však ukázalo, že jejich omezenost nemusí nutně překážet. Žáci díky nim porozuměli základním pravidlům práce s výrazy s proměnnou a byli schopni samostatně aplikovat nabyté poznatky při řešení složitějších problémů. Právě proto je podle mě vhodné ve snaze se zapojením algebraických dlaždic do výuky pokračovat. Navíc máme možnost zvýšit úspěšnost žáků v mezinárodních testováních, jejichž výsledky a doporučení jsou pro učitele důležité. Já sama jsem se rozhodla účastnit vyhodnocování šetření TIMSS, abych lépe porozuměla žakovským obtížím a měla možnost jim předcházet. Můžeme tak společně předejít chápání algebry jako hrozby a zabránit nelibosti mezi žáky při řešení algebraických výrazů. Dále je také povzbudivé, že případné využití dlaždic v online prostředí lze provést bez větších problémů.

Z výše uvedených závěrů je možné konstatovat, že byly splněné veškeré vytyčené cíle práce.

Seznam použité literatury

BLAŽKOVÁ, R. *Symbolika a terminologie v matematice* (v aritmetice a algebře). Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1441/jaro2007/ZS1MK_SMR2/um/symbolika.pdf

CAPEWELL, D., COMYNS, M. ... TURPIN, C. (2004). *Framework Maths 9. Core Students' Book*. Oxford, Anglie: Oxford University Press.

HALL, B. C. (1999). *Using algebra tiles effectively, Tools for understanding*. New Jersey. Preventice-Hall inc.

HEJNÝ, M., BÁLINT, L., BENEŠOVÁ, M., BEREKOVÁ, H., BERO, P., FRANTÍKOVÁ, L., GÁBOR, O., HRDINA, L., REPÁŠ, V., VANTUCH, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN.

JEDLIČKOVÁ, M., KRUPKA, P., NECHVÁTALOVÁ, J. (2016). *Matematika: výrazy a rovnice 1*. Brno: Nová škola.

KUZMA, J., REITEROVÁ, M. (2017). *Matematika pro základní školy v kostce. Příprava na přijímací zkoušky na střední školy*. Praha: Universum.

KÜCHEMANN, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 23 – 26.

McNEIL, M., WEINBERG, A., HATTIKUDUR, S., STEPHENS, A., ASQUITH, P., KNUTH, E., ALIBALI, M. (2010). A is for apple: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions. *Journal of Educational Psychology*, 102(3), 625 – 634.

MOLNÁR, J., LEPIK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J., EMANOVSKÝ, P. (2019). *Matematika 8*. Olomouc: Prodos.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. (1999). *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: Prometheus.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Praha: Prometheus.

POLÁK, J. (1991). *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus.

RENDL, M., VONDROVÁ, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, 24(1), 22 – 57.

STRUÍK, D. J. (1963). *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis.

TOMÁŠEK, V. a kol. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: ÚIV. Dostupné z: <https://csitest.testdomain.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/TIMSS/TIMSS-2007/Ulohy-z-mat-8-roc-publikace.pdf>

Učebnice a pomůcky. In: Hejného metoda [online]. Praha: H-mat, 2021. Dostupné z: <https://www.h-mat.cz/ucebnice>.

VOŠICKÝ, Z. (2007). *Matematika v kostce pro střední školy*. Havlíčkův Brod: Fragment.

Seznam příloh

Příloha 1 – Dlaždice, obecný vzor

Příloha 2 – Pracovní list Vietovy vztahy

Příloha 3 – Pracovní list Doplnění na čtverec

Seznam obrázků

Obrázek 1 – Hladina modelování, příklad (Hejný at al., 1990, s. 145)	13
Obrázek 2 – Hladina standardní manipulace, příklad (Hejný at al., 1990, s. 147)	13
Obrázek 3 – Hladina strategické manipulace, příklad (Hejný at al., 1990, s. 149)	14
Obrázek 4 – Grafické chyby žáků (Hejný at al., 1990, s. 156, o. 4)	15
Obrázek 5 – Vzhled kladných dlaždic a^2, b^2, ab (Hejný a kol., Učebnice D, s. 25)	18
Obrázek 6 – Zobrazení výrazu $a^2 + 2ab$	18
Obrázek 7 – Ukázka správného a špatného umístění bílé dlaždice (Hejný a kol., Učebnice D, s. 26)	18
Obrázek 8 – Znázornění výrazu $a^2 - ab$ (Hejný a kol., Učebnice D, s. 26)	19
Obrázek 9 – Ukázka součinu a rozkladu na součin	19
Obrázek 10 – Ukázka dlaždic	20
Obrázek 11 – Tři možnosti práce s dlaždicemi při operaci násobení	21
Obrázek 12 – Aplikace Algebra tiles	22
Obrázek 13 – Zavedení dlaždic (Hejný a kol., Učebnice C, s. 70)	24
Obrázek 14 – Zadání úlohy 4 (Hejný a kol., Učebnice D, s. 25)	24
Obrázek 15 – Ukázka úlohy s jiným typem dlaždic (Hejný a kol., Učebnice E, s. 30)	25
Obrázek 16 – Ukázka zobecňující úlohy (Hejný a kol., Učebnice E, s. 75)	25
Obrázek 17 – Ilustrace z motivační úlohy (Matematika NNS, s. 36-37)	26
Obrázek 18 – Ilustrace příkladů (Matematika NNS, s.39-40)	27
Obrázek 19 – Zavedení výrazu s proměnnou (Matematika Prodos, s. 21)	28
Obrázek 20 – Modelování (Matematika Prodos, s. 22)	28
Obrázek 21 – Motivační úloha (Matematika Prometheus, s. 65)	29
Obrázek 22 – Počáteční úloha pro operaci sčítání a odčítání (Matematika Prometheus, s. 68)	29
.....	29
Obrázek 23 – Poučka pro operaci sčítání (Matematika Prometheus, s. 68)	30

Obrázek 24 – Rozpis worshopu, Hall, 1999, s. 2	31
Obrázek 25 – Domácí příprava dlaždic	33
Obrázek 26 – Porovnání hodnoty X a 1	34
Obrázek 27 – Ukázka všech dlaždic.....	34
Obrázek 28 – Hodnoty dlaždic	36
Obrázek 29 – Jemnější čtvercová síť.....	36
Obrázek 30 – Hrubší čtvercová síť.....	37
Obrázek 31 – Zadání celých čísel pomocí dlaždic	39
Obrázek 32 – Návrh žáka na zobrazení čísla -4	42
Obrázek 33 – Zadání sčítání	43
Obrázek 34 – Zadání přičítání k zápornému číslu.....	44
Obrázek 35 – Zadání odčítání.....	44
Obrázek 36 – Řešení příkladu zadaného žákem.....	47
Obrázek 37 – Zadání odčítání od záporného čísla.....	48
Obrázek 38 – Ukázka demonstračních karet pro výuku násobilky od nakladatelství Alter 52	
Obrázek 39 – Mřížka 10x10	53
Obrázek 40 – Zadání násobení	54
Obrázek 41 – Žákovské řešení v mříži	55
Obrázek 42 – Žákovské řešení.....	56
Obrázek 43 – Tabulka pro násobení	58
Obrázek 44 – Násobení kladných čísel pomocí tabulky.....	59
Obrázek 45 – Obrácení dlaždic při násobení záporným číslem	60
Obrázek 46 – Násobení kladného a záporného čísla	60
Obrázek 47 – Řešení úlohy $(-3) \cdot 7$	62
Obrázek 48 – Roznásobení závorky celým číslem.....	63
Obrázek 49 – Roznásobení závorek	64
Obrázek 50 – Rozklad na součin	66
Obrázek 51 – Úloha M10-08, TIMSS 2007	73
Obrázek 52 – Zadání (+) a (-) s proměnnou	74
Obrázek 53 – Odvození pravidla pro roznásobení závorky	79
Obrázek 54 – Obecný zápis roznásobení závorky.....	79

Obrázek 55 – Roznásobení závorky s proměnnou celým číslem	79
Obrázek 56 – Roznásobení závorky proměnnou X	80
Obrázek 57 – Hodnoty dlaždic	81
Obrázek 58 – Ukázka dlaždic	81
Obrázek 59 – Příklad jak (ne)umocnit součet	82
Obrázek 60 – První vyjádření druhé mocniny součtu pomocí dlaždic	84
Obrázek 61 – Rozepsání vzorce pro druhou mocninu součtu $A+B$ pomocí dlaždic	84
Obrázek 62 – Důležitý význam použití závorek	86
Obrázek 63 – Příklad využití vzorce pro druhou mocninu	87
Obrázek 64 – Vzorec pro druhou mocninu součtu početně	88
Obrázek 65 – Zaznamenaný postup žáků z Rozhovoru 15	90
Obrázek 66 – Rozepsání vzorce pro druhou mocninu rozdílu $A-B$ pomocí dlaždic	90
Obrázek 67 – Objevení posledního vzorce	91
Obrázek 68 – Návrh pravoúhelníku z dlaždic	93
Obrázek 69 – Rozklad na součin pomocí dlaždic	94
Obrázek 70 – Znázornění výrazu $X^2 + X$	95
Obrázek 71 – Porovnávání hodnoty dlaždic $2X, X^2$	96
Obrázek 72 – Pravoúhelník $X^2 + X$	96
Obrázek 73 – Porovnávání hodnoty dlaždic	97
Obrázek 74 – Rozklad výrazu $X^2 + X$	98
Obrázek 75 – Úsečkový model rovnice $17 = 2X + 5$	100
Obrázek 76 – Úsečkový model a úprava rovnice $17 = 2X + X + 5$	101
Obrázek 77 – Znázornění ekvivalentní úpravy dělení	102
Obrázek 78 – Výpočet a znázornění rovnice $3X = 9$ za využití ekv. úpr. dělení	102
Obrázek 79 – Postup při řešení rovnice $-3X = 9$	104
Obrázek 80 – Znázornění ekvivalentní úpravy násobení	105
Obrázek 81 – Znázornění ekvivalentní úpravy odčítání	107
Obrázek 82 – Úsečkový model pro ekvivalentní úpravu přičítání	108
Obrázek 83 – Úsečkový model pro záměnu stran rovnice	108
Obrázek 84 – Vzorový příklad z prvního cvičení	109
Obrázek 85 – Ukázka úloh a tabulky z prvního cvičení	110