

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Rakušanová

Webová aplikace pro výuku objemů a povrchů těles na středních školách

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Francouzská filologie

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce, doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za zapůjčení literatury, mnoho odborných rad, vřelý přístup a především za dostatek trpělivosti při vytváření této práce. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Zdeňkovi Halasovi, DiS., Ph.D. za konzultace historického výtahu a PhDr. Aleně Šarounové, CSc. za odborné konzultace z oblasti stereometrie.

Název práce: Webová aplikace pro výuku objemů a povrchů těles na středních školách

Autor: Lucie Rakušanová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce je zaměřená na objemy a povrchy těles, zejména na objemy a povrchy mnohostěnů, které jsou součástí výuky geometrie (stereometrie) na středních školách. Webové stránky vytvořené v rámci práce mají sloužit jako podpůrný a doplňkový materiál jak pro studenty, tak pro jejich pedagogy. Stránky zahrnují řadu fotografií, obrázkových ilustrací a interaktivní prvky usnadňující uživateli pochopení látky. Mezi interaktivní prvky řadíme applety vytvořené v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra, hypertextové odkazy a krokovaná řešení úloh. Dále práce obsahuje množství řešených příkladů a závěrečný souhrnný test.

Klíčová slova: objem, povrch, těleso, mnohostěn, výuka matematiky

Title: Web application for teaching of volume and surface area of solids in secondary school

Author: Lucie Rakušanová

Department of Mathematics Education: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis is focused on the volume and surface area of solids, particularly on the volume and surface area of polyhedra, which are part of the high school curriculum of geometry (stereometry). The purpose of website is to provide supporting and complementary material for students as well as for their teachers. The website contains several photographs, illustrations and interactive components that make it easier to understand the topics. Interactive elements include applets created in a dynamic geometry application called GeoGebra, hyperlinks, and step-by-step exercise solving. Furthermore, the thesis is supplemented by solved problems and a final summary test.

Keywords: volume, surface area, solid, polyhedron, teaching of mathematics

Obsah

Úvod **3**

1 Motivace **4**
1.1 Tělesa kolem nás . . . 4
1.2 Poznámky z historie . . . 7

2 Základní pojmy **9**
2.1 Tělesa . . . 9
2.2 Mnohostěny . . . 12
2.3 Platónská tělesa . . . 16
2.3.1 Dualita platónských těles . . . 22
2.4 Objem a povrch . . . 26
2.4.1 Objem . . . 26
2.4.2 Povrch . . . 32

3 Hranoly **35**
3.1 Hranoly . . . 35
3.2 Zavedení těles hranolového typu . . . 37
3.3 Klasifikace hranolů . . . 42
3.3.1 Konvexní a nekonvexní hranoly . . . 42
3.3.2 Kolmé a kosé hranoly . . . 42
3.3.3 Pravidelné a nepravidelné hranoly . . . 43
3.4 Další typy hranolů . . . 46
3.4.1 Rovnoběžnostěny . . . 46
3.5 Anti-modely hranolů . . . 47
3.6 Objem hranolu . . . 50
3.7 Povrch hranolu . . . 59
3.8 Objemy a povrchy dalších typů hranolů . . . 64
3.8.1 Kvádr . . . 64
3.8.2 Krychle . . . 65
3.9 Úlohy I . . . 69

4 Jehlany **73**
4.1 Jehlany . . . 73
4.2 Zavedení těles jehlanového typu . . . 74
4.3 Klasifikace jehlanů . . . 77
4.3.1 Konvexní a nekonvexní jehlany . . . 78
4.3.2 Pravidelné a nepravidelné jehlany . . . 78
4.4 Další typy jehlanů . . . 83
4.4.1 Čtyřstěn . . . 83
4.4.2 Komolý jehlan . . . 85
4.5 Anti-modely jehlanů . . . 87
4.6 Objem jehlanu . . . 88
4.7 Povrch jehlanu . . . 99
4.8 Objemy a povrchy dalších typů jehlanů . . . 105
4.8.1 Čtyřstěn . . . 105

4.8.2 Komolý jehlan 108
4.9 Úlohy II 112

5 Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů **117**

6 Souhrnný test **129**

Závěr **134**

Seznam použité literatury **135**

Seznam obrázků **137**

Seznam zdrojů nevlastních obrázků **141**

Úvod

Tyto webové stránky vznikly jako bakalářská práce na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v letech 2019–2020. Práce má sloužit jako podpůrný a doplňkový materiál k výuce geometrie na středních a základních školách, který bude využíván jak studenty, tak jejich pedagogy k hlubšímu ponoření do krás stereometrie. Stereometrie jako součást školské matematiky bývá jednou z těch náročnějších partií, jelikož je třeba mít rozvinutou prostorovou představivost. Tato schopnost nám bývá nápomocna i k lepšímu vnímání světa okolo nás v běžném životě.

V této práci se budeme zabývat tělesy, jejich objemy a povrchy. Webové stránky jsou uspořádany do pěti hlavních kapitol, z nichž každá je dále rozdělena na další podkapitoly. V první kapitole Motivace si uvedeme názorné příklady ze světa kolem nás, kde všude můžeme tělesa hledat, a pokusíme se stručně nastínit historický vývoj oblastí geometrie související hlavně s objemy a povrchy těles. V druhé kapitole Základní pojmy si nejprve charakterizujeme potřebné pojmy, na kterých budou stavět následující kapitoly. Tělesa v této práci rozdělíme na dva typy: mnohostěny a oblá tělesa. Předmětem výkladu budou především mnohostěny, a to mnohostěny konvexní. Konvexní mnohostěny dále rozčleníme na hranoly a jehlany, kterým je postupně věnována třetí a čtvrtá kapitola. Naopak pátá kapitola Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů je věnována úlohám s krokovaným odkrývacím řešením na výpočet objemů a povrchů nekonvexních mnohostěnů.

Ve stěžejní třetí kapitole Hranoly a čtvrté kapitole Jehlany si postupně tato tělesa zavedeme, klasifikujeme je podle různých kritérií, odvodíme si vzorce pro jejich objemy a povrchy a představíme si řešené příklady. V podkapitolách Úlohy I, Úlohy II si uvedeme krokovaná odkrývací řešení jednotlivých úloh na procvičení daného tématu. Šestá kapitola nabízí možnost ověřit si nabyté vědomosti v souhrnném testu o sedmi úlohách.

Učební text je doplněn o řadu fotografií a obrázkových ilustrací převážně zobrazených v kosoúhlém promítání tak, aby tyto ilustrace odpovídaly učebnicím a výukovým materiálům používaných na základních a středních školách. Některé ilustrace jsou zobrazeny v pravoúhlé axonometrii. Webová stránka navíc obsahuje applety, které jsou vytvořeny v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra.

Webová verze se od tištěné liší v několika bodech. V tištěné verzi bakalářské práce jsou applety převedeny do formy obrázků, úlohy s krokovaným řešením mají rovnou uvedené řešení, rozšiřující učivo je zařazeno mezi výukový text a rejstřík pojmů je vynechán.

Webová stránka je dočasně dostupná na adrese https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rakusanova/objemyaobsahy. Po obhajobě bakalářské práce budou stránky zveřejněny na portále středoškolské matematiky, který vytváří Katedra didaktiky matematiky MFF UK. Pro nejlepší zobrazení stránek se doporučuje použít některý z těchto prohlížečů: Google Chrome, Mozilla Firefox, Opera, Safari.

1. Motivace

1.1 Tělesa kolem nás

Každý z nás má jistě určitou představu o pojmu *těleso*, protože se s nimi setkáváme již od raného dětství. Od doby, kdy naše smysly začínají vnímat tento svět, pozorujeme tyto prostorové útvary. Ať už to jsou díly dětské stavebnice, pozemní stavby, obaly na potraviny nebo kola automobilu. S tělesy se setkáváme jak u předmětů běžného života, tak i v technických, přírodních a uměleckých oborech, zejména v architektuře a stavitelství, v řemeslné výrobě, ve strojírenství a v lékařství (obr. 1.1–1.4).



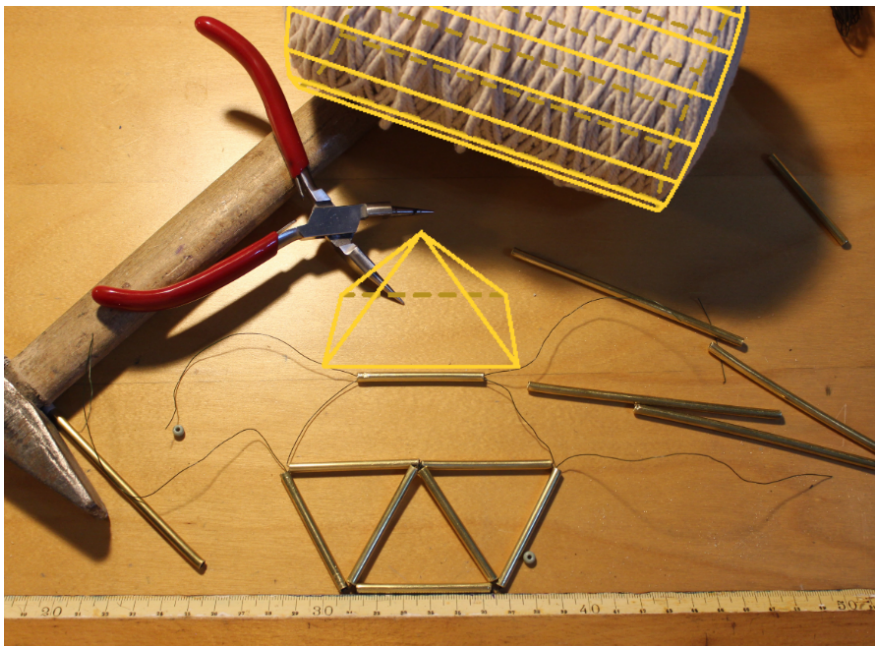
Obrázek 1.1: Cheopsova pyramida – model pravidelného čtyřbokého jehlanu [1]

Na obr. 1.1 je zobrazena známá Cheopsova pyramida v Egyptě, která odpovídá pravidelnému čtyřbokému jehlanu. Podstava jehlanu je čtverec a stěny jsou tvořeny čtyřmi shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Tato stavba je první a současně jediná do dnešní doby zachovaná stavba ze 7 klasických divů světa.



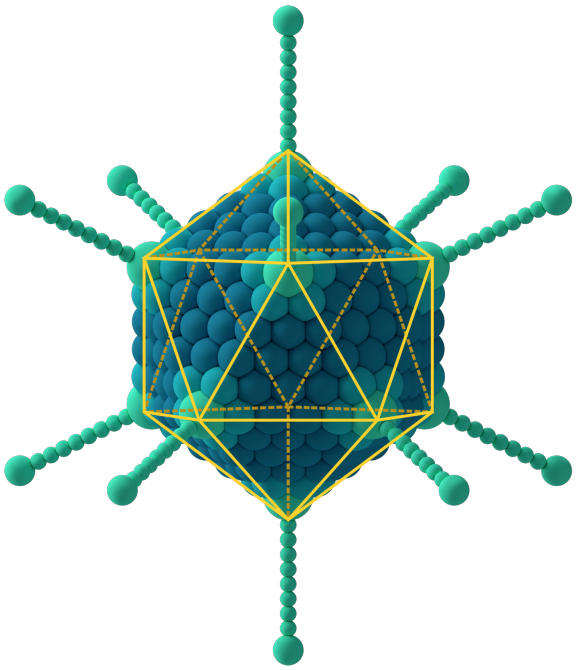
Obrázek 1.2: Stanice metra Lužiny, Praha – modely osekaného dvacetistěnu a hranolů [2]

Na obr. 1.2 je uprostřed zachycen osekaný dvacetistěn v proskleném provedení. Řadíme jej mezi polopravidelná neboli Archimédova či archimédovská tělesa. Jeho stěny jsou tvořeny dvanácti pravidelnými pětiúhelníky a dvaceti pravidelnými šestiúhelníky. Podstavec osekaného dvacetistěnu má tvar pravidelného pětibokého hranolu a je obklopen lavicí pětiúhelníkového půdorysu. Po obou stranách nástupiště je umístěna řada sloupů ve tvaru čtyřbokých hranolů – kvádrů.



Obrázek 1.3: Řemeslná výroba – model sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu a model válce

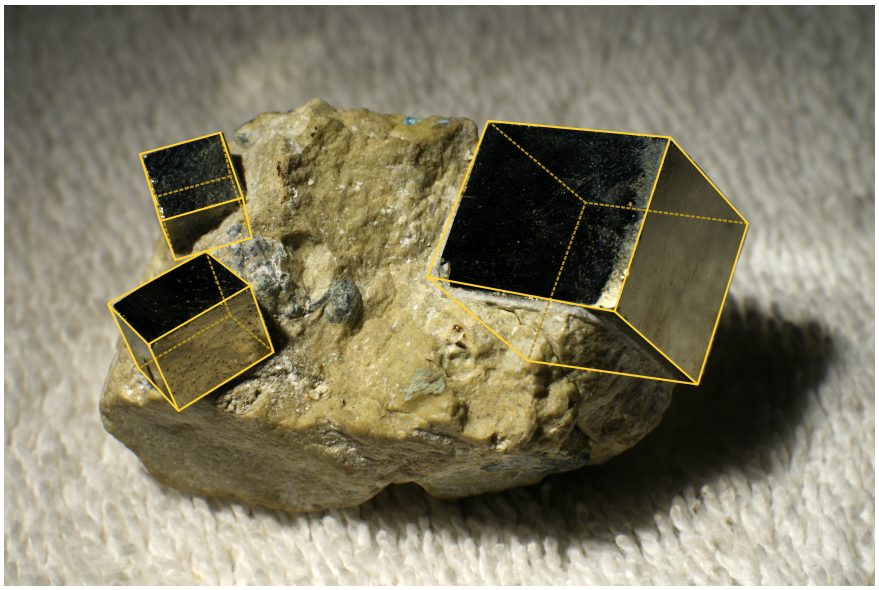
Obr. 1.3 ilustruje postupy v řemeslné výrobě v podobě animace – složením sítě dostáváme pravidelný čtyřboký jehlan. Dále pozorujeme špulku bavlněné příze, která má tvar válce s kruhovou podstavou. Válce lze modelovat pomocí n-bokých hranolů.



Obrázek 1.4: Kapsida viru – model dvacetistěnu [3]

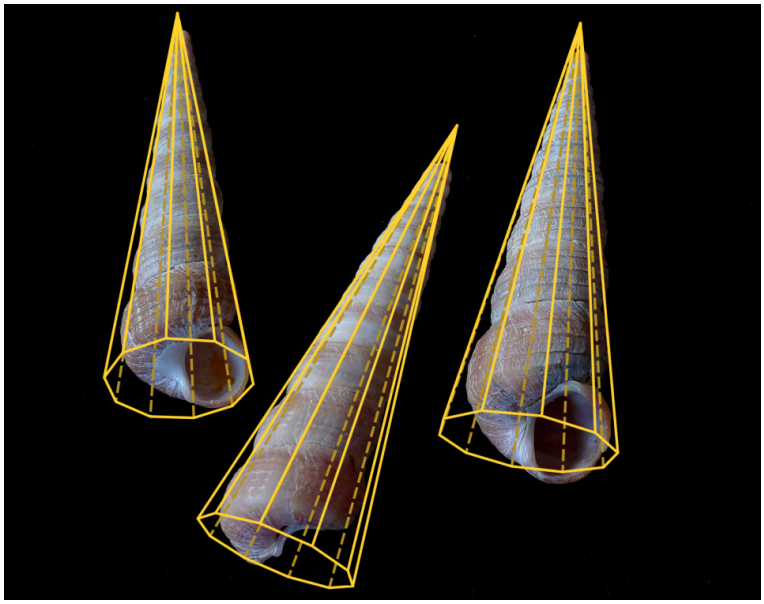
Na obr. 1.4 vidíme model kapsidy viru, tj. proteinového pláště virové částice. Tvar modelu připomíná pravidelný dvacetistěn, který se řadí mezi Platónova či platónská tělesa. Jeho plášť je tvořen dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky.

Navíc i v samotné přírodě nacházíme tělesa například ve formě krystalů minerálů nebo jako schránky živočichů (obr. 1.5 a obr. 1.6).



Obrázek 1.5: Krystaly pyritu – modely krychle [4]

Tvar minerálu je dán jeho vnitřní stavbou – krystalovou strukturou, která vzniká zákonitým trojrozměrným opakováním atomů, iontů nebo molekul, z nichž je minerál složen. Na obr. 1.5 se nachází pyrit neboli disulfid železnatý. Halit (sůl kamenná) také tvoří krystaly ve tvaru krychle, tento tvar mohou mít také krystaly mědi, diamantu či stříbra.



Obrázek 1.6: Schránka mořského plže – modely desetibokých jehlanů [5]

Na posledním obrázku 1.6 jsou vyobrazeny schránky věžule obecné, které mají přibližně tvar kužele. Kužele lze modelovat pomocí n-bokých jehlanů.

1.2 Poznámky z historie

Geometrie pracuje se vzdálenostmi, objemy a povrchy geometrických útvarů. Slovo geometrie vzniklo ve starověku a je odvozeno z řeckých slov *gé* („země“) a *metria* („měření“). Postupně se vyčleňovala na *planimetrii* (geometrii v rovině, rovinnou geometrii) a *stereometrii* (geometrii v prostoru, prostorovou geometrii). Slovo stereometrie (z řeckých slov *stereos* „prostor“ a *metria*) bylo zavedeno starořeckým filozofem Aristotelem (4. stol. př. n. l.), zatímco slovo planimetrie (z latinského slova *plānum* „rovina“ a řeckého *metria*) vzniklo až ve středověku po vzoru stereometrie. Rozvoj geometrie vycházel z požadavků tehdy existující společnosti a souvisel se vznikem architektury, astronomie, optiky, perspektivy, kartografie, balistiky a dalších odvětví.

Ve starověku se některé z vůbec prvních geometrických výpočtů pravděpodobně vztahovaly ke stavbám budov, vyměřování pozemků, dodávek potravin nebo výrobě artefaktů pro náboženské účely. Ve starověkých mezopotámských a egyptských textech se objevují zápisy o výpočtech objemů. Starověký egyptský *Rhindův papyrus* z první poloviny 2. tisíciletí př. n. l. zahrnuje úlohy na výpočet objemu obilných sýpek tvaru kvádru (popřípadě krychle) a válce s kruhovou podstavou. *Moskevský papyrus* také z první poloviny 2. tisíciletí př. n. l. zahrnuje návod na výpočet objemu komolého jehlanu.

Ze starověké Mezopotámie (období Starobabylónské říše z období první poloviny 2. tisíciletí př. n. l.) se dále dochovaly hliněné tabulky obsahující praktické úlohy na výpočet objemů nebo rozměrů různých staveb (domů, náspů, přehrad, kanálů, opevnění apod.). Podobné úlohy o výpočtech objemů těles ze stavební praxe nalezneme ve staročínské knize *Matematika v devíti kapitolách* (z 1. stol. př. n. l.).



Mezopotámští písaři při diktátu. Asyrský píše na hliněnou tabulku, aramejský na pergamen. (J. Klíma)

Obrázek 1.7: Písaři ve starověku [0]

Jedním z největších matematiků helénistického období byl Eukleidés (2. pol. 4. stol.–1. pol. 3. stol. př. n. l.), který se soustavně zabýval nejen planimetrií, ale také stereometrií. Do této doby známé stereometrické poznatky byly sepsány v posledních třech kapitolách (jedenácté, dvanácté a třinácté) Eukleidových *ZÁKLADŮ*. Poslední třináctá kapitola také obsahuje pojednání o pravidelných mnohostěnech, kde Eukleidés přináší důkaz, proč neexistuje více než pět pravidelných mnohostěnů (podle filozofa Platóna z 5.–4. stol. př. n. l. zvaných Platónova či platónská tělesa). Další významný řecký matematik byl Archimédés ze Syrákús (3. stol. př. n. l.), který odvodil pravidla pro výpočet povrchů a objemů různých těles (např. koule, elipsoidu, úseče rotačního paraboloidu a průniku dvou válců). Jeho objevy jsou začátkem

myšlenek, na kterých byl po dvou tisících letech budován integralní počet. Integrální počet je využíván jako obecný nástroj pro výpočet objemů a povrchů těles (součást vysokoškolské matematiky). Archimédés se zabýval polopravidelnými konvexními mnohostěny, proto se dnes nazývají Archimédovými či archimédovskými tělesy.

V římském imperiu patřili mezi nejvýznamější alexandrijské matematiky v oblasti geometrie Hérón (1. stol. n. l.) a Pappos (2. pol. 3. stol.–1. pol. 4. stol. n. l.). Hérónovo dílo *Stereometrie* se zabývá kromě měření objemů geometrických těles i měřením například objemů staveb, divadel, amfiteátrů, plaveckých bazénů, studní, lodí a vinného sudu. Pappova *Matematická sbírka* má podobu stručné a jasné příručky nejen geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a obměnami existujících vět a důkazů. Mnohé výsledky starověkých autorů se zachovaly jen díky této sbírce. Mimo jiné vyslovil obecné pravidlo pro výpočet objemů rotačních těles, rovněž známé jako Pappos–Guldinovy věty.

V novověku to byl právě Johannes Kepler (pražský hvězdář a matematik německého původu), který znovu objevil Pappova a Héronova díla v průběhu 16. a 17. století a dále s nimi pracoval. V 18. století vyslovuje švýcarský matematik Leonhard Euler pro konvexní mnohostěny větu o vztahu mezi počtem vrcholů, stěn a hran mnohostěnu (tzv. Eulerovu větu).

Tento historický výtah vychází z [Polák (2014) s. 285, 331], z [Pomykalová (2009) s. 122] a z [Rooney (2017) s. 61, 69].

2. Základní pojmy

2.1 Tělesa

Již víme, že planimetrie neboli rovinná geometrie se zabývá rovinnými geometrickými objekty, tj. rovinnými útvary. Stereometrie neboli prostorová geometrie se zabývá prostorovými geometrickými objekty, tj. prostorovými útvary. Nejdříve si v této kapitole zavedeme pojem **těleso**. Tento pojem je obtížné definovat bez vysokoškolských poznatků. Pro potřeby výuky nebudeme v celé práci zavádět exaktní definici tělesa ani plochy jako hranice, neboť tím bychom přesahovali rámec učiva středních škol. Využijeme následující definici, která vychází ze středoškolských učebnic [Polák (2014) s. 328] a z [Pomykalová (2009) s. 123].

Definice

Geometrickým tělesem (zkráceně **tělesem**) se nazývá prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Tedy tento útvar je ohraničený uzavřenou plochou, která je jeho součástí a kterou označujeme jako hranice, resp. povrch.

Prostorové útvary (tělesa), stejně jako rovinné útvary, můžeme klasifikovat podle určitých kritérií. K základnímu rozdělení patří dělení na tělesa **konvexní** a **nekonvexní** [Vyšín (1964), s. 5].

Definice

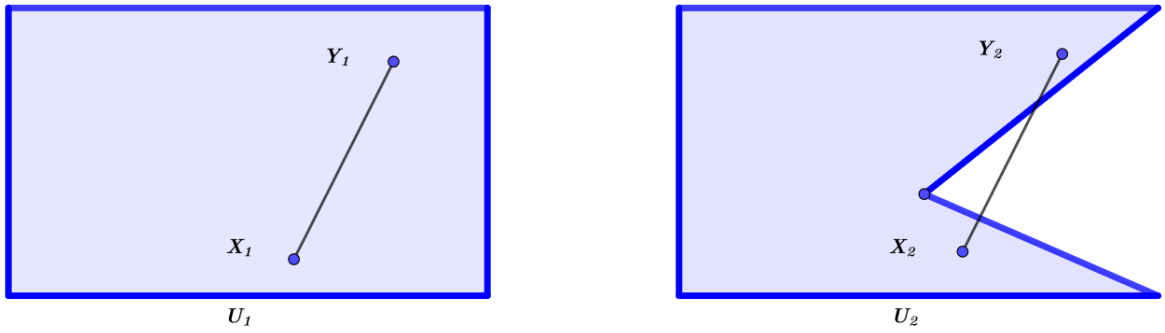
Geometrický prostorový útvar U nazýváme **konvexním**, pokud úsečka spojující kterékoli jeho dva body také náleží tomuto útvaru U. V opačném případě je daný útvar **nekonvexní**.

Konvexní prostorové útvary kolem nás poznáváme následovně.

Poznámka

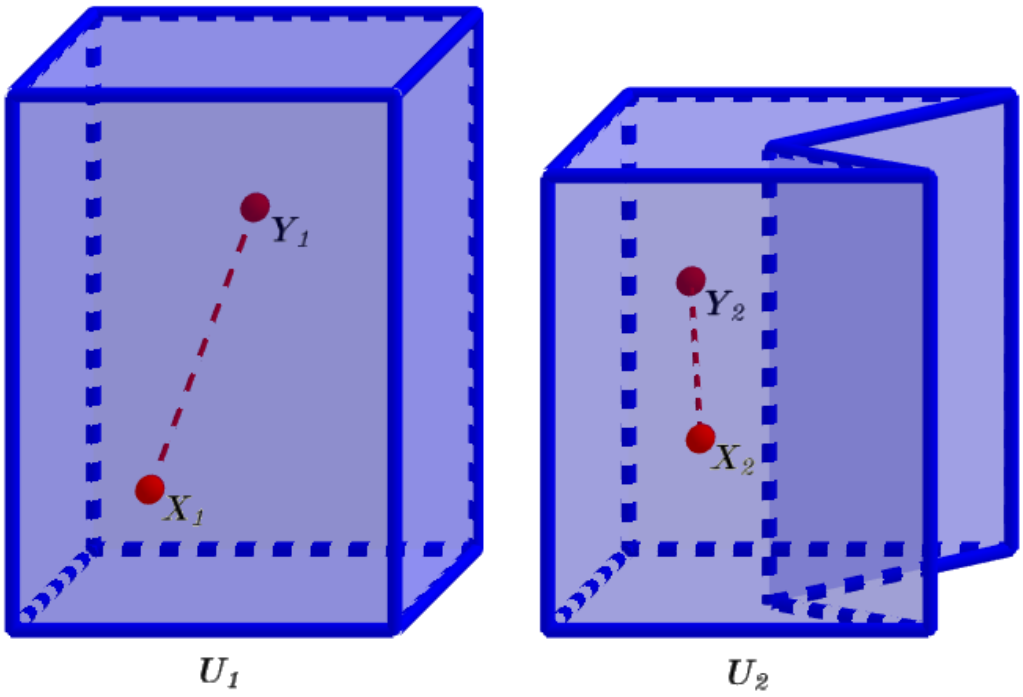
Představme si tovární halu ve tvaru kvádru, jehož všechny body můžeme po dvojicích spojit napjatým drátem (aniž by byl drát někde ohnutý). Tovární hala představuje konvexní útvar U v prostoru, napjatý drát představuje spojnici bodů X, Y čili úsečku XY. Představme si tovární halu s půdorysem ve tvaru podkovy, tak kvůli jejímu „otevřenému dvoru“ by tato tovární hala představovala útvar nekonvexní, protože existují dvojice bodů spojené drátem, který leží částečně nebo úplně vně haly.

Na následujícím obr. 2.1 se nachází dva rovinné útvary – konvexní čtyřúhelník U_1 a nekonvexní pětiúhelník U_2.



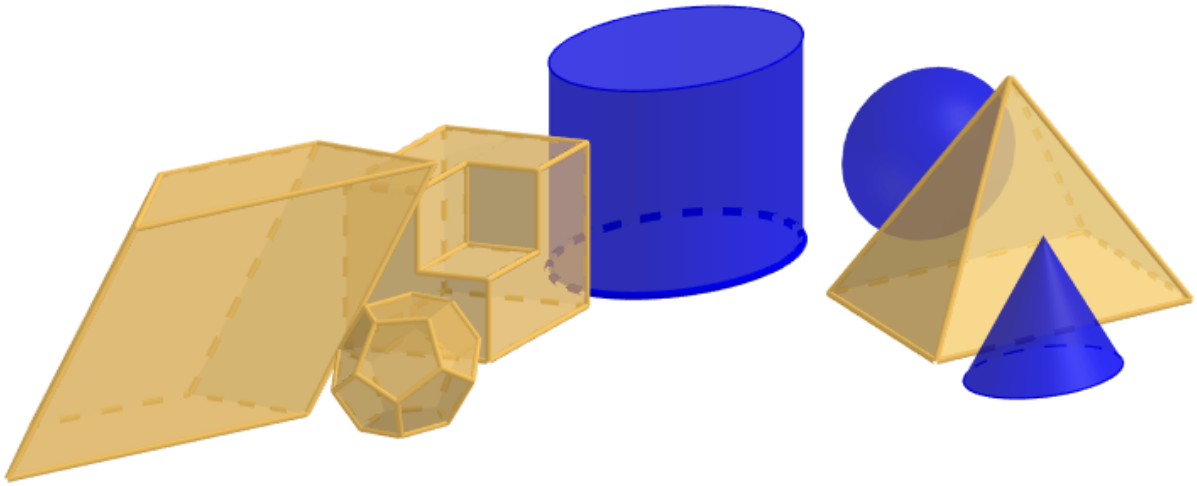
Obrázek 2.1: Konvexní čtyřúhelník U_1 a nekonvexní pětiúhelník U_2 v rovině

Na následujícím obr. 2.2 se nachází dva prostorové útvary – konvexní čtyřboký hranol U_1 a nekonvexní pětiboký hranol U_2.



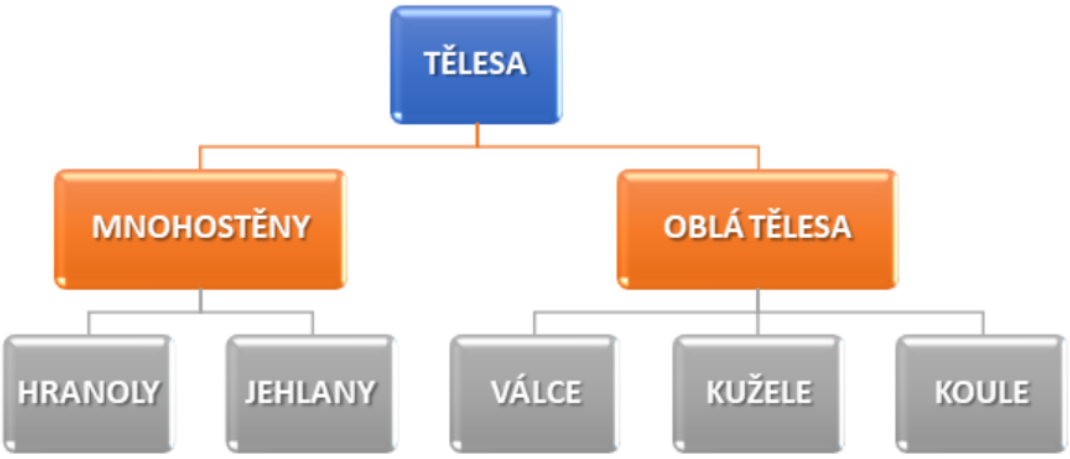
Obrázek 2.2: Konvexní čtyřboký hranol U_1 a nekonvexní pětiboký hranol U_2 v prostoru

Vzhledem k množství geometrických těles si zavedeme jen některá tělesa, vytvoříme si přehled těch těles, která se používají ve školské matematice, a uvedeme si k nim konkrétní příklady na výpočet jejich objemů a povrchů. Školská tělesa můžeme rozdělit do dvou základních skupin na **mnohostěny** a **oblá tělesa** (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Skupina těles v prostoru (mnohostěny a oblá tělesa)

Mnohostěny lze členit do podskupin na **hranoly** a **jehlany**. Oblá tělesa rozdělujeme do podskupin na **válce**, **kužele** a **koule** (obr. 2.4). V kapitolách této práce se budeme zabývat mnohostěny.



Obrázek 2.4: Hierarchické schéma těles

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato práce věnovat konvexním mnohostěnům, ale v šesté kapitole Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů si ukážeme příklady s řešením a krokované úlohy na výpočet objemů a povrchů nekonvexních mnohostěnů.

2.2 Mnohostěny

Připomeneme si pojem mnohoúhelníku, který známe z planimetrie [Kadleček (1996) s. 122].

Definice

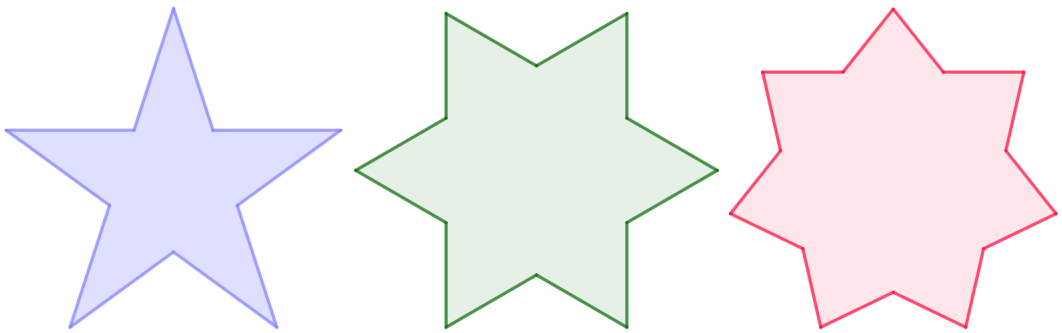
Mnohoúhelník (polygon) je obrazec ohraničený uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná.

Kromě obecného mnohoúhelníku zavádíme také pravidelný mnohoúhelník.

Definice

Za **pravidelný mnohoúhelník** je považován takový, jenž má všechny strany i vnitřní úhly shodné.

Mnohoúhelníky také nazýváme n-úhelníky, kde $n \in \mathbb{N}$ udává počet vrcholů mnohoúhelníku. Z definice pravidelného mnohoúhelníku vyplývá, že nemůžeme mezi ně řadit například nekonvexní hvězdicovité mnohoúhleníky (obr. 2.5).



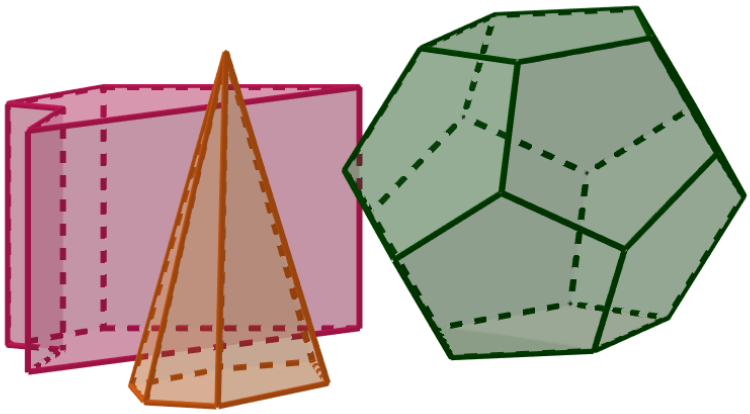
Obrázek 2.5: Nekonvexní hvězdicovité mnohoúhelníky (pěticípý, šesticípý a sedmicípý)

Mnohostěny v prostoru jsou analogií mnohoúhelníků v rovině. Následující zavedení mnohostěnu vychází z [Kadleček (1996) s. 147] a z [Pomykalová (2009) s. 127].

Definice

Mnohostěn (polyedr, n-stěn) je každé těleso, jehož hranice, resp. povrch je sjednocením n mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží ve stejné rovině. Součástí mnohostěnu (jako každého tělesa) je i jeho vnitřek.

Na následujícím obr. 2.6 s mnohostěny se nachází nekonvexní pětiboký kolmý hranol, nepravidelný šestiboký jehlan a pravidelný dvanáctistěn.

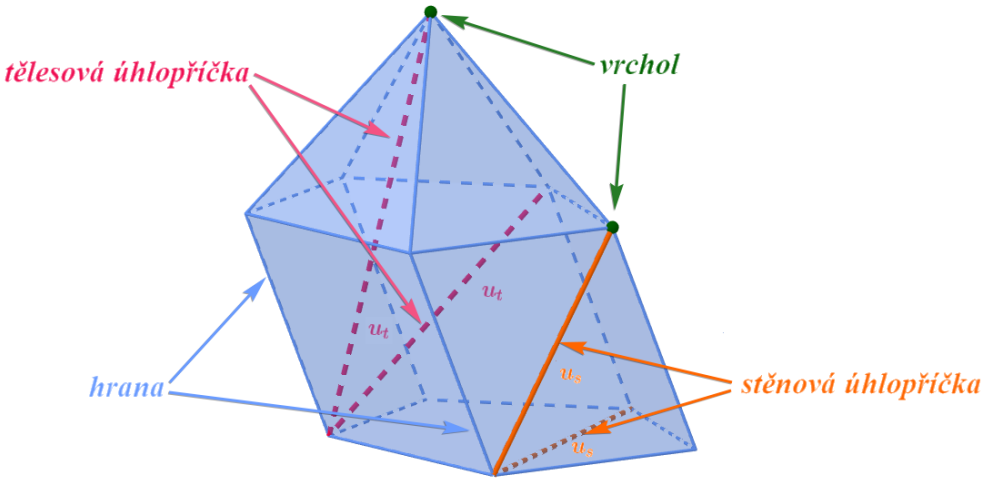


Obrázek 2.6: Skupina mnohostěnů v prostoru

Z definice mnohostěnu plyne, že jeho **stěny** tvoří mnohoúhelníky. Zavádíme následující pojmy ilustrované na obr. 2.7:

Definice

- Strany těchto mnohoúhelníků (průsečnice stěn) označujeme jako **hrany** mnohostěnu.
- Body, v nichž se hrany sbíhají (vrcholy mnohoúhelníků) jsou zároveň **vrcholy** mnohostěnu.
- Úsečka, která spojuje dva vrcholy mnohostěnu ležící v jedné jeho stěně a která není hranou příslušného mnohostěnu, se nazývá **stěnová úhlopříčka** mnohostěnu.
- Úsečka, která spojuje dva vrcholy mnohostěnu a která neleží v téže stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka** mnohostěnu.



Obrázek 2.7: Obecný jedenáctiboký mnohostěn

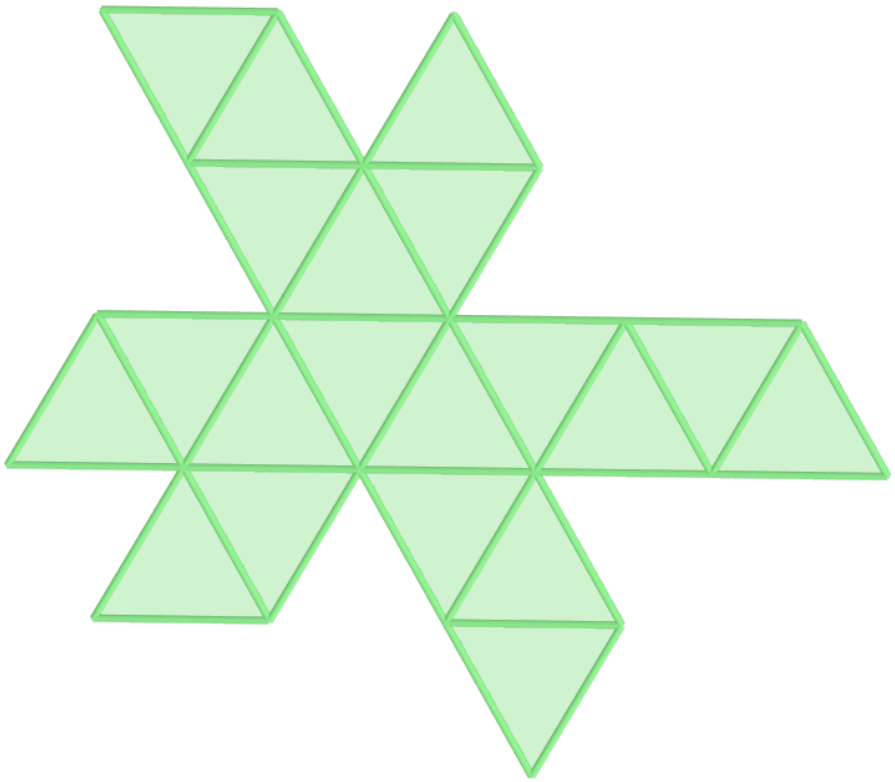
Poznámka

- Stěny, které mají společnou hranu, se nazývají **sousední stěny**.
- Vrcholy, které leží na stejné hraně, se nazývají **sousední vrcholy**.

Umístěním všech stěn mnohostěnu do vhodného uskupení v jedné rovině tak, aby vznikl jeden rovinný obrazec, získáme **síť mnohostěnu** (obr. 2.8).

Poznámka

Nezapomínejme, že každá sestava všech stěn mnohostěnu síť nutně tvořit nemusí. Stěny musí být vhodně umístěny tak, aby bylo možné tuto síť složit pouhým ohýbáním papíru (v případě vyrobeného papírového modelu).



Obrázek 2.8: Síť mnohostěnu (pravidelného dvacetistěnu)

Názvy mnohostěnů souvisí s počtem jejich stěn.

Poznámka

Mnohostěny jsou pojmenovávány podle počtu stěn (čtyři a více). Jejich cizojazyčné názvy pocházejí z řečtiny. Tedy dostáváme následující názvy mnohostěnů: čtyřstěn (tetraedr), pětistěn (pentaedr), šestistěn (hexaedr), sedmistěn (heptaedr), osmistěn (oktaedr), devítistěn (nonaedr), desetistěn (dekaedr), jedenáctistěn (undekaedr), dvanáctistěn (dodekaedr), dvacetistěn (ikosaedr) atd. Pro běžně používané mnohostěny máme samostatná označení, jako je krychle a kvádr (případy šestistěnu), jehlan apod.

Kromě obecného mnohostěnu zavádíme také pravidelný mnohostěn.

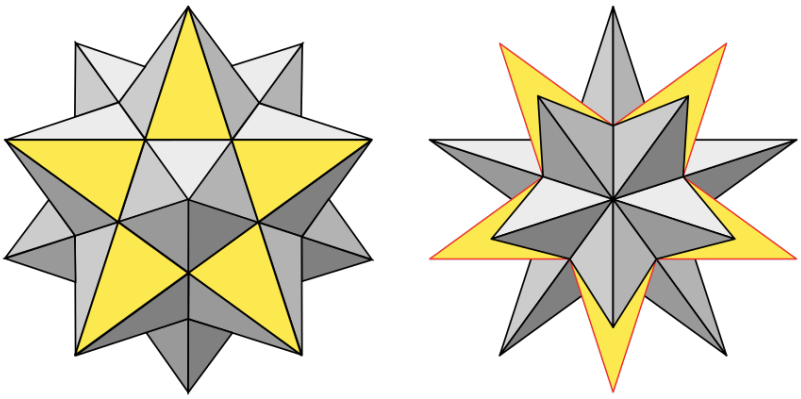
Definice

Pravidelným mnohostěnem nazýváme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné n-úhelníky ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) a zároveň z každého vrcholu vychází stejný počet hran q ($q \geq 3$, $q \in \mathbb{N}$).

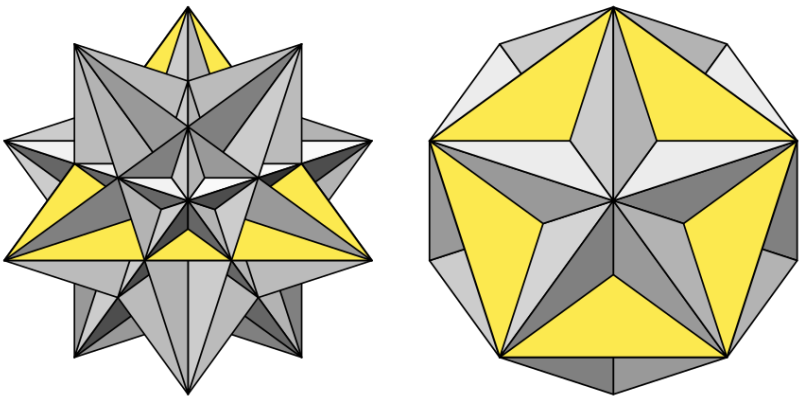
Pravidelné konvexní mnohostěny nazýváme **Platónovými** či **platónskými** tělesy. Těmto tělesům se budeme věnovat v samostatné kapitole.

Poznámka

Pokud v definici pravidelného mnohostěnu vynecháme podmínku konvexnosti tělesa, tak mezi pravidelné mnohostěny můžeme zařadit i nekonvexní Kepler-Poinsotovy mnohostěny. Čtyři Kepler-Poinsotova tělesa patří do skupivy tzv. hvězdicovitých mnohostěnů, které vznikají z platónských těles. Na obr. 2.9 jsou vyobrazeny Keplerova tělesa – malý a velký hvězdicový dvanáctistěn. Na obr. 2.10 jsou vyobrazeny Poisontova tělesa – velký dvacetistěn a velký dvanáctistěn.



Obrázek 2.9: Keplerova tělesa [7]



Obrázek 2.10: Poisontova tělesa [7]

Rozšiřující poznámka. Kromě pravidelných mnohostěnů existují také polopravidelné mnohostěny. Existuje třináct polopravidelných konvexních mnohostěnů, které nazýváme **Archimédovými** či **archimédovskými tělesy** vzniklými osekáním těles platónských. Těm je věnována část této diplomové práce [Dohnalová (2016).

Následující věta zvaná **Eulerova věta** je užitečným nástrojem pro zkoumání počtů stěn, vrcholů a hran jednotlivých konvexních mnohostěnů.

Věta

Součet počtu vrcholů a stěn konvexního mnohostěnu je roven počtu jeho hran zvětšenému o dvě. Označíme-li s počet stěn, h počet hran, v počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí:

$$s + v = h + 2.$$

Rozšiřující poznámka. Důkaz této věty jde nad rámec středoškolských znalostí a lze ho nalézt zde: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/50/slavik.pdf.

V souladu s rámcovými vzdělávacími programy matematiky pro druhý stupeň základní školy a pro školy střední se budeme zabývat zejména mnohostěny konvexními. V této práci se z konvexních mnohostěnů zabýváme především hranoly a jehlany.

2.3 Platónská tělesa

V této samostatné kapitole se budeme zabývat Platónovými či platónskými tělesy, protože jejich „dokonalé“ struktuře byla vždy věnována velká pozornost a tato tělesa našla uplatnění jak v architektuře nebo designu, tak třeba i v nanotechnologiích [Ashrafi (2016) s. 61–81].

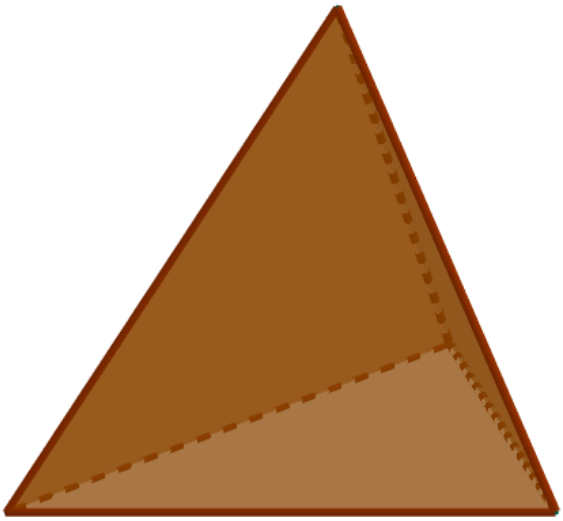
Definice

Platónovo či **platónské těleso** je konvexní pravidelný mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a zároveň z každého vrcholu vychází stejný počet hran.

Pokud uvažujeme v rovině všechny pravidelné n-úhelníky, tak jich existuje nekonečně mnoho ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$), zatímco pravidelných konvexních n-stěnů v prostoru existuje právě pět (obr. 2.11–2.15).

Pravidelný čtyřstěn

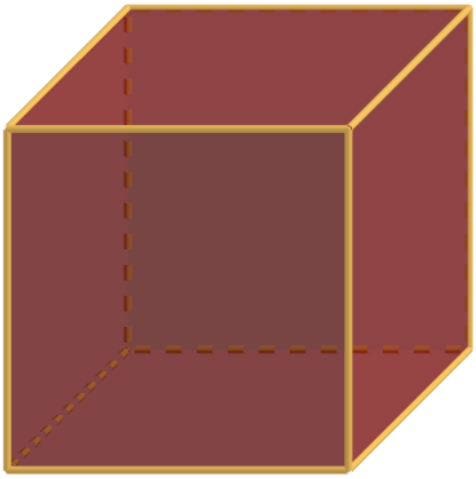
Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou tvořeny čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso má čtyři vrcholy a šest hran, viz obr. 2.11.



Obrázek 2.11: Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný šestistěn

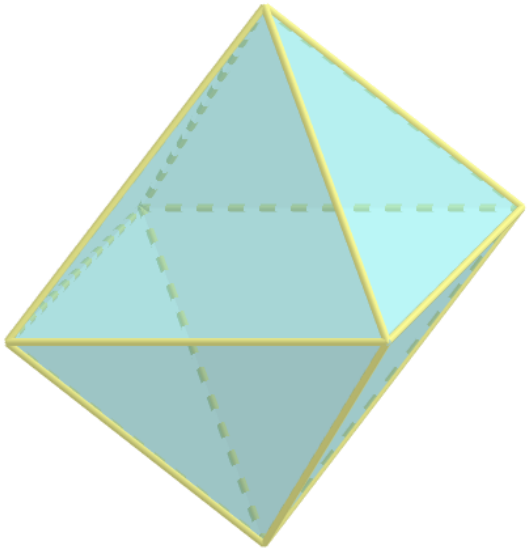
Pravidelným šestistěnem je krychle. Jeho stěny jsou tvořeny šesti shodnými čtverci. Toto těleso má osm vrcholů a dvanáct hran, viz obr. 2.12.



Obrázek 2.12: Pravidelný šestistěn

Pravidelný osmistěn

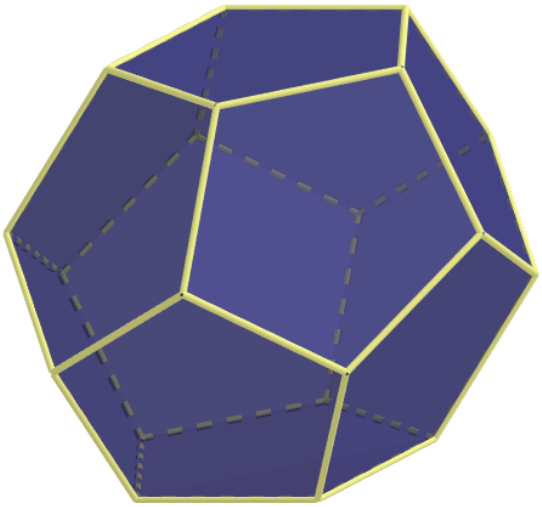
Stěny pravidelného osmistěnu jsou tvořeny osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso si můžeme představit jako sjednocení dvou shodných těles, a to pravidelných čtyřbokých jehlanů se společnou podstavou. Toto těleso má šest vrcholů a dvanáct hran, viz obr. 2.13.



Obrázek 2.13: Pravidelný osmistěn

Pravidelný dvanáctistěn

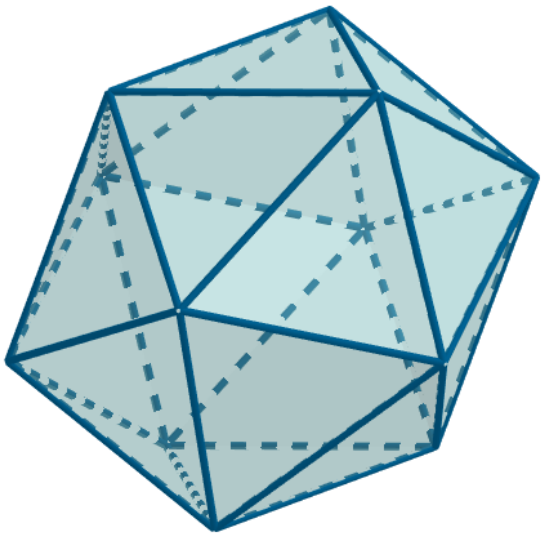
Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou tvořeny dvanácti shodnými pravidelnými pětiúhelníky. Toto těleso má dvacet vrcholů a třicet hran, viz obr. 2.14.



Obrázek 2.14: Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvacetistěn

Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou tvořeny dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso má dvanáct vrcholů a třicet hran, viz obr. 2.15.



Obrázek 2.15: Pravidelný dvacetistěn

Následující věta uvádí počet konvexních pravidelných mnohostěnů.

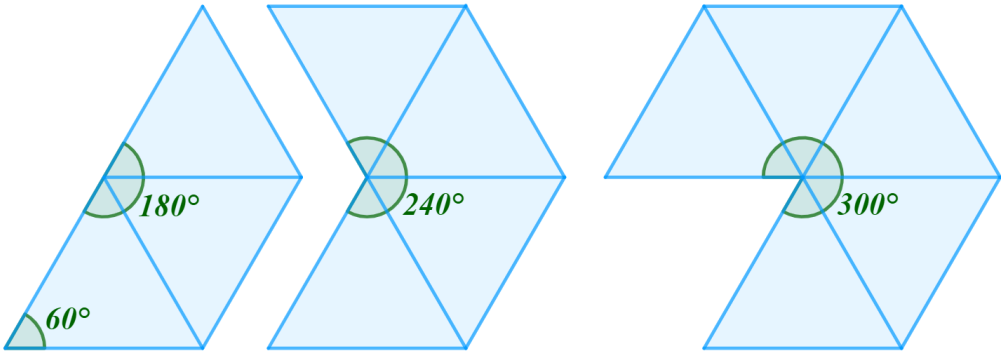
Věta

Existuje právě pět konvexních pravidelných mnohostěnů.

Předvedeme si důkaz, proč existuje právě pět konvexních pravidelných mnohostěnů. Plášť pravidelného mnohostěnu je tvořen shodnými pravidelnými mnohoúhelníky a žádné dva pravidelné mnohoúhelníky neleží ve stejné rovině. Součet velikostí vnitřních úhlů ve stěnách u jednoho vrcholu, ve kterém se sbíhají hrany, musí být menší než 360° (v opačném případě by stěny incidující s daným vrcholem ležely v jedné rovině) a zároveň každý vrchol mnohostěnu inciduje alespoň se třemi stěnami, aby mohlo vzniknout prostorové těleso.

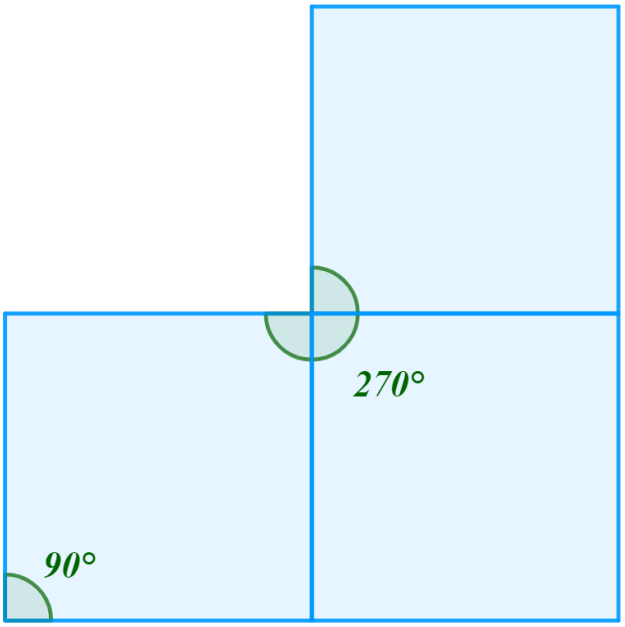
- **Stěnami mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky**

  Velikost vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku je 60°. Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat stěny tři (čtyřstěn), čtyři (osmistěn) nebo pět (dvacetistěn), kde součty velikostí úhlů u vrcholu budou popořadě $3 \cdot 60° = 180°$, $4 \cdot 60° = 240°$ nebo $5 \cdot 60° = 300°$, viz obr. 2.16. V případě počtu stěn vyššího než pět bychom již přesáhli omezující podmínku ($6 \cdot 60° = 360°$).



Obrázek 2.16: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu pravidelného čtyřstěnu, osmistěnu a dvacetistěnu

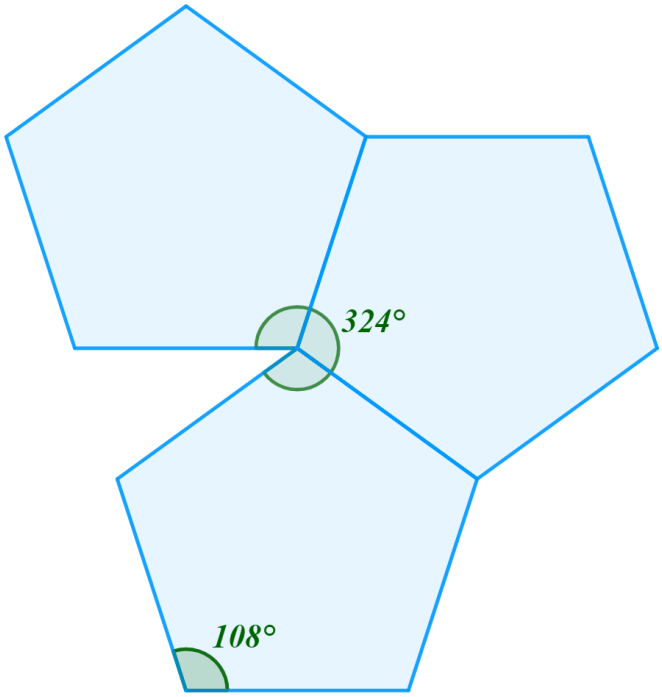
- **Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné čtyřúhelníky – čtverce** Velikost vnitřních úhlů pravidelného čtyřúhelníku je 90°. Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat pouze tři stěny (krychle), kde součet velikostí úhlů u vrcholu bude $3 \cdot 90° = 270°$, viz obr. 2.17. V případě počtu stěn vyššího než tři bychom již přesáhli omezující podmínku ($4 \cdot 90° = 360°$).



Obrázek 2.17: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu krychle

- **Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné pětiúhelníky**

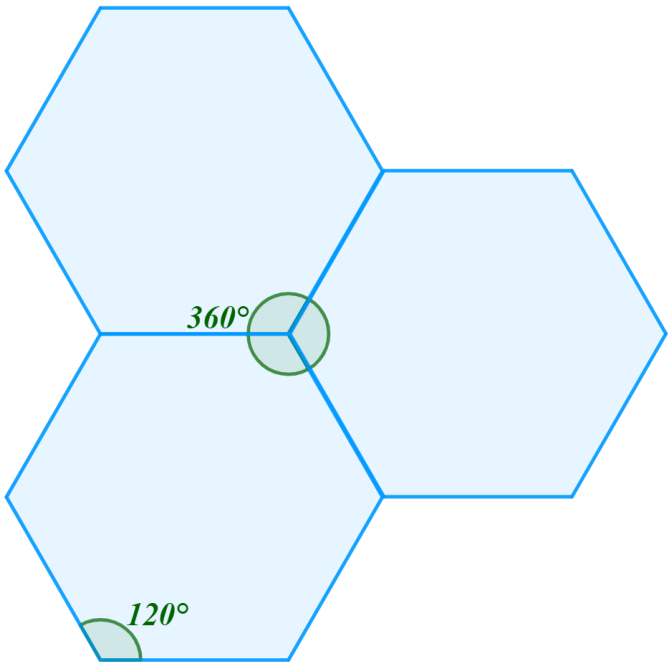
  Velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je 108°. Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat pouze tři stěny (dvanáctistěn), kde součet velikostí úhlů u vrcholu bude $3 \cdot 108° = 324°$, viz obr. 2.18. V případě počtu stěn vyššího než tři bychom již přesáhli omezující podmínku ($4 \cdot 108° = 432°$).



Obrázek 2.18: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu dvanáctistěnu

- **Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné šestiúhelníky**

  Velikost vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníku je 120°. Pokud se budou stýkat tři stěny v jednom vrcholu, tak součet velikostí úhlů u vrcholu bude $3 \cdot 120° = 360°$. Tím jsme přesáhli omezující podmínku a stěny incidující s daným vrcholem leží ve jedné rovině, proto neexistuje pravidelný konvexní mnohostěn, který by měl za stěny šestiúhelníky, viz obr. 2.19.



Obrázek 2.19: Šestiúhelníky incidující s daným vrcholem ležící ve jedné rovině

Obdobně toto tvrzení platí pro pravidelné n-úhelníky s vyšším počtem vrcholů než šest. Tímto jsme ukázali, že pravidelných konvexních mnohostěnů je právě pět. □

Obdobně jako pravidelným mnohoúhelníkům vepisujeme a opisujeme kružnici, tak každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu (platónskému tělesu) je možné sestrojit vepsanou a opsanou kulovou plochu.

- **Vepsaná kulová plocha** se dotýká všech stěn platónského tělesa v jejich středech.
- **Opsaná kulová plocha** obsahuje všechny vrcholy platónského tělesa. Středy těchto dvou kulových ploch splývají v jednom bodě.

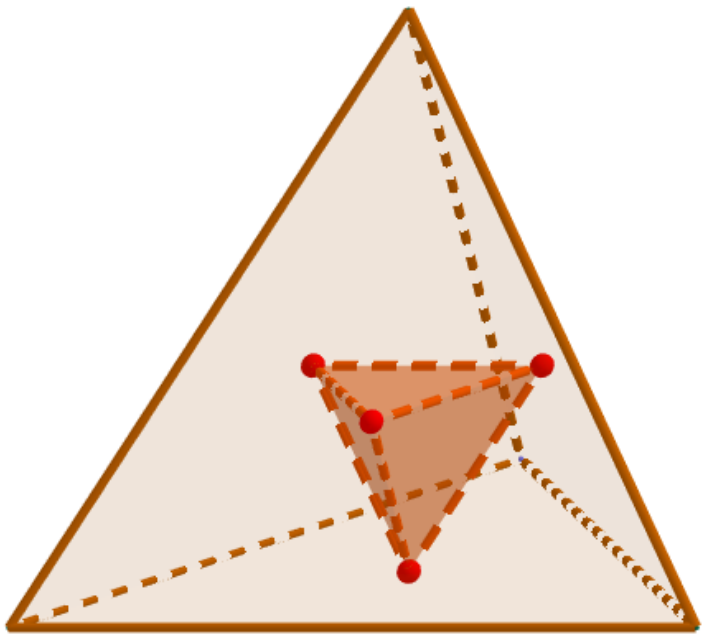
2.3.1 Dualita platónských těles

Následující definice je převzata z [Dohnalová (2016) str. 41].

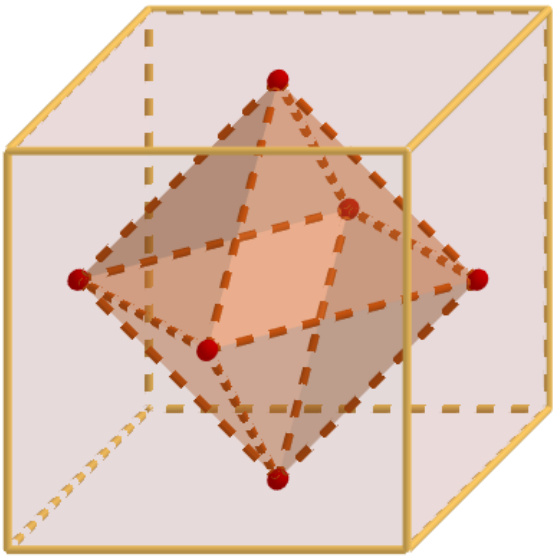
Definice

Ke každému pravidelnému mnohostěnu existuje mnohostěn jemu duální, jehož vrcholy leží ve středech stěn mnohostěnu původního.

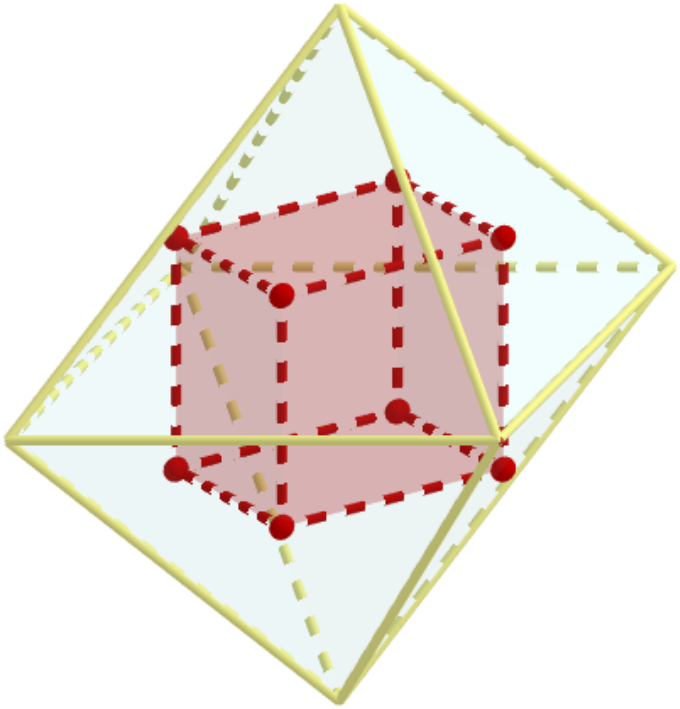
Tedy středy jednotlivých stěn platónského tělesa tvoří vrcholy dalšího platónského tělesa. Hrany nového mnohostěnu tvoří úsečky spojující vrcholy v sousedních stěnách. Takto získaný mnohostěn se nazývá duální mnohostěn k mnohostěnu výchozímu. Tuto vlastnost pojmenováváme jako dualita platónských těles. Pravidelný čtyřstěn je duální sám se sebou (obr. 2.20). Pravidelný šestistěn je duální s pravidelným osmistěnem a naopak (obr. 2.21–2.22). Pravidelný dvanáctistěn je duální s pravidelným dvacetistěnem a naopak (obr. 2.23–2.24).



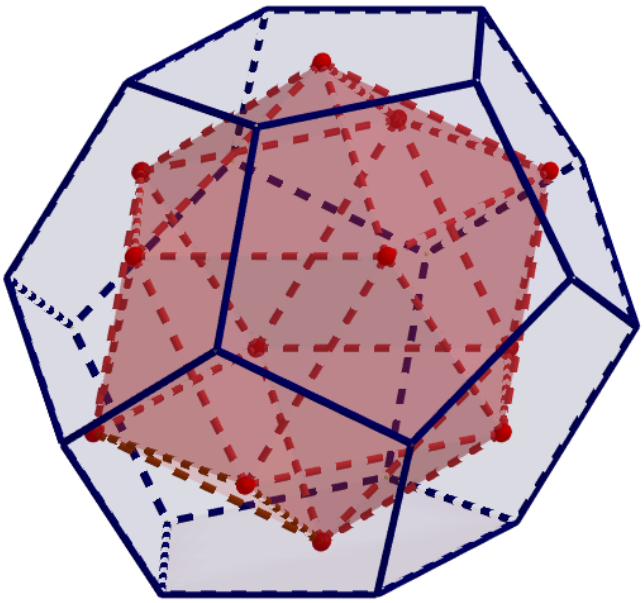
Obrázek 2.20: Dualní mnohostěn k čtyřstěnu – čtyřstěn



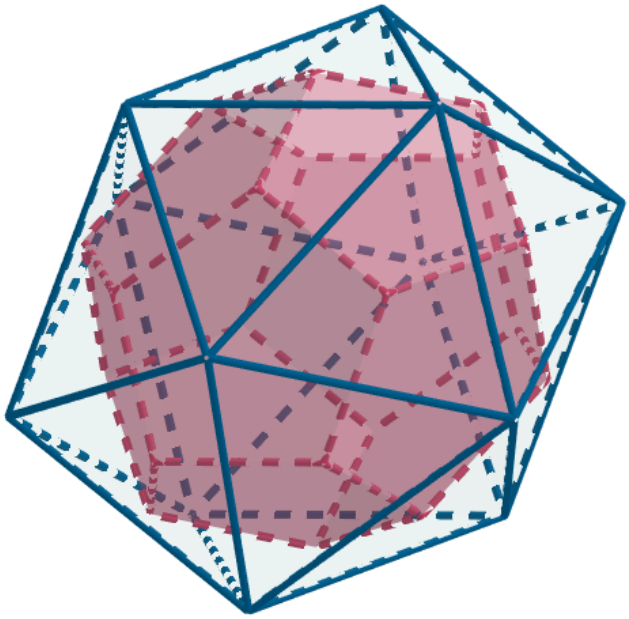
Obrázek 2.21: Dualní mnohostěn ke krychli – osmistěn



Obrázek 2.22: Dualní mnohostěn k osmistěnu – krychle



Obrázek 2.23: Dualní mnohostěn k dvanáctistěnu – dvacetistěn



Obrázek 2.24: Dualní mnohostěn k dvacetistěnu – dvanáctistěn

Platónská tělesa nacházejí uplatnění v různých oblastech lidské činnnosti, například z herního světa jsou známé hrací kostky vyobrazené na obr. 2.25. Na jejich stěnách se postupně nacházejí čísla od 1 do 6. V některých stolních hrách (Dungeons & Dragons) se hraje i s jinými tvary kostek (obr. 2.26), ale vždy kostky budou mít tvar pravidelného mnohostěnu, protože pravděpodobnost dopadu na jednotlivé stěny by měla být stejná.



Obrázek 2.25: Hrací kostka ve tvaru krychle [9]



Obrázek 2.26: Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pravidelných mnohostěnů [10]

2.4 Objem a povrch

Nejprve si položme několik otázek z různých oblastí lidské činnosti.

- Kolik čtyřicetikilových kbelíků bílé malířské barvy bude zapotřebí na jeden nátěr kancelářského komplexu, jestliže celková plocha nátěru je 1 850 m^2? Vydatnost/kryvost jedné vrstvy je 8 m^2/kg (obr. 2.27).



Obrázek 2.27: Čtyřicetikilová malířská barva

- V bazénu pro slony v zoologické zahradě se musí čtyřikrát měsíčně vyměnit polovina vody. Kolik korun činí měsíční náklady na vodu, jestliže cena vodného a stočného (dohromady) je 94 Kč/m^3 a bazén má tvar kvádru o rozměrech 4 m, 5 m a 6 m?

K vyřešení těchto úloh potřebujeme umět určit objem a povrch těles. Tyto pojmy si nyní vysvětlíme.

2.4.1 Objem

Výpočet objemu tělesa lze pokládat za jedno z nejstarších využití geometrie v praktickém životě. Objem tělesa se ve školské matematice zavádí obvykle takto [Pomykalová (2009) s. 149], [Polák (2014) s. 328], [Kadleček (1996) s. 212]:

Definice

Objem V tělesa T je kladné číslo, přiřazené tělesu tak, že platí:
1. Shodná tělesa mají sobě rovné objemy.
2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů dílčích těles (aditivita objemu).
3. Objem krychle, jejíž hrana má délku 1 (mm, cm, m ...), je roven 1 (mm^3, cm^3, m^3 ...).

Objem se značí písmenem V (počáteční písmeno latinského slova volumen znamenající právě objem).

Tedy objem V tělesa udává, jakou „část prostoru toto těleso zabírá“ ve srovnání s jednotkovou krychlí (krychle s hranou jednotkové délky). Zároveň objem V je fyzikální veličina, ke které je přiřazena číselná hodnota a jednotka. Číselná hodnota je závislá na volbě jednotky. Měřící jednotkou objemu je metr krychlový (značka m^3). Z m^3 jsou odvozeny jeho násobky nebo díly pomocí dekadických předpon (mm^3, cm^3, dm^3, km^3). Pro specializované oblasti se používají vedlejší jednotky – objem je možné také udávat v litrech (l) nebo hektolitrech (hl).

Následuje obr. 2.28 s tabulkou převodních vztahů pro milimetr krychlový (mm^3), centimetr krychlový (cm^3), decimetr krychlový (dm^3), metr krychlový (m^3) a kilometr krychlový (km^3).

1 mm³	**=**	**0,00 1 cm³**	**=**	**0,000 001 dm³**	**=**	**0,000 000 001 m³**
1 000 mm³	=	1 cm³	=	0,001 dm³	=	0,000 001 m³
1 000 000 mm³	=	1 000 cm³	=	1 dm³	=	0,001 m³
1 000 000 000 mm³	=	1 000 000 cm³	=	1 000 dm³	=	1 m³
		1 m³	=	0,000 000 001 km³		
		1 000 000 000 m³	=	1 km³		

Obrázek 2.28: Tabulka převodních vztahů jednotek objemu

Objem se často vyjadřuje v jednotkách odvozených od litru (vedlejší jednotka).

Definice

$$1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{dm}^3$$

Následuje obr. 2.29 s tabulkou převodních vztahů pro mililitr (ml), centilitr (cl), decilitr (dl), litr (l) a hektolitr (hl).

1 ml	=	0,1 cl	=	0,01 dl	=	0,001 l
10 ml	=	1 cl	=	0,1 dl	=	0,01 l
100 ml	=	10 cl	=	1 dl	=	0,1 l
1 000 ml	=	100 cl	=	10 dl	=	1 l
		1 l	=	0,01 hl		
		100 l	=	1 hl		

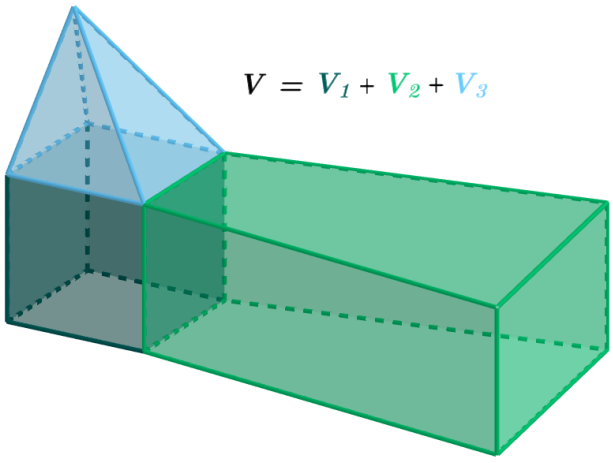
Obrázek 2.29: Tabulka převodních vztahů vedlejších jednotek objemu

Poznámka

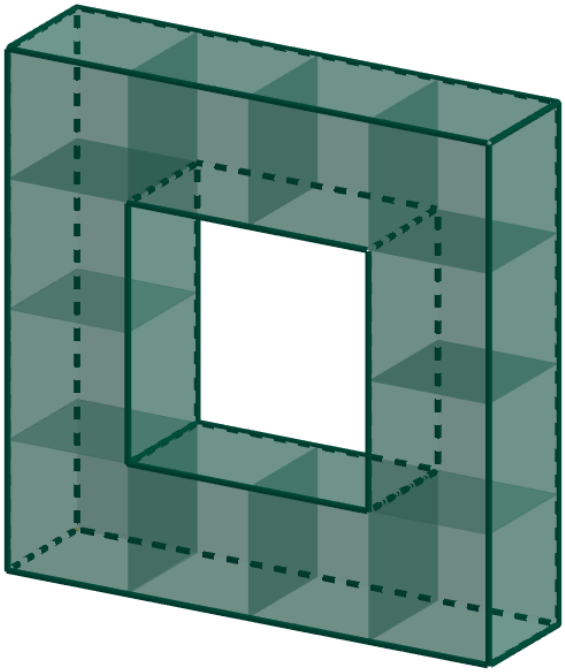
Jedna ze základních vlastností objemu tělesa (**aditivní vlastnost** – **aditivita objemu**) se využívá při určování objemů těles, která se dají rozložit na konečný počet nepronikajících se těles s objemy $V_1, V_2, \ldots, V_n$ a platí:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

Ilustrace této vlastnosti objemu jsou na obr. 2.30–2.31.

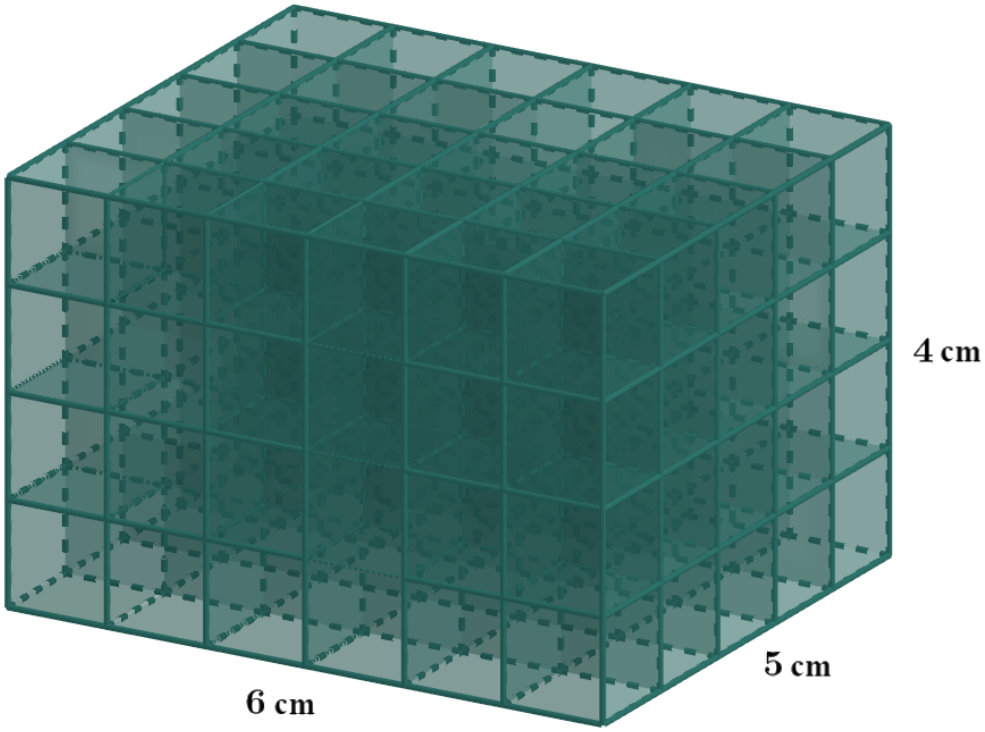


Obrázek 2.30: Těleso složené ze tří různých těles



Obrázek 2.31: Těleso složené z dvanácti krychlí

Názorně lze určovat objem některých těles tak, že je rozložíme na konečný počet nepronikajících se jednotkových krychlí a objem tělesa je číselně roven počtu těchto krychlí. Na obr. 2.32 máme znázorněný kvádr s rozměry 6 cm, 5 cm a 4 cm, jehož objem je 120 cm^3, neboť se dá rozložit na 120 krychliček o hraně 1 cm. Objem tohoto kvádru je dán součinem jeho tří rozměrů.



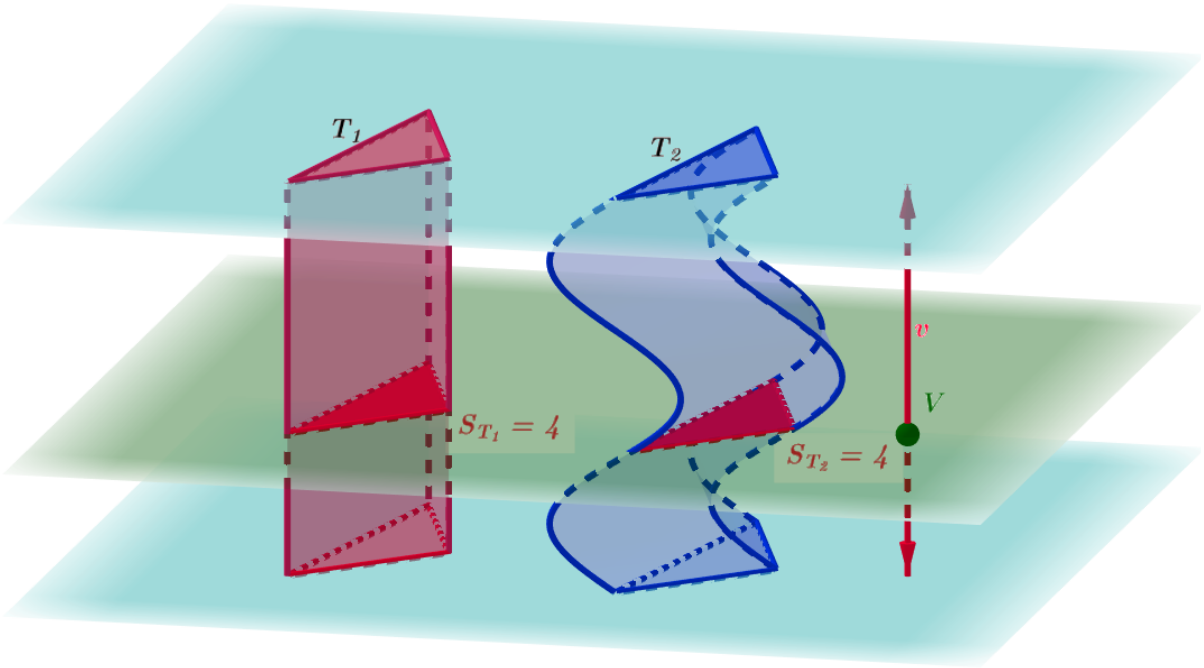
Obrázek 2.32: Kvádr rozložený na 120 jednotkových krychlí

Další z nástrojů pro určení objemu těles je tzv. **Cavalieriho princip** [Calda (1998) s. 263], [Bečvář (1993) s. 119].

Věta

Pokud pro dvě tělesa T_1, T_2 se stejnou výškou existují takové řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s rovinou, na které jsou tělesa umístěna, a mají od této roviny stejnou vzdálenost, že obsah řezu T_1 je roven obsahu řezu T_2, mají obě tělesa stejný objem.

V následujícím obr. 2.33 jsou zobrazena dvě tělesa T_1, T_2. Obsah řezů S_{T_1} a S_{T_2} rovinami rovnoběžnými s rovinou, na které jsou tělesa umístěna, je stále stejný.



Obrázek 2.33: Ilustrace Cavalieriho principu

Poznámka

Tento způsob určení objemu je pojmenován po italském matematikovi jménem Bonaventura Cavalieri (1598-1647), který byl žákem Galilea Galileiho.

Cavalieriho princip lze názorně vymodelovat pomocí sloupečku mincí, karet nebo ruletních žetonů. Sloupec žetonů má týž objem při zachování výšky sloupečku, ať žetony tvoří svislý či šikmý sloupec. Na obr. 2.34 se nacházejí dva svislé sloupce žetonů, které představují model válce a kvádru. Na obr. 2.35 se nacházejí dva šikmé sloupce žetonů.



Obrázek 2.34: Svislý sloupec žetonů



Obrázek 2.35: Šikmý sloupec žetonů

Poznámka

Ve středoškolské matematice Cavalieriho princip nedokazujeme, neboť důkaz vychází ze znalostí integrálního počtu.

2.4.2 Povrch

Obsah rovinného obrazce se ve školské matematice zavádí obvykle takto [Pomykalová (2000) s. 65–66]:

Definice

Obsah *S* obrazce je kladné číslo, přiřazené obrazci tak, že platí:
1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
2. Jestliže je obrazec složen z několika nepronikajících se obrazců, je jeho obsah roven součtu obsahů dílčích obrazců (aditivita obsahu).
3. Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, m ...), je roven 1 (mm^2, cm^2, m^2 ...).

Povrch tělesa je zaveden v následující definici, která vychází z [Kadleček (1996) s. 227] a z [Pomykalová (2009) s. 150]:

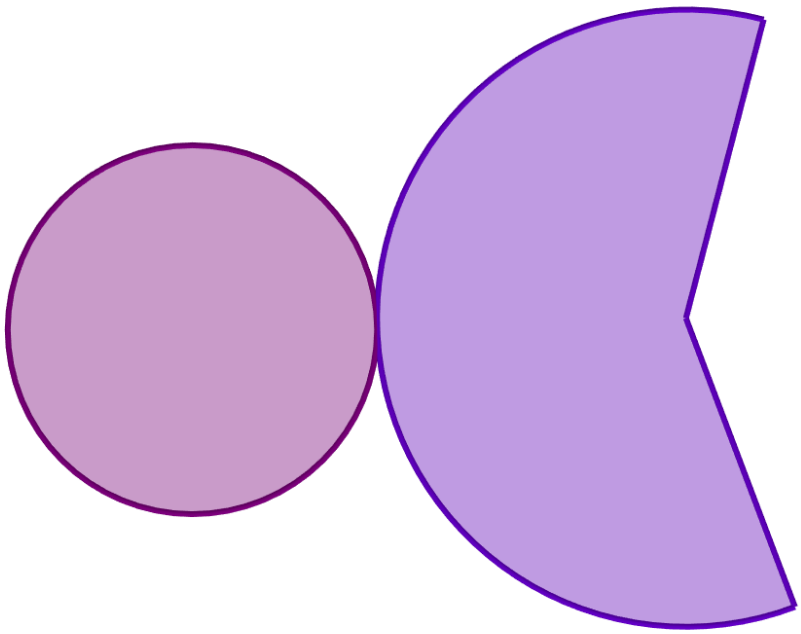
Definice

Povrchem *S* tělesa T se rozumí obsah plochy, která je hranicí tělesa T.

Povrch se značí písmenem S (počáteční písmeno latinského slova superficie znamenající právě povrch/obsah).

Poznámka

Je-li hranice tělesa složena z jednoduchých rovinných obrazců (např. mnohoúhelníků u mnohostěnů) nebo je-li „rozvinutelná“ do rovinné sítě (např. u rotačního válce či kužele viz obr. 2.36), pak povrch tělesa je roven součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se hranice (resp. síť hranice) skládá.



Obrázek 2.36: Síť kužele

Položme si otázku, v jakých případech nelze hranici tělesa rozvinout do rovinné sítě. Vzpomeňme si na část kůry z oloupaného pomeranče nebo na odtržený kus míče, u kterých se nám nepodaří jejich fragmenty „rozvinout“ čili „narovnat“ do roviny (obr. 2.37). Síť koule tedy neexistuje.



Obrázek 2.37: Pomerančová kůra nerozložitelná do rovinné sítě

V případě, že bychom chtěli určit povrch tělesa, jehož hranici neumíme rozvinout do rovinné sítě, lze povrch tělesa pokrýt tenkou vrstvou materiálu (například alobalu) a na základě jeho hustoty a hmotnosti určit objem tělesa. Zvážíme materiál, kterým jsme pokryli těleso. Hmotnost m použitého materiálu je

$$m = \rho \cdot V,$$

kde ρ je hustota materiálu a V je objem materiálu. Vyjádříme objem materiálu, který je

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Pak můžeme přibližně určit povrch tělesa

$$S \doteq \frac{V}{d},$$

kde d označuje tloušťku materiálu. Čím bude vrstva použitého materiálu tenčí, tím bude povrch určen přesněji. Pro přesnou geometrickou úvahu, pomocí níž lze definovat povrch i takovýchto těles, jejíchž hranice se neskládá jen z rovinných obrazců, je třeba znát limitní počet.

Povrch S je také fyzikální veličina, ke které je přiřazena číselná hodnota a jednotka. Číselná hodnota je závislá na volbě jednotky. Měřící jednotkou povrchu je metr čtvereční (značka m^2). Z m^2 jsou vyjádřeny násobky nebo díly pomocí dekadických předpon (mm^2, cm^2, dm^2, km^2). Pro specializované oblasti se používají vedlejší jednotky. Výměra pozemků se udává v arech (ar) nebo hektarech (ha). Za nestandardní jednotku povrchu se považuje například akr (anglo-americká měrná jednotka, 1 akr = 0,404 685 hektaru).

Následuje obr. 2.38 s tabulkou převodních vztahů pro milimetr krychlový (mm^2), centimetr krychlový (cm^2), decimetr krychlový (dm^2), metr krychlový (m^2), kilometr krychlový (km^2), ar (ar) a hektar (ha).

1 mm^2	=	0,01 cm^2	=	0,000 1 dm^2	=	0,000 001 m^2						
100 mm^2	=	1 cm^2	=	0,01 dm^2	=	0,000 1 m^2						
10 000 mm^2	=	100 cm^2	=	1 dm^2	=	0,01 m^2						
1 000 000 mm^2	=	10 000 cm^2	=	100 dm^2	=	1 m^2	=	0,01 ar	=	0,000 1 ha	=	0,000 001 km^2
						100 m^2	=	1 ar	=	0,01 ha	=	0,000 1 km^2
						10 000 m^2	=	100 ar	=	1 ha	=	0,01 km^2
						1 000 000 m^2	=	10 000 ar	=	100 ha	=	1 km^2

Obrázek 2.38: Tabulka převodních vztahů jednotek obsahu

3. Hranoly

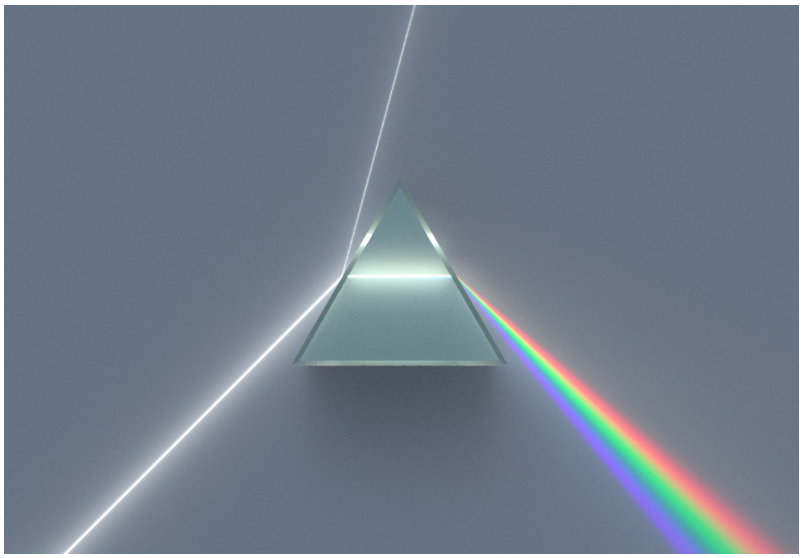
3.1 Hranoly

V této kapitole se budeme zabývat typem tělesa využívaném také v praktickém životě. Zamysleme se, co by si takový truhlář nebo tesař počal bez opracovaných dubových trámů, smrkových prken a fošen? Na obr. 3.1 se nacházejí dubové trámy; tak jako většina řeziva se vyrábějí na pilách se stavebním řezivem a my si je můžeme koupit jako hranol o požadované délce.



Obrázek 3.1: Dubové trámy ve tvaru hranolů

Hranoly rovněž nacházíme v podobě součástek různých přístrojů. Takový periskop je optický přístroj, který umožňuje posádce ponořené ponorky sledovat objekty na hladině. Moderní periskopy jsou namísto zrcadel vybaveny optickými hranoly. Přes řadu čoček a teleskopů se obraz díky těmto hranolům odráží do okuláru. Na obr. 3.2 vidíme optický hranol rozkládající bílé světlo na duhové spektrum.



Obrázek 3.2: Optický trojboký hranol – rozklad světla pomocí hranolu [9]

Navíc i ve světě umění, respektive hudby nacházíme trojboký optický hranol, přesněji jeho motiv. Tento motiv použila kapela Pink Floyd na obal svého studiového alba The Dark Side of the Moon (obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Motiv optického hranolu – obal vinylové desky The Dark side of the moon

Motiv hranolu se objevuje i v architektuře. Výšková budova Flatiron Building byla postavena na začátku 20. století ve tvaru trojbokého hranolu.



Obrázek 3.4: Flatiron Building ve tvaru trojbokého hranolu (USA, New York City) [10]

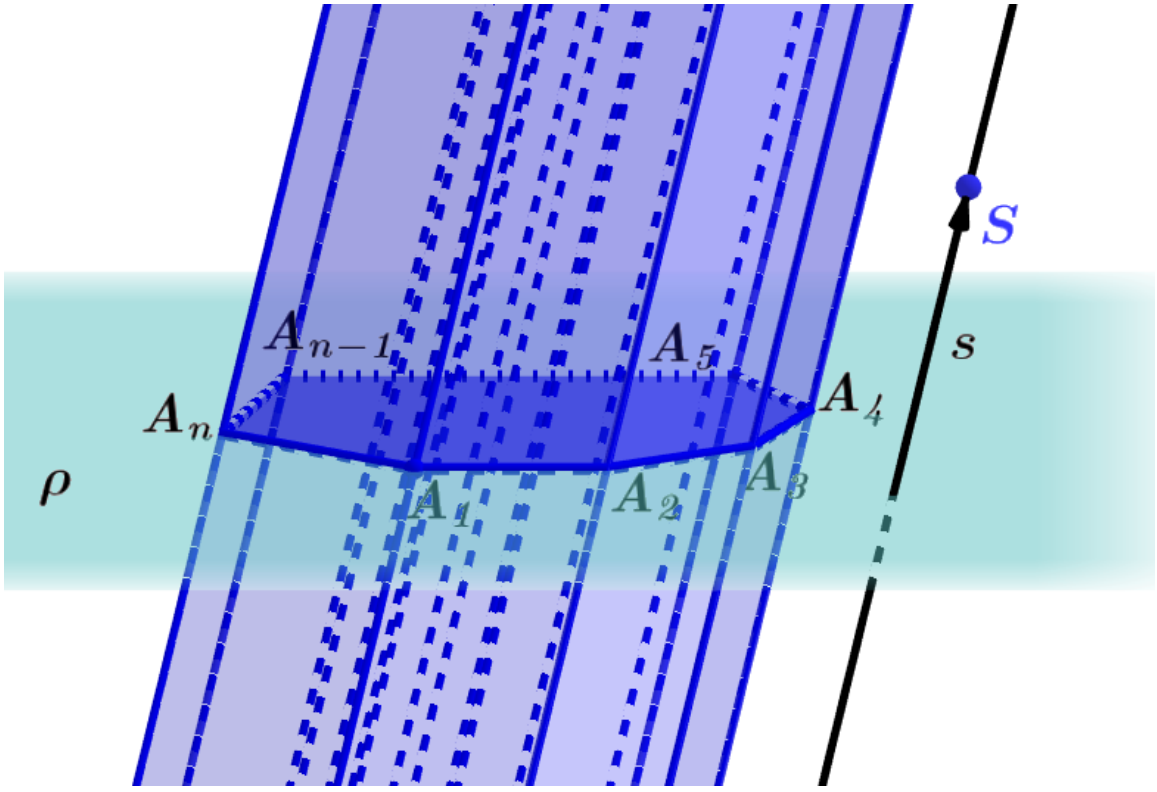
Poznámka

Z gastronomie známe hranolky. Slovo hranolky je skutečně odvozeno od slova hranol. Jedná se o zdrobnělinu množného čísla slova hranolek. Tudíž při objednávání smaženého sýra říkáme jedině s hranolky, nikoli nesprávně s hranolkami.

3.2 Zavedení těles hranolového typu

Mějme dán n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ v rovině ρ a přímku s, která je s rovinou ρ různoběžná. Tento mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ nazveme **řídicí mnohoúhelník**. Jako ***n*-boký hranolový prostor** označíme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a které protínají řídicí mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$. Každou přímku rovnoběžnou s přímkou s pokládáme za **směrovou přímku** hranolového prostoru.

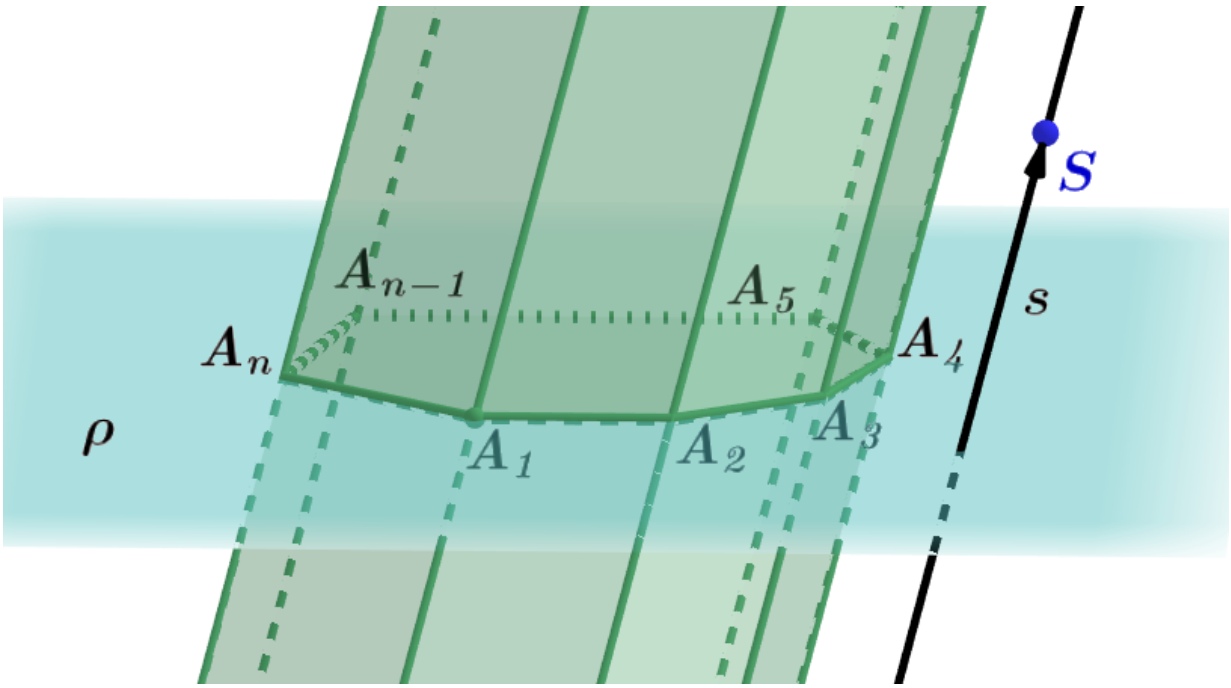
Na následujícím obr. 3.5 se nachází řídicí n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ v rovině ρ a směrová přímka s, které určují n-boký hranolový prostor.



Obrázek 3.5: Hranolový prostor n-boký

Jako ***n*-bokou hranolovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a které protínají obvod řídicího mnohoúhelníku. Hranolovou plochu pokládáme za hranici hranolového prostoru.

Na následujícím obr. 3.6 je zobrazen obvod řídicího n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ v rovině ρ a směrová přímka s, které dohromady určují n-bokou hranolovou plochu.

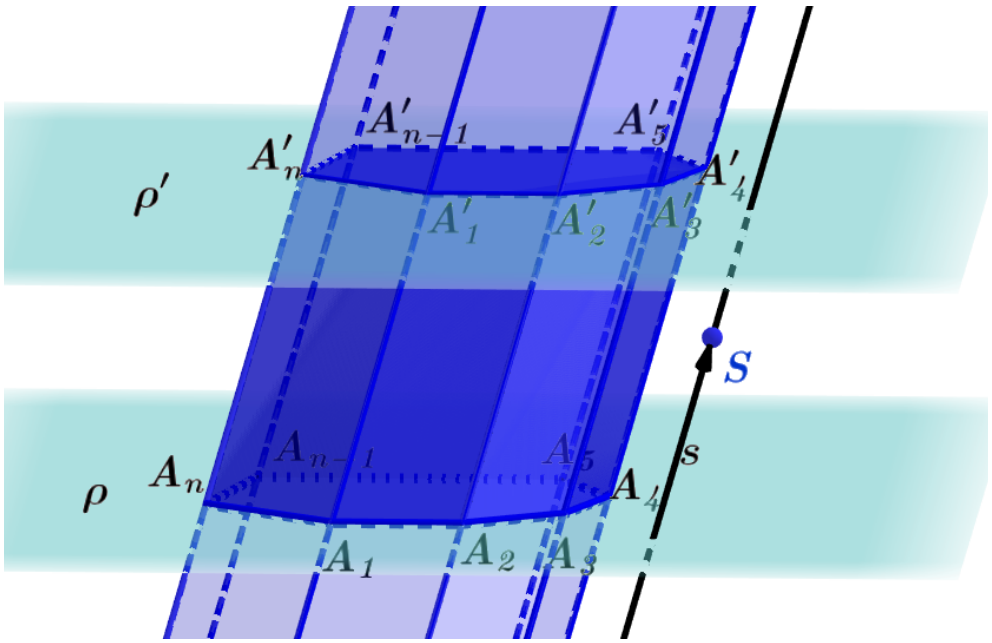


Obrázek 3.6: Hranolová plocha n-boká

Definice

Průnikem n-bokého hranolového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou rovnoběžné s přímkou s, získáme těleso, které nazýváme ***n*-boký hranol**.

Na následujícím obr. 3.7 je zobrazen průnik n-bokého hranolového prostoru a prostorové vrstvy, která je ohraničená dvěma různými rovnoběžnými rovinami. Vznikne tak n-boký hranol.



Obrázek 3.7: Hranol n-boký

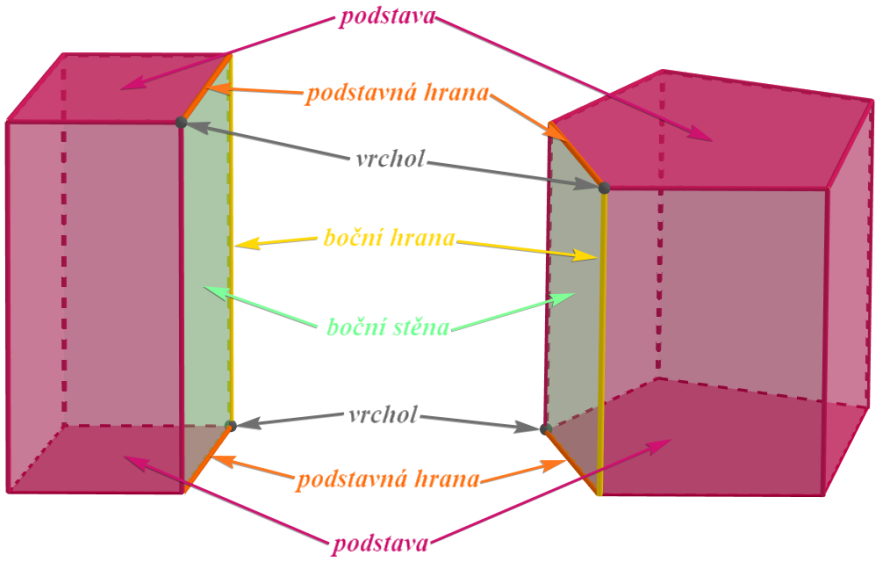
Poznámka

Pojmenovávání hranolů je odvozeno od typu řídicího mnohoúhelníku. Například hranol, jehož podstavou je šestiúhelník, je označován jako **šestiboký hranol**.

Definice

Za **podstavy** hranolu jsou označovány mnohoúhelníky, které tvoří řezy hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem. Rovnoběžníky, jež nejsou podstavami hranolu, označujeme jako **boční stěny** hranolu a dohromady tvoří **plášť hranolu**. Za **vrcholy** hranolu považujeme vrcholy stěn. Strany podstav hranolu označujeme jako **podstavné hrany**, ostatní hrany označujeme jako **boční hrany** hranolu.

Na následujícím obr. 3.8 jsou tyto pojmy ilustrované.

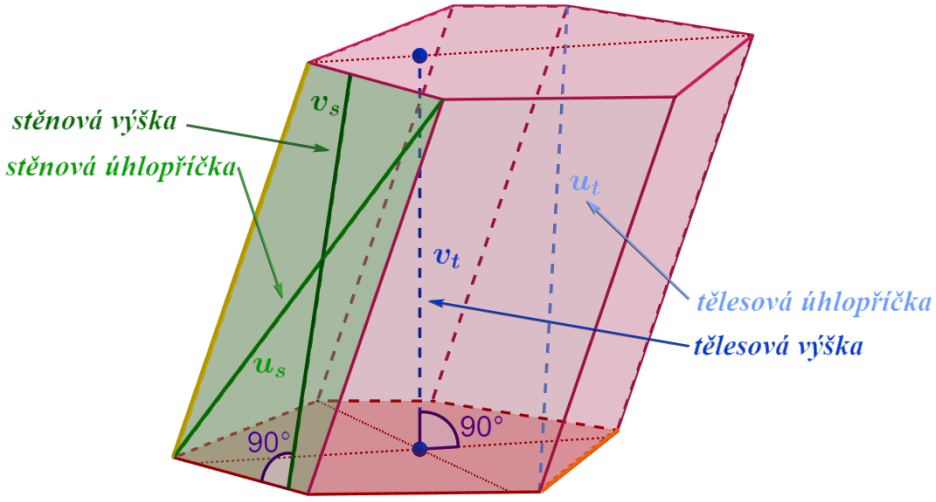


Obrázek 3.8: Vrcholy, hrany a stěny hranolů

Definice

Vzdálenost podstav hranolu se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška hranolu**. Vzdálenost podstavných hran ve stejné boční stěně se nazývá **stěnová výška**. Boční stěny hranolu tvoří rovnoběžníky, jejich úhlopříčky se nazývají **stěnové úhlopříčky** hranolu. Úsečka, která spojuje dva vrcholy hranolu neležící ve stejné stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka**.

Tyto pojmy jsou ilustrované na následujícím obr. 3.9.



Obrázek 3.9: Výšky a úhlopříčky hranolu

V České republice můžeme pozorovat zajímavé přírodní úkazy ve tvaru hranolu. Čedičové kamenné varhany nazývané Panská skála jsou tvořeny šestibokými hranoly a jsou chráněnou geologickou památkou (obr. 3.10). Ze světových podobných přírodních úkazů stojí za to zmínit Obrův chodník v Severním Irsku tvořený hranoly s podstavami ve tvaru pětiúhelníku (obr. 3.11) nebo skalní útvary v okolí vodopádů Svartifoss na Islandu připomínající hranoly (obr. 3.12).



Obrázek 3.10: Čedičové varhany Panská skála tvořeny šestibokými hranoly (Českolipsko) [11]



Obrázek 3.11: Obrův chodník tvořeny pětibokými hranoly (Severní Irsko) [12]



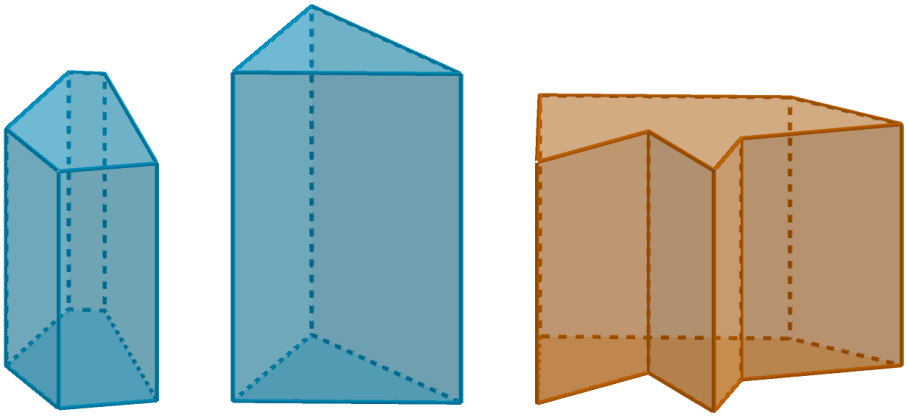
Obrázek 3.12: Vodopády Svartifoss (Island) [13]

3.3 Klasifikace hranolů

Hranoly můžeme klasifikovat podle různých kritérií.

3.3.1 Konvexní a nekonvexní hranoly

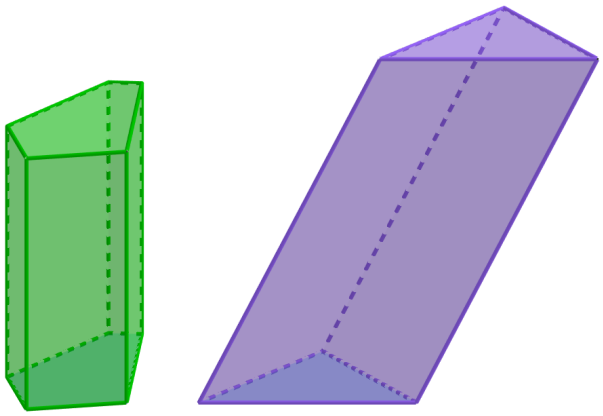
Hranoly, obdobně jako jiné typy těles, lze dělit na **konvexní** a **nekonvexní**. Tyto pojmy jsme si již zavedli v předcházející kapitole. Zda je hranol konvexní, resp. nekonvexní, souvisí s tím, zda jsou konvexní, resp. nekonvexní jeho podstavy. Na obr. 3.13 jsou zobrazeny dva konvexní a jeden nekonvexní hranol.



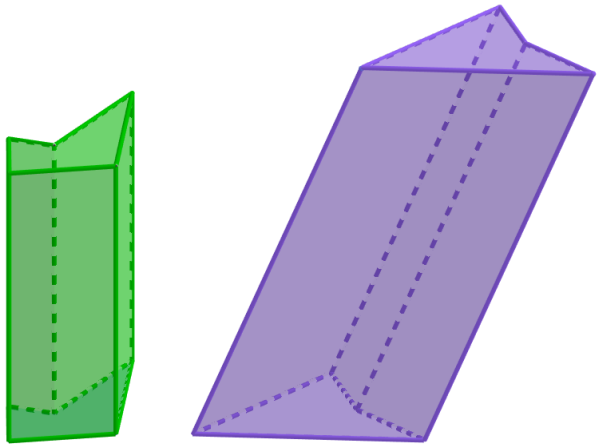
Obrázek 3.13: Konvexní pětiboký hranol a trojboký hranol, nekonvexní sedmiboký hranol

3.3.2 Kolmé a kosé hranoly

Dalším kritériem, podle kterého lze klasifikovat hranoly, je odchylka směrové přímky hranolového prostoru a roviny podstavy. Hranol, jehož boční stěny jsou kolmé k podstavě (čili směrová přímka je kolmá k rovině podstavy), se nazývá **kolmý n-boký hranol**, v opačném případě jde o **kosý n-boký hranol** (ilustrace těchto pojmů viz obr. 3.14–3.15).



Obrázek 3.14: Konvexní kolmý pětiboký hranol a konvexní kosý trojboký hranol



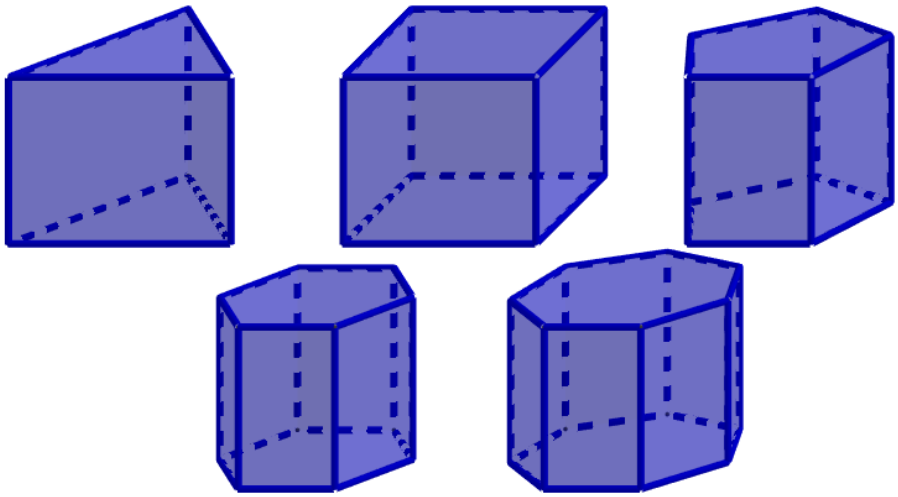
Obrázek 3.15: Nekonvexní kolmý pětiboký hranol a nekonvexní kosý čtyřboký hranol

3.3.3 Pravidelné a nepravidelné hranoly

Kolmý hranol, jehož podstavami jsou shodné pravidelné n-úhelníky, se nazývá **pravidelný n-boký hranol**, v opačném případě jde o **nepravidelný n-boký hranol**. Na následujícím obr. 3.16 se nachází skupina pěti pravidelných kolmých hranolů.

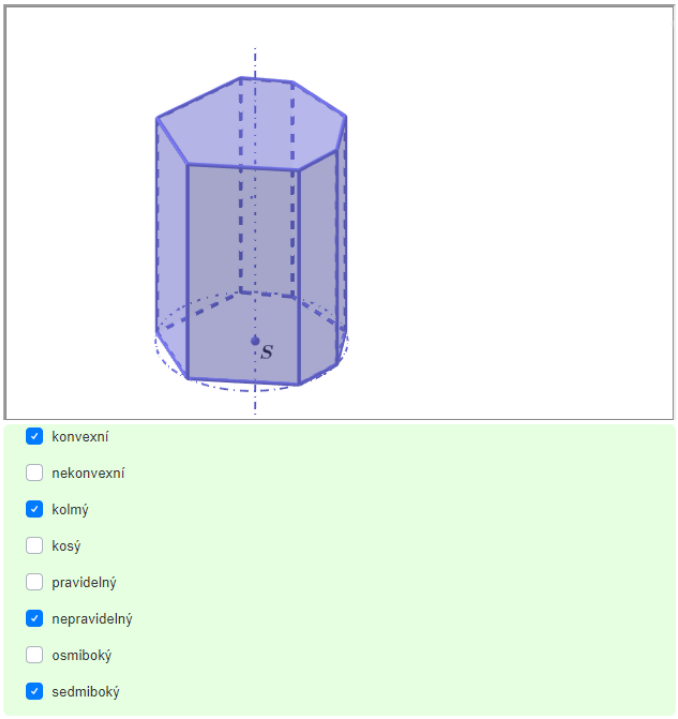
Poznámka

Pravidelné tedy mohou být pouze konvexní kolmé hranoly. Potom je možné v názvu hranolu vynechat slovo kolmý a slovo konvexní.

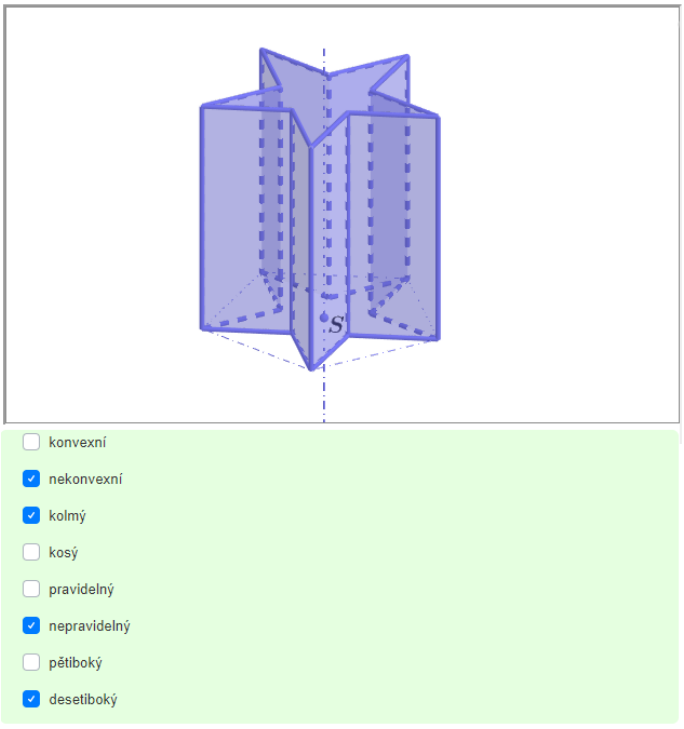


Obrázek 3.16: Zleva (horní řada): pravidelný trojboký hranol, pravidelný čtyřboký hranol, pravidelný pětiboký hranol; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký hranol a pravidelný sedmiboký hranol

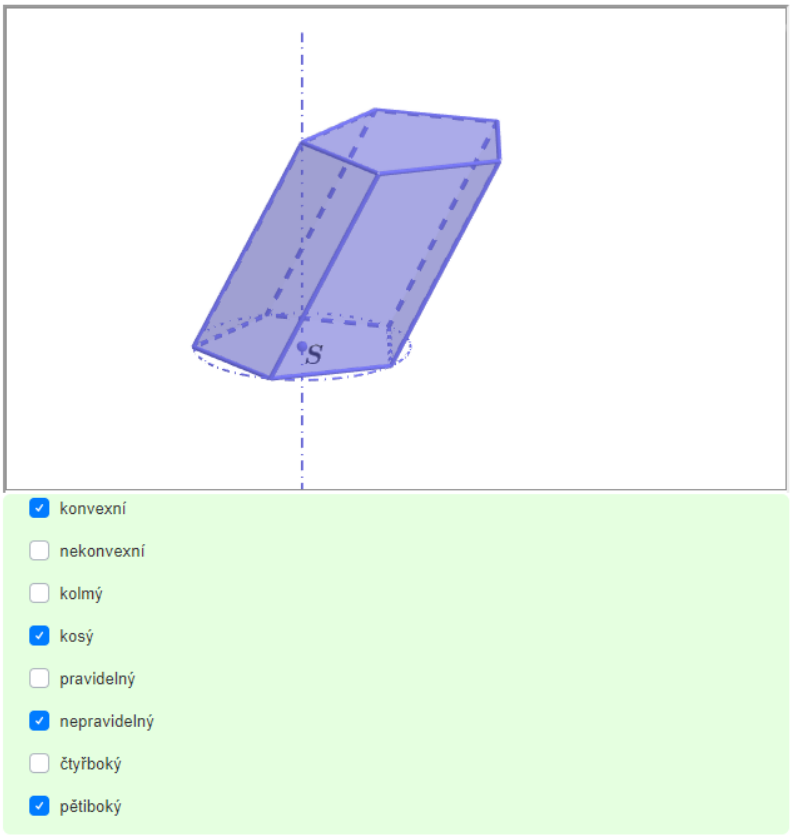
Úloha 3.3.1 Následující obr. 3.17–3.20 obsahují úlohy na ověření znalostí z klasifikace hranolů. V každé úloze je jedna a více možných správných tvrzení o příslušných hranolech. Bod S je těžištěm podstavy. Jakmile vyplníte ve webové verzi všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



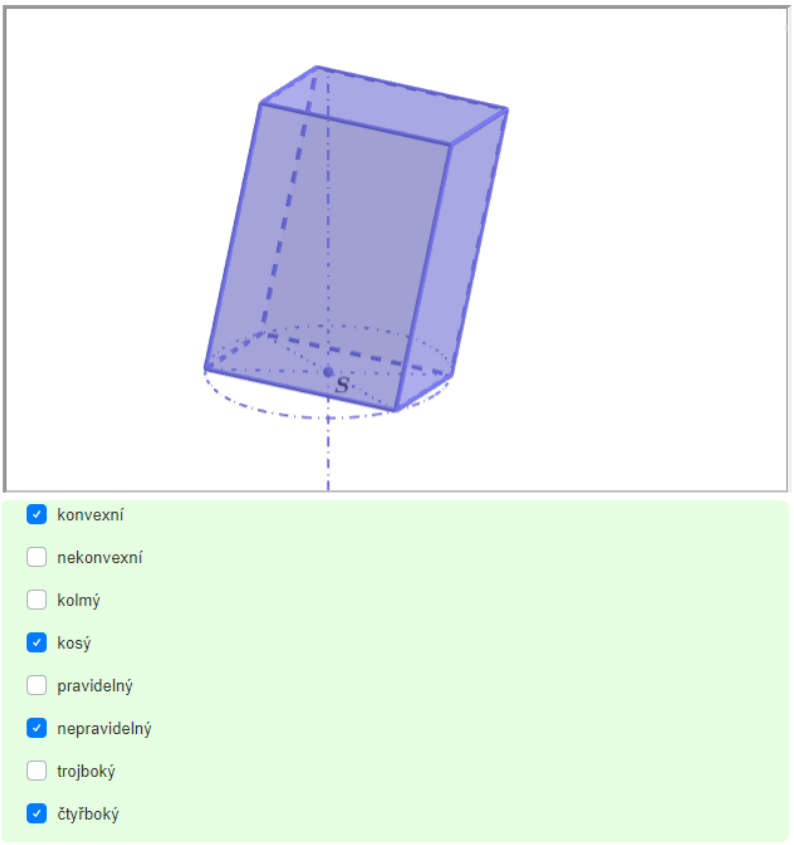
Obrázek 3.17: O jaký hranol se jedná?



Obrázek 3.18: O jaký hranol se jedná?



Obrázek 3.19: O jaký hranol se jedná?



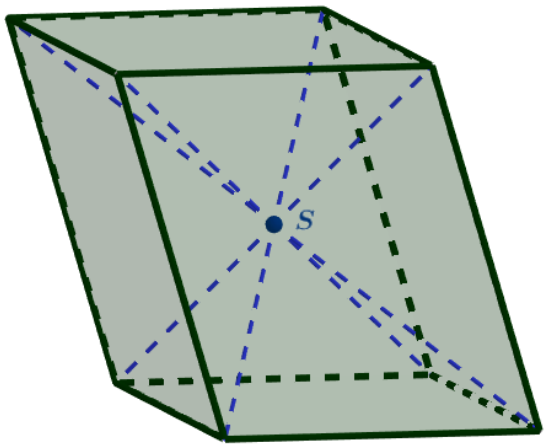
Obrázek 3.20: O jaký hranol se jedná?

3.4 Další typy hranolů

Ve školské matematice často pracujeme s následujícím typem hranolů, a to rovnoběžnostěnů, které si postupně představíme.

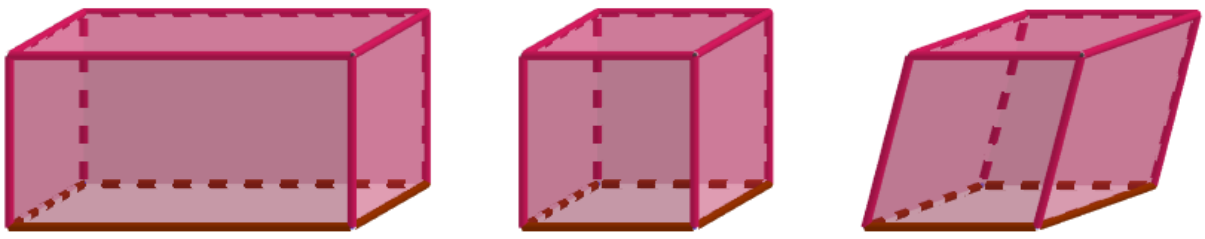
3.4.1 Rovnoběžnostěny

Čtyřboký hranol, jehož podstavami jsou shodné rovnoběžníky, se nazývá **rovnoběžnostěn** (obr. 3.21). Stěny rovnoběžnostěnu tvoří tři dvojice navzájem rovnoběžných a shodných rovnoběžníků. Za podstavy můžeme považovat jakoukoli dvojici těchto rovnoběžných stěn. Tělesové úhlopříčky rovnoběžnostěnu se protínají v jednom bodě, který je středem těchto úhlopříček.



Obrázek 3.21: Obecný rovnoběžnostěn

Kvádr, krychle nebo útvar zvaný klenec jsou příklady rovnoběžnostěnů (obr. 3.22). Za **kvádr** označujeme kolmý hranol, jehož podstavy jsou obdélníky (případně čtverce). Délky tří hran, které vychází z jednoho vrcholu hranolu, se nazývají **rozměry kvádru** – **délka**, **šířka** a **výška kvádru**. **Krychle** je speciální případ kvádru, jehož délka, šířka a výška jsou stejné. **Klenec** (neboli romboedr) je rovnoběžnostěn, jehož všech šest stěn jsou navzájem shodné kosočtverce.



Obrázek 3.22: Zleva: kvádr, krychle a klenec

Znáte kostkový cukr? Ještě ve 20. letech 19. století se cukr v habsburské monarchii prodával ve tvaru cukrových homolí. Při odsekávání cukru z homole se údajně kolem roku 1843 zranila manželka majitele dačického cukrovaru. A tak poprosila manžela, aby s tím něco udělal. Ten o pár týdnů později přišel s krabicí plnou kostek cukru, viz obr. 3.23.



Obrázek 3.23: Kostky cukru ve tvaru krychle

3.5 Anti-modely hranolů

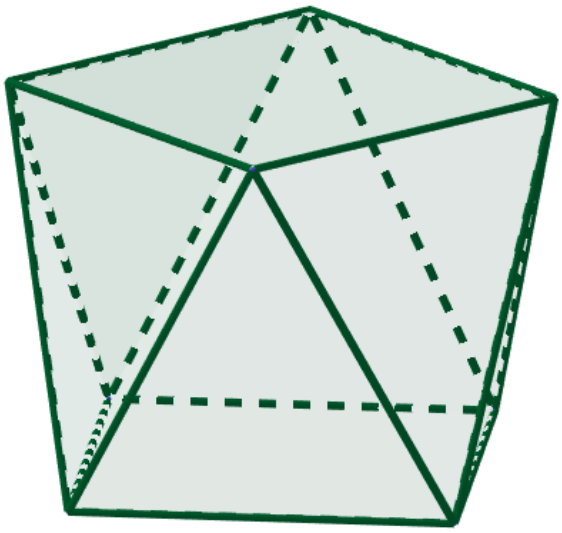
Předtím, než přejdeme k samotnému zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů hranolů, si ověříme pochopení předchozích pojmů z této kapitoly. Uvedeme si tzv. anti-modely hranolů.

Anti-modelem hranolu zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice hranol připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o hranol nejedná. Prvním příkladem je těleso s názvem **prismatoid**. Jeho rovnoběžné podstavy jsou sice mnohoúhelníky (nemusejí být shodné), avšak boční stěny mají tvar lichoběžníků či trojúhelníků. Na obr. 3.24 se nachází mrakodrap One World Trade Center postavený ve městě New York. Podstavec má tvar kolmého čtyřbokého hranolu a horní část budovy zase tvar prismatoidu.



Obrázek 3.24: One World Trade Center (USA, New York City) [14]

Dalším příkladem anti-modelu hranolu je těleso označované názvem **antihranol** vyobrazené na obr. 3.25. Řadí se mezi mnohostěny a je to speciální případ prismatoidu. Tento antihranol má, obdobně jako všechny hranoly, dvě podstavy navzájem rovnoběžné (navíc shodné), avšak jeho boční stěny nejsou rovnoběžníky, nýbrž rovnostranné trojúhelníky.

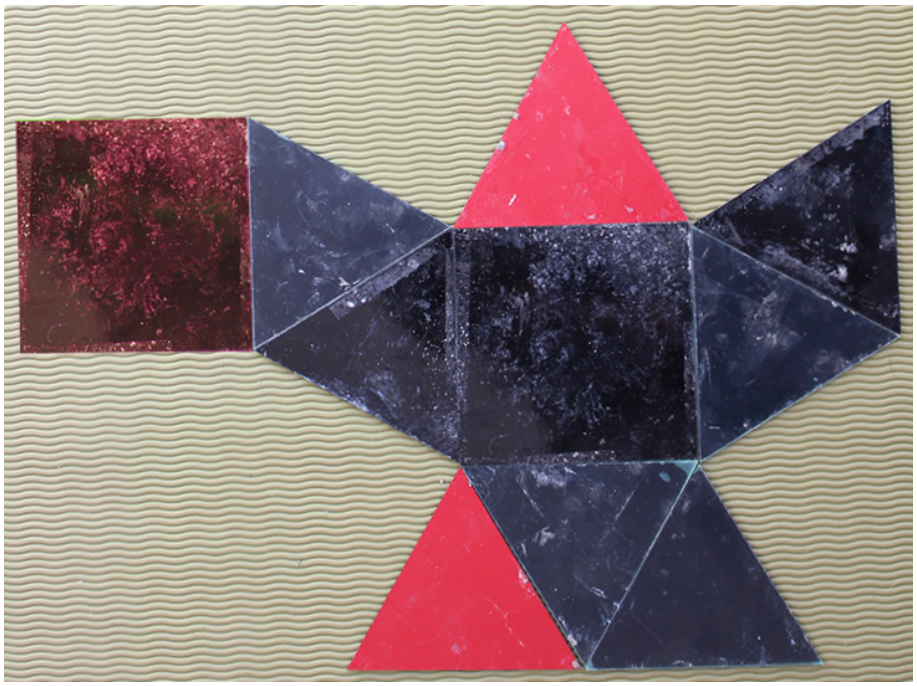


Obrázek 3.25: Čtvercový antihranol

V podobě čtvercového antihranolu je z betonu odlit obal na květináč (obr. 3.26). Forma pro odlitek je vytvořena ze sítě tělesa tak, jak vidíme na obr. 3.27.



Obrázek 3.26: Obal na květináč ve tvaru čtvercového antihranolu



Obrázek 3.27: Forma pro odlitek čtvercového antihranolu rozložená v jeho síť

Třetím příkladem anti-modelu je těleso zvané **klín**, jehož jedna podstava je mnohoúhelník, zatímco „druhá podstava“ klínu přechází v pouhou úsečku zvanou ostří. Klín nacházíme například v podobě valbové střechy tzv. Řeznické věže v německém městě Ulm (obr. 3.28).



Obrázek 3.28: Řeznická věž s valbovou střechou ve tvaru klínu (Ulm, Německo) [15]

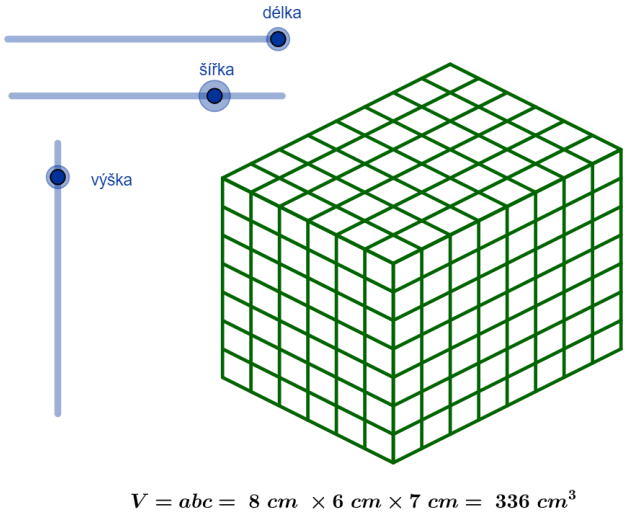
3.6 Objem hranolu

V této kapitole si představíme, jak se počítá objem hranolu. Při odvození vzorce pro objem hranolu vycházíme ze **vzorce pro objem kvádru** o hranách délky a, b, c, který známe ze základní školy. Na základní škole kvádr rozřezáme na krychličky s hranou jednotkové délky. Krychlička s hranou jednotkové délky má jednotkový objem. Potom objem kvádru odpovídá počtu krychliček vynásobenému (jednotkovým) objemem krychličky.

Tedy objem $\boldsymbol{V}$ **kvádru** o rozměrech a, b, c je

$$V = abc.$$

Na následujícím obr. 3.29 se nachází ilustrace vztahu mezi rozměry kvádru a, b, c v centimetrech a jeho objemem. Délka hrany jednotkové krychle v obrázku je 1 cm.

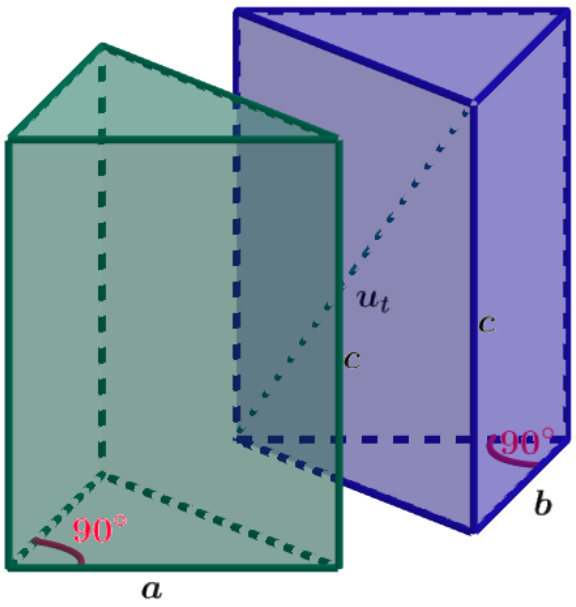


Obrázek 3.29: Objem kvádru je roven celkovému počtu jednotkových krychlí

Odvození vzorce pro objem n-bokého hranolu

Nejdříve odvodíme vzorec pro konvexní kolmé hranoly, potom pro konvexní kosé hranoly a nakonec platnost vztahu pro objem hranolu zobecníme na libovolný nekonvexní hranol.

Kvádr o podstavných hranách délky a, b můžeme rozříznout rovinou kolmou k podstavám a obsahující tělesovou úhlopříčku na dva shodné kolmé trojboké hranoly, které mají za podstavy pravoúhlé trojúhelníky (obr. 3.30). Podle první vlastnosti objemu se jejich objemy rovnají a podle druhé vlastnosti objemu objem kvádru dostaneme součtem objemů obou kolmých trojbokých hranolů. Tedy objem V kolmého trojbokého hranolu, jehož podstavy jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je roven polovině objemu původního kvádru.



Obrázek 3.30: Kvádr rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly

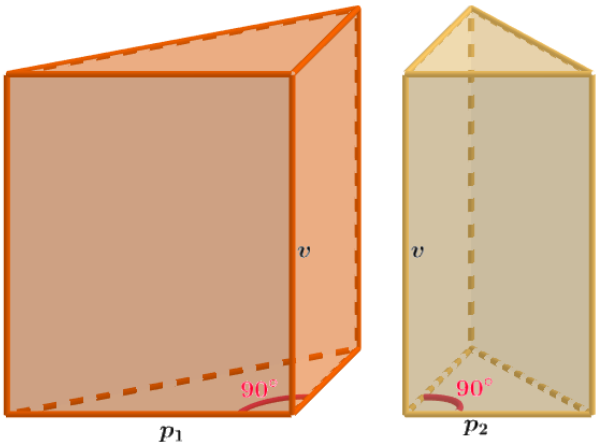
Z předchozího tvrzení vyplývá, že pokud jsou rozměry původního kvádru a, b, c, pak pro objem V dílčího kolmého trojbokého hranolu, jehož podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky, platí

$$V = \frac{1}{2}abc = (\frac{1}{2}ab)c.$$

Výraz $\frac{1}{2}ab$ určuje obsah trojúhelníkové podstavy, označíme ho S_p, výška hranolu $v = c$. Pro objem kolmého trojbokého hranolu, jehož podstava je pravoúhlý trojúhelník, platí

$$V = S_p v.$$

V případě, že podstavou kolmého trojbokého hranolu je obecný trojúhelník, víme, že nejvýše jeden jeho vnitřní úhel je tupý. Díky tomu lze trojúhelník vždy rozdělit jednou jeho výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Víme tedy, že lze rozdělit každý kolmý trojboký hranol, jehož podstavy nejsou pravoúhlé trojúhelníky, na dva kolmé trojboké hranoly stejné výšky, jejichž podstavy p_1, p_2 jsou pravoúhlé trojúhelníky (obr. 3.31).



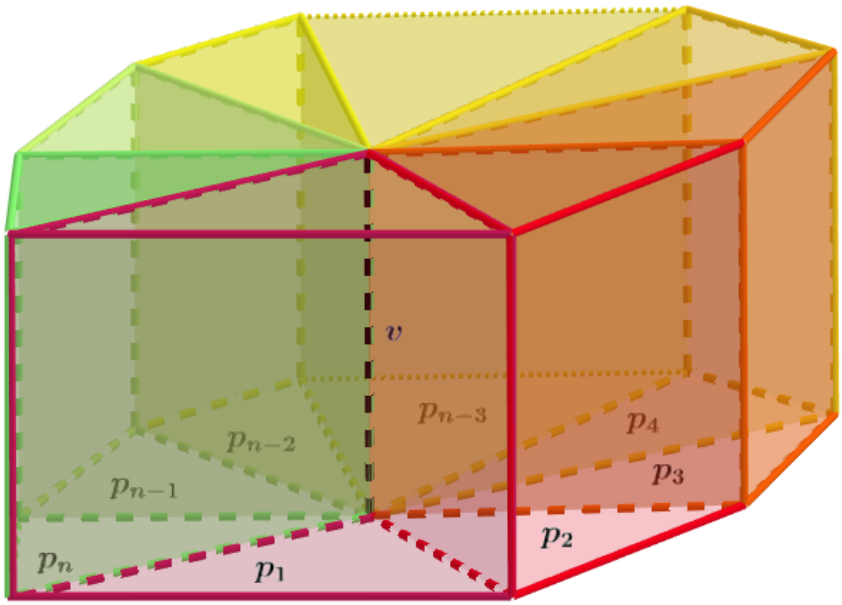
Obrázek 3.31: Kolmý trojboký hranol rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly

Označme V_1 a V_2 jejich objemy, S_{p_1} a S_{p_2} obsahy jejich podstav. Potom pro obsah podstavy S_p daného hranolu platí $S_p = (S_{p_1} + S_{p_2})$. Oba dílčí kolmé trojboké hranoly mají stejné výšky jako daný hranol. Podle druhé vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 = S_{p_1} v + S_{p_2} v = (S_{p_1} + S_{p_2})v = S_p v.$$

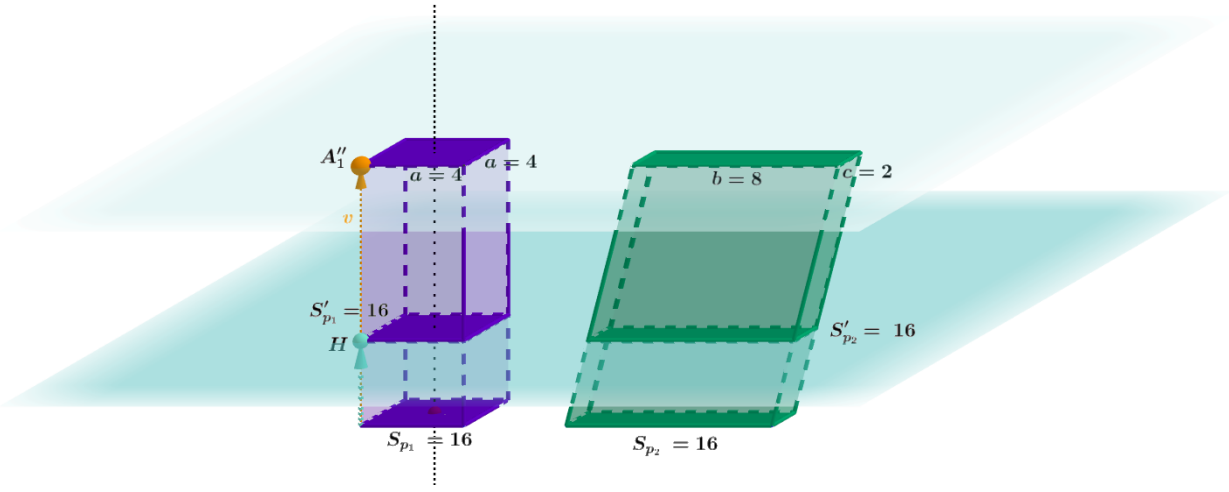
Konvexní kolmý n-boký hranol jsme schopni rozložit na n kolmých trojbokých hranolů se stejnou výškou v (obr. 3.32). Součet obsahů $S_{p_1}, S_{p_2}, ..., S_{p_n}$ jejich podstav se rovná obsahu S_p podstavy daného hranolu a výšky jsou stejné. Podle druhé vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = S_{p_1} v + S_{p_2} v + ... + S_{p_n} v = (S_{p_1} + S_{p_2} + ... + S_{p_n})v = S_p v.$$



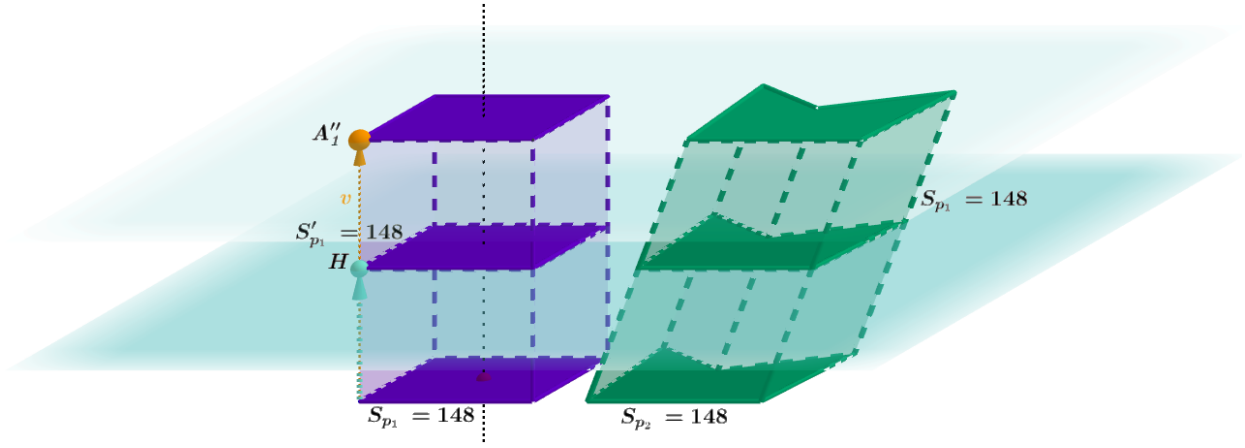
Obrázek 3.32: Kolmý hranol rozdělený na n kolmých trojbokých hranolů

Pomocí Cavalieriho principu lze dokázat platnost stejného vzorce i pro objem libovolného kosého hranolu. Uvažujme kolmý a kosý hranol o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah. Řezy kolmým i kosým hranolem vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy shodné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná; obsahy řezu kolmého i kosého hranolu jsou shodné. Tudíž objemy těchto hranolů jsou si rovny. Na obr. 3.33 se nachází kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru čtverce o straně a a kosý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru obdélníku o stranách b, c, jejichž podstavy mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek).



Obrázek 3.33: Využití Cavalieriho principu pro kolmý a kosý hranol se stejnými S_p a v

S využitím Cavalieriho principu lze rovněž dokázat platnost stejného vzorce i pro objem libovolného nekonvexního hranolu. Uvažujme konvexní a nekonvexní hranol o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah. Řezy konvexním i nekonvexním hranolem vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy shodné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná; obsahy řezu konvexního i nekonvexního hranolu jsou shodné. Tudíž objemy těchto hranolů jsou si rovny. Na obr. 3.34 se nachází konvexní čtyřboký hranol a nekonvexní pětiboký hranol, jejichž podstavy mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek).



Obrázek 3.34: Využití Cavalieriho principu pro konvexní a nekonv. hranol se stejnými S_p a v

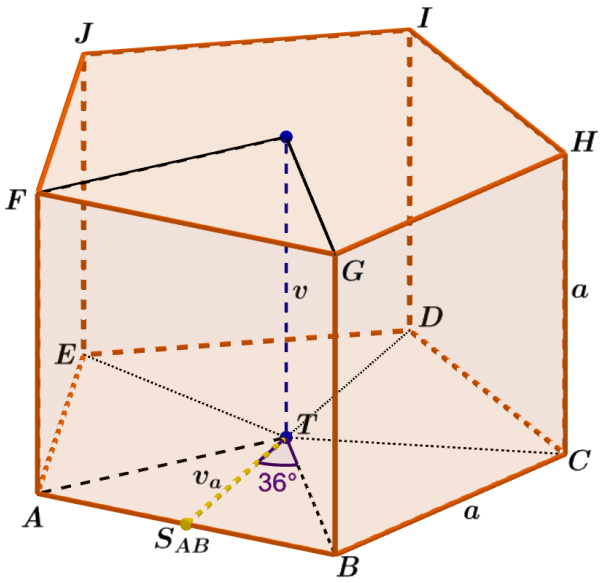
Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

Věta

Objem V libovolného **hranolu** vypočítáme tak, že obsah podstavy S_p vynásobíme jeho výškou v, platí

$$V = S_p v.$$

Příklad 3.6.1 Vypočítejte objem V pravidelného pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$. Jeho boční stěny jsou tvořeny shodnými čtverci o straně délky $a = 5$ cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

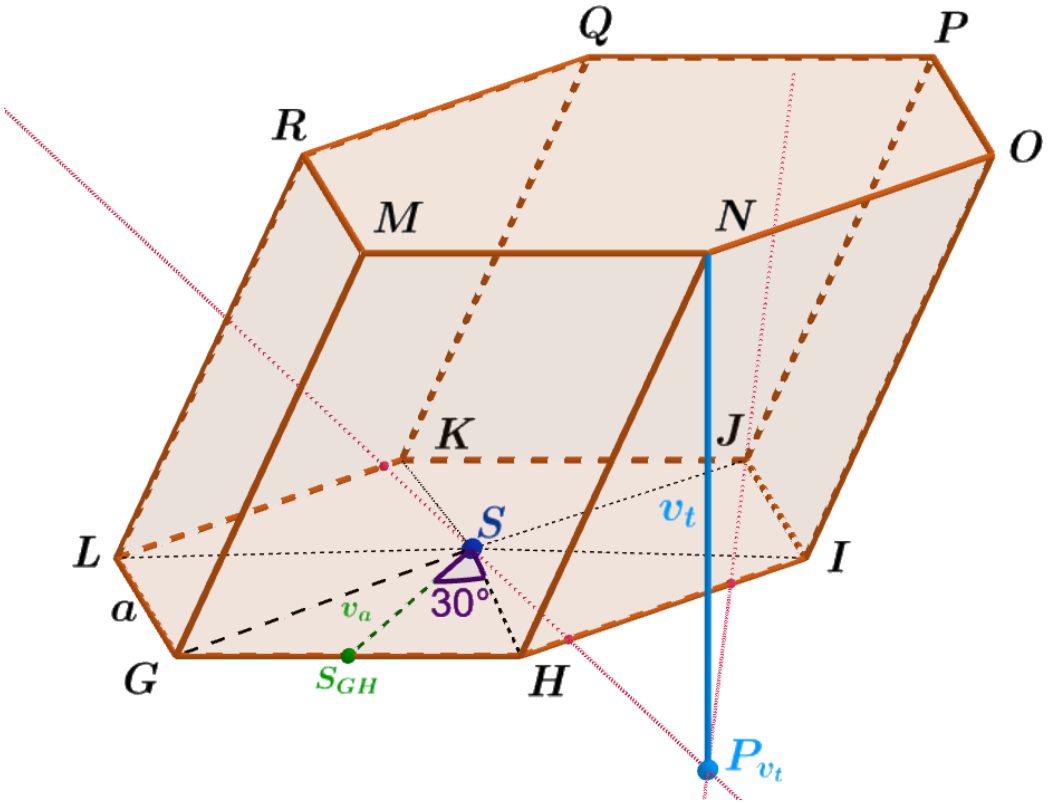


Obrázek 3.35: Ilustrace Příkladu 3.6.1

Řešení

- Pro objem V hranolu platí $V = S_p v$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v.
- Podstavami hranolu $ABCDEFGHIJ$ jsou pravidelné pětiúhelníky o straně $a = 5$ cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 3.35); $S_{\triangle ABT} = \frac{a v_a}{2}$. Z $\triangle A S_{AB} T$ vyjádříme v_a;
  $v_a = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5 \text{ cm} \doteq 3,441 \text{ cm}$.
  Tedy $S_{\triangle ABT} = \frac{5 \cdot 3,441}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,603 \text{ cm}^2$.
- Pro obsah podstavy S_p platí: $S_p = 5 \cdot S_{\triangle ABT} = 5 \cdot 8,603 \text{ cm}^2 \doteq 43,015 \text{ cm}^2$.
- Jelikož jsou boční stěny pravidelného pětibokého hranolu tvořeny shodnými čtverci, tak tělesová výška v má stejnou velikost jako podstavná hrana; $v = a = 5$ cm.
- Pro objem hranolu platí: $V = S_p v = 43,015 \cdot 5 \text{ cm}^3 \doteq 215,08 \text{ cm}^3$.
- Objem daného pravidelného pětibokého hranolu je po zaokrouhlení $215,08 \text{ cm}^3$.

Příklad 3.6.2 Je dán kosý šestiboký hranol $GHIJKLMNOPQR$, jehož podstavy jsou pravidelné šestiúhelníky o straně $a = 4$ dm. Jeho tělesová výška $v_t = 6$ dm. Jaký je objem V tohoto hranolu? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

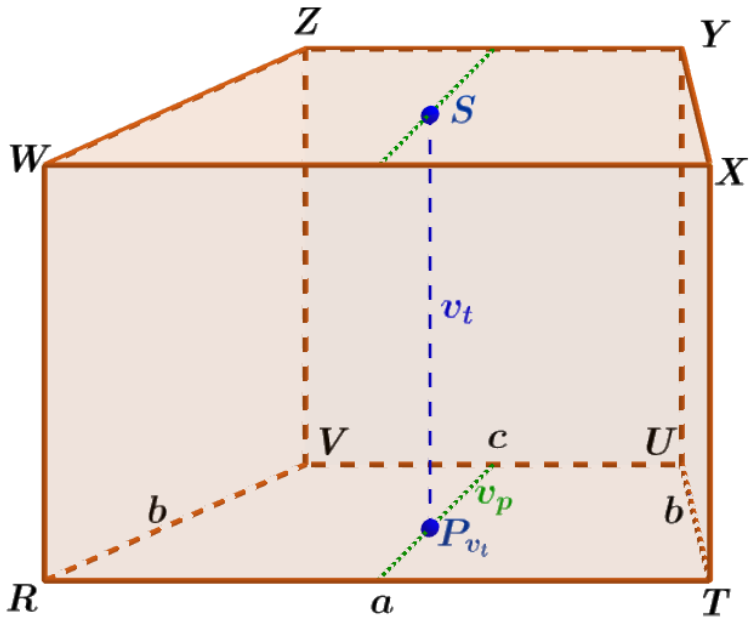


Obrázek 3.36: Ilustrace Příkladu 3.6.2

Řešení

- Pro objem V hranolu platí $V = S_p v$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v_t.
- Podstavami hranolu $GHIJKLMNOPQR$ jsou pravidelné šestiúhelníky o straně $a = 6$ dm. Pravidelný šestiúhelník rozložíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 3.36); $S_{\triangle GHS} = \frac{a v_a}{2}$. Z $\triangle S_{GH}HS$ vyjádříme v_a;
  $v_a = \cot 30° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,732 \cdot 2$ dm $\doteq 3,464$ dm.
  Tedy $S_{\triangle GHS} = \frac{4 \cdot 3,464}{2}$ dm^2 $\doteq 6,928$ dm^2.
- Pro obsah podstavy S_p platí: $S_p = 6 \cdot S_{\triangle GHS} = 6 \cdot 6,928$ dm^2 $\doteq 41,892$ dm^2.
- Tělesová výška $v_t = |P_{v_t}N| = 6$ dm.
- Pro objem hranolu platí: $V = S_p v_t = 41,892 \cdot 6$ dm^3 $\doteq 251,35$ dm^3.
- Objem daného kosého šestibokého hranolu je po zaokrouhlení $251,35$ dm^3.

Příklad 3.6.3 Je dán kolmý čtyřboký hranol $RTUVWXYZ$, jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky $a = 8$ m a $c = 4,5$ m. Výška v_p lichoběžníku je 4 m, pro tělesovou výšku hranolu platí $v_t = 5$ m. Vypočítejte objem V tohoto hranolu.

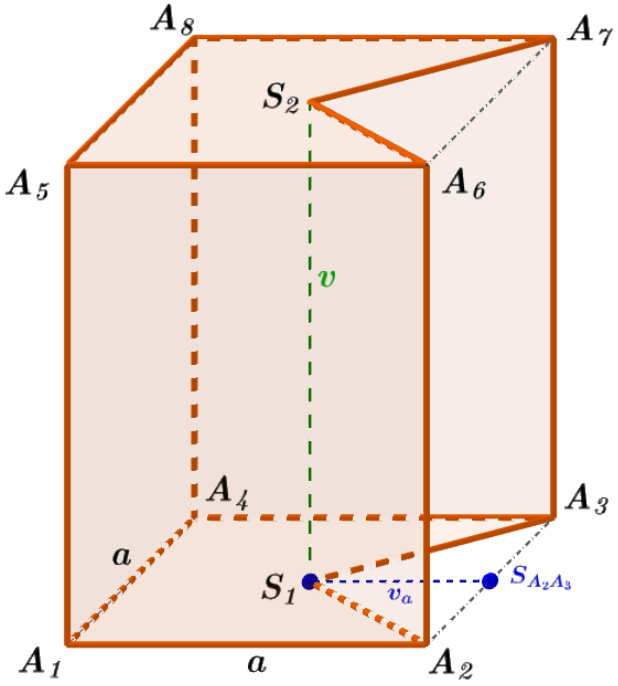


Obrázek 3.37: Ilustrace Příkladu 3.6.3

Řešení

- Pro objem V hranolu platí $V = S_p v$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v_t.
- Podstavami hranolu $RTUVWXYZ$ jsou shodné rovnoramenné lichoběžníky o základnách délky $a = 8$ m a $c = 4,5$ m (obr. 3.37). Vypočítáme obsah S_p jedné podstavy, tedy obsah rovnoramenného lichoběžníku;
  $S_p = S_{RTUV} = \frac{(a + c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8 + 4{,}5) \cdot 4}{2}$ m^2 $= 25$ m^2.
- Pro objem hranolu platí: $V = S_p v = 25 \cdot 5$ m^3 $= 125$ m^3.
- Objem kolmého čtyřbokého hranolu $RTUVWXYZ$ je 125 m^3.

Příklad 3.6.4 Vyjádřete objem nekonvexního pětibokého kolmého hranolu $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$, který vznikl z pravidelného čtyřbokého hranolu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ o podstavné hraně a a výšce v odseknutím kolmého trojbokého hranolu o stejné výšce v, jehož dolní podstavou je $\triangle A_2A_3S_1$, kde S_1 je střed čtvecové podstavy $A_1A_2A_3A_4$.



Obrázek 3.38: Ilustrace Příkladu 3.6.4

Řešení

- Pro objem V hranolu platí $V = S_p v$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v.
- Podstavami hranolu $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$ jsou shodné nekonvexní pětiúhelníky vzniklé ze čtverce $A_1A_2A_3A_4$ odseknutím rovnoramenného $\triangle A_2A_3S_1$ s výškou $v_a = \frac{a}{2}$ (obr. 3.38). Vyjádříme obsah S_p jedné podstavy, tedy obsah nekonvexního pětiúhelníku $A_1A_2S_1A_3A_4$; $S_p = a^2 - \frac{a \cdot v_a}{2} = a^2 - \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.
- Pro objem hranolu platí: $V = S_p v = \frac{3a^2 v}{4}$.
- Objem kolmého čtyřbokého hranolu $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$ je $\frac{3a^2 v}{4}$.

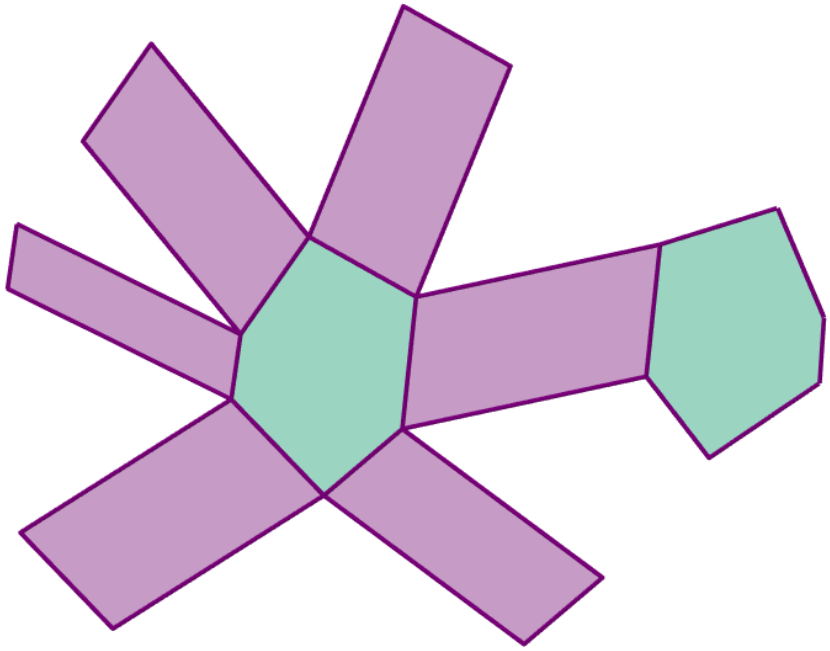
3.7 Povrch hranolu

Tak jako u povrchu tělesa je i povrch hranolu roven součtu obsahů všech jeho stěn, tedy obsahu jeho sítě, viz obr. 3.39. Síť hranolu je tvořena dvěma shodnými podstavami a jeho pláštěm, viz obr. 3.40.

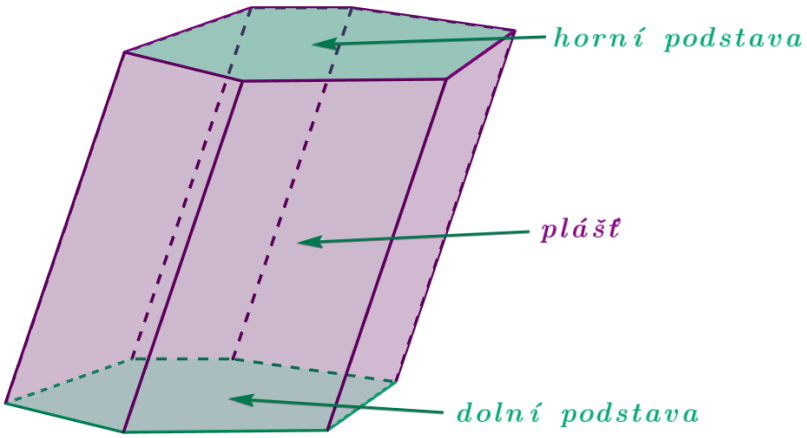
Věta

Povrch S hranolu je roven součtu obsahů S_p jeho dvou podstav a obsahu jeho bočních stěn, tj. pláště S_{pl}, platí:

$$S = 2S_p + S_{pl}.$$



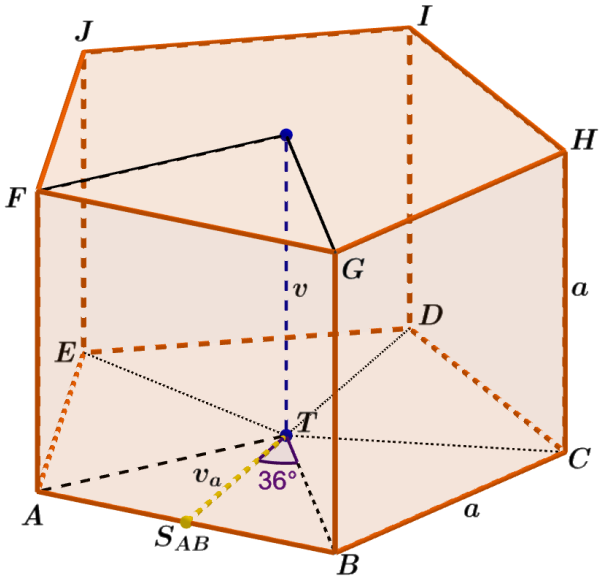
Obrázek 3.39: Síť šestibokého kosého hranolu



Obrázek 3.40: Povrch šestibokého kosého hranolu - plášť a podstavy

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.1.

Příklad 3.7.1 Vypočítejte povrch S pravidelného pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$. Jeho boční stěny jsou tvořeny shodnými čtverci o straně délky $a = 5$ cm. Bod T je těžištěm podstavy. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



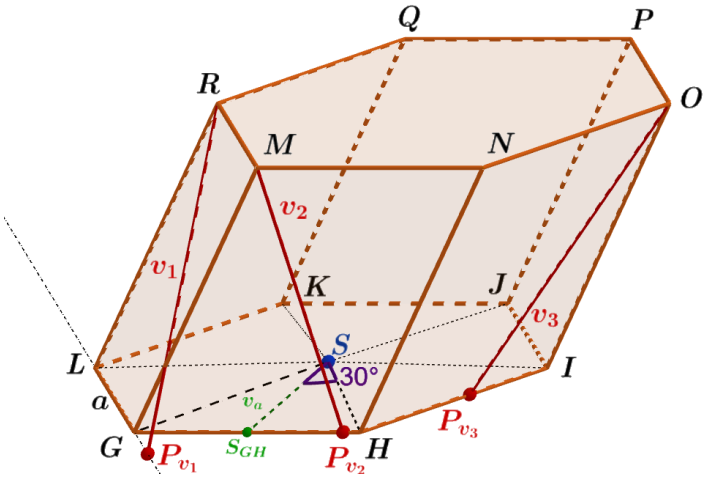
Obrázek 3.41: Ilustrace Příkladu 3.7.1

Řešení

- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$, tedy potřebujeme znát obsahy podstav S_p daného hranolu a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Podstavami hranolu $ABCDEFGHIJ$ jsou pravidelné pětiúhelníky o straně délky $a = 5$ cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 3.41); $S_{\triangle ABT} = \frac{av_a}{2}$. Z $\triangle AS_{AB}T$ vyjádříme v_a; $v_a = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} = 1,376 \cdot 2,5 \text{ cm} \doteq 3,441 \text{ cm}$. Tedy $S_{\triangle ABT} = \frac{5 \cdot 3,441}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,603 \text{ cm}^2$.
- Pro obsah podstavy S_p platí: $S_p = 5 \cdot S_{\triangle AS_{AB}T} = 5 \cdot 8,603 \text{ cm}^2 \doteq 43,015 \text{ cm}^2$.
- Pro určení obsahu pláště S_{pl} hranolu, si uvědomíme, že jeho plášť je tvořen pěti shodnými čtverci o straně délky $a = 5$ cm: $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$, $EAFJ$. Určíme obsah čtverce $ABFG$.
- $S_{ABFG} = a^2 = 25 \text{ cm}^2$; $S_{pl} = 5 \cdot S_{ABFG} = 125 \text{ cm}^2$.
- Pro povrch hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 43,015 \text{ cm}^2 + 125 \text{ cm}^2 \doteq 211,03 \text{ cm}^2$.
- Povrch daného pravidelného pětibokého hranolu je po zaokrouhlení $211,03 \text{ cm}^2$.

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.2.

Příklad 3.7.2 Je dán kosý šestiboký hranol $GHIJKLMNOPQR$, jehož podstavy jsou pravidelné šestiúhelníky o straně $a = 4$ dm. Jeho tělesová výška $v_t = 6$ dm. Výška v_1 kosodélníku $LGMR$ je $6,11$ dm. Výška v_2 kosodélníku $GHNM$ je $7,23$ dm. Výška v_3 kosodélníku $HION$ je $7,95$ dm. Jaký je povrch S tohoto hranolu? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



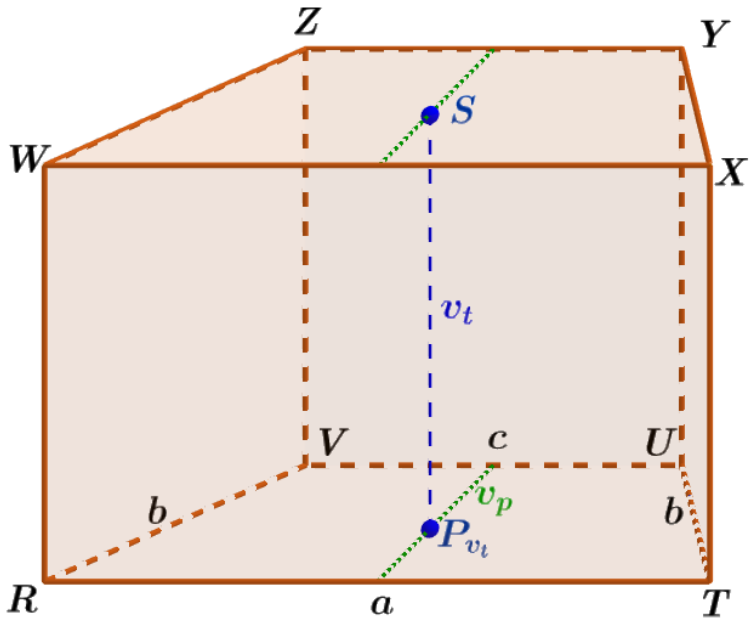
Obrázek 3.42: Ilustrace Příkladu 3.7.2

Řešení

- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Podstavami hranolu $GHIJKLMNOPQR$ jsou pravidelné šestiúhelníky o straně délky $a = 6$ dm (obr. 3.42). Pravidelný šestiúhelník rozložíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků; $S_{\triangle GHS} = \frac{av_a}{2}$. Z $\triangle S_{GH}HS$ vyjádříme v_a; $v_a = \cot 30° \cdot \frac{a}{2} = 1,732 \cdot 2$ dm $\doteq 3,464$ dm. Tedy $S_{\triangle GHS} = \frac{4 \cdot 3,464}{2}$ dm^2 $\doteq 6,928$ dm^2.
- Pro obsah podstavy S_p platí: $S_p = 6 \cdot S_{\triangle GHS} = 6 \cdot 6,928$ dm^2 $\doteq 41,892$ dm^2.
- Plášť hranolu je tvořen třemi dvojicemi navzájem shodných kosodélníků $S_{pl} = 2 \cdot S_{LGMR} + 2 \cdot S_{GHNM} + 2 \cdot S_{HION}$.
- Výška v_1 kosodélníku $LGMR$ je rovna výšce kosodélníku $IJPO$; $v_1 = 6,11$ dm. Výška v_2 kosodélníku $GHNM$ je rovna výšce kosodélníku $JKQP$; $v_2 = 7,23$ dm. Výška v_3 kosodélníku $HION$ je rovna výšce kosodélníku $KLRQ$; $v_3 = 7,95$ dm.
- Vypočítáme obsahy jednotlivých stěn – kosodélníků; $S_{LGMR} = a \cdot v_1 = 4 \cdot 6,11$ dm^2 $= 24,440$ dm^2, $S_{LGMR} = a \cdot v_2 = 4 \cdot 7,23$ dm^2 $= 28,920$ dm^2, $S_{LGMR} = a \cdot v_3 = 4 \cdot 7,95$ dm^2 $= 31,800$ dm^2.
- Dosadíme hodnoty; $S_{pl} = 2 \cdot S_{LGMR} + 2 \cdot S_{GHNM} + 2 \cdot S_{HION} =$ $= 2 \cdot 24,440$ dm^2 $+ 2 \cdot 28,920$ dm^2 $+ 2 \cdot 31,800$ dm^2 $= 170,320$ dm^2.
- Pro povrch hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 41,892$ dm^2 $+ 170,320$ dm^2 $\doteq 254,10$ dm^2.
- Povrch daného kosého šestibokého hranolu je po zaokrouhlení $254,10$ dm^2.

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.3.

Příklad 3.7.3 Je dán kolmý čtyřboký hranol $RTUVWXYZ$, jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky $a = 8$ m, $c = 4,5$ a dvěma rameny délky $b = 4,3$ m. Výška v_p lichoběžníku je 4 m a pro délku tělesové výšky platí $v_t = 5$ m. Vypočítejte povrch S tohoto hranolu. Výsledek uveďte na jedno desetinné místo.



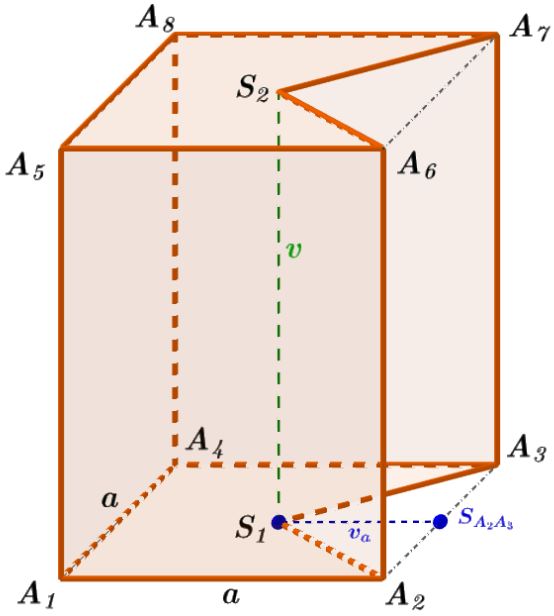
Obrázek 3.43: Ilustrace Příkladu 3.7.3

Řešení

- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Podstavami daného hranolu jsou shodné rovnoramenné lichoběžníky o ramenech délky $a = 8$ m, $c = 4,5$ m (obr. 3.43). Vypočítáme obsah S_p jedné podstavy, tedy obsah rovnoramenného lichoběžníku; $S_p = S_{RTUV} = \frac{(a + c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8 + 4{,}5) \cdot 4}{2}$ m$^2 = 25$ m^2.
- Plášť hranolu je tvořen čtyřmi obdélníky, a to $RTXW$, $VUYZ$ a jednou dvojicí navzájem shodných obdélníků $RVZW, TUYX$.
- Vypočítáme obsahy jednotlivých stěn – obdélníků;
  $S_{RTXW} = a \cdot v_t = 8 \cdot 5$ m$^2 = 40$ m^2,
  $S_{VUYZ} = c \cdot v_t = 4,5 \cdot 5$ m$^2 = 22,50$ m^2,
  $S_{RVZW} = b \cdot v_t = 4,3 \cdot 5$ m$^2 = 21,50$ m^2.
- Dosadíme; $S_{pl} = S_{RTXW} + S_{VUYZ} + 2 \cdot S_{RVZW} =$
  $= 40$ m$^2 + 22,50$ m$^2 + 2 \cdot 21,50$ m$^2 = 105,50$ m^2.
- Pro povrch hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 25$ m$^2 + 105,50$ m$^2 \doteq 155,5$ m^2.
- Povrch kolmého čtyřbokého hranolu $RTUVWXYZ$ je $155,5$ m^3.

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.4.

Příklad 3.7.4 Vyjádřete povrch nekonvexního kolmého pětibokého hranolu $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$, který vznikl z pravidelného čtyřbokého hranolu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ o podstavné hraně a a výšce v odseknutím kolmého trojbokého hranolu o stejné výšce v, jehož dolní podstavou je $\triangle A_2S_1A_3$, kde S_1 je střed čtvercové podstavy $A_1A_2A_3A_4$.



Obrázek 3.44: Ilustrace Příkladu 3.7.4

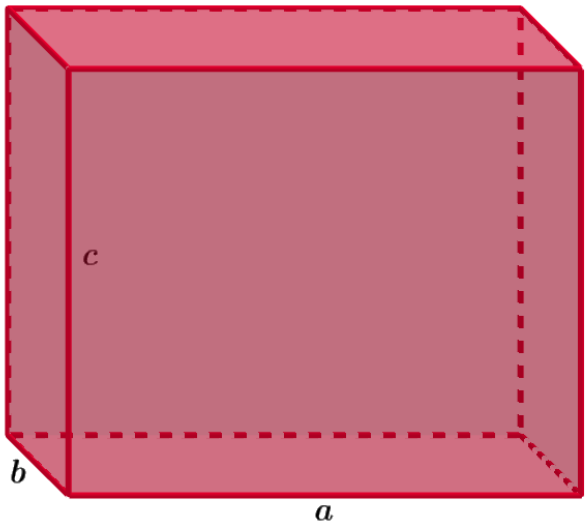
Řešení

- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$, tedy potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Podstavami hranolu $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$ jsou nekonvexní pětiúhelníky vzniklé ze čtverce $A_1A_2A_3A_4$ odseknutím rovnoramenného $\triangle A_2S_1A_3$ s výškou $v_a = \frac{a}{2}$ (obr. 3.44). Vyjádříme obsah S_p jedné podstavy, tj. obsah nekonvexního pětiúhelníku $A_1A_2S_1A_3A_4$; $S_p = a^2 - \frac{a \cdot v_a}{2} = a^2 - \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.
- Plášť je tvořen jednou trojicí navzájem shodných obdélníků $A_1A_2A_6A_5$, $A_3A_4A_8A_7$, $A_4A_1A_5A_8$ a jednou dvojicí navzájem shodných obdélníků $A_2S_1S_2A_6$, $S_1A_3A_7S_2$.
- Vyjádříme obsahy jednotlivých stěn – obdélníků; $S_{A_1A_2A_6A_5} = av$, $S_{A_2S_1S_2A_6} = |A_2S_1| \cdot v$, kde Pýthagorovou větou vyjádříme délku úsečky A_2S_1;
  $|A_2S_1| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (v_a)^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{2\frac{a^2}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}$.
  Tedy $S_{A_2S_1S_2A_6} = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot v = \frac{\sqrt{2}av}{2}$.
- Dosadíme; $S_{pl} = 3 \cdot S_{A_1A_2A_6A_5} + 2 \cdot S_{A_2S_1S_2A_6} = 3 \cdot av + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}av}{2} = 3av + \sqrt{2}av = av \cdot (3 + \sqrt{2})$.
- Pro povrch hranolu platí
  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{3a^2}{4} + av \cdot (3 + \sqrt{2}) = \frac{3a^2}{2} + av \cdot (3 + \sqrt{2}) = a \cdot (\frac{3a}{2} + v \cdot (3 + \sqrt{2}))$.
- Povrch daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je $a \cdot (\frac{3a}{2} + v \cdot (3 + \sqrt{2}))$.

3.8 Objemy a povrchy dalších typů hranolů

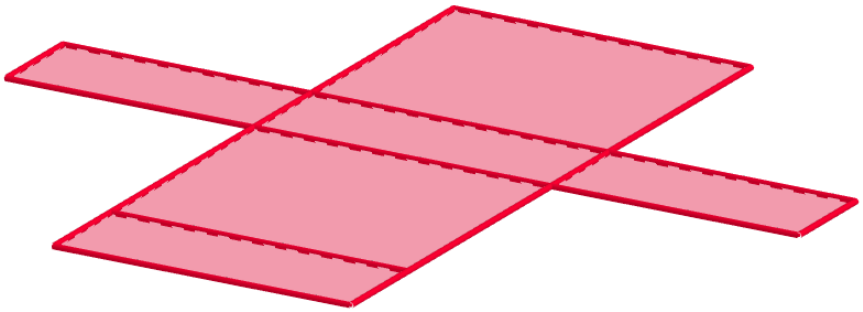
3.8.1 Kvádr

Za **kvádr** považujeme kolmý hranol, jehož podstavou je obdélník nebo čtverec. Tudíž se jedná o čtyřboký hranol. V případě, že podstavy kvádru jsou čtverce, jedná se o pravidelný čtyřboký hranol. Stěny kvádru ležící naproti sobě jsou shodné obdélníky nebo čtverce. Za **rozměry kvádru** označujeme délky a, b, c tří hran vycházejících ze stejného vrcholu (obr. 3.45). Stěnové úhlopříčky v protějších stěnách kvádru mají stejnou délku a zároveň všechny tělesové úhlopříčky kvádru mají stejnou délku.



Obrázek 3.45: Kvádr s vyznačenými rozměry a, b, c zobrazen v levém nadhledu

Síť kvádru se skládá ze všech jeho šesti stěn (obr. 3.46).



Obrázek 3.46: Síť kvádru skládající se ze šesti stěn

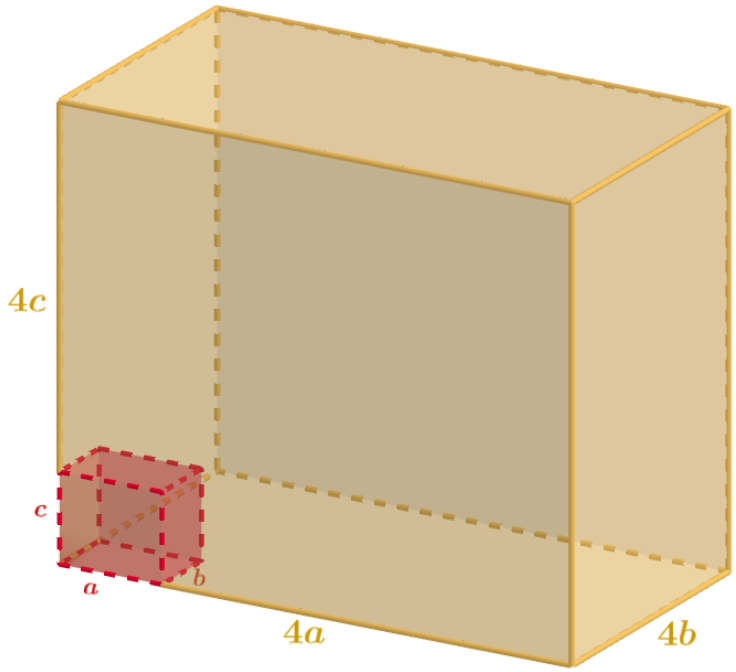
Objem V kvádru o rozměrech a, b, c je

$$V = abc.$$

Povrch S kvádru o rozměrech a, b, c je

$$S = 2ab + 2(ac + bc) = 2(ab + ac + bc).$$

Příklad 3.8.1 Kolikrát se zvětší objem a povrch kvádru, jestliže všechny jeho rozměry zvětšíme čtyřikrát?



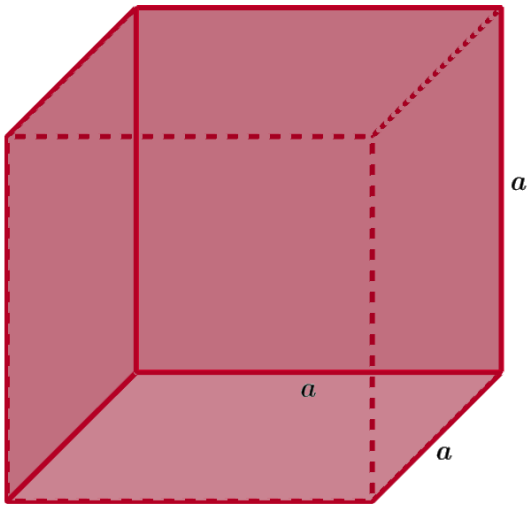
Obrázek 3.47: Ilustrace Příkladu 3.8.1

Řešení

- Označme si rozměry původního kvádru a, b, c (obr. 3.47). Pro objem původního kvádru platí $V = abc$; pro povrch původního kvádru platí $S = 2(ab + ac + bc)$.
- Rozměry kvádru zvětšené čtyřikrát (nového kvádru) jsou $4a, 4b, 4c$.
- Objem nového kvádru je $V_k = 4a \cdot 4b \cdot 4c = 64 \cdot abc$.
- Povrch nového kvádru je
  $S_k = 2(4a \cdot 4b + 4a \cdot 4c + 4b \cdot 4c) = 2 \cdot 16(ab + ac + bc) = 32(ab + ac + bc)$.
- Jestliže všechny rozměry kvádru zvětšíme čtyřikrát, objem se zvětší šedesátčtyřikrát a povrch se zvětší třicetdvakrát.

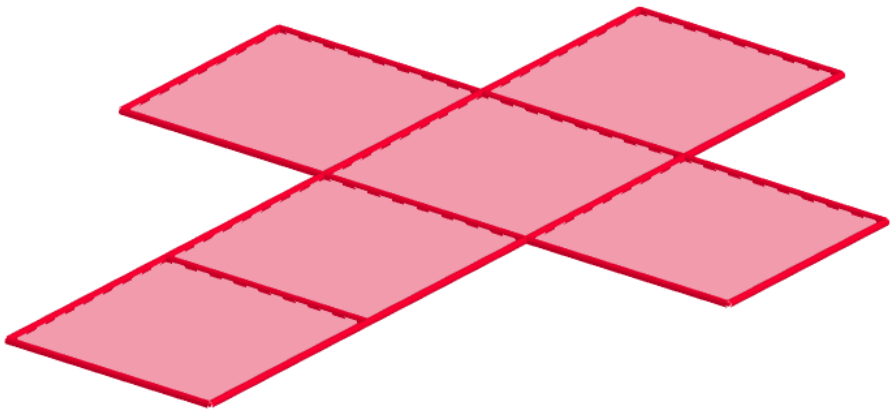
3.8.2 Krychle

Krychle je speciální případ kvádru, jehož rozměry se rovnají ($a = b = c$); nebo-li výška krychle je rovna délce podstavné hrany. Na obr. 3.48 je vidět, že všechny její stěny jsou shodné čtverce. Krychle je pravidelným šestistěnem. Stěnové úhlopříčky krychle jsou navzájem shodné, totéž platí i pro tělesové úhlopříčky krychle.



Obrázek 3.48: Krychle zobrazena v levém podhledu

Síť krychle (obr. 3.49) se skládá ze šesti shodných čtverců.



Obrázek 3.49: Síť krychle skládající se ze šesti shodných stěn

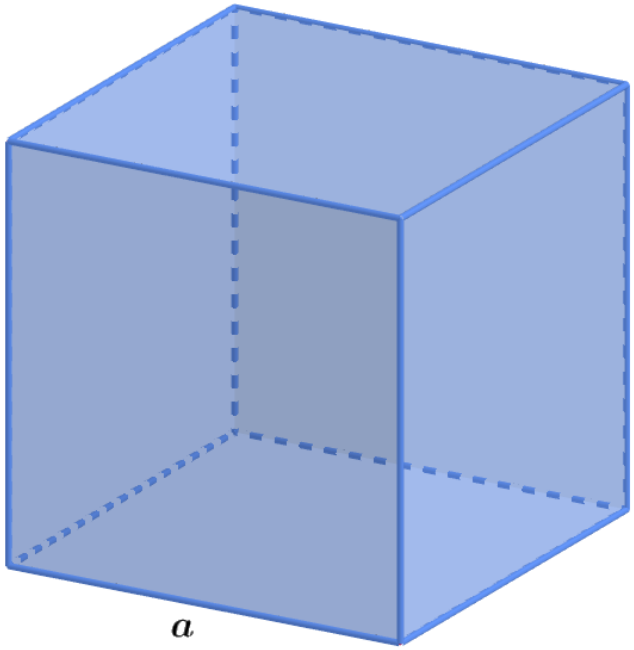
Objem V krychle o podstavné hraně a je

$$V = a^3.$$

Povrch S krychle o podstavné hraně a je

$$S = 6a^2.$$

Příklad 3.8.2 Součet délek všech hran krychle je 132 mm. Jaký je objem a povrch této krychle?

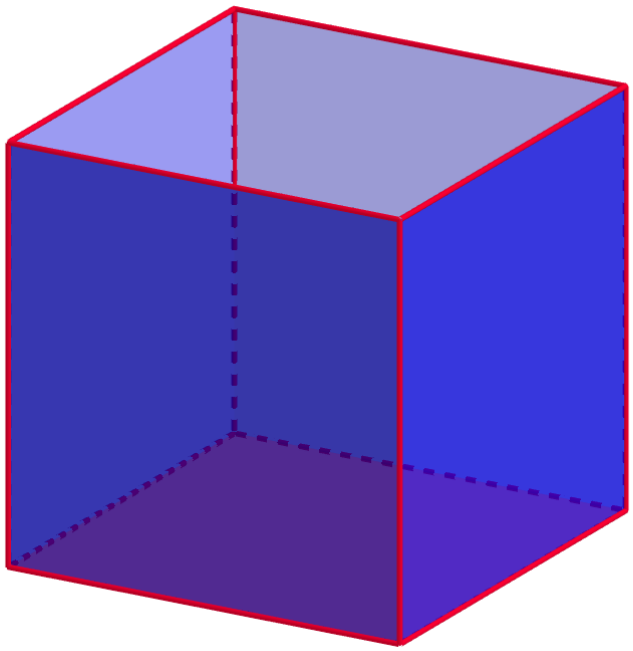


Obrázek 3.50: Ilustrace Příkladu 3.8.2

Řešení

- Vzhledem k zadání potřebujeme pro výpočet objemu V i povrchu S určit počet hran. Krychle má dvanáct hran (obr. 3.50).
- Pro délku jedné hrany platí $132 : 12 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$.
- Pro objem krychle platí: $V = a^3 = 11^3 \text{ mm}^3 = 1\,331 \text{ mm}^3$.
- Pro povrch krychle platí: $S = 6a^2 = 6 \cdot 11^2 \text{ mm}^2 = 726 \text{ mm}^2$.
- Objem krychle je $1\,331 \text{ mm}^3$ a povrch krychle je 726 mm^2.

Příklad 3.8.3 Vnitřní povrch nádrže na dešťovou vodu ve tvaru krychle bez horní podstavy je 245 m^2. Kolik hektolitrů vody nádrž pojme tak, jestliže hladina vody bude splývat s horní podstavou?



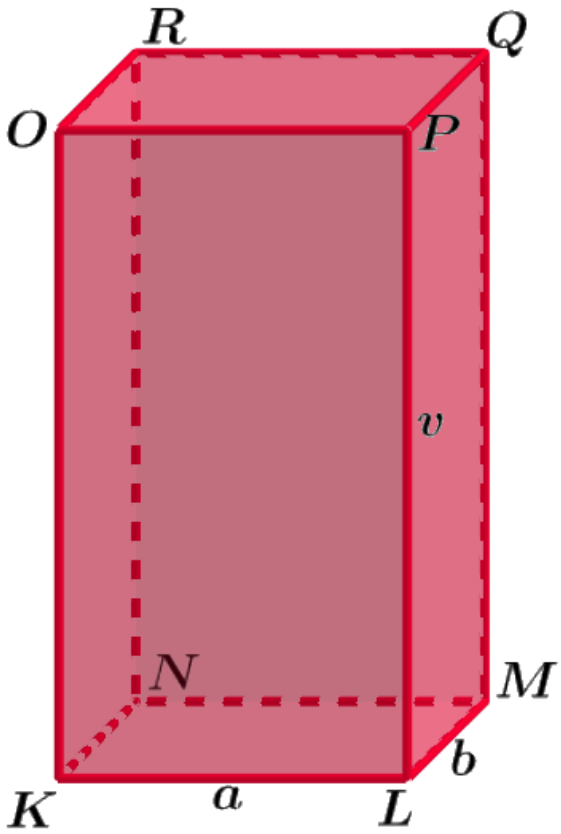
Obrázek 3.51: Ilustrace Příkladu 3.8.3

Řešení

- V tomto případě se povrch krychlové nádrže skládá z dolní podstavy a čtyř bočních stěn (5 shodných čtverců); 245 $m^2/5 = 49$ m^2 (obr.3.51).
- Délku a hrany krychle dostaneme takto: $a = \sqrt{49}$ m $= 7$ m.
- K výpočtu objemu vody, kterou nádrž pojme, je potřeba určit objem krychle o hraně 7 m; $V = a^3 = 7^3$ $m^3 = 343$ m^3.
- Převedeme 343 m^3 na hl: 1 $m^3 = 10$ hl; 343 $m^3 = 3\,430$ hl.
- Nádrž pojme 3 430 hektolitrů vody.

3.9 Úlohy I

Úloha 3.9.1 Vypočtěte objem V kvádru $KLMNOPQR$, jehož podstavy jsou obdélníky o rozměrech $a = 8$ m a $b = 5$ m. Výška v kvádru je rovna trojnásobku délky kratšího rozměru podstavy.

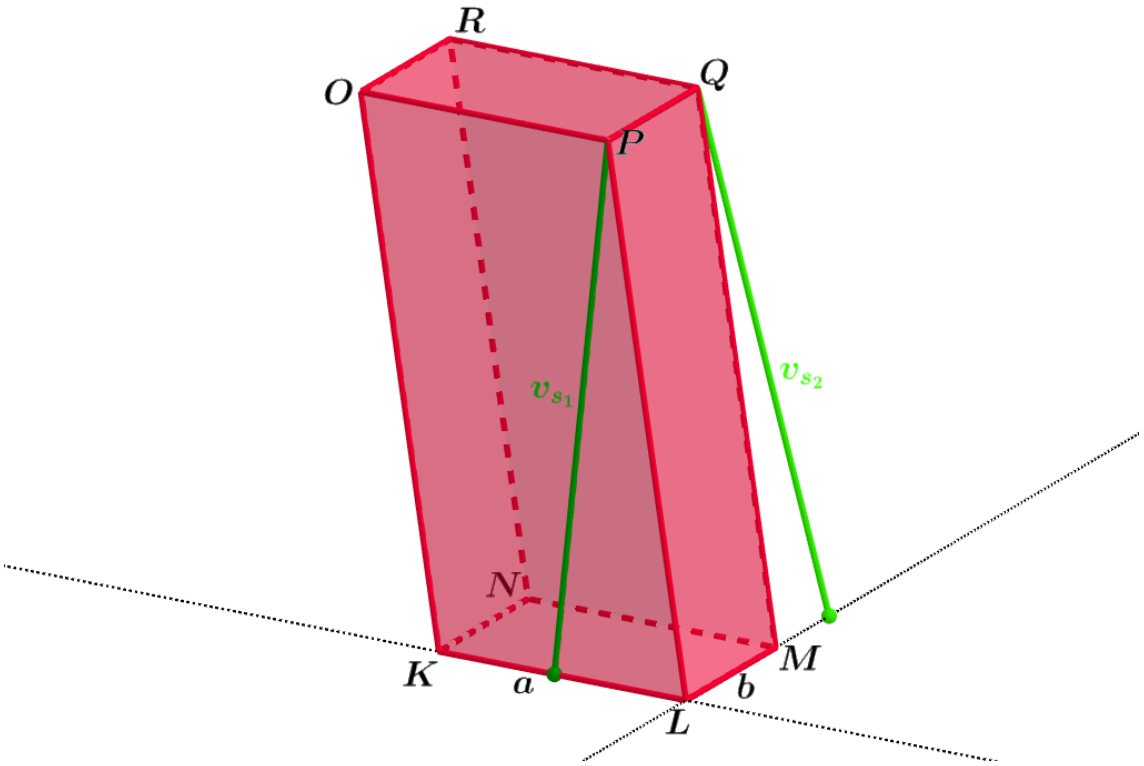


Obrázek 3.52: Ilustrace Úlohy 3.9.1

Řešení

- Kvádr řadíme mezi hranoly. Pro objem V hranolu platí: $V = S_p v$. Výšku v kvádru známe: $v = 3 \cdot b = 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}$.
- Obsah podstavy S_p kvádru je roven obsahu obdélníku $KLMN$:
  $S_p = a \cdot b = 8 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 40 \text{ m}^2$ (obr. 3.52).
- Dosadíme S_p: $V = S_p v = 40 \text{ m}^2 \cdot 15 \text{ m} = 600 \text{ m}^3$.
- Úlohu lze řešit také s využitím vzorce pro objem kvádru
  $V = abv = ab \cdot 3b = 3ab^2 = 3 \cdot 8 \cdot 25 \text{ m}^3 = 600 \text{ m}^3$.
- Objem V kvádru $KLMNOPQR$ je 600 m^3.

Úloha 3.9.2 Vypočtěte povrch S kosého čtyřbokého hranolu $KLMNOPQR$, jehož podstavy jsou obdélníky o rozměrech $a = 8$ m a $b = 5$ m. Stěnová výška v_{s_1} stěny $KLPO$ měří $15,3$ m a stěnová výška v_{s_2} stěny $LMQP$ měří $15,6$ m. Výsledek uveďte na jedno desetinné místo.



Obrázek 3.53: Ilustrace Úlohy 3.9.2

Řešení

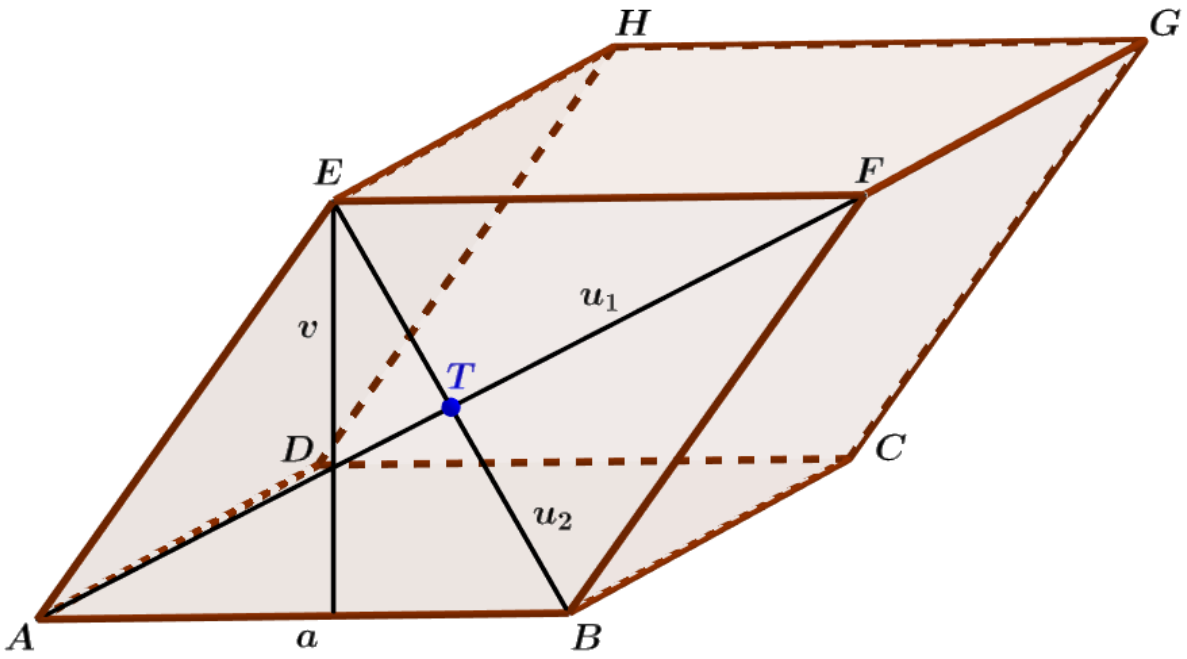
- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$.
- Obsah podstavy S_p hranolu je roven obsahu obdélníku $KLMN$:
  $S_p = a \cdot b = 8 \cdot 5 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$ (obr. 3.53).
- Obsah pláště S_{pl} kosého čtyřbokého hranolu je rovnen součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto hranolu jsou boční stěny tvořeny čtyřmi rovnoběžníky $KLPO$, $LMQP$, $MNRQ$ a $NKOR$, z nichž každé dvě protější stěny jsou shodné: $KLPO \cong MNRQ$ a $LMQP \cong NKOR$. Tedy $S_{pl} = 2S_{KLPO} + 2S_{LMQP}$.
- Vypočítáme obsah rovnoběžníku $KLPO$; $S_{KLPO} = a \cdot v_{s_1} = 8 \cdot 15,3 \text{ m}^2 = 122,40 \text{ m}^2$.
- Vypočítáme obsah rovnoběžníku $LMQP$; $S_{LMQP} = b \cdot v_{s_2} = 5 \cdot 15,6 \text{ m}^2 = 78,00 \text{ m}^2$.
- Vypočítáme obsah pláště hranolu
  $S_{pl} = 2S_{KLPO} + 2S_{LMQP} = 2 \cdot 122,40 \text{ m}^2 + 2 \cdot 78,00 \text{ m}^2 = 400,80 \text{ m}^2$.
- Vypočítáme povrch hranolu
  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 40 \text{ m}^2 + 400,80 \text{ m}^2 \doteq 480,8 \text{ m}^2$.
- Povrch S kosého čtyřbokého hranolu $KLMNOPQR$ je $480,8 \text{ m}^2$.

Úloha 3.9.3 Určete v centimetrech tloušťku (výšku) v pracovní kuchyňské desky z mramoru, která má obdélníkový půdorys a její hmotnost je 70 kg. Hustota ρ mramoru je 2 800 kg/m^3, obsah pracovní plochy je 4 m^2.

Řešení

- Pracovní deska má tvar kvádru, pro jehož objem V platí $V = S_p v$. Obsah podstavy známe; $S_p = 4$ m^2.
- Výšku v hranolu vyjádříme ze vzorce pro objem hranolu; $v = \frac{V}{S_p}$.
- Objem V hranolu vyjádříme ze vztahu mezi hmotností m a hustotou ρ; $V = \frac{m}{\rho} = \frac{70}{2\ 800}$ m$^3 = 0,025$ m^3.
- Vyjádříme neznámou v; $v = \frac{V}{S_p} = \frac{0,025}{4}$ m $= 0,062\ 5$ m.
- Délku výšky v čili tloušťku mramorové desky převedeme na centimetry: $v = 0,062\ 5$ m $= 6,25$ cm.
- Tloušťka mramorové pracovní kuchyňské desky je $6,25$ cm.

Úloha 3.9.4 Vypočtěte objem V a povrch S rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ zvaného klenec. Stěnové úhlopříčky u_1, u_2 v každé stěně měří 6 dm a 32 cm. Výška klence měří 2, 82 dm. Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa a uveďte výsledky v decimetrech krychlových a čtverečních.



Obrázek 3.54: Ilustrace Úlohy 3.9.4

Řešení

- Klenec řadíme mezi kosé hranoly, jeho stěny jsou navzájem shodné kosočtverce (obr. 3.54). Pro jeho objem V platí $V = S_p v$. Výšku klence známe; $v = 2,82$ dm.
- Obsah podstavy S_p je roven obsahu kosočtverce $S_p = a \cdot v$. Výšku kosočtverce známe (je zároveň rovna výšce klence): $v = 2,82$ dm.
- Stranu a kosočtverce vyjádříme například pomocí Pýthagorovy věty z pravoúhlého $\triangle ABT$ (úhlopříčky kosočtverce jsou k sobě kolmé); délka $|AT| = \frac{1}{2}u_1 = 3$ dm; délku u_2 převedeme na decimetry; $|BT| = \frac{1}{2}u_2 = 1,6$ dm;
  $a = \sqrt{3^2 + (1,6)^2}$ dm $= \sqrt{(11,56)}$ dm $= 3,4$ dm.
- Vypočítáme obsah podstavy $S_p = a \cdot v = 3,4 \cdot 2,82$ dm$^2 \doteq 9,588$ dm^2.
- Vypočítáme objem klence $V = S_p v = 9,588 \cdot 2,82$ dm$^3 \doteq 27,04$ dm^3.
- Pro povrch S hranolu platí $S = 2S_p + S_{pl}$. Jelikož je síť klence tvořena šesti shodnými kosočtverci a již jsme vypočítali obsah jedné stěny (podstavy S_p), pro povrch S klence platí $S = 6S_p = 6 \cdot 9,588$ dm$^2 \doteq 57,53$ dm^2.
- Objem V klence $ABCDEFGH$ je po zaokrouhlení 27, 04 dm^3 a jeho povrch S je po zaokrouhlení 57, 53 dm^2.

4. Jehlany

4.1 Jehlany

V této kapitole se budeme zabývat dalšími tělesy, a to jehlany. Pokud bychom se zamysleli, kde se nacházejí objekty ve tvaru jehlanů, tak nás napadají starověké pyramidy nebo moderní skleněná pyramida sloužící jako hlavní vchod do Paláce Louvre v Paříži (obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Skleněná pyramida na nádvoří Paláce Louvre ve tvaru čtyřbokého jehlanu [16]

Ze starověkého Egypta rovněž známe monolitické památníky symbolizující paprsky slunce – obelisky mající tvar čtyřbokého hranolce, na jehož horní podstavě je umístěn právě čtyřboký jehlan. U nás ho můžeme najít na třetím nádvoří Pražského hradu (obr. 4.2).



Obrázek 4.2: Obelisk se zakončením ve tvaru čtyřbokého jehlanu na Pražském hradě

Ve tvaru osmibokého jehlanu je postavena rozhledna nacházející se na Moravě u obce Ocmanice (obr. 4.3).



Obrázek 4.3: Patnáctimetrová rozhledna ve tvaru osmibokého jehlanu (Ocmanice) [17]

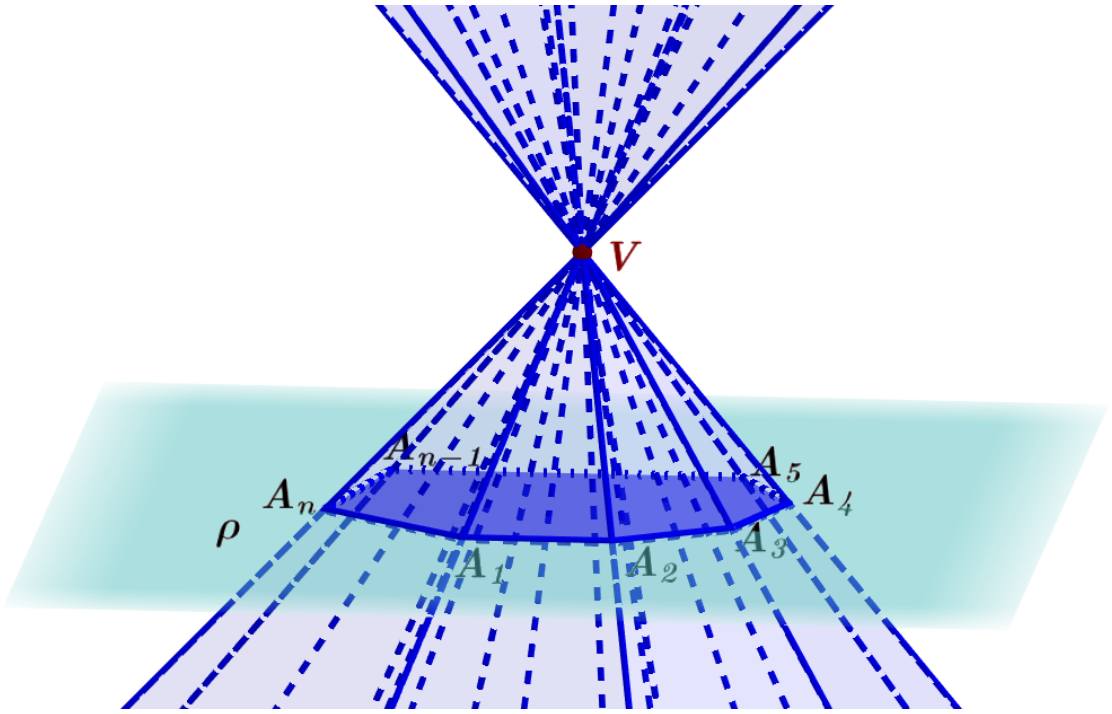
Poznámka

Obdobně k názvu pro skupinu mnohostěnů – tělesa hranolového typu, zde zavedeme název pro další skupinu mnohostěnů – **tělesa jehlanového typu**.

4.2 Zavedení těles jehlanového typu

Tak jako hranolový prostor, hranolovou plochu a hranol zavádíme jehlanový prostor, jehlanovou plochu a jehlan. Mějme dán řídicí n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$, který leží v rovině ρ, a dále bod V, který v této rovině neleží, potom jako ***n*-boký jehlanový prostor** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a které protínají mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$.

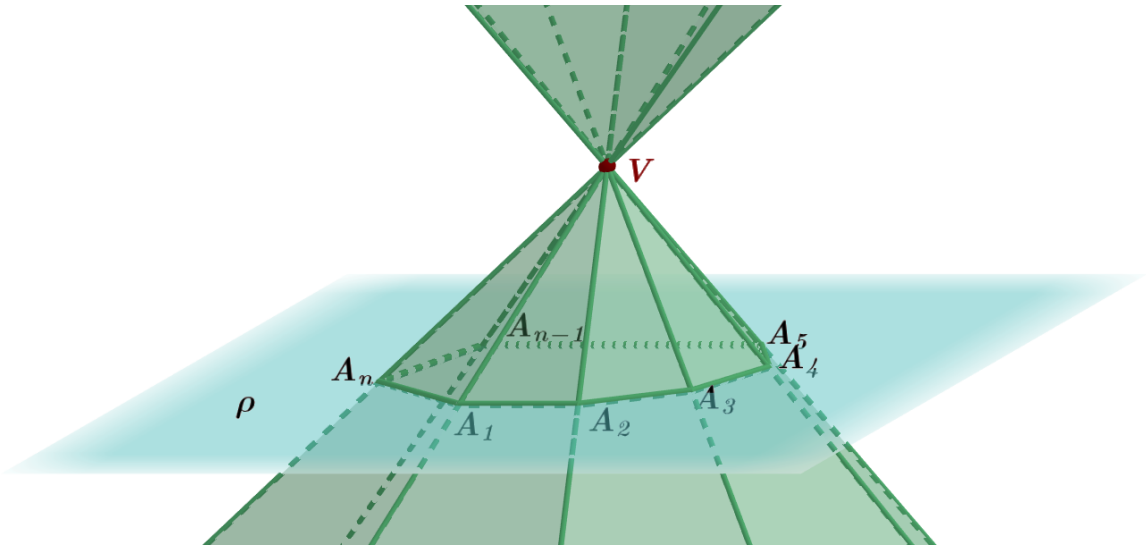
Na následujícím obr. 4.4 se nachází řídicí n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ v rovině ρ a bod V, které určují zobrazený n-boký jehlanový prostor.



Obrázek 4.4: Jehlanový prostor n-boký

Jako ***n*-bokou jehlanovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a které protínají obvod řídicího mnohoúhelníku. Jehlanovou plochu pokládáme za hranici jehlanového prostoru. Bod V nazýváme **vrcholem** jehlanové plochy či jehlanového prostoru. Každou přímku procházející bodem V pokládáme za **vrcholovou přímku**.

Na obr. 4.5 se nachází obvod řídicího n-úhelníku A_1A_2 ... A_n v rovině ρ a bod V, které dohromady určují n-bokou jehlanovou plochu.

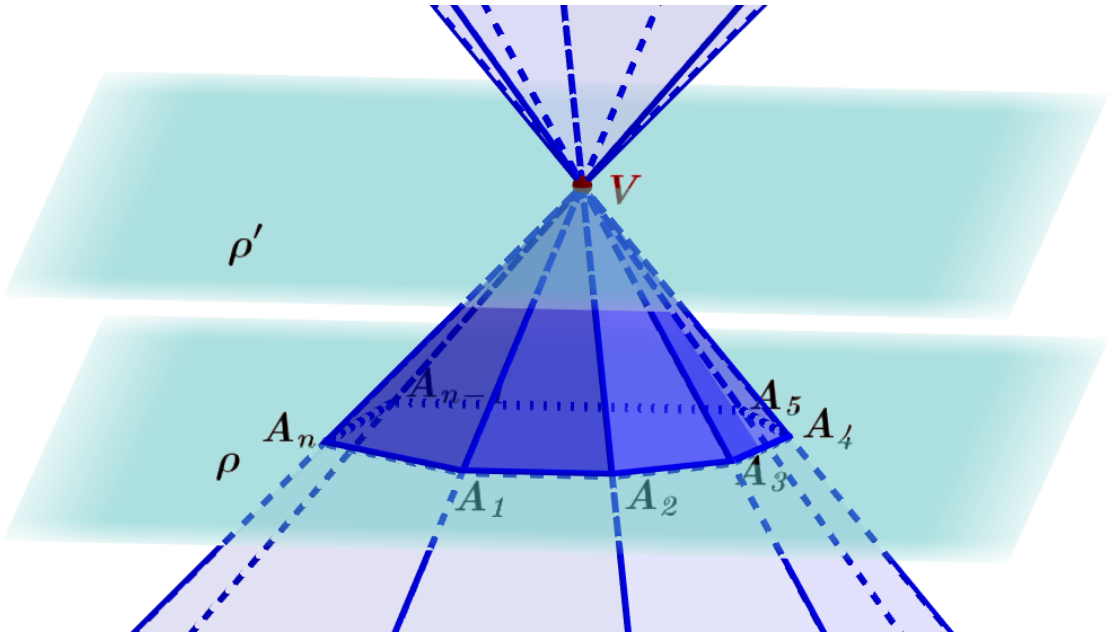


Obrázek 4.5: Jehlanová plocha n-boká

Definice

Průnikem n-bokého jehlanového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s daným prostorem pouze jediný společný bod, kterým je vrchol V jehlanového prostoru, získáme těleso, které nazýváme ***n*-boký jehlan**.

Na obr. 4.6 je zobrazen průnik n-bokého jehlanového prostoru a prostorové vrstvy. Vznikne tak n-boký jehlan.



Obrázek 4.6: Jehlan n-boký

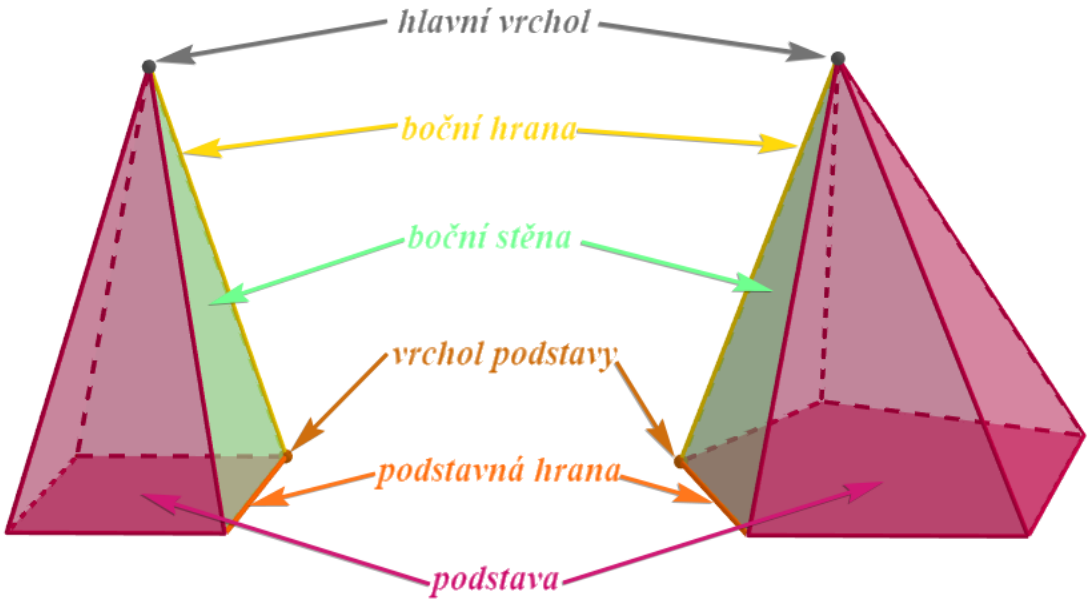
Poznámka

Názvosloví jehlanů je odvozeno od typu řídicího mnohoúhelníku. Například jehlan, jehož podstava je šestiúhelník, je označován jako **šestiboký jehlan**.

Definice

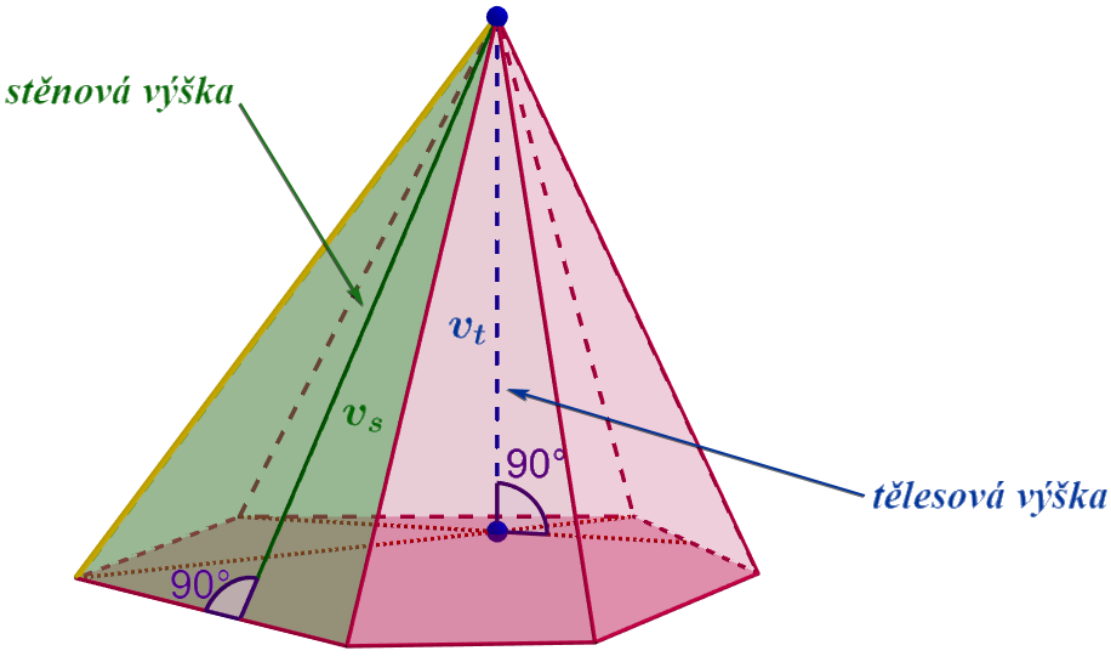
Vrchol jehlanového prostoru bod V se stává **hlavním vrcholem jehlanu**. Řídicí mnohoúhelník, který leží v rovině ρ, označujeme jako **podstavu jehlanu**. Jeho vrcholy nazýváme **vrcholy podstavy**. Stěny jehlanu obsahující hlavní vrchol označujeme jako **boční stěny** jehlanu a dohromady tvoří **plášť** jehlanu. Každá boční stěna jehlanu má tvar trojúhelníku. Strany řídicího mnohoúhelníku (podstavy) jehlanu označujeme jako **podstavné hrany**, ostatní hrany označujeme jako **boční hrany** jehlanu.

Uvedené pojmy jsou ilustrovány na obr. 4.7.



Obrázek 4.7: Vrcholy, hrany a stěny jehlanů

Vzdálenost roviny podstavy a hlavního vrcholu V se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška jehlanu**. Vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně je **stěnová výška jehlanu**. Tyto pojmy jsou ilustrované na následujícím obr. 4.8.



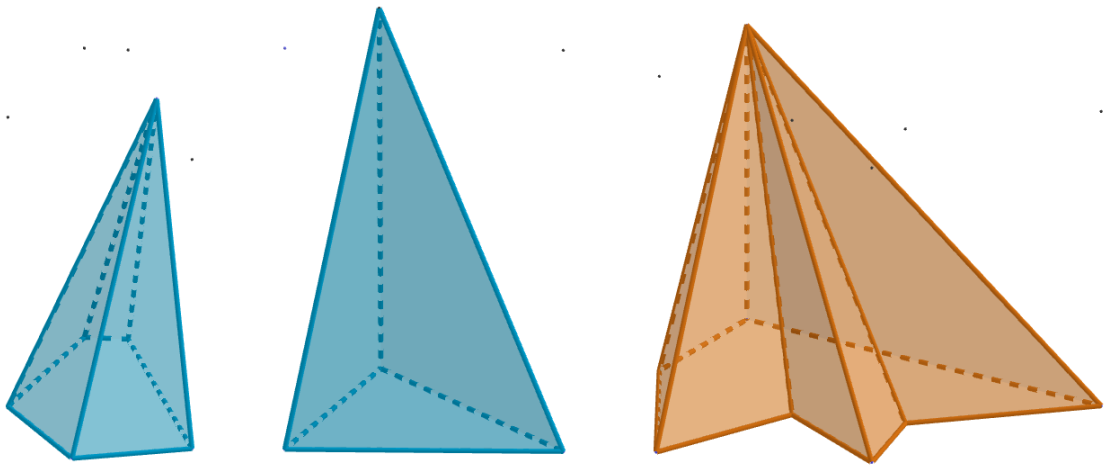
Obrázek 4.8: Tělesová a stěnová výška jehlanu

4.3 Klasifikace jehlanů

Jehlany můžeme klasifikovat podle různých kritérií.

4.3.1 Konvexní a nekonvexní jehlany

Jehlany, obdobně jako jiné typy těles, lze dělit na **konvexní** a **nekonvexní**. Tyto pojmy jsme si již zavedli v předcházející kapitole. Zda je jehlan konvexní, resp. nekonvexní, souvisí s tím, zda je konvexní, resp. nekonvexní jeho podstava. Na obr. 4.9 jsou zobrazeny dva konvexní a jeden nekonvexní hranol.



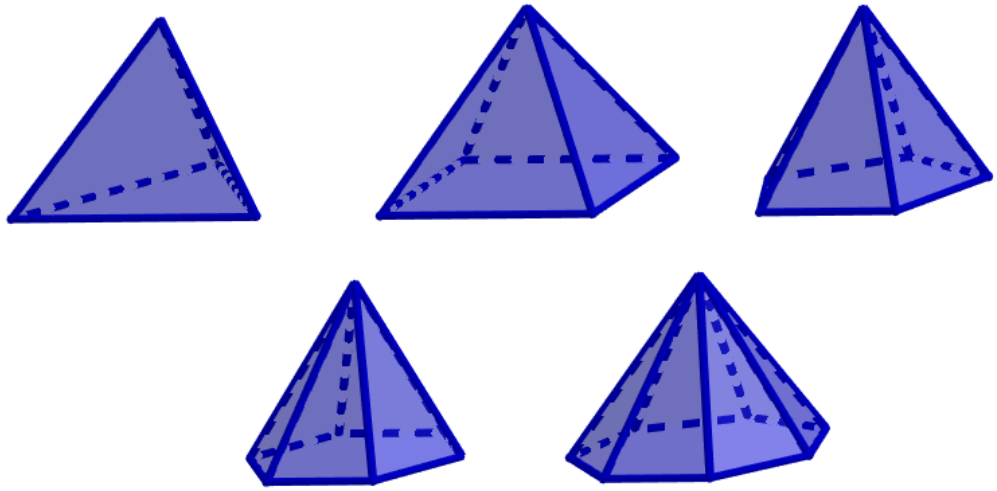
Obrázek 4.9: Konvexní pětiboký jehlan a trojboký jehlan, nekonvexní sedmiboký jehlan

4.3.2 Pravidelné a nepravidelné jehlany

Poznámka

Jehlany nerozdělujeme na kolmé a kosé, tak jako hranoly v předcházející kapitole, neboť u jehlanu nemáme přímku určující směr jehlanového prostoru.

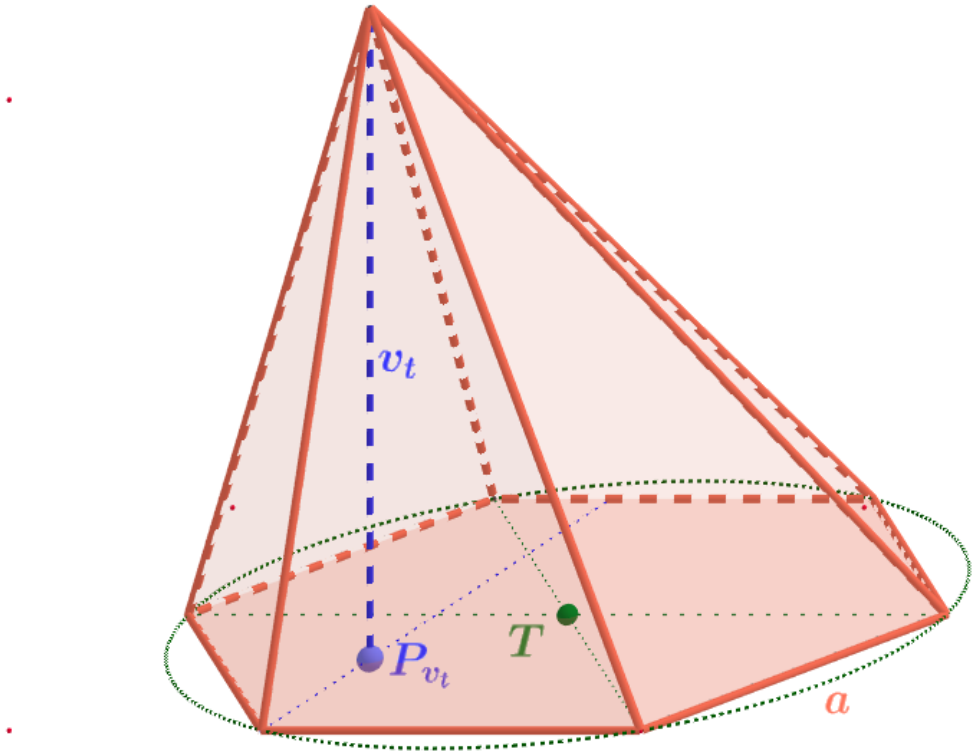
Jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a jehož pata tělesové výšky se nachází v těžišti podstavy (těžištěm pravidelného mnohoúhelníku rozumíme střed kružnice tomuto n-úhelníku opsané a vepsané), se nazývá **pravidelný n-boký jehlan** (obr. 4.10), v opačném případě jde o **nepravidelný n-boký jehlan**. Stěny pravidelného n-bokého jehlanu jsou vždy navzájem shodné trojúhelníky. Například podstavou pravidelného pětibokého jehlanu je pravidelný pětiúhelník a boční stěny jsou navzájem shodné rovnoramenné (případně rovnostranné) trojúhelníky.



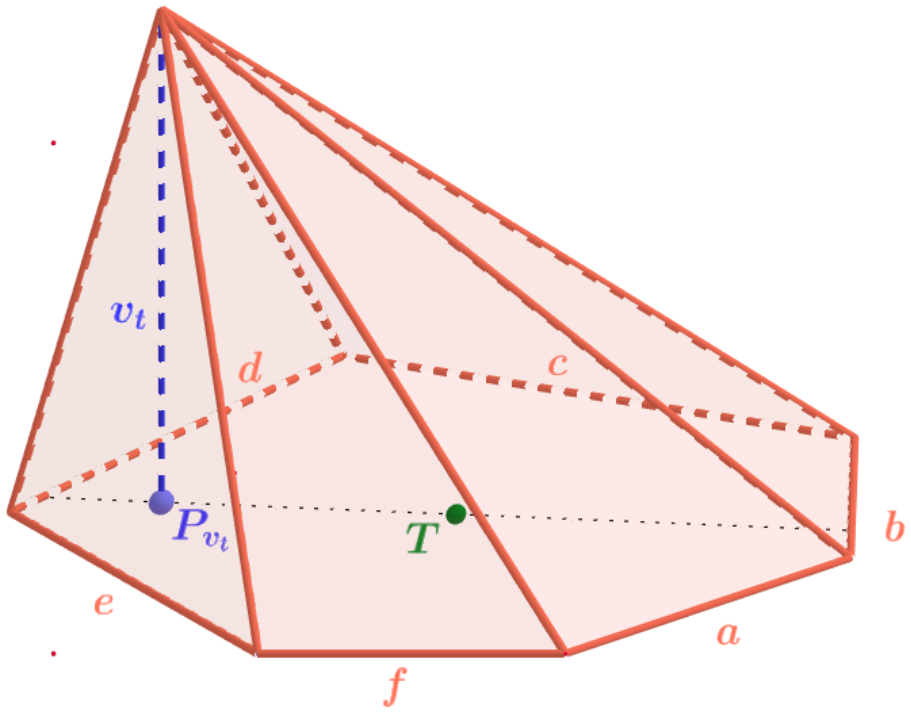
Obrázek 4.10: Zleva (horní řada): pravidelný trojboký jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný pětiboký jehlan; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký jehlan a pravidelný sedmiboký jehlan

Poznámka

Jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a pata jeho tělesové výšky se nenachází v těžišti podstavy, není pravidelný, neboť stěny nejsou navzájem shodné trojúhelníky (obr. 4.11). Jehlan, jehož podstavou je nepravidelný n-úhelník, bez ohledu na umístění paty jeho tělesové výšky rovněž není pravidelný (obr. 4.12).

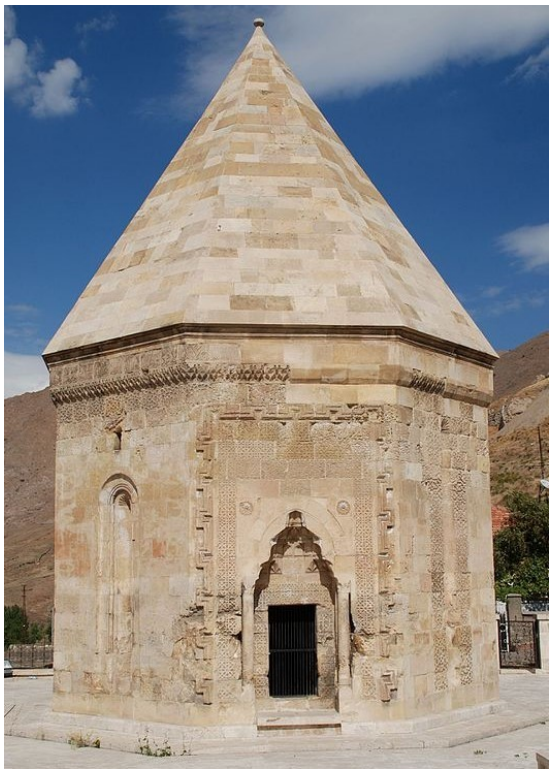


Obrázek 4.11: Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku



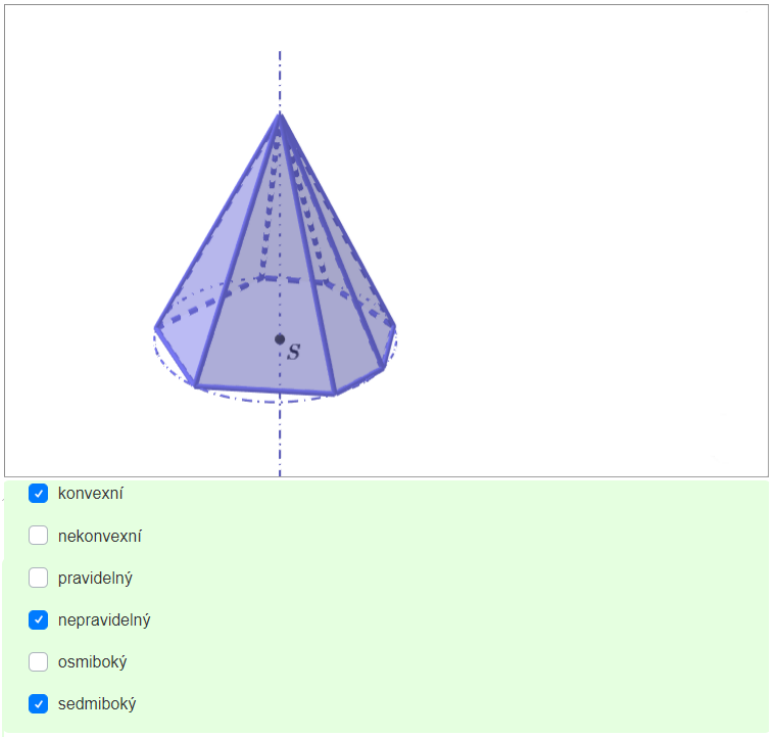
Obrázek 4.12: Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru nepravidelného šestiúhelníku

S pravidelnými jehlany se můžeme setkat v architektuře. Například jde o střechu mauzolea v tureckém Divriği, která má tvar pravidelného šestibokého jehlanu (obr. 4.13).

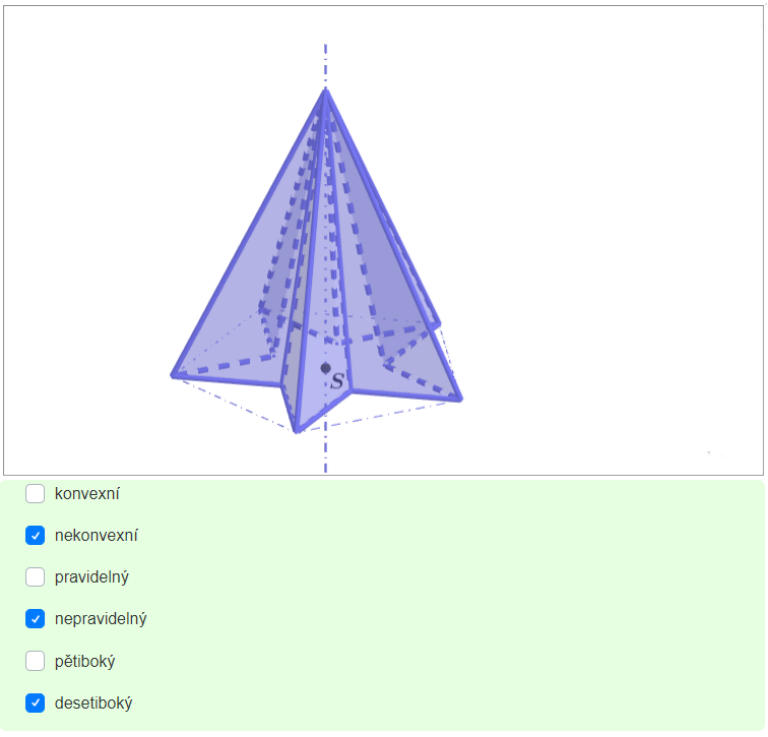


Obrázek 4.13: Střecha mauzolea ve tvaru pravidelného šestibokého jehlanu (Divriği) [18]

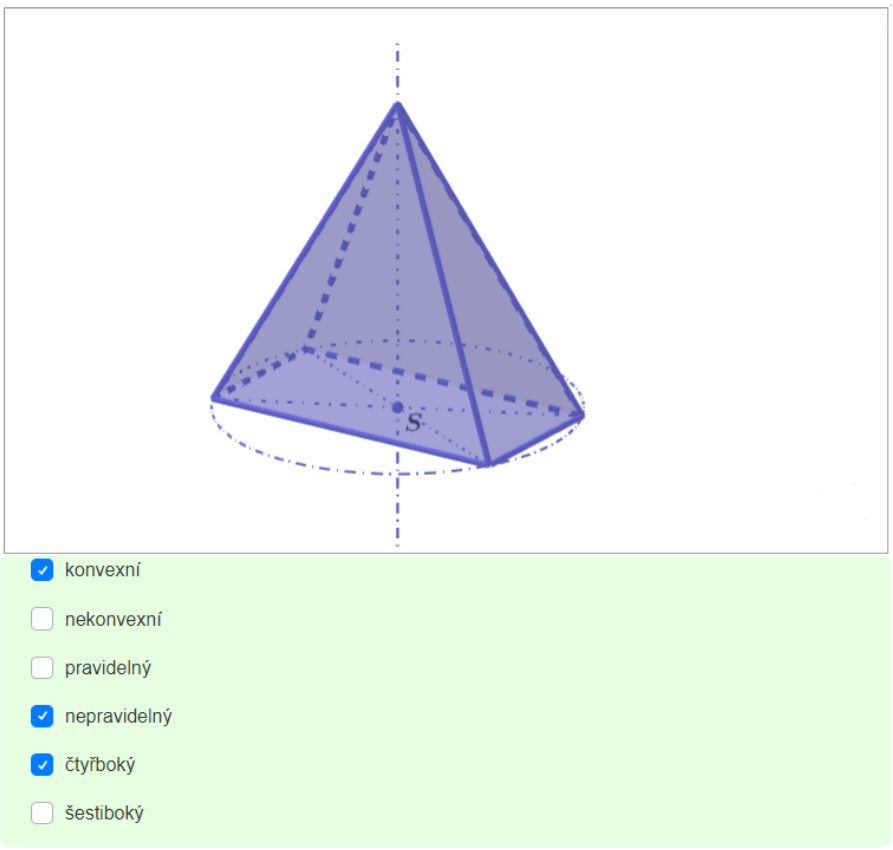
Úloha 4.3.1 Následující obr. 4.14–4.17 obsahují úlohy na ověření znalostí z klasifikace jehlanů. V každé úloze je jedna a více možných správných tvrzení o příslušných jehlanech. Bod S je těžištěm podstavy. Jakmile vyplníte ve webové verzi všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



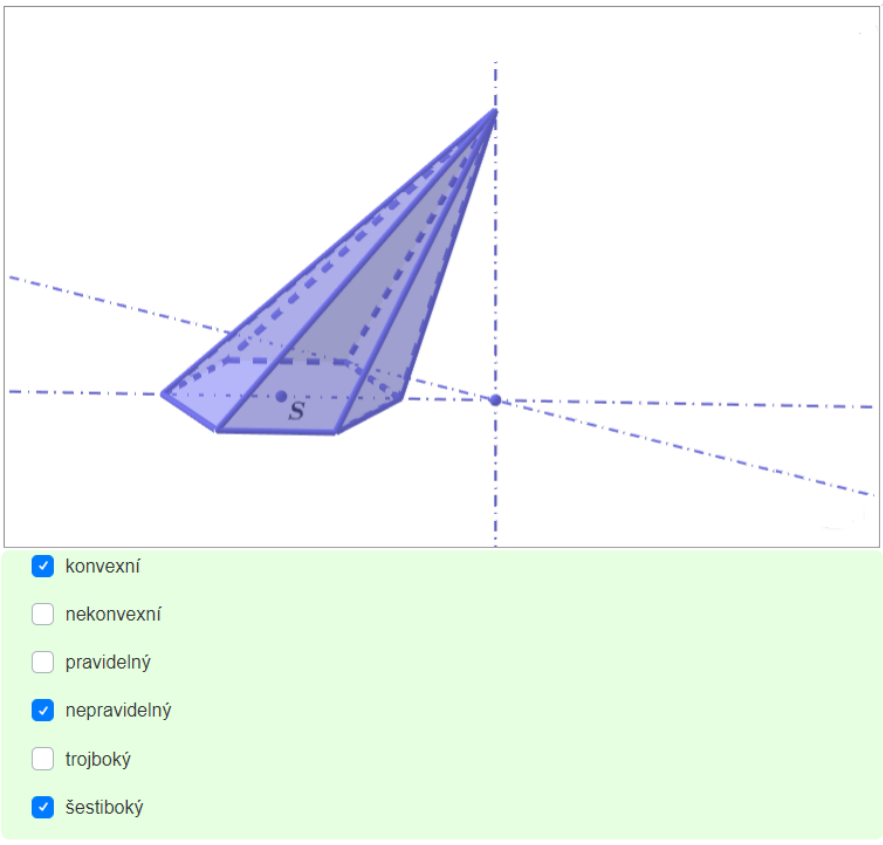
Obrázek 4.14: O jaký jehlan se jedná?



Obrázek 4.15: O jaký jehlan se jedná?



Obrázek 4.16: O jaký jehlan se jedná?



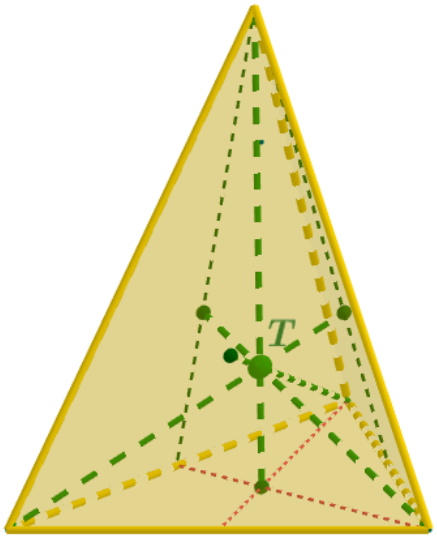
Obrázek 4.17: O jaký jehlan se jedná?

4.4 Další typy jehlanů

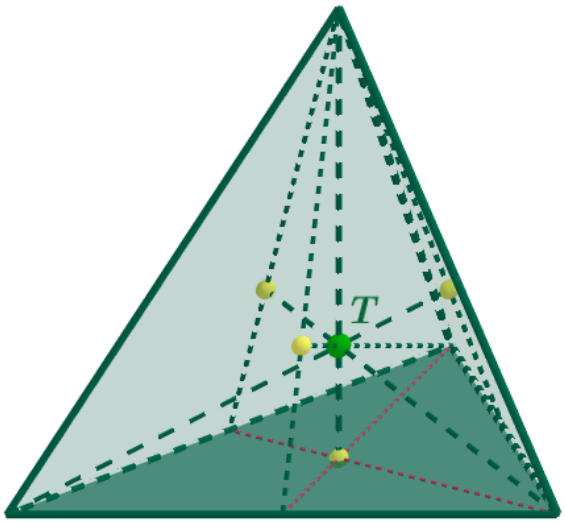
Ve školské matematice pracujeme s následujícími typy jehlanů, které si postupně představíme.

4.4.1 Čtyřstěn

Trojboký jehlan, což je jehlan s nejmenším počtem stěn čtyři, nazýváme **čtyřstěn** (obr. 4.18). Jsou-li jeho stěny tvořeny čtyřmi navzájem shodnými rovnostrannými trojúhelníky, jedná se o **pravidelný čtyřstěn** (pravidelný tetraedr, viz obr. 4.19, který řadíme mezi Platónská tělesa). Za **těžnici** čtyřstěnu je pokládána spojnice libovolného vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny. **Těžiště čtyřstěnu** je bod,ve kterém se všechny čtyři těžnice čtyřstěnu protínají. Vzdálenost těžiště od vrcholu se rovná třem čtvrtinám délky příslušné těžnice.



Obrázek 4.18: Čtyřstěn a jeho těžiště



Obrázek 4.19: Pravidelný čtyřstěn a jeho těžiště

Během 2. světové války vznikly železobetonové protitankové zátarasy tzv. „dračí zuby“ ve tvaru pravidelného čtyřstěnu (obr. 4.20–4.21). Ty byly používány k zamezení průjezdu tanků. Z praktického hlediska bylo velmi výhodné využít právě tvar pravidelného čtyřstěnu pro instalaci zátaras, jelikož ať dopadla na jakoukoli stěnu, pozice zábrany zůstala vždy stejná. Dnes tyto zátarasy nacházejí využití ke stabilizaci dna pod jezem nebo k dočasné uzavírce cesty.



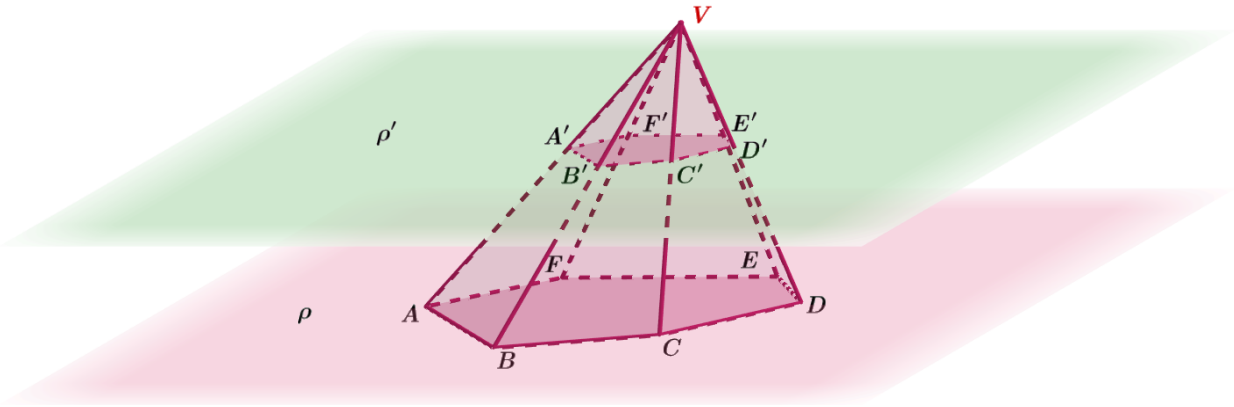
Obrázek 4.20: Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (SLO, Pivka) [19]



Obrázek 4.21: Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (CZ, Nové Údolí)

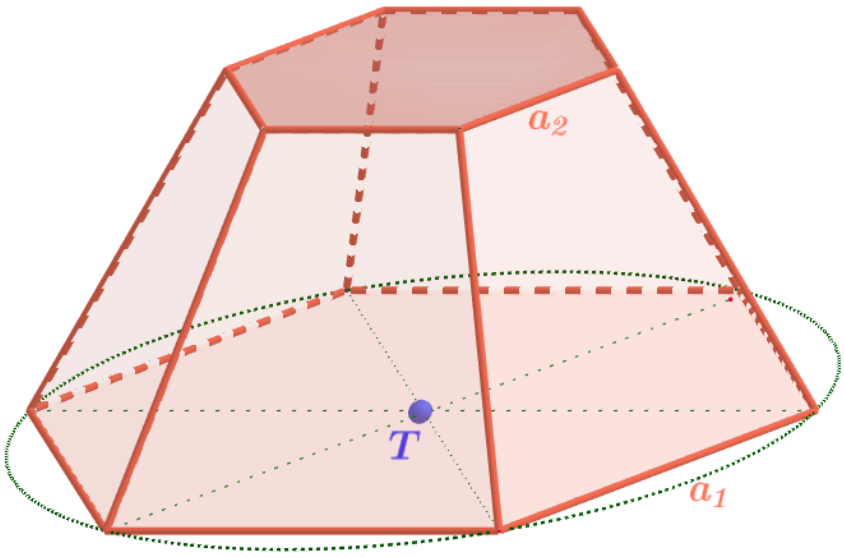
4.4.2 Komolý jehlan

Jehlany narozdíl od hranolů jsou tělesa mající hlavní vrchol. Pokud jehlan seřízneme rovinou rovnoběžnou s podstavou, vznikají dvě tělesa. Jedno těleso je opět jehlan s hlavním vrcholem V, jeho tělesová výška je menší než výška původního jehlanu. Druhé těleso označujeme jako **komolý jehlan**, který má dvě podstavy ležící v rovnoběžných rovinách (obr. 4.22).



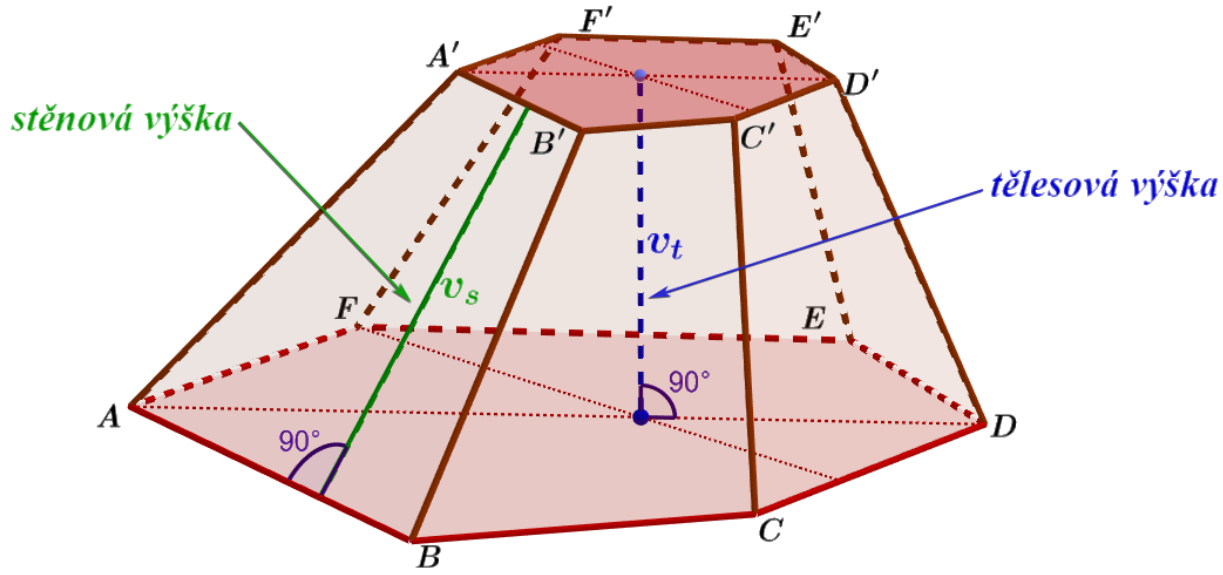
Obrázek 4.22: Vznik komolého jehlanu

Pokud jsou podstavami komolého jehlanu navzájem podobné pravidelné n-úhelníky a boční stěny jsou tvořeny shodnými rovnoramennými lichoběžníky, pak se jedná o **pravidelný komolý jehlan** (obr. 4.23).



Obrázek 4.23: Pravidelný komolý šestiboký jehlan

Podstavy komolého jehlanu jsou dva podobné mnohoúhelníky a boční stěny jsou lichoběžníky. Tělesová výška neboli **výška komolého jehlanu** je rovna vzdálenosti rovin jeho podstav a stěnová výška je vzdálenost podstavných hran ležících ve stejné boční stěně (obr. 4.24).



Obrázek 4.24: Stěny a výšky komolého šestibokého jehlanu

V Estonsku nacházíme dřevěné megaphony k poslouchání zvuků lesa. V nejširším místě měří tři metry a byly vytvořeny studenty uměleckoprůmyslové školy ve tvaru pláště devítibokého komolého jehlanu (obr. 4.25).



Obrázek 4.25: Lesní megaphony ve tvaru devítibokého komolého jehlanu (EST, Võru) [20]

4.5 Anti-modely jehlanů

Předtím, než přejdeme k zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů jehlanů, si ověříme pochopení předchozích pojmů. Uvedeme si tzv. anti-modely jehlanů.

Anti-modelem jehlanu zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice jehlan připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o jehlan nejedná. Prvním příkladem je těleso nazývané v architektuře **dvojjehlan** vyobrazené na obr. 4.26. Řadí se mezi mnohostěny a vzniká sjednocením dvou jehlanů se shodnými podstavami. Čtyřboký dvojjehlan označujeme jako osmistěn. Pravidelný osmistěn řadíme mezi Platónská tělesa.



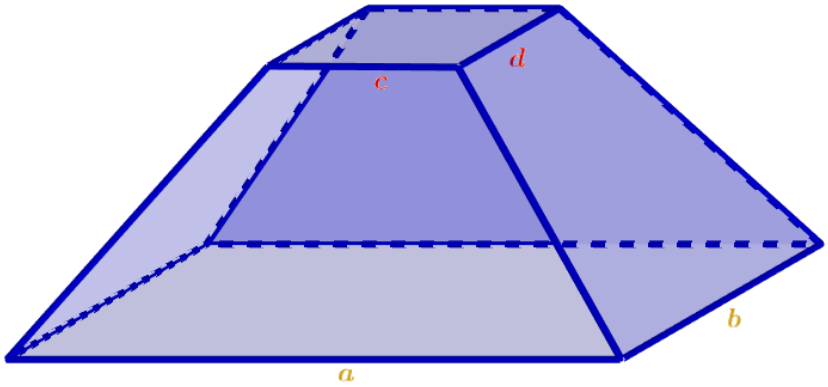
Obrázek 4.26: Stojan na květinu ve tvaru čtyřbokého dvojjehlanu (osmistěnu)

Jako druhý příklad anti-modelu jehlanu si uvedeme těleso zvané **trapezoedr**. Je ohraničen sudým počtem stěn majících tvar čtyřúhelníků – deltoidů. Na obr. 4.27 jsou vyobrazeny desetiboké hrací kostky ze hry Dungeons & Dragons, jež mají tvar pětibokého trapezoedru.



Obrázek 4.27: Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pětibokého trapezoedru [21]

Třetím příkladem anti-modelu jehlanu je těleso zvané **hranolec**. Jedná se o prismatoid vzniklý osekáním krychle. Podstavy tvaru obdélníku (ležící v rovnoběžných rovinách) si nejsou podobné, viz obr. 4.28, kde $\frac{a}{c} \neq \frac{d}{b}$. Pokud by byly podstavy hranolce podobné obdélníky (případně čtverce), jednalo by se o čtyřboký komolý jehlan.



Obrázek 4.28: Hranolec

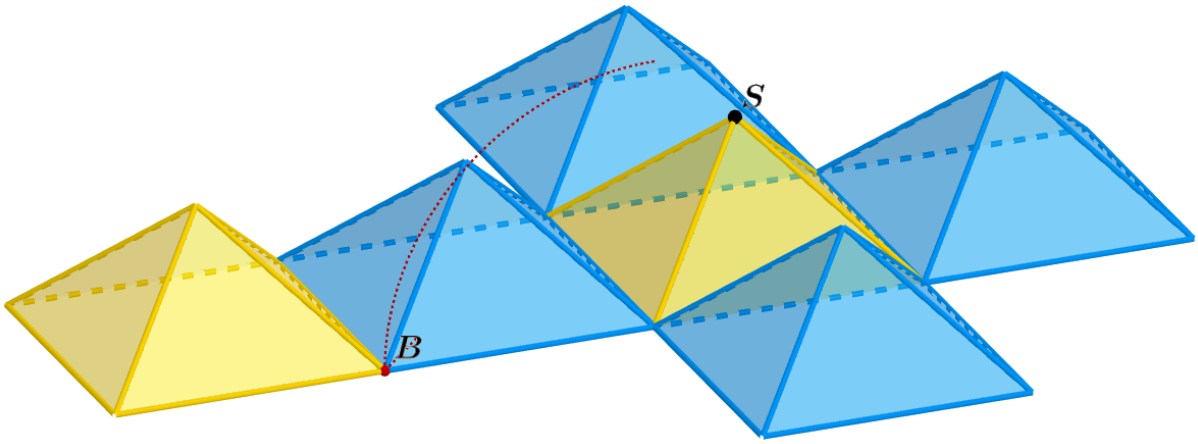
4.6 Objem jehlanu

V této kapitole si představíme, jak se počítá objem jehlanu. Pro odvození vzorce pro objem jehlanu vycházíme z objemu krychle o hraně délky a.

Tedy objem V krychle o hraně délky a je

$$V = a^3.$$

Vzorec pro objem jehlanu můžeme nastínit rozdělením krychle na šest shodných čtyřbokých jehlanů (obr. 4.29). Jelikož podstava každého ze šesti čtyřbokých jehlanů je zároveň jednou stěnou krychle, bude se jednat o pravidelné čtyřboké jehlany. Mají jediný společný bod – hlavní vrchol, který je umístěný ve středu neboli těžišti krychle (bod S), tedy jejich výška je $\frac{a}{2}$.



Obrázek 4.29: Krychle rozdělená na šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů

Krychli lze tedy složit z šesti shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů o podstavné hraně a, tělesové výšce $\frac{a}{2}$. Můžeme tedy vyjádřit objem V_j jednoho jehlanu pomocí objemu V_k krychle o hraně a, tedy

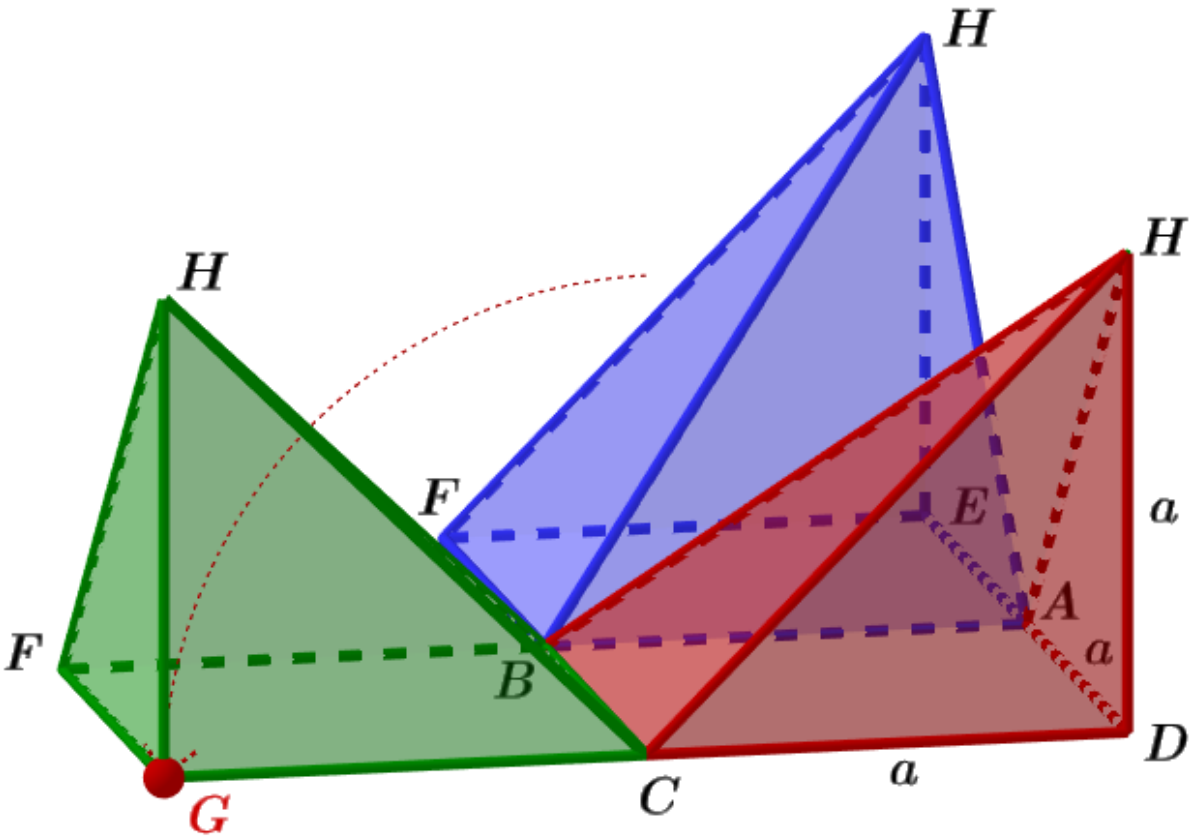
$$V_j = \frac{V_k}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

Pro objem V_j dílčího pravidelného jehlanu, jehož podstava je čtverec o straně a ($S_p = a^2$) a jehož výška v je $\frac{a}{2}$, platí

$$V_j = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} S_p v.$$

Odvození vzorce pro objem n-bokého jehlanu

Pomocí krychle si také odvodíme objem trojbokého jehlanu. Nejprve si ještě ukážeme, že objem čtyřbokého jehlanu, který není pravidelný, lze odvodit obdobně jako pro pravidelný čtyřboký jehlan. Krychli $ABCDEFGH$ rozdělíme na tři shodné nepronikající se jehlany $CDABH$, $GCBFH$ a $BAEFH$ se čtvercovou podstavou o straně a a tělesovou výškou rovněž délky a (obr. 4.30). Podle první vlastnosti objemu se jejich objemy rovnají a podle druhé vlastnosti objemu platí, že objem krychle je součtem objemů těchto tří čtyřbokých jehlanů. Tedy objem V tohoto čtyřbokého jehlanu se čtvercovou podstavou je roven třetině objemu původní krychle.



Obrázek 4.30: Krychle rozdělená na tři čtyřboké jehlany $CDABH$, $GCBFH$ a $BAEFH$

Z předchozího tvrzení vyplývá, že pokud podstava je čtverec o straně a ($S_p = a^2$) a tělesová výška je též délky a, tak pro objem uvedeného čtyřbokého jehlanu platí

$$V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{1}{3}S_p v.$$

Nyní zvolíme kolmý trojboký hranol $KLMNOP$ namísto krychle a pomocí něho odvodíme vzorec pro objem trojbokých jehlanů. Tento kolmý trojboký hranol $\mathcal{H}$ rozdělíme na tři nepronikající se trojboké jehlany $KLMN$, $NOPL$ a $LMPN$ (obr. 4.31). Víme podle druhé vlastnosti objemu, že objem celého kolmého trojbokého hranolu je roven součtu objemů tří trojbokých jehlanů:

$$V(\mathcal{H}) = V(KLMN) + V(NOPL) + V(LMPN).$$

Nyní budeme zjišťovat, zda tři nepronikající se trojboké jehlany $KLMN$, $NOPL$ a $LMPN$ mají stejné objemy. Nejdříve dokážeme rovnost objemů trojbokých jehlanů $KLMN$, $NOPL$. Objemy jehlanů $KLMN$ a $NOPL$ se rovnají, neboť jehlany jsou shodné, jelikož podstavami obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky KLM a NOP a jehlany mají zároveň shodné všechny boční stěny. Vycházíme z první vlastnosti objemu, která uvádí, že shodná tělesa mají sobě rovné objemy a platí

$$V(KLMN) = V(NOPL).$$

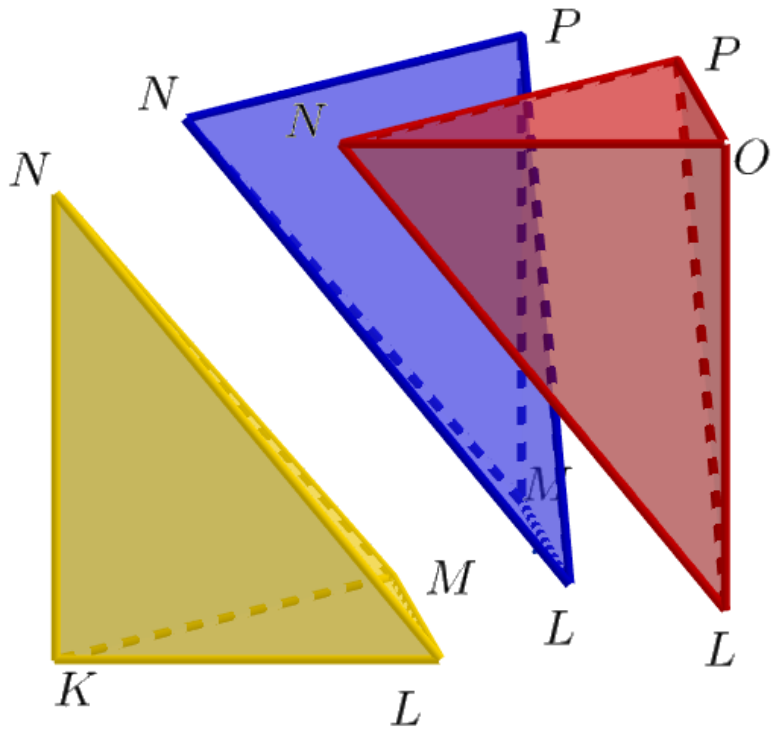
Dále potřebujeme dokázat rovnost objemů trojbokých jehlanů $NOPL$ a $LMPN$. Trojboký jehlan $NOPL$ s podstavou NOP a hlavním vrcholem v bodě L překlopíme na trojboký jehlan s podstavou LOP a hlavním vrcholem v bodě N.

Objemy jehlanů $LOPN$ a $LMPN$ se rovnají, neboť platí Cavalieriho princip, jelikož podstavami obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky LOP a LMP (protože rovnoběžník $LMOP$ je rozdělený stěnovou úhlopříčkou LP na dva shodné trojúhelníky – podstavy LOP a LMP); dále mají stejnou tělesovou výšku (protože tyto dva trojboké jehlany dohromady tvoří čtyřboký jehlan $LMOPN$ s podstavou $LMOP$ a hlavním vrcholem v bodě N). Platí

$$V(LOPN) = V(LMPN).$$

Tím jsme dokázali, že tři trojboké jehlany $KLMN$, $NOPL$ a $LMPN$ mají stejný objem. Jelikož se jejich objemy rovnají, tak pro trojboké jehlany platí

$$V = \frac{1}{3}V(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}S_p v.$$



Obrázek 4.31: Trojboký hranol $\mathcal{H}$ rozdělený na tři trojboké jehlany

Pro určení objemu n-bokého jehlanu ($n \in \mathbb{N}, n > 3$) využijeme Cavalieriho princip. Mějme dán trojboký nebo čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou a další n-boký tak, že podstavy daných jehlanů mají stejný obsah podstavy S_p a stejnou výšku v. Umístíme je do roviny ρ. Mnohoúhelníky vzniklé řezem jehlanů rovinou σ, $\sigma \parallel \rho$, jsou stejnolehlé s podstavami jehlanů, a tedy podobné. Středy stejnolehlostí jsou umístěny v hlavních vrcholech těchto jehlanů. Koeficient podobnosti je u těchto řezů stejný, platí

$$k = \frac{v_1}{v},$$

Rozšiřující poznámka. Stejnolehlost – Definice je převzata z [Ptáčková (2014) s. 59].

Definice

Stejnolehlost $H(S, \kappa)$ (neboli homotetie) určená bodem S a nenulovým reálným číslem κ je zobrazení v prostoru, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$.

Pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX;
pro $\kappa < 0$ leží bod X' na polopřímce opačné k polopřímce SX.

Bod S nazýváme **středem stejnolehnosti**, číslo κ nazýváme **koeficientem stejnolehlosti**.

Bod X' je obrazem bodu X ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem κ; zapisujeme takto: $H(S, \kappa) : X \to X'$.

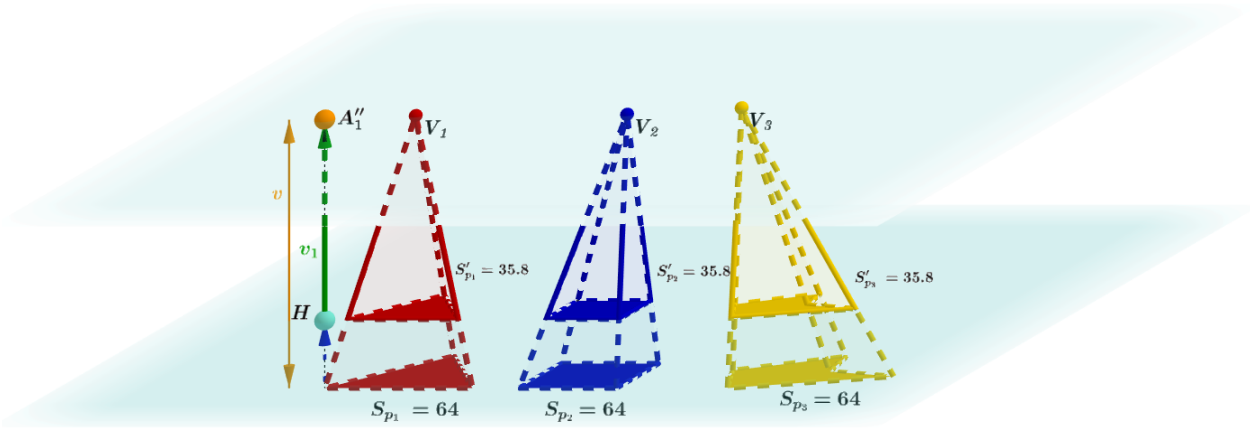
kde v je vzdálenost hlavních vrcholů jehlanů od roviny ρ jejich podstav a v_1 je vzdálenost hlavních vrcholů jehlanů od roviny řezu σ. S využitím stejnolehlosti dostáváme vztah mezi obsahem řezu S a obsahem podstavy S_p:

$$S = k^2 S_p.$$

Díky rovnosti obsahů podstav a stejnému koeficientu podobnosti k u obou jehlanů platí i rovnost pro obsahy řezů. Z Cavalieriho principu vyplývá, že tyto jehlany mají stejný objem, tj. i pro n-boký jehlan platí

$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

Uvažujme konvexní pravidelný trojboký, konvexní nepravidelný čtyřboký a nekonvexní pětiboký jehlan o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek), viz obr. 4.32. Řezy těmito třemi jehlany vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy podobné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná. Tudíž objemy těchto jehlanů jsou si rovny.



Obrázek 4.32: Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti pro tři jehlany se stejnými obsahy podstav S_p a se stejnými výškami v

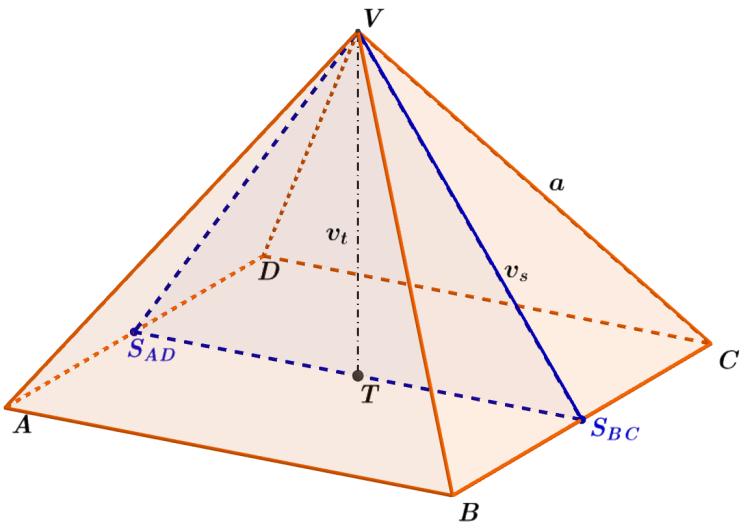
Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

Věta

Objem V libovolného jehlanu s tělesovou výškou v a obsahem podstavy S_p je dán vztahem

$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

Příklad 4.6.1 Vypočítejte objem V_j pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky o straně délky $a = 5$ cm, bod T je středem jeho podstavy. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

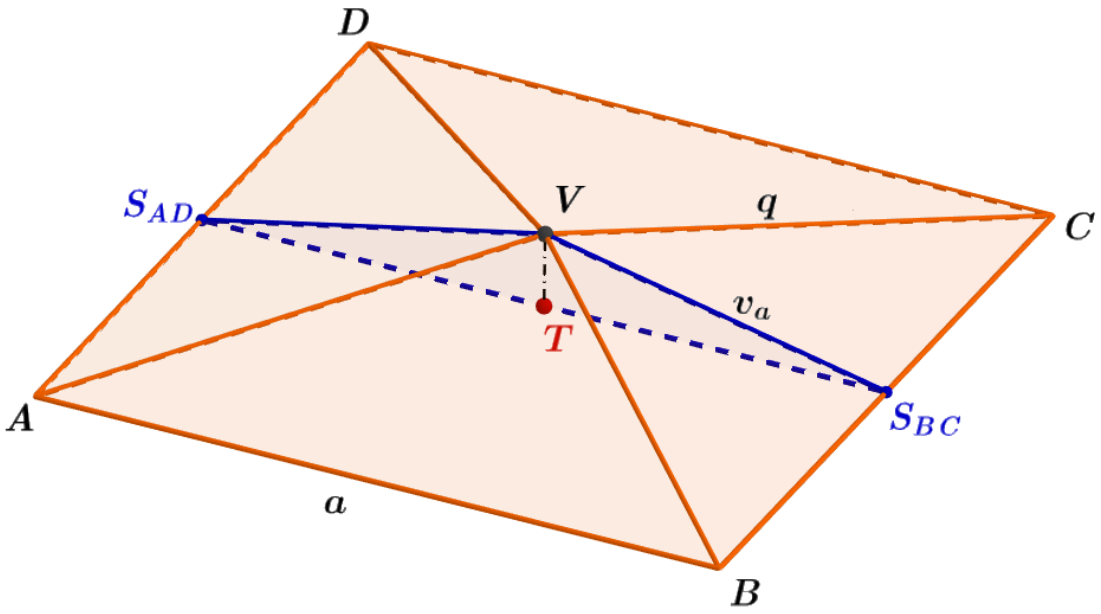


Obrázek 4.33: Ilustrace Příkladu 4.6.1

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v_t.
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky, tak podstavou jehlanu je čtverec $ABCD$ o straně $a = 5$ cm (obr. 4.33).
- Obsah čtvercové podstavy $S_p = a^2 = 25$ cm^2.
- Tělesovou výšku v_t určíme například pomocí rovnoramenného $\triangle S_{BC}S_{AD}V$. Vyjádříme délku jeho stran; $|S_{BC}S_{AD}| = a$; $|TS_{BC}| = \frac{1}{2}a$.
- Pro délku stěnové výšky v_s ($v_s = |S_{BC}V|$) každé boční stěny platí $v_s = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tuto hodnotu vypočítáme Pýthagorovou větou například z rovnostranného $\triangle BCV$, který rozdělíme pomocí v_s na dva pravoúhlé trojúhelníky.
- Z pravoúhlého $\triangle VTS_{BC}$ pomocí Pýthagorovy věty vyjádříme délku v_t; $v_t = \sqrt{((a\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2)} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.
- Pro objem jehlanu platí: $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm^3 $= \frac{5^3\sqrt{2}}{6}$ cm^3 $\doteq 29,5$ cm^3.
- Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je po zaokrouhlení $29,5$ cm^3.

Příklad 4.6.2 Vypočítejte objem V_j pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnoramennými trojúhelníky se základnami délky $a = 4\sqrt{6}$ cm a rameny délky $q = 7$ cm.

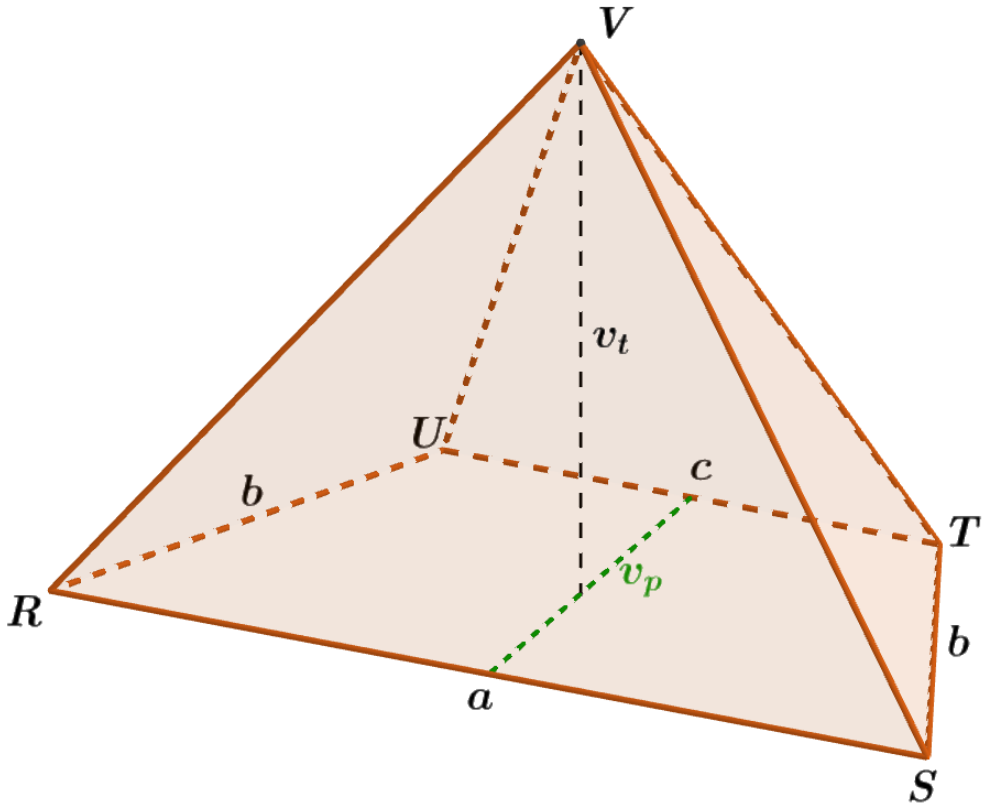


Obrázek 4.34: Ilustrace Příkladu 4.6.2

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a výšku v_t.
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu tvořeny rovnoramennými trojúhelníky se základnou délky $a = 4\sqrt{6}$ cm a rameny délky $q = 7$ cm, tak podstava jehlanu $ABCD$ je čtverec o straně délky a (obr. 4.34).
- $S_p = a^2 = (4\sqrt{6})^2$ cm^2 $= 96$ cm^2.
- Tělesová výška v_t jehlanu je zároveň vyškou k základně rovnoramenného $\triangle S_{AD}S_{BC}V$. Základna tohoto trojúhelníku je rovna $a = |S_{AD}S_{BC}| = 4\sqrt{6}$ cm.
- Ramena rovnoramenného $\triangle S_{AD}S_{BC}V$ vypočítáme z pravoúhlého $\triangle S_{BC}CV$, kde pomocí Pýthagorovy věty určíme v_a;
  $|S_{AD}V| = |VS_{BC}| = v_a = \sqrt{q^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{7^2 - (\frac{4\sqrt{6}}{2})^2}$ cm $= \sqrt{25}$ cm $= 5$ cm.
- Délku tělesové výšky v_t vypočítáme z pravoúhlého $\triangle VTS_{BC}$, kde pomocí Pýthagorovy věty určíme v_t;
  $|VT| = v_t = \sqrt{(v_a)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{5^2 - (\frac{4\sqrt{6}}{2})^2}$ cm$= \sqrt{1}$ cm$= 1$ cm.
- Pro objem jehlanu platí: $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 1$ cm$^3 = 32$ cm^3.
- Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je 32 cm^3.

Příklad 4.6.3 Je dán čtyřboký jehlan $RSTUV$, jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky $a = 8$ dm, $c = 4,5$ dm a dvěma rameny délky $b = 4,3$ dm. Pro výšku v_p rovnoramenného lichoběžníku platí $v_p = 4$ dm. Výška jehlanu měří $4,97$ dm. Vypočítejte objem V_j tohoto jehlanu. Výsledek uveďte na dvě desetinná místa.

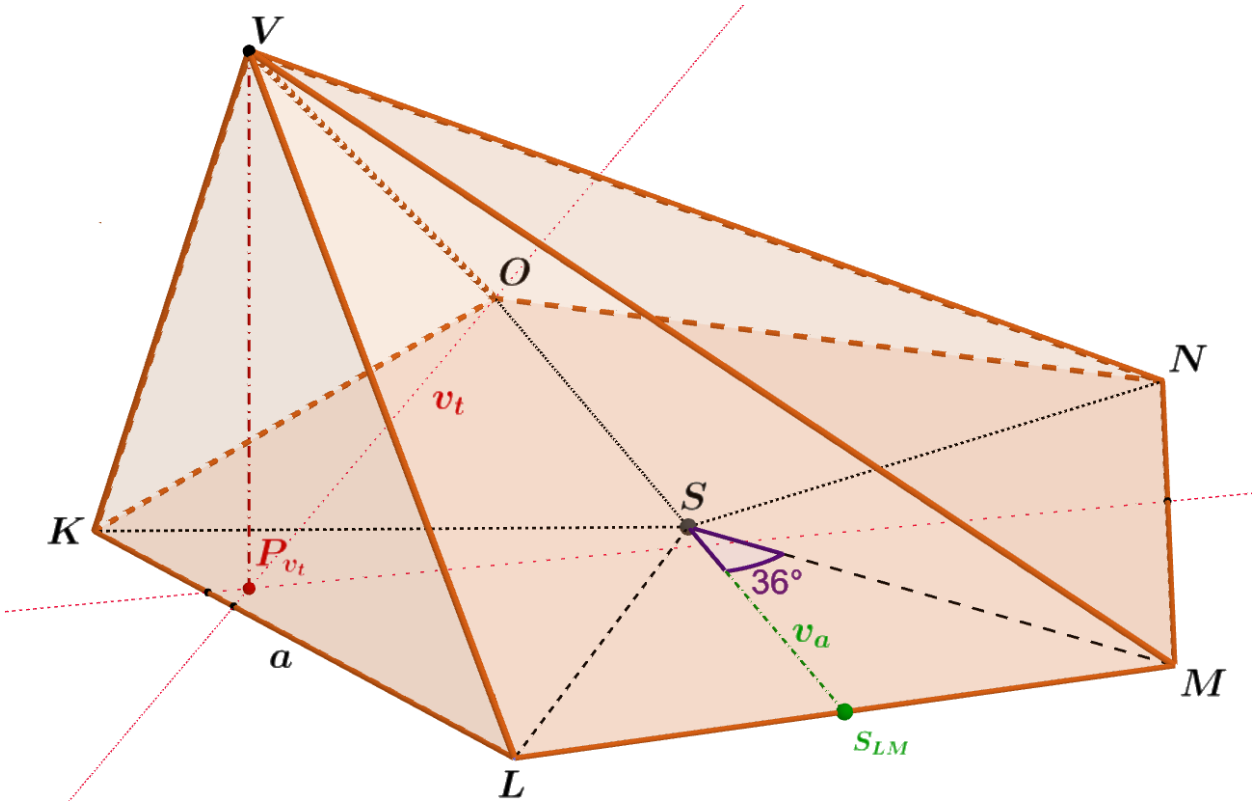


Obrázek 4.35: Ilustrace Příkladu 4.6.3

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku v_t.
- Pro obsah podstavy S_p ve tvaru lichoběžníku platí $S_p = \frac{(a\ +\ c)\ \cdot\ v_p}{2} = \frac{(8\ +\ 4{,}5)\ \cdot\ 4}{2}$ dm^2 $= 25$ dm^2.
- Výška jehlanu $v_t = 4,97$ dm (obr. 4.35).
- Pro objem jehlanu platí: $V_j = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 4,97$ dm^3 $\doteq 41,42$ dm^3.
- Objem čtyřbokého jehlanu $RSTUV$ je po zaokrouhlení $41,42$ dm^3.

Příklad 4.6.4 Je dán pětiboký jehlan $KLMNOV$, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník o straně $a = 10$ m. Výška v_t jehlanu měří $8,42$ m. Určete jeho objem V_j. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

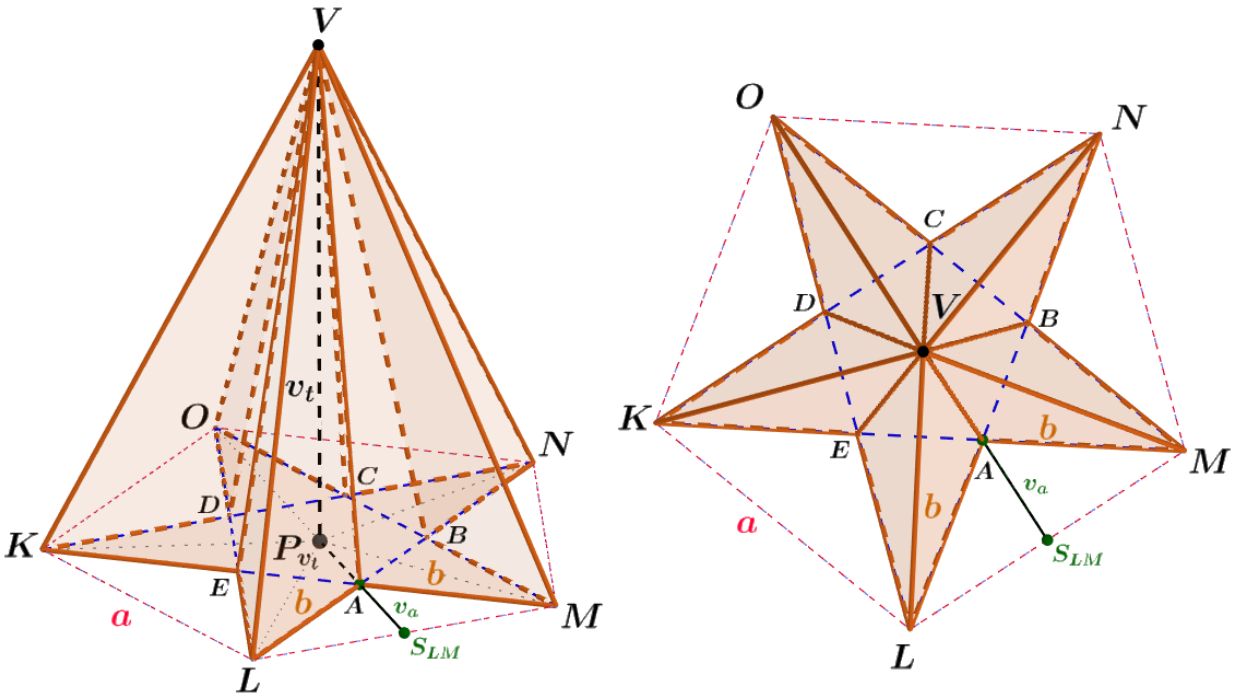


Obrázek 4.36: Ilustrace Příkladu 4.6.4

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku $v_t = 8,42$ m.
- Podstavou daného jehlanu je pravidelný pětiúhelník o straně $a = 10$ m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.36); $S_{\triangle LMS} = \frac{av_a}{2}$.
  Z $\triangle SS_{LM}M$ vyjádříme v_a; $v_a = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 5$ m $\doteq 6,882$ m.
  Tedy $S_{\triangle LMS} = \frac{10 \cdot 6,882}{2}$ m$^2 \doteq 34,410$ m^2; $S_p = 5 \cdot S_{\triangle LMS} = 5 \cdot 34,410$ m$^2 = 172,050$ m^2.
- Výška jehlanu $v_t = 8,42$ m.
- Pro objem jehlanu platí: $V_j = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 172,050 \cdot 8,42$ m$^3 \doteq 482,89$ m^3.
- Objem pětibokého jehlanu $KLMNOV$ je po zaokrouhlení $482,89$ m^3.

Příklad 4.6.5 Je dán nekonvexní desetiboký jehlan $KELAMBNCODV$. Podstavou tohoto jehlanu je pentagram, tj. pěticípý nekonvexní hvězdicovitý mnohoúhelník se stranami stejné délky. Pentagram vznikl z pravidelného konvexního pětiúhelníku o straně $a = 5$ m. Výška v_t jehlanu je $8,55$ m. Určete jeho objem V_j. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.37: Ilustrace Příkladu 4.6.5

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku $v_t = 8,55$ m.
- Obsah podstavy S_p ve tvaru pentagramu (obr. 4.37) vypočítáme tak, že od obsahu S_1 konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ odečteme pětinásobek obsahu rovnoramenného $\triangle LMA$ o základně $a = 5$ m a ramenech b;
  $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA}$. Je třeba vypočítat $S_{\triangle LMA}$.
- Vyjádříme $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2}$. Je třeba vypočítat v_a.
- Z pravoúhlého $\triangle S_{LM}MA$ pomocí Pythagorovy věty vyjádříme délku v_a;
  $v_a = \sqrt{|AM|^2 - |S_{LM}M|^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}$. Je třeba vypočítat $|AM| = b$.
- Přepona $|AM| = b$ pravoúhlého $\triangle S_{LM}MA$ je zároveň ramenem rovnoramenného $\triangle LMA$; a také část úhlopříčky KM konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$. Úhlopříčky konvexního pravidelného pětiúhelníku jsou všechny stejně dlouhé a každé dvě se vzájemně dělí v poměru φ nazývaném zlatý řez; číslo φ je zlatým číslem; $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. V tomto případě se úhlopříčky KM, NL konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ protínají v bodě A. Tedy pomocí zlatého řezu vyjádříme poměr mezi

úsečkami: $\frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|KA|}{|AM|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vyjádříme délku úsečky $|KA| = a = 5$ m, jelikož $\triangle KAN \sim \triangle KNO$ a tvoří kosočtverec $KANO$; $|KA| = a$. Ze vztahu $\frac{|KA|}{|AM|} = \varphi$ vyjádříme $|AM| = b$; $|AM| = \frac{|KA|}{\varphi}$, tedy $|AM| = \frac{a}{\varphi} = \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ m $\doteq 3,090$ m.

- Vypočítáme v_a; $v_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{3,090^2 - (\frac{5}{2})^2}$ m $\doteq 1,816$ m.
- Obsah $\triangle LMA$ je $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2} = \frac{5 \cdot 1,816}{2}$ m $= 4,540$ m^2.
- Vypočítáme obsah S_1 konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ o straně $a = 5$ m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků; $S_{\triangle LMP_{v_t}} = \frac{a \cdot |P_{v_t}S_{LM}|}{2}$. Z $\triangle P_{v_t}S_{LM}M$ vyjádříme výšku $|P_{v_t}S_{LM}|$;

  $|P_{v_t}S_{LM}| = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5$ m $\doteq 3,441$ m.

  Tedy $S_{\triangle LMP_{v_t}} = \frac{5 \cdot 3,441}{2}$ m$^2 \doteq 8,606$ m^2.
  Tedy $S_1 = 5 \cdot S_{\triangle LMP_{v_t}} = 5 \cdot 8,606$ m$^2 = 43,030$ m^2.
- Pro obsah podstavy platí $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA} = 43,030$ m$^2 - 5 \cdot 4,540$ m$^2 = 20,330$ m^2.
- Pro objem jehlanu platí $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 20,330 \cdot 8,55$ m$^3 \doteq 57,94$ m^3.
- Objem daného nekonvexního desetibokého jehlanu je po zaokrouhlení $57,94$ dm^3.

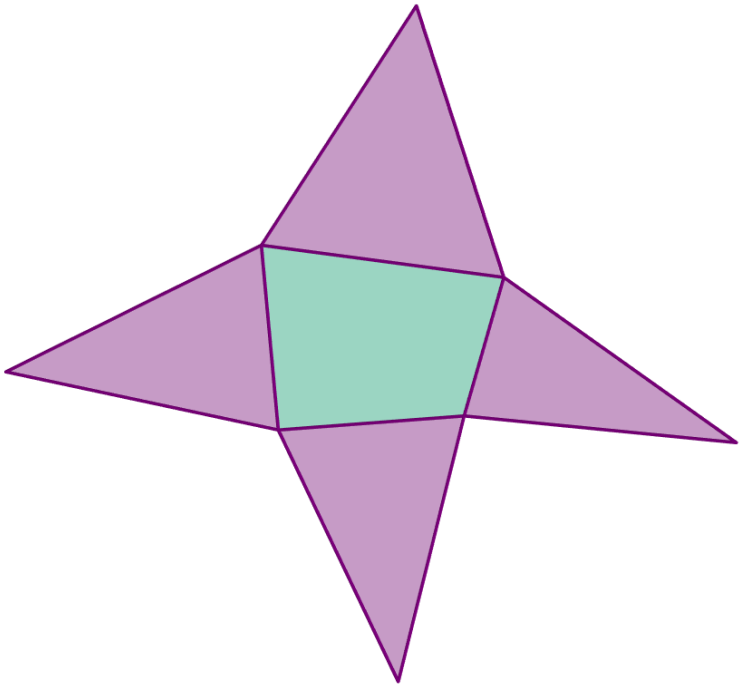
4.7 Povrch jehlanu

Tak jako u povrchu tělesa je i povrch jehlanu roven součtu obsahů všech jeho stěn, tedy obsahu jeho sítě (obr. 4.38). Síť jehlanu je tvořena jednou podstavou a jeho pláštěm (obr. 4.39).

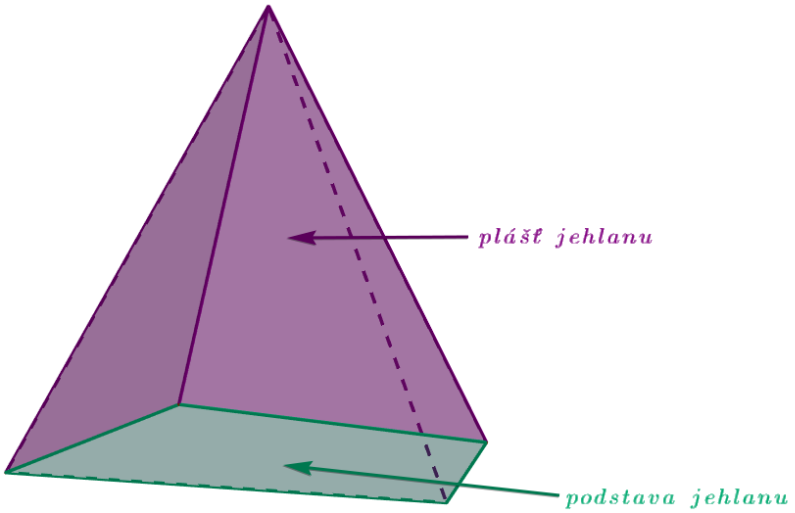
Věta

Povrch S jehlanu je součtem obsahu jeho podstavy S_p a obsahu jeho bočních stěn, tj. pláště S_{pl}; tedy platí

$$S = S_p + S_{pl}.$$



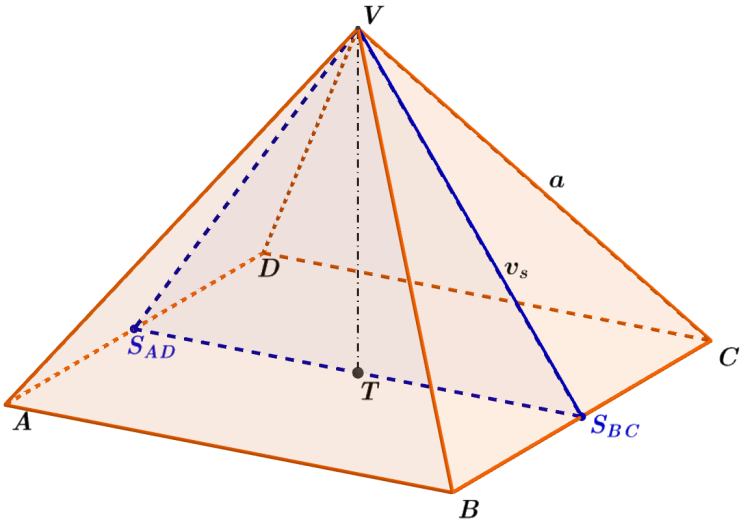
Obrázek 4.38: Síť čtyřbokého jehlanu



Obrázek 4.39: Plášť a podstava čtyřbokého jehlanu zobrazeného v levém podhledu

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.1.

Příklad 4.7.1 Vypočítejte povrch S pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Jeho boční stěny jsou tvořené rovnostrannými trojúhelníky o straně délky $a = 5$ cm, bod T je středem jeho podstavy. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



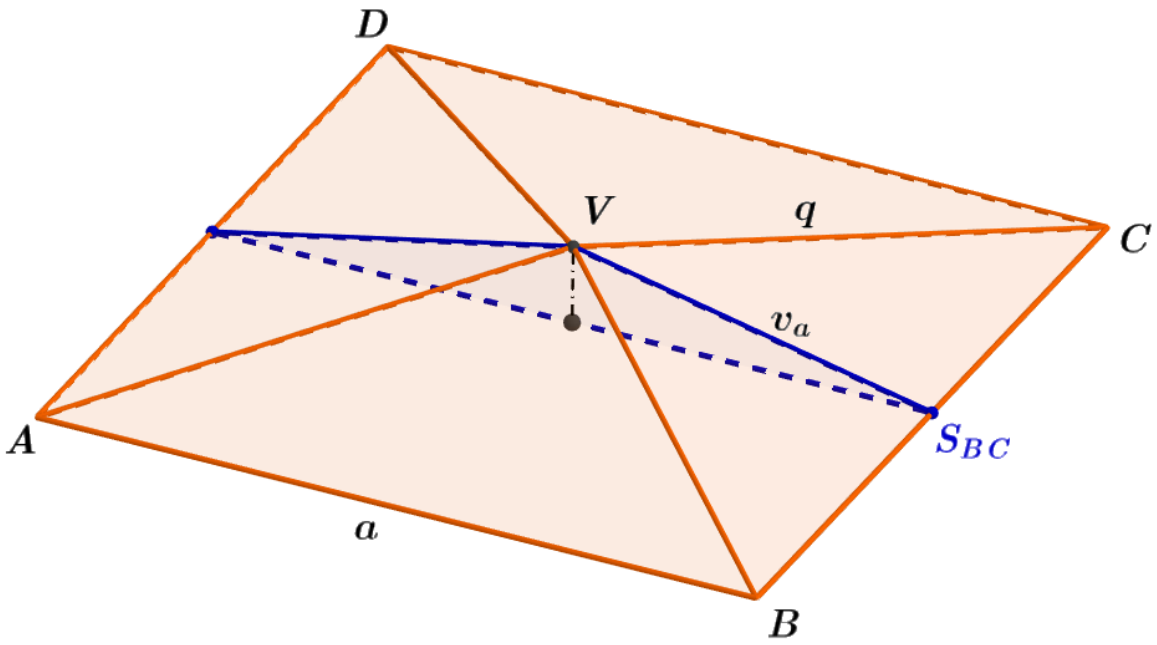
Obrázek 4.40: Ilustrace Příkladu 4.7.1

Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky, tak podstava jehlanu $ABCD$ je čtverec se stranou délky $a = 5$ cm (obr. 4.40).
- $S_p = a^2 = 25$ cm^2.
- Plášť jehlanu je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými $\triangle ABV$, $\triangle BCV$, $\triangle CDV$ a $\triangle DAV$. Určíme obsah $\triangle BCV$.
- Pro obsah tohoto trojúhelníku platí $S = \frac{av_a}{2}$, kde a je délka základny a v_a je výška k základně. Tedy $a = 5$ cm; $v_a = v_s$, kde v_s je stěnová výška jehlanu. Tu jsme již určili v příkladu 3.6.1, tj. $v_s = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Obsah $\triangle BCV$ je $S_{\triangle BCV} = \frac{av_a}{2} = \frac{av_s}{2} = \frac{25\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ cm^2 $= 25\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.
- Pro obsah pláště jehlanu platí $S_{pl} = 4S_{\triangle BCV} = 25\sqrt{3}$ cm^2 $\doteq 43,30$ cm^2.
- Pro povrch S jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = 25$ cm$^2 + 43,30$ cm^2 $\doteq 68,3$ cm^2.
- Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je po zaokrouhlení $68,3$ cm^2.

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.2.

Příklad 4.7.2 Vypočítejte povrch S pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnoramennými trojúhelníky se základnami délky $a = 4\sqrt{6}$ cm a rameny délky $q = 7$ cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



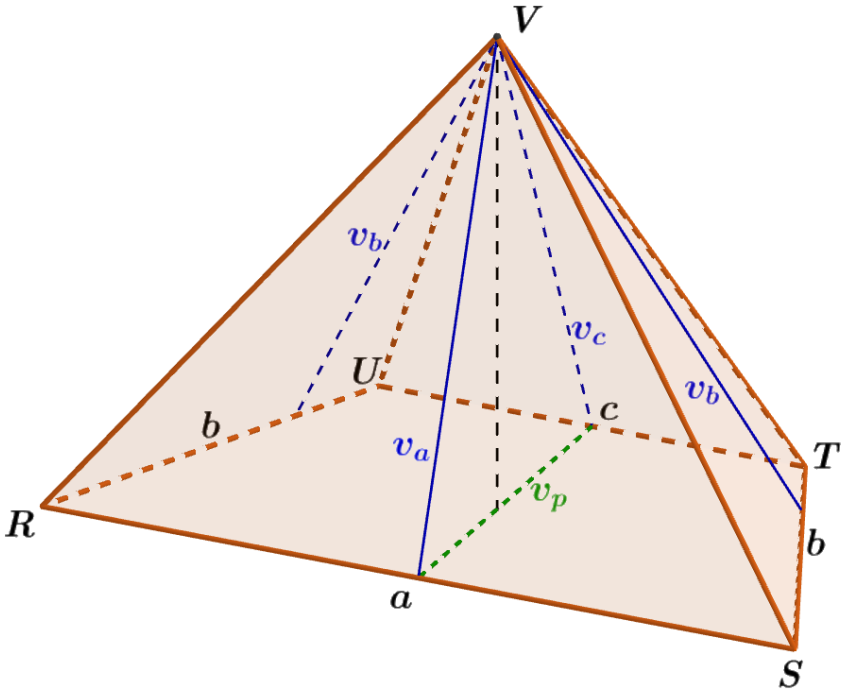
Obrázek 4.41: Ilustrace Příkladu 4.7.2

Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu tvořeny rovnoramennými trojúhelníky se základnou délky $a = 4\sqrt{6}$ cm a rameny délky $q = 7$ cm, tak podstava jehlanu $ABCD$ je čtverec o straně délky a.
- $S_p = a^2 = (4\sqrt{6})^2$ cm^2 $= 96$ cm^2.
- Plášť jehlanu je tvořen čtyřmi shodnými rovnoramennými $\triangle ABV$, $\triangle BCV$, $\triangle CDV$ a $\triangle DAV$. Určíme obsah $\triangle BCV$.
- Pro obsah S trojúhelníku platí $S = \frac{av_a}{2}$, kde a je délka základny a v_a je výška k základně. Tedy $a = 4\sqrt{6}$ cm.
  Z pravoúhlého $\triangle S_{BC}CV$ pomocí Pythagorovy věty určíme v_a;
  $v_a = \sqrt{q^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{7^2 - (\frac{4\sqrt{6}}{2})^2}$ cm$= \sqrt{25}$ cm$= 5$ cm.
- Obsah boční stěny BCV je dán vztahem $S_{\triangle BCV} = \frac{av_a}{2} = 10\sqrt{6}$ cm^2.
- Pro obsah pláště jehlanu platí $S_{pl} = 4S_{\triangle BCV} = 40\sqrt{6}$ cm$^2 \doteq 97,979$ cm^2.
- Pro povrch jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = 96$ cm$^2 + 97,979$ cm$^2 \doteq 193,98$ cm^2.
- Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je po zaokrouhlení $193,98$ cm^2.

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.3.

Příklad 4.7.3 Je dán čtyřboký jehlan $RSTUV$, jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky $a = 8$ dm, $c = 4,5$ dm a dvěma rameny délky $b = 4,3$ dm. Pro výšku v_p lichoběžníku platí $v_p = 4$ dm. Pro délky stěnových výšek platí $v_a = 5,3$ dm, $v_b = 5,8$ dm, $v_c = 5,4$ dm. Vypočítejte povrch S tohoto jehlanu. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.42: Ilustrace Příkladu 4.7.3

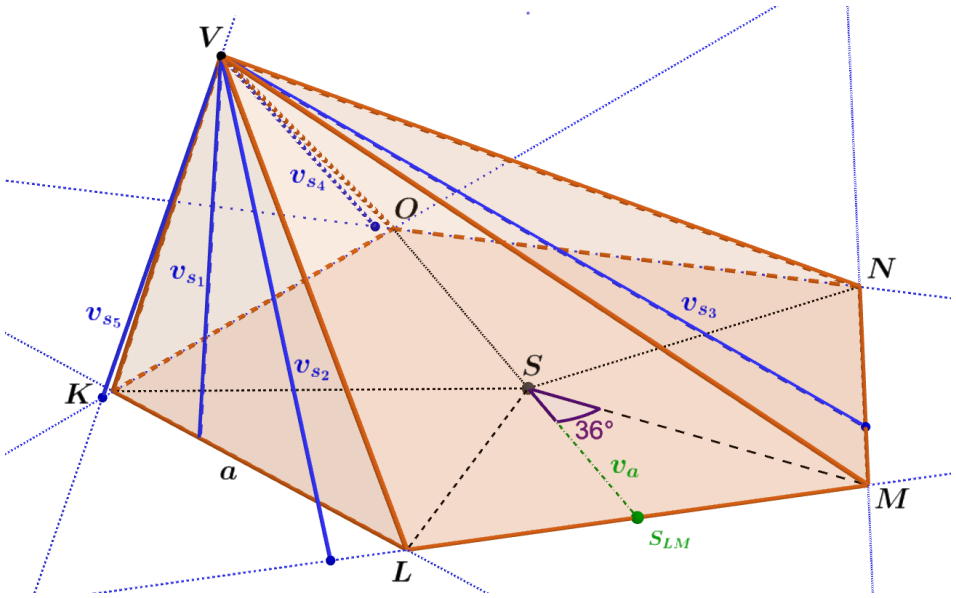
Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}. Pro obsah podstavy tvaru lichoběžníku platí $S_p = \frac{(a\ +\ c)\ \cdot\ v_p}{2} = \frac{(8\ +\ 4{,}5)\ \cdot\ 4}{2}$ dm^2 $= 25$ dm^2 (obr. 4.42).
- Plášť jehlanu $RSTUV$ je tvořen čtyřmi $\triangle RSV$, $\triangle STV$, $\triangle TUV$ a $\triangle URV$. Určíme obsah každého z nich.
- Pro obsah S obecného trojúhelníku platí $S = \frac{av_a}{2}$, kde a je délka základny a v_a je výška k základně.
- Tedy v našem případě $S_{\triangle RSV} = \frac{av_a}{2} = \frac{8\ \cdot\ 5{,}3}{2}$ dm^2 $= 21,200$ dm^2.
  $S_{\triangle STV} = S_{\triangle URV} = \frac{bv_b}{2} = \frac{4{,}3\ \cdot\ 5{,}8}{2}$ dm^2 $= 12,470$ dm^2.

  $S_{\triangle TUV} = \frac{cv_c}{2} = \frac{4{,}5\ \cdot\ 5{,}4}{2}$ dm^2 $= 12,150$ dm^2.
- Pro obsah pláště jehlanu platí $S_{pl} = S_{\triangle RSV} + 2S_{\triangle STV} + S_{\triangle TUV} =$ $= 21,200$ dm^2 $+ (2\ \cdot\ (12,470)$ dm^2 $+ 12,150$ dm^2 $= 58,290$ dm^2.
- Pro povrch jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = 25$ dm^2 $+ 58,290$ dm^2 $\doteq 83,29$ dm^2.
- Povrch čtyřbokého jehlanu $RSTUV$ je $83,29$ dm^2.

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.4.

Příklad 4.7.4 Je dán pětitiboký jehlan $KLMNOV$, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník o straně $a = 10$ m. Pro stěnové výšky jehlanu platí $v_{s_1} = 8,44$ m, $v_{s_2} = 10,87$ m, $v_{s_3} = 15,66$ m, $v_{s_4} = 13,69$ m a $v_{s_5} = 8,93$ m. Určete jeho povrch S. Výsledek uveďte na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.43: Ilustrace Příkladu 4.7.4

Řešení

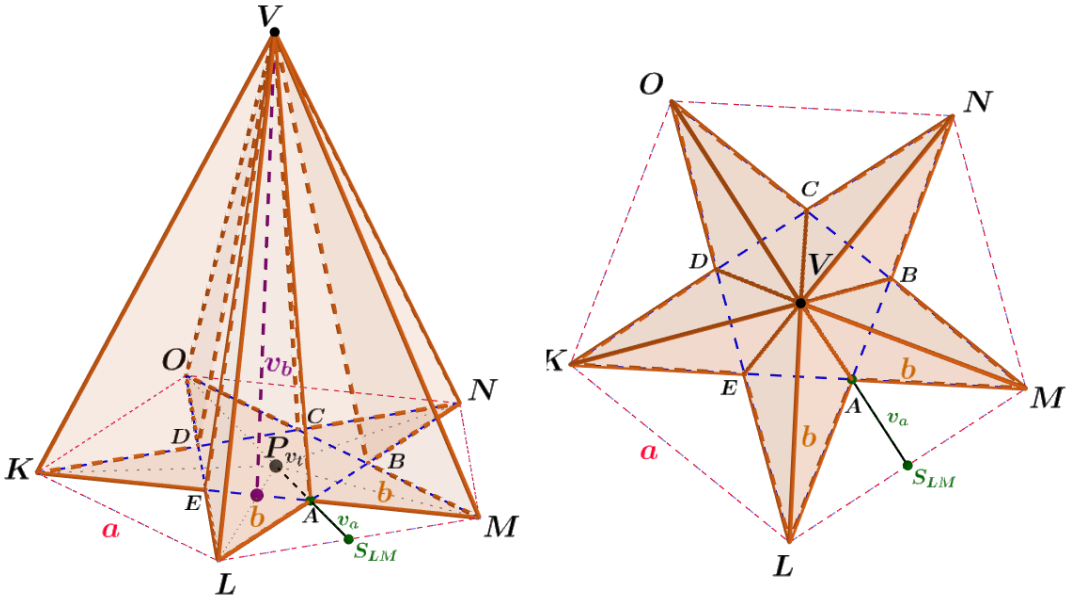
- Pro výpočet povrchu S jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Podstavou daného jehlanu je pravidelný pětiúhelník o straně $a = 10$ m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.43); $S_{\triangle LMS} = \frac{av_a}{2}$. Z $\triangle SS_{LM}M$ vyjádříme v_a; $v_a = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 5$ m $\doteq 6,882$ m. Tedy $S_{\triangle LMS} = \frac{10 \cdot 6,882}{2}$ m$^2 \doteq 34,410$ m^2; $S_p = 5 \cdot S_{\triangle LMS} = 5 \cdot 34,410$ m$^2 = 172,050$ m^2.
- Plášť daného jehlanu je tvořen pěti různými trojúhelníky: $\triangle KLV$, $\triangle LMV$, $\triangle MNV$, $\triangle NOV$ a $\triangle OKV$. Určíme obsah každého z nich.
- Pro obsah S obecného trojúhelníku platí $S = \frac{av_a}{2}$, kde a je délka základny a v_a je výška k základně. Vypočítáme obsahy daných trojúhelníků.
- Tedy v tomto případě $S_{\triangle KLV} = \frac{av_{s_1}}{2} = \frac{10 \cdot 8,44}{2}$ m$^2 = 42,200$ m^2.

  $S_{\triangle LMV} = \frac{av_{s_2}}{2} = \frac{10 \cdot 10,87}{2}$ m$^2 = 54,350$ m^2. $S_{\triangle MNV} = \frac{av_{s_3}}{2} = \frac{10 \cdot 15,66}{2}$ m$^2 = 78,300$ m^2.

  $S_{\triangle NOV} = \frac{av_{s_4}}{2} = \frac{10 \cdot 13,69}{2}$ m$^2 = 68,450$ m^2. $S_{\triangle OKV} = \frac{av_{s_5}}{2} = \frac{10 \cdot 8,93}{2}$ m$^2 = 44,650$ m^2.
- Pro obsah pláště jehlanu platí: $S_{pl} = S_{\triangle KLV} + 2S_{\triangle LMV} + S_{\triangle\ mNV} + S_{\triangle NOV} + S_{\triangle OKV} =$ $= 42,200$ m$^2 + 54,350$ m$^2 + 78,300$ m$^2 + 68,450$ m$^2 + 44,650$ m$^2 = 287,950$ m^2.
- Pro povrch jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = 172,050$ m$^2 + 287,950$ m$^2 \doteq 460,00$ m^2.
- Povrch pětibokého jehlanu $KLMNO$ je $460,00$ m^2.

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.5.

Příklad 4.7.5 Je dán nekonvexní desetiboký jehlan $KELAMBNCODV$, jehož podstavou je pentagram – pěticípý nekonvexní hvězdicovitý mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé, vzniklý z pravidelného konvexního pětiúhelníku o straně $a = 5$ m. Stěnová výška v_b jehlanu je $8,52$ m. Určete jeho povrch S. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.44: Ilustrace Příkladu 4.7.5

Řešení

- Pro výpočet objemu V_j jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a obsah jeho pláště S_{pl}.
- Obsah podstavy S_p ve tvaru pentagramu (obr. 4.44) vypočítáme tak, že od obsahu S_1 konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ odečteme pětinásobek obsahu rovnoramenného $\triangle LMA$ o základně $a = 5$ m a ramenech b;
  $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA}$. Je třeba vypočítat $S_{\triangle LMA}$.
- Vyjádříme $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2}$. Je třeba vypočítat v_a.
- Z pravoúhlého $\triangle S_{LM}MA$ pomocí Pythagorovy věty vyjádříme délku v_a;
  $v_a = \sqrt{|AM|^2 - |S_{LM}M|^2)} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2)}$. Je třeba vypočítat $|AM| = b$.
- Přepona $|AM| = b$ pravoúhlého $\triangle S_{LM}MA$ je zároveň ramenem rovnoramenného $\triangle LMA$; a také část úhlopříčky KM konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$. Úhlopříčky konvexního pravidelného pětiúhelníku jsou všechny stejně dlouhé a každé dvě se vzájemně dělí v poměru φ nazývaném zlatý řez; číslo φ je zlatým číslem; $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. V tomto případě se úhlopříčky KM, NL konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ protínají v bodě A. Tedy pomocí zlatého řezu vyjádříme poměr mezi úsečkami: $\frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|KA|}{|AM|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vyjádříme délku úsečky $|KA| = a = 5$ m, jelikož $\triangle KAN \cong \triangle NOK$ a tvoří kosočtverec $KANO$; $|KA| = a$. Ze vztahu $\frac{|KA|}{|AM|} = \varphi$ vyjádříme $|AM| = b$; $|AM| = \frac{|KA|}{\varphi}$, tedy $|AM| = \frac{a}{\varphi} = \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ m $\doteq 3,090$ m.

- Vypočítáme v_a; $v_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2)} = \sqrt{3,090^2 - (\frac{5}{2})^2)}$ m $\doteq 1,816$ m.
- Obsah $\triangle LMA$ je $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2} = \frac{5 \cdot 1,816}{2}$ m $= 4,540$ m^2.
- Vypočítáme obsah S_1 konvexního pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$ o straně $a = 5$ m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků; $S_{\triangle LMP_{v_t}} = \frac{a \cdot |P_{v_t}S_{LM}|}{2}$. Z $\triangle P_{v_t}S_{LM}M$ vyjádříme výšku $|P_{v_t}S_{LM}|$;

  $|P_{v_t}S_{LM}| = \cot 36° \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5$ m $\doteq 3,441$ m.

  Tedy $S_{\triangle LMP_{v_t}} = \frac{5 \cdot 3,441}{2}$ m$^2 \doteq 8,606$ m^2.

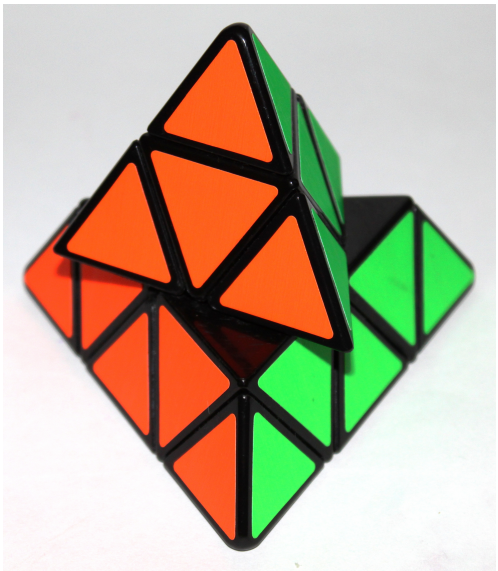
  Tedy $S_1 = 5 \cdot S_{\triangle LMP_{v_t}} = 5 \cdot 8,606$ m$^2 = 43,030$ m^2.
- Pro obsah podstavy platí $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA} = 43,030$ m$^2 - 5 \cdot 4,540$ m$^2 = 20,330$ m^2.
- Plášť daného jehlanu je tvořen deseti navzájem shodnými trojúhelníky.
  Pro obsah pláště platí $S_{pl} = 10 \cdot S_{\triangle LAV}$; $S_{\triangle LAV} = \frac{bv_b}{2} = \frac{3,090 \cdot 8,52}{2}$ m $\doteq 13,163$ m^2.

  Tedy $S_{pl} = 10 \cdot S_{\triangle LAV} = 10 \cdot 13,163$ m$^2 = 131,630$ m^2.
- Pro povrch jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = 20,330$ m$^2 + 131,630$ m$^2 \doteq 151,96$ m^2.
- Povrch nekonvexního desetibokého jehlanu $KELAMBNCODV$ je $151,96$ m^2.

4.8 Objemy a povrchy dalších typů jehlanů

4.8.1 Čtyřstěn

Z herního světa je známá Rubikova kostka ve tvaru krychle, ale rovněž existuje atypická Rubikova kostka ve tvaru pravidelného trojbokého jehlanu (pravidelného čtyřstěnu), zvaná Pyraminx, vyobrazená na obr. 4.45.

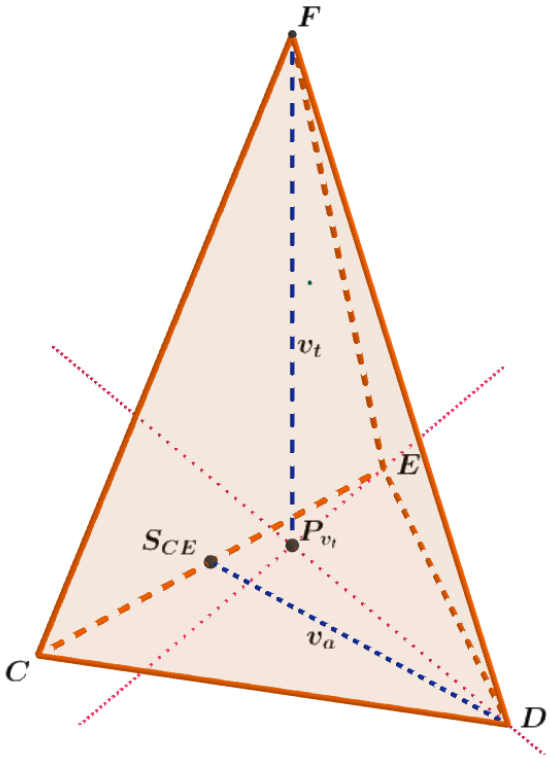


Obrázek 4.45: Atypická Rubikova kostka (Pyraminx) ve tvaru pravidelného čtyřstěnu [22]

Poznámka

Nezapomínejme, že existují i pravidelné trojboké jehlany, které ale nejsou pravidelnými čtyřstěny. Ovšem všechny trojboké jehlany můžeme nazývat čtyřstěny.

Příklad 4.8.1 Vypočítejte objem V čtyřstěnu $CDEF$. Jeho podstava je rovnostranný trojúhelník CDE o straně 8 mm a délka jeho tělesové výšky v je $v = 10$ mm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

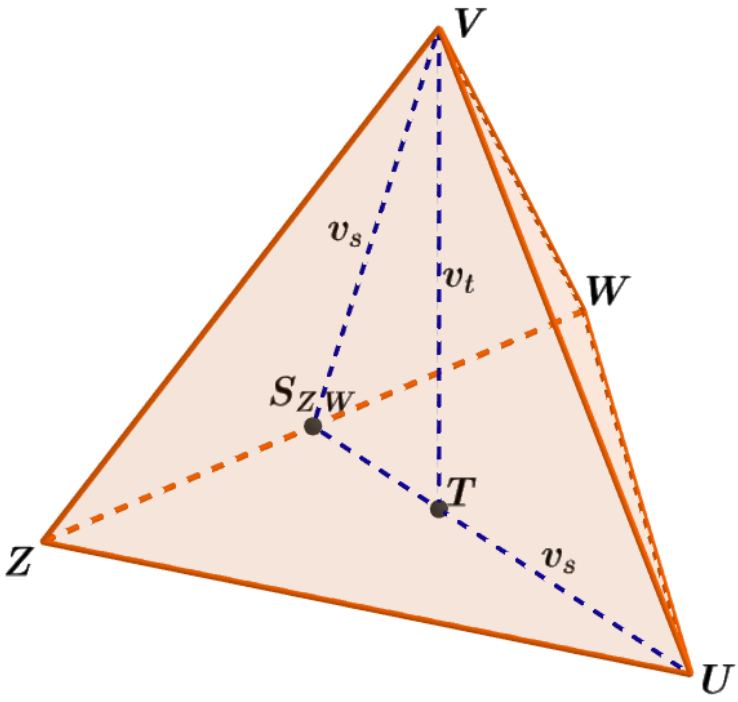


Obrázek 4.46: Ilustrace Příkladu 4.8.1

Řešení

- Pro objem V jehlanu platí $V = \frac{1}{3}S_p v$. Potřebujeme znát obsah podstavy S_p, délku tělesové výšky v známe $v = |P_V F| = 10$ mm.
- Body S_{CD}, S_{CE} jsou středy příslušných stran trojúhelníku (obr. 4.46).
- Obsah podstavy S_p je roven obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně $a = 8$ mm. Pro obsah trojúhelníku platí $S_{\triangle CDE} = \frac{a \cdot v_a}{2}$.
- Pro délku stěnové výšky v_a této podstavy platí $v_a = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tuto hodnotu určíme pomocí Pýthagorovy věty z pravoúhlého $\triangle S_{CE}DC$; $v_a = 8\frac{\sqrt{3}}{2}$ mm.
- Pro obsah podstavy S_p platí $S_p = S_{\triangle CDE} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{8 \cdot 8\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ mm^2 $= 16\sqrt{3}$ mm^2.
- Pro objem V jehlanu platí $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 10$ mm^3 $= \frac{160}{3}\sqrt{3}$ mm^3 $\doteq 92,38$ mm^3.
- Objem čtyřstěnu $CDEF$ je po zaokrouhlení $92,38$ mm^3.

Příklad 4.8.2 Povrch pravidelného čtyřstěnu $UVWZ$ o hraně $a = 5$ m je $\frac{50\sqrt{3}}{2}$ m^2. Určete jeho objem V. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



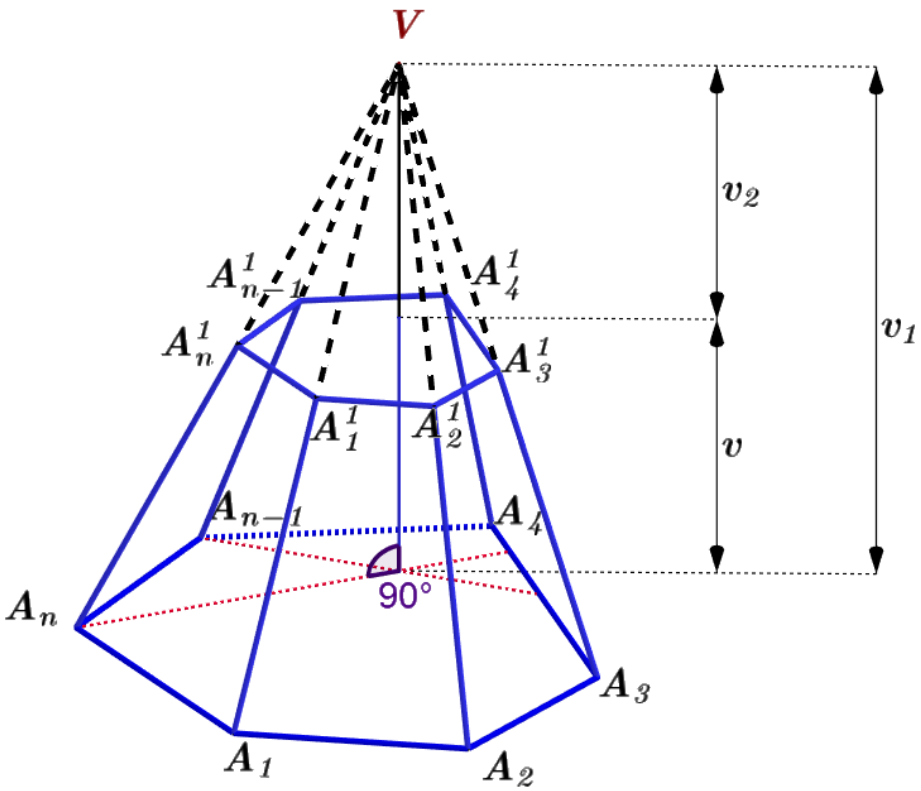
Obrázek 4.47: Ilustrace Příkladu 4.8.2

Řešení

- Jelikož je čtyřstěn pravidelný, všechny jeho stěny včetně podstavy tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky o straně a. Pro výpočet objemu čtyřstěnu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a délku tělesové výšky v_t (obr. 4.47).
- Pro povrch S jehlanu platí $S = S_p + S_{pl} = \frac{50\sqrt{3}}{2}$ m^2.
- Povrch čtyřstěnu je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, tudíž platí: $S_p = \frac{S}{4} = \frac{50\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}$ m^2 $= \frac{25\sqrt{3}}{4}$ m^2.
- Víme, že $v_t = |TV|$, neboť bod T je patou tělesové výšky čtyřstěnu a současně je těžištěm trojúhelníku ZUW. Vycházíme například z rovnoramenného $\triangle UVS_{ZW}$. Vyjádříme délku jeho stran: $|VU| = 5$ cm; $|US_{ZW}| = |VS_{ZW}| = v_s$.
- Pro délku stěnové výšky v_s každé boční stěny platí $v_s = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tuto hodnotu vypočítáme Pýthagorovou větou například z rovnostranného $\triangle ZUW$, který rozdělíme pomocí v_s na dva pravoúhlé trojúhelníky.
- Víme, že TV je výška trojúhelníku UVS_{ZW}, která je kolmá k US_{ZW}. US_{ZW} je zároveň těžnice $\triangle ZUW$. Z čehož vyplývá, že $|TU| = \frac{2}{3}|US_{ZW}| = \frac{2}{3}v_s = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ m.
- Z pravoúhlého $\triangle TUV$ vyjádříme v_t pomocí Pýthagorovy věty;
  $v_t = \sqrt{(a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2)} = \sqrt{(25 - (\frac{5\sqrt{3}}{3})^2)}$ m $= \sqrt{\frac{50}{3}}$ m $= 5\sqrt{\frac{2}{3}}$ m.
- Pro objem V jehlanu platí: $V = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{\frac{2}{3}}$ m $^3 = \frac{125\sqrt{2}}{12}$ m $^3 \doteq 14,73$ m^3.
- Objem pravidelného čtyřstěnu $UVWZ$ je po zaokrouhlení $14,73$ m^3.

4.8.2 Komolý jehlan

Pro odvození vzorce pro V komolého jehlanu vezmeme komolý jehlan $A_1A_2...A_nA_1^1A_2^2...A_n^1$ s tělesovou výškou v, který doplníme o jehlan $A_1^1A_2^1...A_n^1V$ s tělesovou výškou v_2 na jehlan $A_1A_2...A_nV$ s tělesovou výškou v_1 (obr. 4.48).



Obrázek 4.48: Komolý jehlan

Pro objemy V_1, V_2 jehlanů s výškami v_1, v_2 a pro objem V komolého jehlanu platí

$$V_1 = V + V_2,$$

tj.

$$V = V_1 - V_2.$$

Jsou-li S_1 a S_2 obsahy podstav komolého jehlanu, platí

$$V = \frac{1}{3}S_1v_1 - \frac{1}{3}S_2v_2.$$

Jelikož $v_1 = v + v_2$ dostáváme

$$V = \frac{1}{3}S_1(v + v_2) - \frac{1}{3}S_2v_2$$

čili

$$V = \frac{1}{3}S_1v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2)v_2.$$

Podstavy komolého jehlanu jsou podobné mnohoúhelníky, z čehož vyplývá, že koeficient podobnosti k je:

Rozšiřující poznámka. Stejnolehlost – Definice je převzata z [Ptáčková (2014) s. 59].

Definice

Stejnolehlost $H(S, \kappa)$ (neboli homotetie) určená bodem S a nenulovým reálným číslem κ je zobrazení v prostoru, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$.

Pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX;
pro $\kappa < 0$ leží bod X' na polopřímce opačné k polopřímce SX.

Bod S nazýváme **středem stejnolehnosti**, číslo κ nazýváme **koeficientem stejnolehlosti**.

Bod X' je obrazem bodu X ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem κ; zapisujeme takto: $H(S, \kappa) : X \to X'$.

$$k = \frac{v_2}{v_1};$$

a pro obsahy podstav komolého jehlanu platí

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2;$$

tedy

$$k = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Tudíž

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Postupnými úpravami dostáváme (pro $v_1 = v + v_2$)

$$v_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} v.$$

Dostáváme V komolého jehlanu:

$$V = \frac{1}{3} S_1 v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2) \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} v.$$

Rozdíl $S_1 - S_2$ rozložíme na součin $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$ a upravíme na výsledný tvar:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v. \quad \square$$

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

Věta

Objem V komolého jehlanu s tělesovou výškou v, jehož podstavy mají obsah S_1, S_2, je

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v.$$

Dále si uvedeme vztah pro povrch komolého jehlanu:

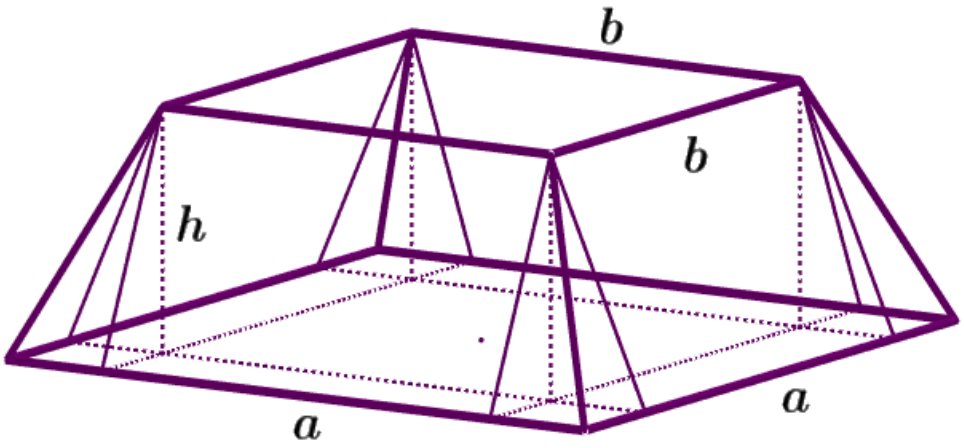
Věta

Pro **povrch S komolého jehlanu** platí

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl},$$

kde S_1, S_2 jsou obsahy podstav a S_{pl} je obsah pláště.

Následující vysvětlení způsobu určení objemu pravidelného komolého jehlanu vychází z [Bečvář (2003) s. 97–99]. K objemu pravidelného komolého jehlanu pravděpodobně dospěli již staří Egypťané. Na moskevském papyrusu se nachází úloha na výpočet pravidelné komolé pyramidy, tedy pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu (obr. 4.49).



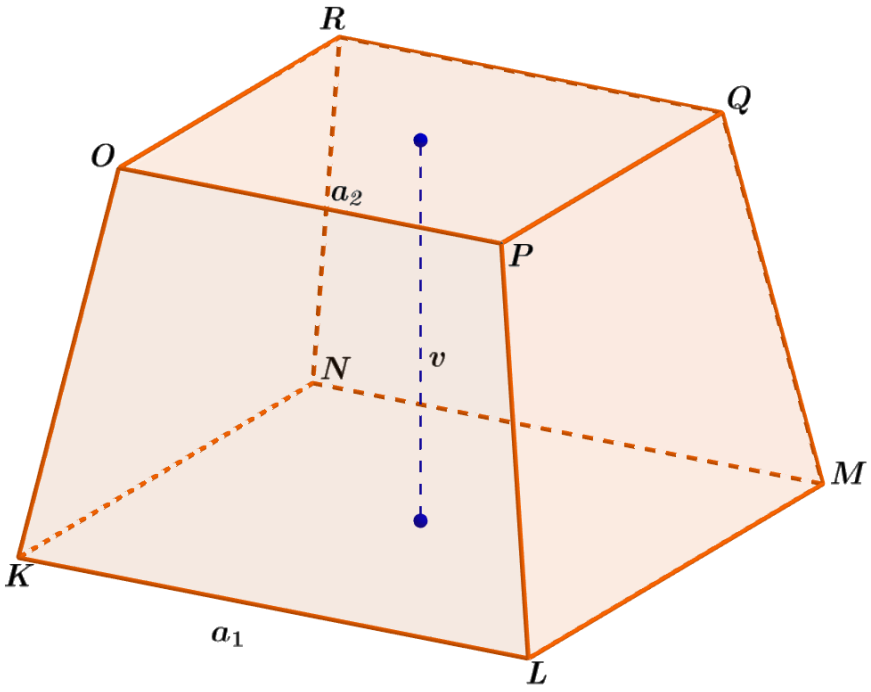
Obrázek 4.49: Ilustrace k odvození vzorce pro objem komolého jehlanu

Uvažujme pravidelný komolý čtyřboký jehlan o podstavných hranách a, b a výšce h. Toto těleso rozložíme na devět částí: jeden pravidelný čtyřboký hranol výšky h o podstavné hraně délky b; čtyři jehlany výšky h s čtvercovou podstavou o hraně $\frac{a-b}{2}$; a čtyři shodné trojboké hranoly, každý z nich má objem rovný polovině objemu kvádru výšky h a o rozměrech podstavy b, $\frac{a-b}{2}$. Pokud sečteme objemy dílčích těles z obr. 4.49, dostáváme se k následujícímu vztahu:

$$V = b^2 h + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{a-b}{2})^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a-b}{2} \cdot h = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2),$$

který odpovídá vzorci pro objem komolého jehlanu, jelikož $\frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot h$, kde $h = v$; dále $a^2 = S_1$; $ab = \sqrt{S_1 S_2}$ a $b^2 = S_2$, kde S_1, S_2 jsou obsahy podstav komolého jehlanu.

Příklad 4.8.3 Určete tělesovou výšku v pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu $KLMNOPQR$, jehož dolní podstava má stranu délky $a_1 = 8$ dm a horní podstava má stranu délky $a_2 = 6$ dm. Objem V tohoto komolého jehlanu je $271,3$ dm^3. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 4.50: Ilustrace k Příkladu 4.8.3

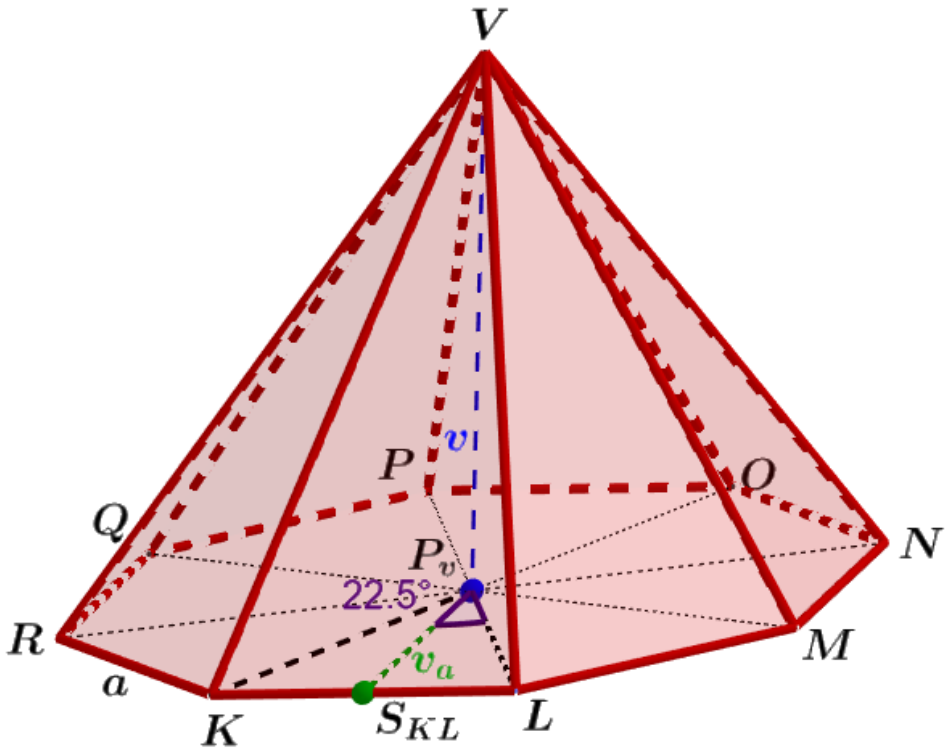
Řešení

- Pro výpočet objemu komolého jehlanu s obsahy podstav S_1, S_2 a výšce v použijeme vzorec $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v$.
- Jedná se o pravidelný komolý čtyřboký jehlan, jeho podstavy jsou čtverce.
  Délka strany čtverce tvořícího dolní podstavu je $a_1 = 8$ dm;
  obsah této podstavy je $S_1 = {a_1}^2 = 64$ dm^2 (obr. 4.50).
- Délka strany čtverce tvořící horní podstavu je $a_2 = 6$ dm;
  obsah této podstavy je $S_1 = {a_2}^2 = 36$ dm^2.
- Ze vzorce pro objem V komolého jehlanu vyjádříme neznámou v, přičemž S_1, S_2 již známe; $v = \frac{3V}{(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}$ a dosadíme obsahy podstav;

  $v = \frac{3V}{(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)} = \frac{3 \cdot 271{,}3}{(64 + \sqrt{64.36} + 36)}$ dm $\doteq 5,5$ dm.
- Tělesová výška v po zaokrouhlení činí $5,5$ dm.

4.9 Úlohy II

Úloha 4.9.1 Vypočtěte objem V_j pravidelného osmibokého jehlanu $KLMNOPQRV$. Podstavná hrana jehlanu měří $a = 8,3$ cm a výška v jehlanu je $14,6$ cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

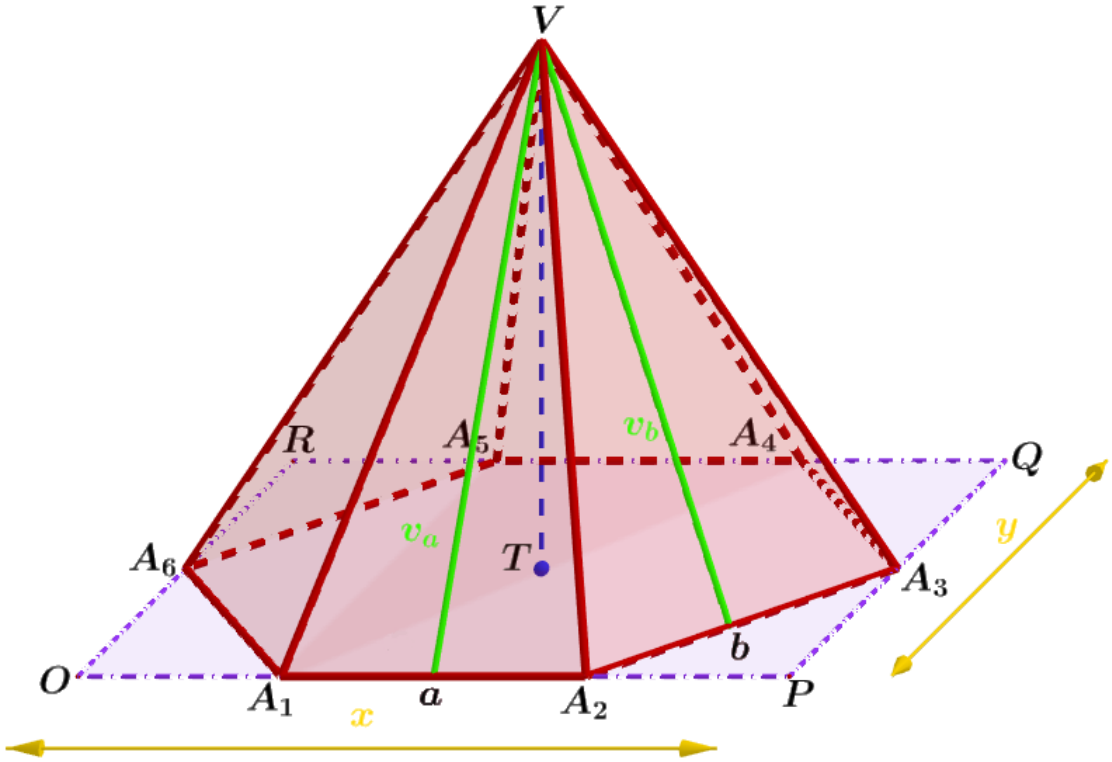


Obrázek 4.51: Ilustrace k Úloze 4.9.1

Řešení

- Pro objem V_j jehlanu platí: $V_j = \frac{1}{3} S_p v$. Výšku v jehlanu známe: $v = 14,6$ cm (obr. 4.51).
- Obsah podstavy S_p jehlanu je roven obsahu pravidelného osmiúhelníku $KLMNOPQR$. Pravidelný osmiúhelník rozložíme na osm shodných rovnoramenných trojúhelníků: $S_p = 8 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$. Je třeba vypočítat v_a.
- Z $\triangle S_{KL} L P_v$ vyjádříme v_a; $v_a = \cot 22,5° \cdot \frac{a}{2} \doteq 2,414 \cdot 4,150 \text{ m} \doteq 10,018 \text{ m}$.
- Tedy $S_p = 8 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4a \cdot v_a = 4 \cdot 8,3 \cdot 10,018 \text{ cm}^2 \doteq 332,598 \text{ cm}^2$.
- Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu:
  $V_j = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot 332,598 \cdot 14,6 \text{ cm}^3 \doteq 1\,618,64 \text{ cm}^3$.
- Objem V_j daného pravidelného osmibokého jehlanu je po zaokrouhlení $1\,618,64$ cm^3.

Úloha 4.9.2 Vypočtěte povrch S šestibokého jehlanu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$, jehož podstava je vepsána do obdélníku $OPQR$ o rozměrech $x = 14$ m a $y = 12$ m (obr. 4.52). Podstava $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je osově souměrná podle osy A_3A_6. Znáte $|OA_1| = 4$ m, $|A_1A_2| = 6$ m, $|A_2P| = 4$ m, $|PA_3| = 6$ m a $|A_3Q| = 6$ m. Bod T je těžištěm podstavy a současně patou tělesové výšky jehlanu a také středem obdélníku. Výška v_a trojúhelníku A_1A_2V je zároveň těžnicí t_a tohoto trojúhelníku a měří 12 m. Výška v_b trojúhelníku A_2A_3V měří 11,91 m. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.52: Ilustrace k Úloze 4.9.2

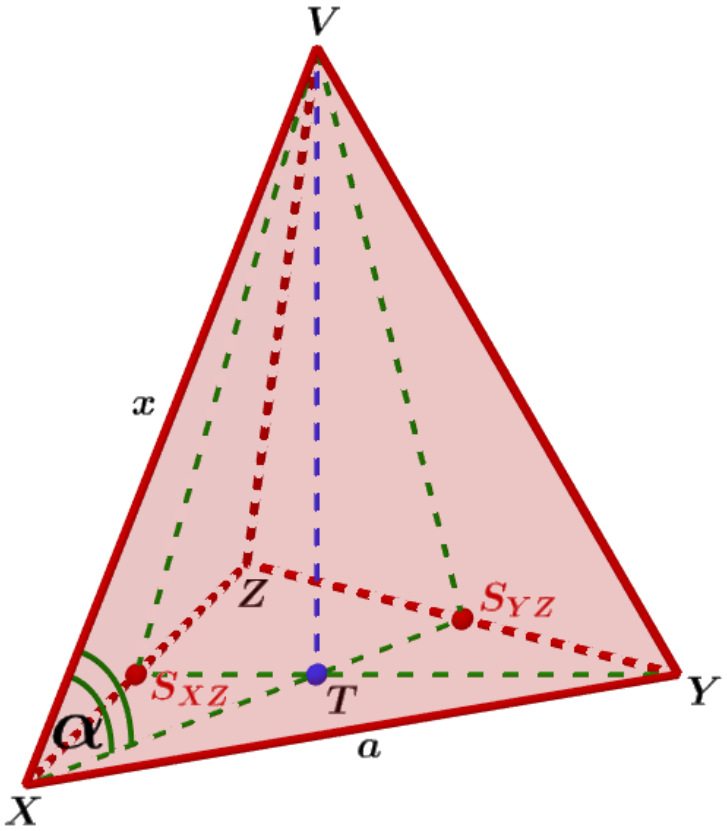
Řešení

- Pro povrch S jehlanu platí: $S = S_p + S_{pl}$.
- Obsah podstavy S_p jehlanu je roven obsahu šestiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, který vypočítáme tak, že od obsahu S_1 obdélníku $OPQR$ odečteme součet čtyř obsahů pravoúhlých trojúhelníků: $\triangle OA_1A_6$, $\triangle A_2PA_3$, $\triangle A_3QA_4$ a $\triangle A_5RA_6$.
- Pro obsah S_1 obdélníku $OPQR$ platí: $S_1 = xy = 14 \cdot 12 \text{ m}^2 = 168 \text{ m}^2$.
- Jelikož se obsahy pravoúhlých trojúhelníků OA_1A_6, A_2PA_3, A_3QA_4 a A_5RA_6 rovnají, stačí vypočítat obsah jednoho z nich: $S_{\triangle A_1A_6O} = \frac{|OA_1| \cdot |OA_6|}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ m}^2$.
- Pro obsah podstavy jehlanu platí: $S_p = S_1 - 4 \cdot S_{\triangle A_1A_6O} = 168 \text{ m}^2 - 4 \cdot 12 \text{ m}^2 = 120 \text{ m}^2$.
- Plášť tohoto jehlanu je složen ze šesti trojúhelníků. Trojúhelník A_1A_2V je rovnoramenný, protože $v_a = t_a$. Jelikož je podstava $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ osově souměrná podle

osy A_3A_6, platí: $\triangle A_1A_2V \cong \triangle A_4A_5V$. Zbylé čtyři trojúhelníky A_2A_3V, A_3A_4V, A_5A_6V a A_6A_1V jsou shodné podle věty *sss*: $\triangle A_2A_3V \cong \triangle A_3A_4V \cong \triangle A_5A_6V \cong \triangle A_6A_1V$.

- Pro obsah $\triangle A_1A_2V$ platí: $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2}$ m^2 = 36 m^2.
- Pro obsah $\triangle A_2A_3V$ platí: $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{b \cdot v_b}{2}$. Základnu tohoto $\triangle A_2A_3V$ vypočítame Pýthagorovou větou pomocí pravoúhlého trojúhelníku A_2A_3P:
  $b = \sqrt{|A_2P|^2 + |PA_3|^2} = \sqrt{4^2 + 6^2}$ m$\doteq 7,211$ m.
  Tedy $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{7{,}211 \cdot 11{,}91}{2}$ m$^2 \doteq 42,942$ m^2.
- Obsah pláště S_{pl} je roven součtu obsahů všech jeho bočních stěn a platí:
  $S_{pl} = 2S_{\triangle A_1A_2V} + 4S_{\triangle A_2A_3V} = 2 \cdot 36$ m$^2 + 4 \cdot 42,942$ m$^2 = 243,768$ m^2.
- Dosadíme do vzorce pro výpočet povrchu S jehlanu:
  $S = S_p + S_{pl} = 120$ m$^2 + 243,768$ m$^2 \doteq 363,77$ m^2.
- Povrch S šestibokého jehlanu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ je po zaokrouhlení 363,77 m^2.

Úloha 4.9.3 Určete délku x boční hrany čtyřstěnu $XYZV$. Podstavou čtyřstěnu je rovnostranný $\triangle XYZ$ o straně délky $a = 10$ dm. Odchylka hrany čtyřstěnu a roviny podstavy je $\alpha = 60°$. Pata výšky čtyřstěnu leží v těžišti podstavy v bodě T. Body S_{XZ}, S_{YZ} jsou středy příslušících stran trojúhelníku. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

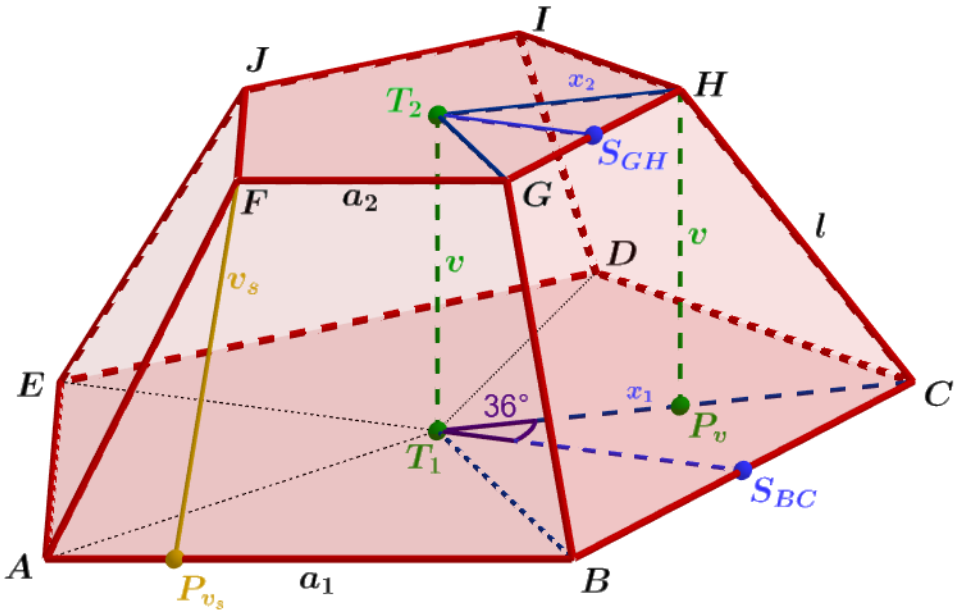


Obrázek 4.53: Ilustrace k Úloze 4.9.3

Řešení

- Pro výpočet délky x boční hrany čtyřstěnu budeme vycházet z pravoúhlého $\triangle XTV$. Nyní potřebujeme vypočítat délku základny XS_{YZ} trojúhelníku $\triangle XS_{YZ}V$.
- Při určení délky základny, která je zároveň těžnicí rovnostranného $\triangle XYZ$ o straně $a = 10$ dm, vycházíme například z pravoúhlého $\triangle XYS_{YZ}$ a vypočítáme ji pomocí Pýthagorovy věty: $|XS_{YZ}| = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{10^2 - 5^2}$ dm $\doteq 8,66$ dm (obr. 4.53).
- Dále platí: $|XT| = \frac{2}{3} \cdot |XS_{YZ}| = \frac{2}{3} \cdot 8,66$ dm $\doteq 5,77$ dm.
- Úhel $\alpha = 60° = |\angle VXS_{YZ}|$.
- Pro určení délky boční hrany x čtyřstěnu $XYZV$ vycházíme z pravoúhlého $\triangle XTV$ a platí: $x = \frac{|XT|}{\cos 60°} = \frac{5,77}{\cos 60°}$ dm $\doteq 11,5$ dm.
- Délka boční hrany x čtyřstěnu $XYZV$ je po zaokrouhlení $11,5$ dm.

Úloha 4.9.4 Vypočtěte objem V a povrch S pravidelného pětibokého komolého jehlanu $ABCDEFGHIJ$. Délka hrany dolní podstavy $a_1 = 10$ cm, délka hrany horní podstavy $a_2 = 5,11$ cm a délka boční hrany pravidelného pětibokého komolého jehlanu $l = 7,3$ cm. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 4.54: Ilustrace k Úloze 4.9.4

Řešení

- Pro objem V komolého jehlanu platí: $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v$. Potřebujeme vypočítat obsah S_1 dolní podstavy, obsah S_2 horní podstavy a jeho výšku v. Bod T_1 je těžištěm dolní podstavy; bod T_2 je těžištěm horní podstavy.
- Obsah S_1 dolní podstavy tohoto komolého jehlanu je roven obsahu pravidelného pětiúhelníku o straně $a_1 = 10$ cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.54); $S_{\triangle BCT_1} = \frac{a_1 v_{a_1}}{2}$. Z $\triangle BS_{BC}T_1$ vyjádříme v_{a_1}; $v_{a_1} = \cot 36° \cdot \frac{a_1}{2} \doteq \cot 36° \cdot 5$ cm $\doteq 6,88$ cm.
  Tedy $S_{\triangle BCT_1} = \frac{10 \cdot 6,88}{2}$ cm$^2 \doteq 34,40$ cm^2. Tudíž $S_1 = 5 \cdot 34,40$ cm$^2 \doteq 172,00$ cm^2.

- Obsah S_2 horní podstavy tohoto komolého jehlanu je roven obsahu pravidelného pětiúhelníku o straně $a_2 = 5,11$ cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků; $S_{\triangle GHT_2} = \frac{a_2 v_{a_2}}{2}$. Z $\triangle GS_{GH}T_2$ vyjádříme v_{a_2};
$v_{a_2} = \cot 36° \cdot \frac{a_2}{2} \doteq \cot 36° \cdot 2,56 \text{ cm} \doteq 3,52 \text{ cm}$.
Tedy $S_{\triangle GHT_2} = \frac{5,11 \cdot 3,52}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,99 \text{ cm}^2$. Tudíž $S_2 = 5 \cdot 8,99 \text{ cm}^2 \doteq 44,95 \text{ cm}^2$.

- Pro určení výšky v jehlanu vycházíme z pravoúhlého lichoběžníku T_1CT_2H; délku dolní základny T_1C tohoto lichoběžníku označíme jako $|T_1C| = x_1$; délku horní základny T_2H tohoto lichoběžníku označíme jako $|T_2H| = x_2$.

- Pro určení délky x_1 vycházíme například z rovnoramenného trojúhelníku BCT_1, který rozdělíme podle jeho výšky (ta je zároveň těžnicí) na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pravoúhlý $\triangle S_{BC}CT_1$ má při vrcholu T_1 úhel, pro který platí $|\angle S_{BC}T_1C| = 36°$. Pro x_1 platí: $x_1 = \frac{\frac{a_1}{2}}{\sin 36°} \doteq 8,51$ cm.

- Pro určení délky x_2 vycházíme například z rovnoramenného trojúhelníku GHT_2, který rozdělíme podle jeho výšky (ta je zároveň těžnicí) na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pravoúhlý $\triangle S_{GH}HT_2$ má při vrcholu T_2 úhel, pro který platí $|\angle S_{GH}T_2H| = 36°$. Pro x_2 platí: $x_2 = \frac{\frac{a_2}{2}}{\sin 36°} \doteq 4,35$ cm.

- Pro určení výšky v tohoto komolého jehlanu vycházíme z pravoúhlého lichoběžníku T_1CT_2H; P_v je pata kolmice z bodu H k dolní základně x_1. Pro výšku jehlanu platí: $|T_1T_2| = |P_vH| = v$. Nyní vycházíme z pravoúhlého $\triangle P_vHC$ a délku v vypočítáme pomocí Pýthagorovy věty; $|P_vH| = v$; $|CH| = l = 7,3$ cm; $|P_vC| = x_1 - x_2 = 4,16$ cm:
$v = \sqrt{l^2 - |P_vC|^2} = \sqrt{7,3^2 - 4,16^2} \text{ cm} \doteq 6,00$ cm.

- Pro objem V komolého jehlanu platí
$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v = \frac{1}{3}(172,00 + \sqrt{172,00 \cdot 44,95} + 44,95) \cdot 6 \text{ cm}^3 \doteq 609,8 \text{ cm}^3$.

- Pro povrch S komolého jehlanu platí $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$. Plášť pravidelného pětibokého komolého jehlanu se skládá z pěti shodných rovnoramenných lichoběžníků. Bod P_{v_s} je patou výšky boční stěny tohoto komolého jehlanu. Vypočítáme obsah jednoho z nich, k tomu potřebujeme určit Pýthagorovou větou délku v_s výšky tohoto lichoběžníku; $|P_{v_s}F| = v_s$; $|AF| = l = 7,3$ cm; $|P_{v_s}A| = \frac{a_1 - a_2}{2} \doteq 2,45$ cm:
$v_s = \sqrt{l^2 - |P_{v_s}A|^2} = \sqrt{7,3^2 - 2,45^2} \text{ cm} \doteq 6,88$ cm.
$S_{ABFG} = a_1 \cdot v_s = 10 \cdot 6,88 \text{ cm}^2 = 68,80 \text{ cm}^2$.

- Pro obsah pláště tohoto komolého jehlanu platí:
$S_{pl} = 5 \cdot S_{ABFG} = 5 \cdot 68,80 \text{ cm}^2 \doteq 344 \text{ cm}^2$.

- Pro povrch tohoto komolého jehlanu platí:
$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 172,00 \text{ cm}^2 + 44,95 \text{ cm}^2 + 344 \text{ cm}^2 \doteq 561,0 \text{ cm}^2$.

- Objem V pravidelného pětibokého komolého jehlanu $ABCDEFGHIJ$ je po zaokrouhlení $609,8 \text{ cm}^3$ a povrch S pravidelného pětibokého komolého jehlanu $ABCDEFGHIJ$ je po zaokrouhlení $561,0 \text{ cm}^2$.

5. Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů

V této kapitole se budeme zabývat nekonvexními mnohostěny, se kterými se ve středoškolských učebnicích zřídka setkáváme. Ze světa kolem nás si uvedeme několik architektonických staveb ve tvaru nekonvexních mnohostěnů (obr. 5.1–5.5).



Obrázek 5.1: Budova Civil Justice Centre (Manchester, Velká Británie) [23]



Obrázek 5.2: Wotrubův kostel (Vídeň, Rakousko) [24]



Obrázek 5.3: Komplex budov Habitat 67 (Montreal, Quebec) [25]



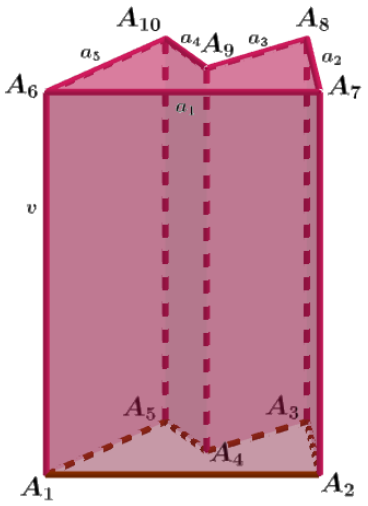
Obrázek 5.4: Mrakodrap MahaNakhon (Bangkok, Thajsko) [26]



Obrázek 5.5: Budova Čínské ústřední televize (Peking, Čína) [27]

Následně si uvedeme několik příkladů s řešením a krokovaných úloh na výpočet objemu a povrchu nekonvexních mnohostěnů.

Příklad 5.1.1 Vypočtěte objem V a povrch S_h nekonvexního kolmého pětibokého hranolu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ vyobrazeném na obr. 5.6. Obsah S nekonvexního pětiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5$ je $8,44$ cm^2. Délky stran nekonvexního pětiúhelníku $A_6A_7A_8A_9A_{10}$ jsou $a_1 = 5$ cm, $a_2 = a_5 = 3$ cm a $a_3 = a_4 = 2$ cm. Tělesová výška v hranolu je 7 cm. Výsledky uveďte na jedno desetinné místo.

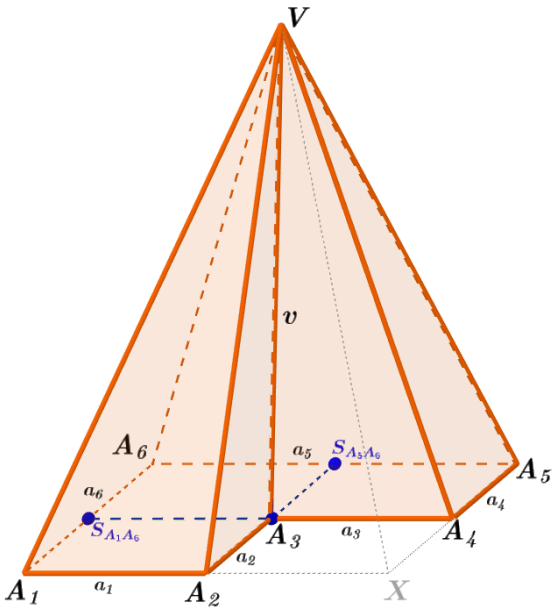


Obrázek 5.6: Ilustrace k Příkladu 5.1.1

Řešení

- Pro objem V libovolného hranolu platí $V = S_p v$. Výška v tohoto hranolu měří 7 cm.
- Podstavy daného hranolu jsou navzájem shodné nekonvexní pětiúhelníky (obr. 5.6). Podstavy tělesa jsou shodné útvary, mají tedy i shodné obsahy. Pro obsah podstavy platí $S_p = S_{A_1A_2A_3A_4A_5} = 8,44$ cm^2.
- Vypočítáme objem V tohoto hranolu: $V = S_p v = 8,44 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} \doteq 59,1 \text{ cm}^3$.
- Pro povrch S_h hranolu platí vztah $S_h = 2S_p + S_{pl}$.
- Obsah pláště S_{pl} nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je rovnen součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto hranolu jsou boční stěny tvořeny pěti obdélníky $A_1A_2A_7A_6$, $A_2A_3A_8A_7$, $A_3A_4A_9A_8$, $A_4A_5A_{10}A_9$ a $A_5A_1A_6A_{10}$, z nichž dvě dvojice stěn jsou shodné: $A_2A_3A_8A_7 \cong A_5A_1A_6A_{10}$ a $A_3A_4A_9A_8 \cong A_4A_5A_{10}A_9$.
  Tedy $S_{pl} = 2S_{A_2A_3A_8A_7} + 2S_{A_3A_4A_9A_8} + S_{A_1A_2A_7A_6}$.
- Vypočítáme obsah obdélníku $A_2A_3A_8A_7$: $S_{A_2A_3A_7A_8} = a_2 \cdot v = 3 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}^2$.
- Vypočítáme obsah obdélníku $A_3A_4A_9A_8$: $S_{A_3A_4A_9A_8} = a_3 \cdot v = 2 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}^2$.
- Vypočítáme obsah obdélníku $A_1A_2A_7A_6$: $S_{A_1A_2A_7A_6} = a_1 \cdot v = 5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 35 \text{ cm}^2$.
- Vypočítáme obsah pláště S_{pl} tohoto hranolu:
  $S_{pl} = 2S_{A_2A_3A_8A_7} + 2S_{A_3A_4A_9A_8} + S_{A_1A_2A_7A_6} = 2 \cdot 21 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 14 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2$.
- Povrch S_h tohoto hranolu je: $S_h = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 8,44 \text{ cm}^2 + 105 \text{ cm}^2 \doteq 121,9 \text{ cm}^2$.
- Objem daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je $59,1$ cm^3 a jeho povrch je $121,9$ cm^2.

Příklad 5.1.2 Vypočtěte objem V_j a povrch S nekonvexního šestibokého jehlanu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$, který vznikl z pravidelného čtyřbokého jehlanu $A_1XA_5A_6V$ o podstavné hraně $a = 6$ cm a tělesové výšce $v = 8$ cm „odříznutím“ čtyřbokého jehlanu $A_2XA_4A_3V$ se čtvercovou podstavou o straně $\frac{a}{2}$ a stejné tělesové výšce, viz obr. 5.1.2. Bod A_3 je patou tělesové výšky v, $|A_3V| = 8$ cm, body $S_{A_1A_6}$, $S_{A_5A_6}$ jsou středy příslušných hran. Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 5.7: Ilustrace k Příkladu 5.1.2

Řešení

- Pro objem V_j jehlanu platí $V_j = \frac{1}{3}S_p v$. Výšku v tohoto jehlanu známe; $v = |A_3V| = 8$ cm.
- Délky podstavných hran jsou $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 3$ cm a $a_5 = a_5 = 6$ cm (obr. 5.7).
- Ukážeme si tři způsoby výpočtu objemu daného nekonvexního šestibokého jehlanu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$:

  1. ∗ Obsah podstavy S_p tohoto jehlanuu je roven obsahu nekonvexního šestiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, který lze rozdělit na tři shodné nepřekrývající se čtverce $A_1A_2A_3S_{A_1A_6}$, $A_3A_4A_5S_{A_5A_6}$ a $A_3S_{A_5A_6}A_6S_{A_1A_6}$ o straně $a = 3$ cm.
     ∗ Vypočítáme obsah jednoho ze čtverců: $S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = a^2 = 3^2$ cm^2 $= 9$ cm^2.
     ∗ Vypočítáme obsah podstavy: $S_p = 3 \cdot S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = 3 \cdot 9$ cm^2 $= 27$ cm^2.
     ∗ Vypočítáme objemu jehlanu: $V_j = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3} \cdot 27$ cm$^2 \cdot 8$ cm $= 72$ cm^3.
  2. ∗ Daný jehlan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ lze rozdělit na tři shodné nepronikající se čtyřboké jehlany $A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V$, $A_3A_4A_5S_{A_5A_6}V$ a $A_3S_{A_5A_6}A_6S_{A_1A_6}V$, jejichž podstavy jsou shodné čtverce o straně $a = 3$ cm. Tyto čtyřboké jehlany mají shodnou tělesovou výšku $v = |A_3V| = 8$ cm.
     ∗ Objem nekonvexního šestibokého jehlanu je roven součtu objemů tří shodných čtyřbokých jehlanů, které se nepronikají. Vypočítáme obsah podstavy a také objem jednoho z nich: $S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = a^2 = 3^2$ cm^2 $= 9$ cm^2, $V_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}}v = \frac{1}{3}9$ cm$^2 \cdot 8$ cm$= 24$ cm^3.

   - ∗ Objem nekonvexního jehlanu je: $V_j = 3V_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V} = 3 \cdot 24 \text{ cm}^3 = 72 \text{ cm}^3$.
3. ∗ Výpočet je možné také provést odečtením objemu jednoho dílčího jehlanu $A_2XA_4A_3V$ od objemu původního jehlanu $A_1XA_5A_6V$ neboli objem V_j nekonvexního jehlanu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ je roven $\frac{3}{4}$ objemu původního pravidelného čtyřbokého jehlanu $A_1XA_5A_6V$, jelikož tento jehlan lze složit ze čtyř shodných čtyřbokých jehlanů.

- Pro povrch S jehlanu platí $S = S_p + S_{pl}$; S_p jsme již vypočítali: $S_p = 3 \cdot S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = 27 \text{ cm}^2$.

- Obsah pláště S_{pl} nekonvexního šestibokého jehlanu je rovnen součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto jehlanu jsou boční stěny tvořeny šesti trojúhelníky A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, A_4A_5V, A_5A_6V a A_6A_1V, přičemž tři dvojice těchto trojúhelníků jsou shodné: $\triangle A_1A_2V \cong \triangle A_4A_5V$, $\triangle A_2A_3V \cong \triangle A_3A_4V$ a $\triangle A_5A_6V \cong \triangle A_6A_1V$. Tedy $S_{pl} = 2S_{A_1A_2V} + 2S_{A_2A_3V} + 2S_{A_5A_6V}$.

- Vypočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníku A_1A_2V: $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a_1 \cdot v_{a_1}}{2}$; $v_{a_1} = A_2V = S_{A_5A_6}V$; úsečka $S_{A_5A_6}V$ je také ramenem rovnoramenného $\triangle A_2S_{A_5A_6}V$, který rozdělíme podle jeho výšky v na dva pravoúhlé trojúhelníky. Z pravoúhlého $\triangle A_3S_{A_5A_6}V$ vypočítáme Pýthagorovou větou délku jeho přepony $S_{A_5A_6}V$: $|S_{A_5A_6}V| = \sqrt{3^2 + 8^2}$ cm$= \sqrt{73}$ cm $\doteq 8,54$ cm; $|S_{A_5A_6}V| = v_{a_1} = 8,54$ cm. Tedy $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a_1 \cdot v_{a_1}}{2} = \frac{3 \cdot 8{,}54}{2}$ cm $= 12,81 \text{ cm}^2$.

- Vypočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníku A_2A_3V: $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{a_2 \cdot v_{a_2}}{2}$; přičemž $v_{a_2} = v = 8$ cm. Tedy $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{a_2 \cdot v}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2}$ cm $= 12 \text{ cm}^2$.

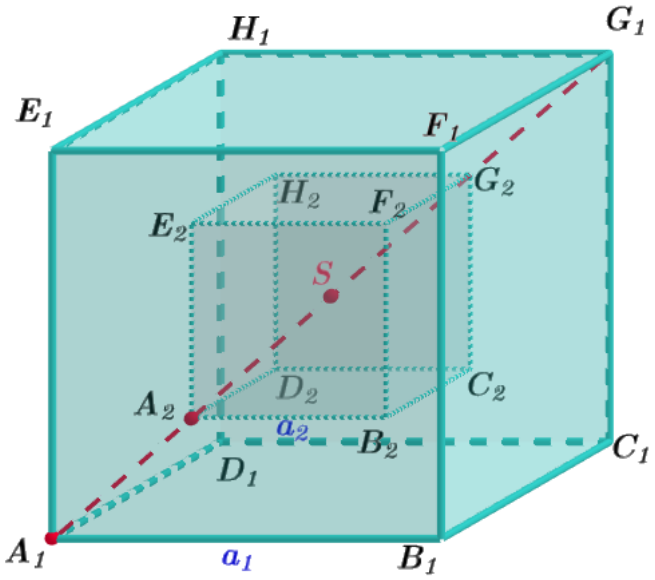
- Vypočítáme obsah rovnoramenného trojúhelníku A_5A_6V: $S_{\triangle A_5A_6V} = \frac{a_5 \cdot v_{a_5}}{2}$; přičemž $v_{a_5} = S_{A_5A_6}V = v_{a_1} = 8,54$ cm. Tedy $S_{\triangle A_5A_6V} = \frac{a_5 \cdot v_{a_5}}{2} = \frac{6 \cdot 8{,}54}{2}$ cm $= 25,62 \text{ cm}^2$.

- Vypočítáme obsah pláště S_{pl} tohoto jehlanu: $S_{pl} = 2S_{A_1A_2V} + 2S_{A_2A_3V} + 2S_{A_5A_6V} = 2 \cdot 12,81 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 12 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 25,62 \text{ cm}^2 = 100,86 \text{ cm}^2$.

- Vypočítáme povrch S tohoto hranolu: $S = S_p + S_{pl} = 27 \text{ cm}^2 + 100,86 \text{ cm}^2 \doteq 127,9 \text{ cm}^2$.

- Objem daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je 72 cm^3 a jeho povrch je $127,9$ cm^2.

Příklad 5.1.3 Vypočtěte objem V a povrch S nekonvexního dvanáctistěnu $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ vyobrazeném na obr. 5.8. Bod S je středem pomyslné pomocné krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ i vnitřní dutiny ve tvaru krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$. Dále platí $|A_1A_2| = |A_2S| = \sqrt{3}$ m, poměr délek úseček $|A_1A_2| : |A_2G_1|$ je roven $1 : 3$.

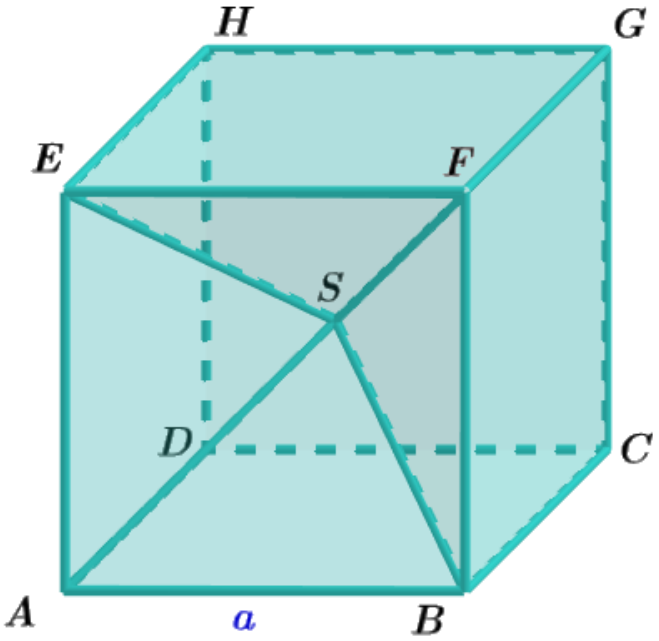


Obrázek 5.8: Ilustrace k Příkladu 5.1.3

Řešení

- Objem V daného dvanáctistěnu vypočítáme tak, že od objemu V_1 krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ o hraně a_1 odečteme objem V_2 krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ o hraně a_2: $V = V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} - V_{A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2}$.
- Pro objem V_1 platí $V_1 = V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = {a_1}^3$. Musíme tedy určit a_1.
- Vypočítáme délku hrany a_1 krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. Pro stěnovou úhlopříčku u_{s_1} krychle o hraně a_1 platí $u_{s_1} = a_1\sqrt{2}$; pro tělesovou úhlopříčku u_{t_1} krychle o hraně a_1 platí $u_{t_1} = a_1\sqrt{3}$. Vycházíme z pravoúhlého $\triangle A_1C_1G_1$: $A_1C_1 = u_{s_1} = a_1\sqrt{2}$, $C_1G_1 = a_1$, $G_1A_1 = u_{t_1} = a_1\sqrt{3}$. Víme, že $|A_1A_2| = \sqrt{3}$ m;
$|A_1A_2| : |A_2G_1| = 1 : 3$; $u_t = |A_1G_1| = 4 \cdot |A_1A_2| = 4\sqrt{3}$ m. Tedy $a_1 = 4$ m.
- Vypočítáme objem krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$: $V_1 = {a_1}^3 = 64$ m^3.
- Pro objem V_2 platí $V_2 = V_{A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2} = {a_2}^3$.
- Vypočítáme délku hrany a_2 krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$. Pro stěnovou úhlopříčku u_{s_2} krychle o hraně a_2 platí $u_{s_2} = a_2\sqrt{2}$; pro tělesovou úhlopříčku u_{t_2} krychle o hraně a_2 platí $u_{t_2} = a_2\sqrt{3}$. Vycházíme z pravoúhlého $\triangle A_2C_2G_2$: $A_2C_2 = u_{s_2} = a_2\sqrt{2}$, $C_2G_2 = a_2$, $G_2A_2 = u_{t_2} = a_2\sqrt{3}$. Víme, že $|A_2S| = \sqrt{3}$ m;
$|A_2S| : |SG_2| = 1 : 1$; $u_{t_2} = |A_2G_2| = 2 \cdot |A_2S| = 2\sqrt{3}$ m. Tedy $a_2 = 2$ m.
- Vypočítáme objem krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$: $V_2 = {a_2}^3 = 8$ m^3.
- Vypočítáme objem dvanáctistěnu: $V = V_1 - V_2 = 64$ m$^3 - 8$ m$^3 = 56$ m^3.
- Povrch S mnohostěnu vypočítáme tak, že spočítáme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny šesti shodnými čtverci o straně a_1 a šesti shodnými čtverci o straně a_2: $S = (6 \cdot {a_1}^2) + (6 \cdot {a_2}^2) = 96$ m$^2 + 24$ m$^2 = 120$ m^2.
- Objem nekonvexního dvanáctistěnu je 56 m^3 a jeho povrch je 120 m^2.

Příklad 5.1.4 Vyjádřete objem V a povrch S nekonvexního devítistěnu $ABCDEFGHS$ vyobrazeném na obr. 5.9. Bod S je středem pomyslné pomocné krychle $ABCDEFGH$ o hraně a.

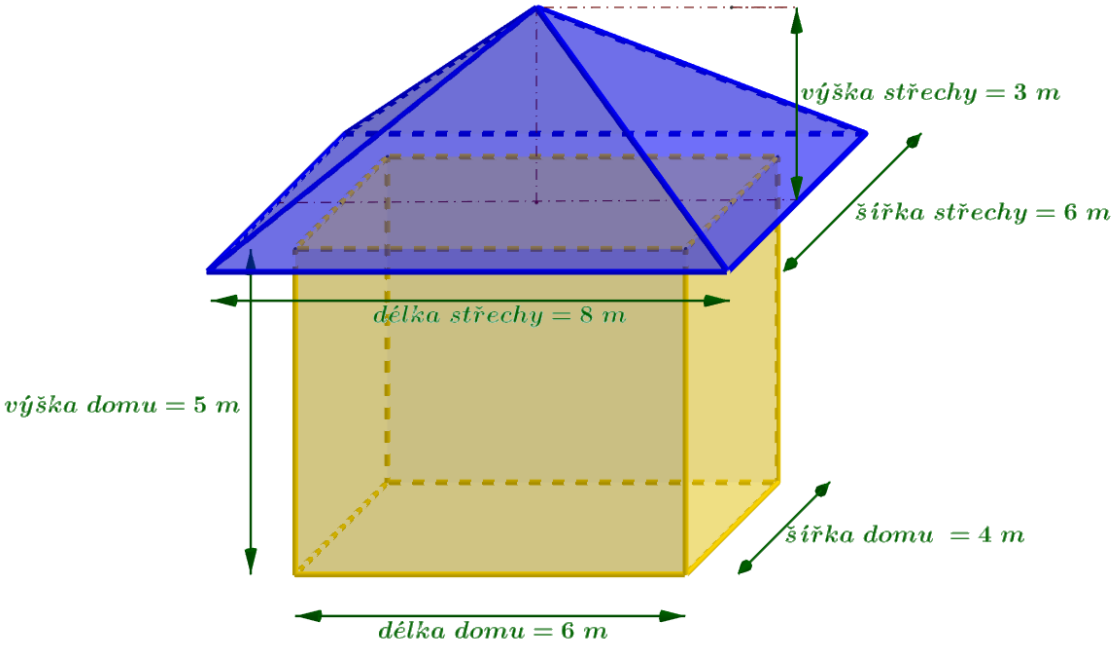


Obrázek 5.9: Ilustrace k Příkladu 5.1.4

Řešení

- Objem V daného devítistěnu vyjádříme tak, že od objemu V_1 krychle $ABCDEFGH$ o hraně a odečteme objem V_2 pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABFES$ s výškou $\frac{1}{2}a$: $V = V_{ABCDEFGH} - V_{ABFES}$.
- Pro objem V_1 platí $V_1 = a^3$.
- Pro objem V_2 platí $V_2 = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2\frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{6}a^3$.
- Vyjádříme objem dvanáctistěnu: $V = V_1 - V_2 = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.
- Povrch S mnohostěnu určíme tak, že vyjádříme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny pěti shodnými čtverci o straně a a čtyřmi shodnými rovnoramennými trojúhelníky o základně a a výšce v_a. Tedy $S = 5a^2 + 4\frac{a \cdot v_a}{2}$.
- Pro určení v_a potřebujeme znát délku b ramena rovnoramenného trojúhelníku, kterou vyjádříme pomocí délky tělesové úhlopříčky u_t krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a takto: $b = \frac{1}{2}u_t = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Výšku v_a (která je zároveň těžnicí) rovnoramenného trojúhelníku o základně délky a a ramenech délky b vyjádříme pomocí Pýthagorovy věty z pravoúhlého $\triangle S_{AB}BS$; $v_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
- Vyjádříme povrch tohoto devítistěnu:
  $S = 5a^2 + 4\frac{a \cdot v_a}{2} = 5a^2 + 4\frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = 5a^2 + a^2\sqrt{2} = a^2(5 + \sqrt{2})$.
- Objem nekonvexního devítistěnu $ABCDEFGHS$ je $V = \frac{5}{6}a^3$ a jeho povrch je $S = a^2(5 + \sqrt{2})$.

Úloha 5.1.1 Na obr. 5.10 je dán dům se střechou ve tvaru čtyřbokého jehlanu včetně rozměrů domu. Vypočítejte povrch obvodových zdí (otvory pro okna zanedbejte) a objem střechy (půdy) tohoto domu.

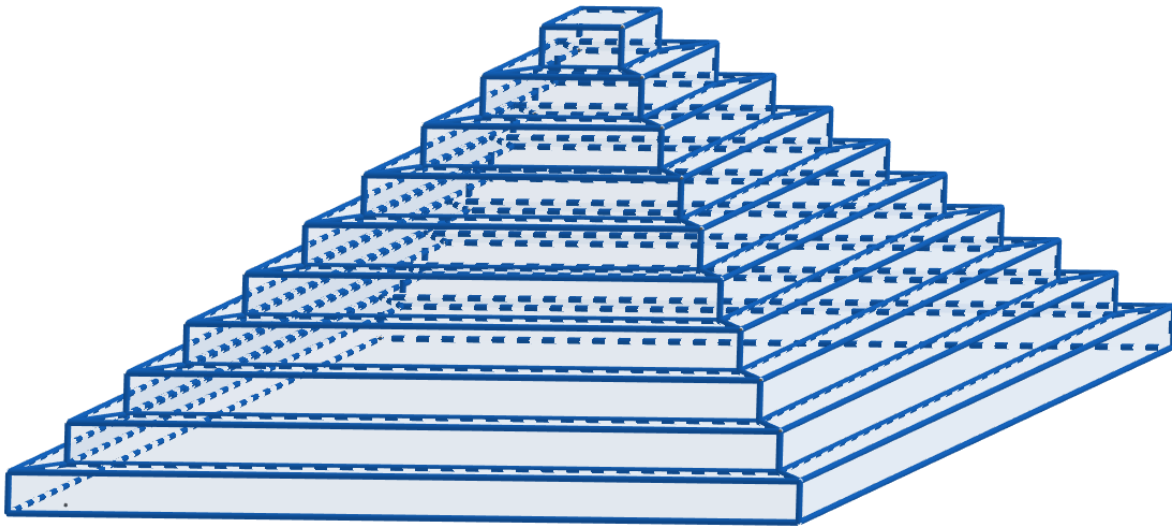


Obrázek 5.10: Ilustrace k Úloze 5.1.1

Řešení

- Pro určení povrchu obvodových zdí tohoto domu, musíme vypočítat obsah stěn, které tvoří obvodové zdi.
- Obvodové zdi domu jsou tvořeny dvěma dvojicemi navzájem shodných obdélníků.
- První dvojice obdélníků má rozměry délky domu $a = 6$ m a výšky domu $c = 5$ m. Obsah S_1 tohoto obdélníku je $S_1 = a \cdot c = 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.
- Druhá dvojice obdélníků má rozměry šířky domu $b = 4$ m a výšky domu $c = 5$ m. Obsah S_2 tohoto obdélníku je $S_2 = b \cdot c = 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$.
- Vypočítáme obsah S_O obvodových stěn:
  $S_O = 2S_1 + 2S_2 = 2 \cdot 30 \text{ m}^2 + 2 \cdot 20 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$.
- Pro určení objemu půdy tohoto domu, musíme vypočítat objem V čtyřbokého jehlanu, jehož podstava je obdélník o rozměrech délky střechy $d = 8$ m a šířky střechy $e = 6$ m a jehož výška v je rovna výšce střechy $f = 3$ m.
- Pro objem V jehlanu platí: $V = \frac{1}{3} S_p v$.
- Obsah podstavy S_p tohoto čtyřbokého jehlanu je $S_p = d \cdot e = 8 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$.
- Pro objem jehlanu platí $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} S_p f = \frac{1}{3} \cdot 48 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ m} = 48 \text{ m}^3$.
- Povrch obvodových zdí daného domu je 100 m^2 a objem jeho půdy je 48 m^3.

Úloha 5.1.2 Vypočítejte objem V tělesa vyobrazeném na obr. 5.11, které představuje model starověkého chrámu zvaného zikurrat. Je složeno z deseti stupňů – pravidelných čtyřbokých hranolů. Délka podstavné hrany prvního stupně je 40 m, každý další stupeň (hranol) má podstavnou hranu o 4 metry kratší. Výška v každého dalšího stupně (hranolu) je 2 m.



Obrázek 5.11: Ilustrace k Úloze 5.1.2

Řešení

- Objemu tohoto nekonvexního tělesa je roven součtu objemů V_i $(i = 1, 2, \ldots, 9, 10)$ jednotlivých pravidelných čtyřbokých hranolů:
  $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10}$.

- Pro objem V_i $(i = 1, 2, \ldots, 9, 10)$ každého pravidelného čtyřbokého hranolu platí:
  $V_i = S_{p_i} v$. Výška každého hranolu je rovna $v = 2$ m.

- Určíme délky podstavných hran a_i $(i = 1, 2, \ldots, 9, 10)$ jednotlivých hranolů; $a_1 = 40$ m:
  $a_2 = 36$ m; $a_3 = 32$ m; $a_4 = 28$ m; $a_5 = 24$ m; $a_6 = 20$ m; $a_7 = 16$ m; $a_8 = 12$ m;
  $a_9 = 8$ m; $a_{10} = 4$ m.

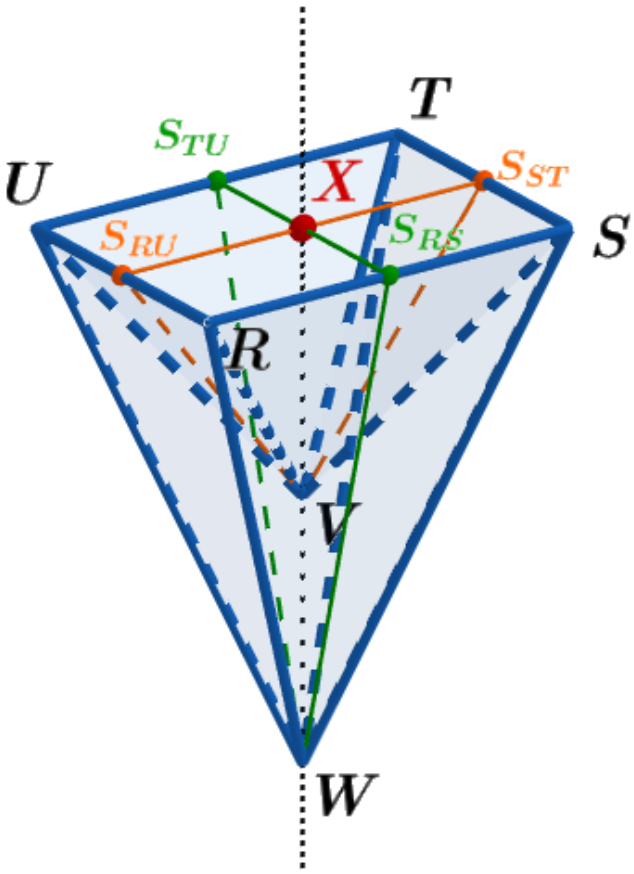
- Vypočítáme obsahy podstav S_{p_i} $(i = 1, 2, \ldots, 9, 10)$ jednotlivých hranolů; $S_{p_i} = {a_i}^2$:
  $S_{p_1} = 1\ 600$ m^2; $S_{p_2} = 1\ 296$ m^2; $S_{p_3} = 1\ 024$ m^2; $S_{p_4} = 784$ m^2; $S_{p_5} = 576$ m^2;
  $S_{p_6} = 400$ m^2; $S_{p_7} = 256$ m^2; $S_{p_8} = 144$ m^2; $S_{p_9} = 64$ m^2; $S_{p_{10}} = 16$ m^2.

- Vypočítáme objemy V_i $(i = 1, 2, \ldots, 9, 10)$ jednotlivých hranolů; $V_i = S_{p_i} v$:
  $V_1 = 1\ 600$ m$^2 \cdot 2$ m $= 3\ 200$ m^3; $V_2 = 1\ 296$ m$^2 \cdot 2$ m $= 2\ 592$ m^3;
  $V_3 = 1\ 024$ m$^2 \cdot 2$ m $= 2\ 048$ m^3; $V_4 = 784$ m$^2 \cdot 2$ m $= 1\ 568$ m^3;
  $V_5 = 576$ m$^2 \cdot 2$ m $= 1\ 152$ m^3; $V_6 = 400$ m$^2 \cdot 2$ m $= 800$ m^3; $V_7 = 256$ m$^2 \cdot 2$ m $= 512$ m^3;
  $V_8 = 144$ m$^2 \cdot 2$ m $= 288$ m^3; $V_9 = 64$ m$^2 \cdot 2$ m $= 128$ m^3; $V_{10} = 16$ m$^2 \cdot 2$ m $= 32$ m^3.

- Vypočítáme objem V složeného nekonvexního tělesa:
  $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} = 3\ 200$ m^3 $+$ $2\ 592$ m^3 $+$
  $+$ $2\ 048$ m^3 $+$ $1\ 568$ m^3 $+$ $1\ 152$ m^3 $+$ 800 m^3 $+$ 512 m^3 $+$ 288 m^3 $+$ 128 m^3 $+$
  $+$ 32 m^3 $= 12\ 320$ m^3.

- Objem modelu starověkého chrámu zvaného zikurrat je $12\ 320$ m^3.

Úloha 5.1.3 Vypočítejte objem V a povrch S nekonvexního osmistěnu $RSTUVW$ zobrazeném na obr. 5.12; toto těleso vzniklo „rozdílem“ dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů se shodnými podstavami a různými výškami. Bod X je středem čtverce $RSTU$, $|WX| = 8$ km, $|VX| = 4$ km, $a = |RS| = 6$ km. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 5.12: Ilustrace k Úloze 5.1.3

Řešení

- Objem V nekonvexního osmistěnu $RSTUVW$ vypočítáme tak, že od objemu V_1 pravidelného čtyřbokého jehlanu $RSTUW$ o podstavné hraně $a = 6$ km a výšce $v_1 = |WX| = 8$ km odečteme objem V_2 pravidelného čtyřbokého jehlanu $RSTUV$ o podstavné hraně $a = 6$ km a výšce $v_2 = |WX| = 4$ km: $V = V_1 - V_2$.
- Pro objem V_1 platí $V_1 = \frac{1}{3} S_p v_1 = a^2 \cdot v_1 = 36 \text{ km}^2 \cdot 8 \text{ km} = 288,00 \text{ km}^3$.
- Pro objem V_2 platí $V_2 = \frac{1}{3} S_p v_2 = a^2 \cdot v_2 = 36 \text{ km}^2 \cdot 4 \text{ km} = 144,00 \text{ km}^3$.
- Vypočítáme objem nekonvexního osmistěnu:
  $V = V_1 - V_2 = 288 \text{ km}^3 - 144 \text{ km}^3 = 144,0 \text{ km}^3$.
- Povrch S mnohostěnu určíme tak, že vypočítáme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny dvěma čtveřicemi rovnoramenných trojúhelníků, v každé čtveřici jsou trojúhelníky shodné. První čtveřice shodných rovnoramenných trojúhelníků má základnu a, délku ramen b a délku výšky v_3. Druhá čtveřice shodných rovnoramenných trojúhelníků má základnu a, délku ramen c a délku výšky v_4. Tedy $S = 4 \cdot \frac{a \cdot v_3}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot v_4}{2}$.

- Body $S_{RS}, S_{ST}, S_{TU}, S_{RU}$ jsou středy příslušných hran.
- Pro určení výšky v_3 potřebujeme znát $|WS_{RS}| = |WS_{TU}| = v_3$, která je zároveň délkou ramene rovnoramenného trojúhelníku $\triangle S_{RS}S_{TU}W$. Tento rovnoramenný $\triangle S_{RS}S_{TU}W$ o základně délky $a = 6$ km rozdělíme výškou v_1 na dva pravoúhlé trojúhelníky a vyjádříme v_3 pomocí Pýthagorovy věty:
  $v_3 = \sqrt{{v_1}^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{8^2 + (\frac{6}{2})^2}$ km $= \sqrt{8^2 + 3^2}$ km $= \sqrt{73}$ km $\doteq 8,54$ km.
- Pro určení výšky v_4 potřebujeme znát $|VS_{ST}| = |VS_{RU}| = v_4$, která je zároveň délkou ramene rovnoramenného trojúhelníku $\triangle S_{ST}S_{RU}V$. Tento rovnoramenný $\triangle S_{ST}S_{RU}V$ o základně délky $a = 6$ km rozdělíme výškou v_2 na dva pravoúhlé trojúhelníky a vyjádříme v_4 pomocí Pýthagorovy věty:
  $v_4 = \sqrt{{v_2}^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{4^2 + (\frac{6}{2})^2}$ km $= \sqrt{4^2 + 3^2}$ km $= \sqrt{25}$ km $= 5$ km.
- Vypočítáme povrch tohoto osmistěnu: $S = 4 \cdot \frac{a \cdot v_3}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot v_4}{2} =$
  $= 4 \cdot \frac{6 \cdot 8{,}54}{2}$ km^2 $+ 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$ km$^2 \doteq 4 \cdot 25,62$ km$^2 + 4 \cdot 15$ km$^2 \doteq 162,5$ km^2.
- Objem nekonvexního osmistěnu $RSTUVW$ je $144,0$ km^3 a jeho povrch je $162,5$ km^2.

6. Souhrnný test

Vyzkoušejte si test z kapitoly stereometrie týkající se objemů a povrchů těles. Na webu test obsahuje sedm náhodně generovaných úloh. U každé úlohy je pouze jedna odpověď správná.

Otázka č.1 Vyberte, v jakém tvaru je postavena každá z osmi věží pevnosti Castel del Monte (Itálie, Andria) znázorněných na obr. 6.1.

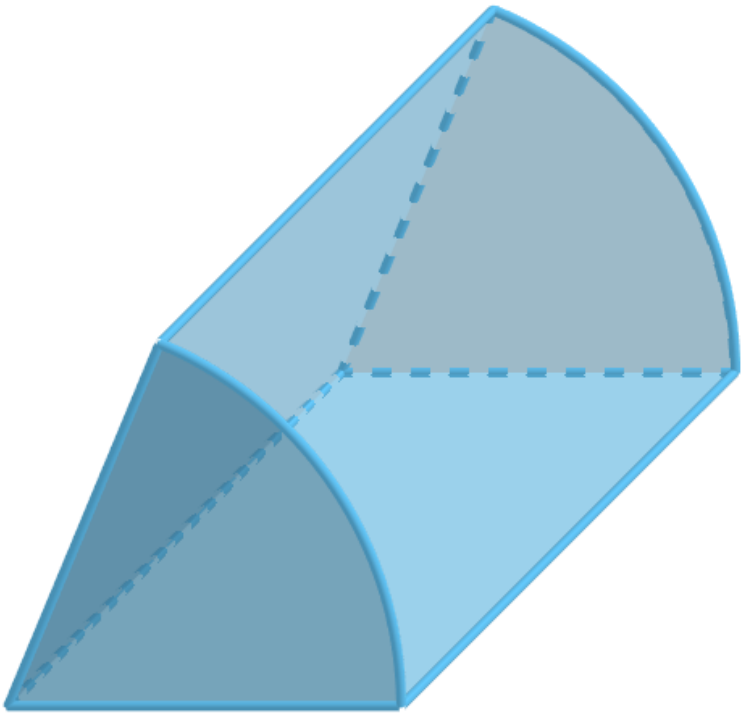


Obrázek 6.1: Ilustrace k první testové otázce [28]

Možnosti

- osmistěn
- pravidelný osmiboký jehlan
- osmiboký hranol
- osmiboký komolý jehlan

Otázka č.2 Do jaké skupiny geometrických útvarů patří těleso znázorněné na obr. 6.2?



Obrázek 6.2: Ilustrace ke druhé testové otázce

Možnosti

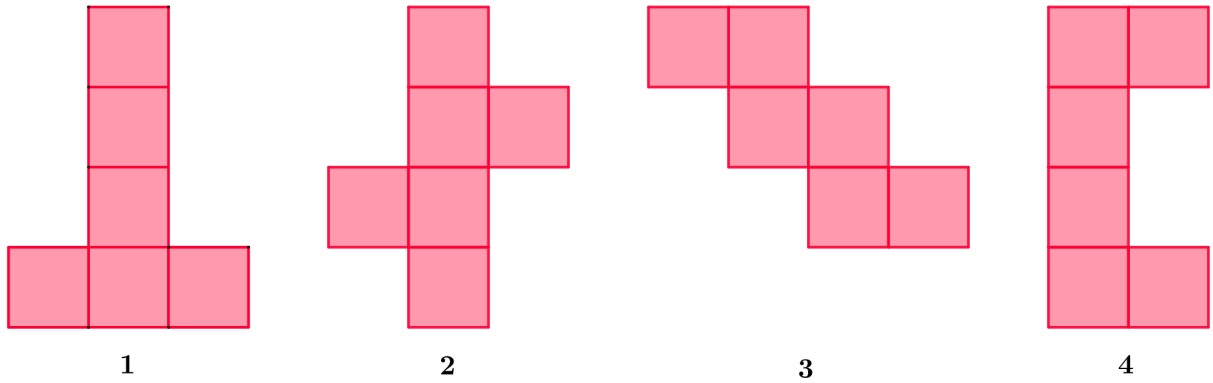
- jehlany
- nekonvexní tělesa
- konvexní mnohostěny
- konvexní tělesa

Otázka č.3 Boční stěnou hranolu není:

Možnosti

- obdélník
- kosočtverec
- rovnoběžník
- rovnoramenný lichoběžník

Otázka č.4 Vyberte číslo rovinného útvaru (obr. 6.3), který nepředstavuje síť krychle.

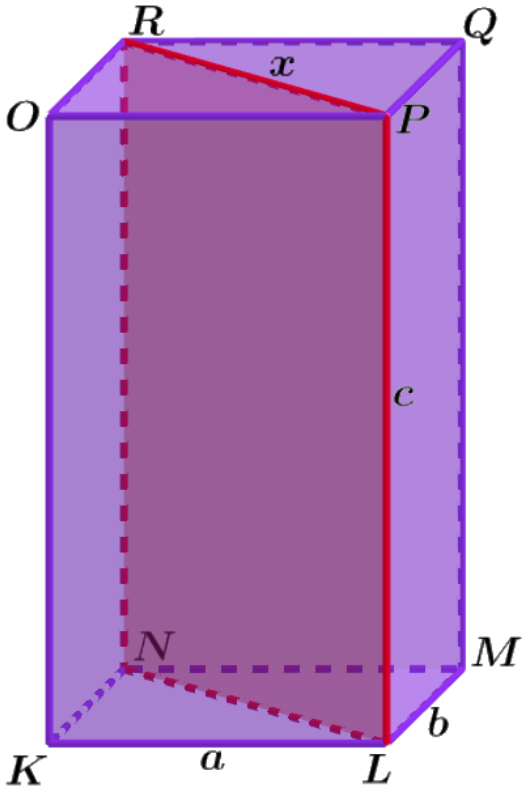


Obrázek 6.3: Ilustrace ke čtvrté testové otázce

Možnosti

- 1
- 2
- 3
- 4

Otázka č.5 Jaký je obsah S řezu rovinou $NLPR$ kvádrem $KLMNOPQR$ o rozměrech $a = 8$ m, $b = 6$ m a $c = 15$ m (obr. 6.4)?

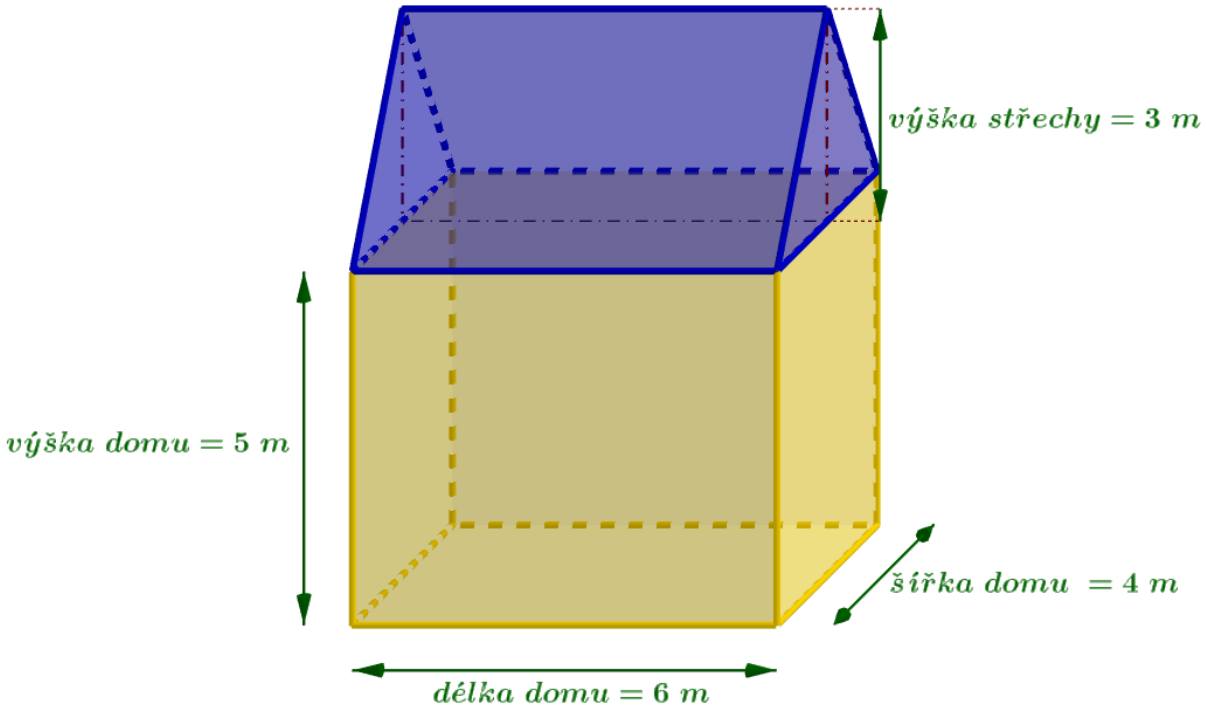


Obrázek 6.4: Ilustrace k páté testové otázce

Možnosti

- 130 dm^2
- 150 m^3
- 150 m^2
- 120 cm^2

Otázka č.6 Je dán dům se sedlovou střechou a rozměry vyznačenými na obr. 6.5. Vyberte v metrech krychlových objem V tohoto domu včetně střechy.



Obrázek 6.5: Ilustrace k šesté testové otázce

Možnosti

- 165 m^3
- 160 m^3
- 156 m^3
- 166 m^3

Otázka č.7 Určete kolik tělesových úhlopříček má nepravidelný čtyřstěn.

Možnosti

- 1
- 2
- 3
- žádnou

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit webové stránky jako podpůrný materiál pro výuku na středních a základních školách. Tyto stránky zaměřené na stereometrii budou po obhajobě veřejně dostupné na Portálu středoškolské matematiky, který vytváří Katedra didaktiky matematiky MFF UK.

Práce se zabývá tématem objemů a povrchů těles. Jelikož je toto téma velice rozsáhlé, je zaměřena především na objemy a povrchy mnohostěnů. Zahrnuje úvodní motivaci, historický výtah a zavedení základních pojmů potřebných k následnému výkladu. Dále obsahuje dvě stěžejní kapitoly – Hranoly a Jehlany, ve kterých jsou tyto mnohostěny postupně zavedeny, klasifikovány a následně jsou odvozeny vztahy pro výpočty jejich objemů a povrchů. Poslední kapitola je věnována nekonvexním mnohostěnům, se kterými se ve výuce jen zřídka setkáváme. V závěrečném souhrnném testu je možné procvičit prostorovou představivost a ověřit nabyté vědomosti.

Během psaní této bakalářské práce jsem se naučila nespočet informatických úkonů, které mi předtím nebyly vlastní, neboť studuji Matematiku se zaměřeném na vzdělávání v kombinaci s Francouzskou filologií na FF UK. Navíc jsem si rozšířila obzory s prací v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra. Práce by mohla být v budoucnu rozšířena o objemy a povrchy oblých těles.

Seznam použité literatury

Ashrafi, A. R. a Diudea, M. V., editors (2016). *Distance, Symmetry, and Topology in Carbon Nanomaterials*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-31584-3.

Bečvář, Jindřich.; Bečvářová, Martina; Vymazalová, Hana (2003). *Matematika ve starověku : Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha. [cit. 2020-05-30] ISBN 8071962554. pp. 32-148. URL `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401853`.

Bečvář, J. (editor); Fuchs, E. (editor) (1993). *Historie matematiky [online]*. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 108-125. [cit. 2020-03-05]. URL `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400589`.

Calda, Emil. (1998). *Cavalieriho princip a objem anuloidu [online]*. Časopis Matematika–fyzika–informatika. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1998/9, 8, 263-267. [cit. 2020-03-05]. ISSN 1210-1761.

Dohnalová, Eva. (2016). *Platónská a archimédovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách [online]*. Praha, Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc. [cit. 2020-05-05]. URL `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/164040/`.

Kadleček, J. (1996). *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Prometheus, Praha. ISBN 8071960179.

Odvárko, O. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus, Praha. ISBN 8071962767.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky : jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Fraus, Plzeň. ISBN 9788072384495.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha. ISBN 9788071964582.

Pomykalová, E. (1995). *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. Prometheus, Praha. ISBN 9788071963899.

Pomykalová, E. (2000). *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-174-4.

Ptáčková, Tereza. (2014). *Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice s podporou internetu [online]*. Praha, Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc. [cit. 2020-05-05]. URL `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/141076/`.

Rooney, A. (2017). *Příběh matematiky : od projektování pyramid po objevení nekonečna*. Dobrovský s.r.o, Praha. ISBN 9788073905798.

Šarounová, Alena (1997). *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-059-4.

Tvrdá, Monika. (2013). *Webová aplikace pro výuku integrálního počtu na SŠ [online].* Praha, Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc. [cit. 2020-05-05]. URL `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/114361/`.

Vyšín, J. (1964). *Konvexní útvary.* Praha: Mladá fronta, 1964. Škola mladých matematiků. URL `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403502`.

Seznam obrázků

1.1 Cheopsova pyramida – model pravidelného čtyřbokého jehlanu [1] 4
1.2 Stanice metra Lužiny, Praha – modely osekaného dvacetistěnu a hranolů [2] . 4
1.3 Řemeslná výroba – model sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu a model válce 5
1.4 Kapsida viru – model dvacetistěnu [3] 5
1.5 Krystaly pyritu – modely krychle [4] 6
1.6 Schránka mořského plže – modely desetibokých jehlanů [5] 6
1.7 Písaři ve starověku [0] 7

2.1 Konvexní čtyřúhelník U_1 a nekonvexní pětiúhelník U_2 v rovině 10
2.2 Konvexní čtyřboký hranol U_1 a nekonvexní pětiboký hranol U_2 v prostoru . . 10
2.3 Skupina těles v prostoru (mnohostěny a oblá tělesa) 11
2.4 Hierarchické schéma těles 11
2.5 Nekonvexní hvězdicovité mnohoúhelníky (pěticípý, šesticípý a sedmicípý) . . 12
2.6 Skupina mnohostěnů v prostoru 13
2.7 Obecný jedenáctiboký mnohostěn 13
2.8 Síť mnohostěnu (pravidelného dvacetistěnu) 14
2.9 Keplerova tělesa [7] 15
2.10 Poisontova tělesa [7] 15
2.11 Pravidelný čtyřstěn 17
2.12 Pravidelný šestistěn 17
2.13 Pravidelný osmistěn 18
2.14 Pravidelný dvanáctistěn 18
2.15 Pravidelný dvacetistěn 19
2.16 Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu pravidelného čtyřstěnu, osmistěnu a dvacetistěnu 20
2.17 Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu krychle 20
2.18 Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu dvanáctistěnu 21
2.19 Šestiúhelníky incidující s daným vrcholem leží ve jedné rovině 21
2.20 Dualní mnohostěn k čtyřstěnu – čtyřstěn 22
2.21 Dualní mnohostěn ke krychli – osmistěn 23
2.22 Dualní mnohostěn k osmistěnu – krychle 23
2.23 Dualní mnohostěn k dvanáctistěnu – dvacetistěn 24
2.24 Dualní mnohostěn k dvacetistěnu – dvanáctistěn 24
2.25 Hrací kostka ve tvaru krychle [9] 25
2.26 Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pravidelných mnohostěnů [10] 25
2.27 Čtyřicetikilová malířská barva 26
2.28 Tabulka převodních vztahů jednotek objemu 27
2.29 Tabulka převodních vztahů vedlejších jednotek objemu 28
2.30 Těleso složené ze tří různých těles 28
2.31 Těleso složené z dvanácti krychlí 29
2.32 Kvádr rozložený na 120 jednotkových krychlí 29
2.33 Ilustrace Cavalieriho principu 30
2.34 Svislý sloupec žetonů 31
2.35 Šikmý sloupec žetonů 31
2.36 Síť kužele 32
2.37 Pomerančová kůra nerozložitelná do rovinné sítě 33

2.38 Tabulka převodních vztahů jednotek obsahu 34

3.1 Dubové trámy ve tvaru hranolů 35
3.2 Optický trojboký hranol – rozklad světla pomocí hranolu [9] 35
3.3 Motiv optického hranolu – obal vinylové desky The Dark side of the moon . 36
3.4 Flatiron Building ve tvaru trojbokého hranolu (USA, New York City) [10] . . 36
3.5 Hranolový prostor n-boký 37
3.6 Hranolová plocha n-boká 38
3.7 Hranol n-boký 38
3.8 Vrcholy, hrany a stěny hranolů 39
3.9 Výšky a úhlopříčky hranolu 40
3.10 Čedičové varhany Panská skála tvořeny šestibokými hranoly (Českolipsko) [11] 40
3.11 Obrův chodník tvořeny pětibokými hranoly (Severní Irsko) [12] 41
3.12 Vodopády Svartifoss (Island) [13] 41
3.13 Konvexní pětiboký hranol a trojboký hranol, nekonvexní sedmiboký hranol . 42
3.14 Konvexní kolmý pětiboký hranol a konvexní kosý trojboký hranol 42
3.15 Nekonvexní kolmý pětiboký hranol a nekonvexní kosý čtyřboký hranol 43
3.16 Zleva (horní řada): pravidelný trojboký hranol, pravidelný čtyřboký hranol, pravidelný pětiboký hranol; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký hranol a pravidelný sedmiboký hranol 43
3.17 O jaký hranol se jedná? 44
3.18 O jaký hranol se jedná? 44
3.19 O jaký hranol se jedná? 45
3.20 O jaký hranol se jedná? 45
3.21 Obecný rovnoběžnostěn 46
3.22 Zleva: kvádr, krychle a klenec 46
3.23 Kostky cukru ve tvaru krychle 47
3.24 One World Trade Center (USA, New York City) [14] 48
3.25 Čtvercový antihranol 48
3.26 Obal na květináč ve tvaru čtvercového antihranolu 49
3.27 Forma pro odlitek čtvercového antihranolu rozložená v jeho síť 49
3.28 Řeznická věž s valbovou střechou ve tvaru klínu (Ulm, Německo) [15] 50
3.29 Objem kvádru je roven celkovému počtu jednotkových krychlí 51
3.30 Kvádr rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly 51
3.31 Kolmý trojboký hranol rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly 52
3.32 Kolmý hranol rozdělený na n kolmých trojbokých hranolů 53
3.33 Využití Cavalieriho principu pro kolmý a kosý hranol se stejnými S_p a v . . . 53
3.34 Využití Cavalieriho principu pro konvexní a nekonv. hranol se stejnými S_p a v 54
3.35 Ilustrace Příkladu 3.6.1 55
3.36 Ilustrace Příkladu 3.6.2 56
3.37 Ilustrace Příkladu 3.6.3 57
3.38 Ilustrace Příkladu 3.6.4 58
3.39 Síť šestibokého kosého hranolu 59
3.40 Povrch šestibokého kosého hranolu - plášť a podstavy 59
3.41 Ilustrace Příkladu 3.7.1 60
3.42 Ilustrace Příkladu 3.7.2 61
3.43 Ilustrace Příkladu 3.7.3 62
3.44 Ilustrace Příkladu 3.7.4 63
3.45 Kvádr s vyznačenými rozměry a, b, c zobrazen v levém nadhledu 64

3.46 Síť kvádru skládající se ze šesti stěn 64
3.47 Ilustrace Příkladu 3.8.1 65
3.48 Krychle zobrazena v levém podhledu 66
3.49 Síť krychle skládající se ze šesti shodných stěn 66
3.50 Ilustrace Příkladu 3.8.2 67
3.51 Ilustrace Příkladu 3.8.3 68
3.52 Ilustrace Úlohy 3.9.1 69
3.53 Ilustrace Úlohy 3.9.2 70
3.54 Ilustrace Úlohy 3.9.4 72

4.1 Skleněná pyramida na nádvoří Paláce Louvre ve tvaru čtyřbokého jehlanu [16] 73
4.2 Obelisk se zakončením ve tvaru čtyřbokého jehlanu na Pražském hradě . . . 73
4.3 Patnáctimetrová rozhledna ve tvaru osmibokého jehlanu (Ocmanice) [17] . . 74
4.4 Jehlanový prostor n-boký 75
4.5 Jehlanová plocha n-boká 75
4.6 Jehlan n-boký 76
4.7 Vrcholy, hrany a stěny jehlanů 77
4.8 Tělesová a stěnová výška jehlanu 77
4.9 Konvexní pětiboký jehlan a trojboký jehlan, nekonvexní sedmiboký jehlan . 78
4.10 Zleva (horní řada): pravidelný trojboký jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný pětiboký jehlan; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký jehlan a pravidelný sedmiboký jehlan 79
4.11 Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku 79
4.12 Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru nepravidelného šestiúhelníku . . . 80
4.13 Střecha mauzolea ve tvaru pravidelného šestibokého jehlanu (Divriği) [18] . . 80
4.14 O jaký jehlan se jedná? 81
4.15 O jaký jehlan se jedná? 81
4.16 O jaký jehlan se jedná? 82
4.17 O jaký jehlan se jedná? 82
4.18 Čtyřstěn a jeho těžiště 83
4.19 Pravidelný čtyřstěn a jeho těžiště 83
4.20 Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (SLO, Pivka) [19] . 84
4.21 Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (CZ, Nové Údolí) . 84
4.22 Vznik komolého jehlanu 85
4.23 Pravidelný komolý šestiboký jehlan 85
4.24 Stěny a výšky komolého šestibokého jehlanu 86
4.25 Lesní megaphony ve tvaru devítibokého komolého jehlanu (EST, Võru) [20] . 86
4.26 Stojan na květinu ve tvaru čtyřbokého dvojjehlanu (osmistěnu) 87
4.27 Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pětibokého trapezoedru [21] 87
4.28 Hranolec 88
4.29 Krychle rozdělená na šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů 88
4.30 Krychle rozdělená na tři čtyřboké jehlany $CDABH$, $GCBFH$ a $BAEFH$. 89
4.31 Trojboký hranol $\mathcal{H}$ rozdělený na tři trojboké jehlany 91
4.32 Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti pro tři jehlany se stejnými obsahy podstav S_p a se stejnými výškami v 92
4.33 Ilustrace Příkladu 4.6.1 93
4.34 Ilustrace Příkladu 4.6.2 94
4.35 Ilustrace Příkladu 4.6.3 95
4.36 Ilustrace Příkladu 4.6.4 96

4.37 Ilustrace Příkladu 4.6.5 97
4.38 Síť čtyřbokého jehlanu 99
4.39 Plášť a podstava čtyřbokého jehlanu zobrazeného v levém podhledu 99
4.40 Ilustrace Příkladu 4.7.1 100
4.41 Ilustrace Příkladu 4.7.2 101
4.42 Ilustrace Příkladu 4.7.3 102
4.43 Ilustrace Příkladu 4.7.4 103
4.44 Ilustrace Příkladu 4.7.5 104
4.45 Atypická Rubikova kostka (Pyraminx) ve tvaru pravidelného čtyřstěnu [22] . 105
4.46 Ilustrace Příkladu 4.8.1 106
4.47 Ilustrace Příkladu 4.8.2 107
4.48 Komolý jehlan 108
4.49 Ilustrace k odvození vzorce pro objem komolého jehlanu 110
4.50 Ilustrace k Příkladu 4.8.3 111
4.51 Ilustrace k Úloze 4.9.1 112
4.52 Ilustrace k Úloze 4.9.2 113
4.53 Ilustrace k Úloze 4.9.3 114
4.54 Ilustrace k Úloze 4.9.4 115

5.1 Budova Civil Justice Centre (Manchester, Velká Británie) [23] 117
5.2 Wotrubův kostel (Vídeň, Rakousko) [24] 117
5.3 Komplex budov Habitat 67 (Montreal, Quebec) [25] 118
5.4 Mrakodrap MahaNakhon (Bangkok, Thajsko) [26] 118
5.5 Budova Čínské ústřední televize (Peking, Čína) [27] 119
5.6 Ilustrace k Příkladu 5.1.1 120
5.7 Ilustrace k Příkladu 5.1.2 121
5.8 Ilustrace k Příkladu 5.1.3 123
5.9 Ilustrace k Příkladu 5.1.4 124
5.10 Ilustrace k Úloze 5.1.1 125
5.11 Ilustrace k Úloze 5.1.2 126
5.12 Ilustrace k Úloze 5.1.3 127

6.1 Ilustrace k první testové otázce [28] 129
6.2 Ilustrace ke druhé testové otázce 130
6.3 Ilustrace ke čtvrté testové otázce 131
6.4 Ilustrace k páté testové otázce 132
6.5 Ilustrace k šesté testové otázce 133

Seznam zdrojů nevlastních obrázků

[0] KOLMAN, Arnošt. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1969, s. 44, o. 9.
[1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Chufuova_pyramida#/media/Soubor:Kheops-Pyramid.jpg
[2] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lu%C5%BEiny_metro_n%C3%A1st_1.jpg
[3] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kapsida#/media/Soubor:Adenovirus_3D_schematic.png
[4] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c6/Pyrite_Cubes.JPG
[5] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turritella_communis_Turmschnecke.jpg
[6] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/81/Kepler-Poinsot_solids.svg
[7] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a5/6sided_dice.jpg
[8] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD_Dice_Set.jpg
[9] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dispersive_Prism_Illustration_by_Spigget.jpg
[10] https://pxhere.com/cs/photo/1171836
[11] https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Pansk%C3%A1_sk%C3%A1la_-varhany.jpg
[12] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Giant%27s_causeway.jpg
[13] https://pexels.com/cs-cz/foto/cestovani-cestovni-ruch-dlouha-expozice-drevo-831062/
[14] https://pexels.com/cs-cz/foto/dolni-manhattan-mrakodrap-mrakodrap-one-world
-trade-center-zem-nula-2120151/
[15] https://pxhere.com/cs/photo/1132851
[16] https://pixabay.com/fr/photos/paris-mus%C3%A9e-du-louvre-pyramide-199147/
[17] NESRSTOVÁ, Aneta. profil @nesrstovaaneta na Instagramu [online].
Použití v BP schváleno autorem [cit. 2019-11-30]. Obrázek ve formátu JPEG.
Dostupné z: https://www.instagram.com/nesrstovaaneta/
[18] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Divrigi,SitteMelikT%C3%BCrbesi1.jpg
[19] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f8/Tankovske_ovire.JPG
[20] https://et.m.wikipedia.org/wiki/Fail:Metsa_k%C3%B5lakojad.jpg
[21] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD_Dice_Set.jpg
[22] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyraminx_turn_cubemeister_com.jpg
[23] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manchester_Civil_Justice_Centre
_from_Bridge_Street.jpg
[24] https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Wien_-_Wotrubakirche_(6).JPG
[25] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Habitat_67,_southwest_view.jpg
[26] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MahaNakhon_by_kylehase.jpg
[27] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CCTV_Tower_(11523985946).jpg
[28] CARIOGGIA, Michele. profil @aerevides na Instagramu [online].
Použití v BP schváleno autorem [cit. 2020-05-24]. Dva obrázky ve formátu JPEG.
Dostupné z: https://www.instagram.com/p/BhwPgS0FsAV/
a https://www.instagram.com/p/Bhoy4zflvG4/