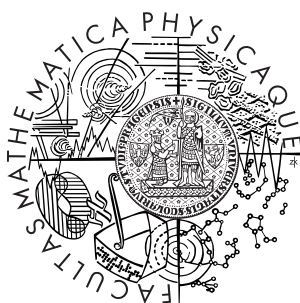


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Andrej Živčák

Kvadratické spliny a jejich aplikace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

Studijní program: Obecná matematika

2008

Rád by som na tomto mieste poďakoval Doc. RNDr. Karlu Najzarovi, CSc. za vypísanie témy, poskytnuté konzultácie a zapožičanie literatúry, Doc. RNDr. Jiřímu Kobzovi, CSc. za zapožičanie svojich prác, všetkým, ktorí svojimi radami prispeli k napísaniu tohoto textu a nakoniec samozrejme svojej rodine, bez ktorej podpory by som nemohol písať tieto riadky.
Ďakujem!

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. května 2008

Andrej Živčák

Obsah

Úvod	5
1 Splajny	6
1.1 Splajn	6
1.2 Polynomické splajny	6
2 Reprezentácia kvadratických splajnov	8
2.1 Reprezentácia na sieti (Δx)	8
2.2 Reprezentácia na sieti ($\Delta x \Delta t$)	11
3 Lokálne vlastnosti kvadratických splajnov	19
3.1 Výber uzlov, bodov interpolácie, okrajových podmienok	19
3.2 Vplyv interpolovaných hodnôt na kvadratický splajn	21
3.3 Lokálny vplyv okrajových podmienok.	23
3.4 Zachovanie monotónnosti a konvexnosti	24
3.5 Odhad chyby interpolácie	24
4 Interpolácia prvých derivácií	30
4.1 Interpolácia prvých derivácií na sieti (Δx)	30
4.2 Interpolácia prvých derivácií na sieti ($\Delta x \Delta t$)	31
5 Interpolácia stredných hodnôt	34
5.1 Kvadratický splajn interpolujúci stredné hodnoty	34
5.2 Minimalizujúca vlastnosť kvadratických splajnov	36
5.3 Chyba interpolácie stredných integrálnych hodnôt funkcie strednými integrálnymi hodnotami kvadratického splajnu	38
5.4 Zhladzujúci kvadratický splajn	38
6 Aplikácie kvadratických splajnov v numerickej matematike	42
6.1 Numerickej derivácia	42
6.2 Numerickej integrácia	43
6.3 Numerickej riešenie ODR	44
7 Dodatok	48
Literatura	50

Názov práce: Kvadratické splajny a ich aplikácie
Autor: Andrej Živčák
Katedra: Katedra numerickej matematiky
Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedúceho: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme vlastnosti kvadratických splajnov. Skúmame možnosti reprezentácie tohoto objektu pri interpolovaní rôznych dát a podmienky na jeho jednoznačné určenie. Väčšia časť práce je venovaná kvadratickému splajnu interpolujúceho hodnoty v bodoch rôznych od uzlov splajnu. V špeciálnom prípade siete uzlov je ukázaný vplyv interpolovaných hodnôt a počiatkových podmienok na kvadratický splajn. V práci sú ďalej skúmané kvadratické splajny interpolujúce stredné hodnoty. Je ukázaná ich minimalizujúca vlastnosť, na základe ktorej je skonštruovaný zhladzujúci kvadratický splajn. V závere práce je pojednané o využití kvadratických splajnov pre formule numerickej derivácie, numerickej integrácie, ako prostriedku na konštrukciu algoritmov na numerické riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc a pomocou nich odvodené algoritmy.

Kľúčová slova: kvadratický splajn, interpolácia, zhladzovanie

Title: Quadratic splines and their applications
Author: Andrej Živčák
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstract: In the presented work we study properties of quadratic splines. We examine possibilities of their representation and search for conditions of the unique solution. We emphasize attention to quadratic splines, which interpolate values at points different from spline knots. In the special case we show the effect of boundary condition and data to spline. Later we study quadratic splines interpolating main value, we show their minimizing property on the basis of which we build smoothing quadratic spline. Finally we describe some possibilities of using quadratic splines for formulae of numeric integration and derivative. Using quadratic splines we construct some algorithm to solve ordinary differential equations.

Keywords: quadratic spline, interpolation, smoothing

Úvod

Prvé úlohy vedúce ku splajnom mali charakter, ktorý viedol ku kubickým splajnom. Štúdium kvadratických splajnov sa začína neskôr. Už v počiatkoch sa vyskytli problémy, ktoré sa len postupne darilo uspokojivo riešiť tak, ako pri kubických splajnoch.

Kvadratické splajny sú svojou konštrukciou veľmi jednoduché a preto zo splajnov párneho stupňa najpoužívanejšie. Svoje uplatnenie našli v počítačovej grafike a v problémoch zachovávaní monotónosti a konvexity dát.

V tejto práci sú skúmané otázky existencie a jednoznačnosti interpolačných kvadratických splajnov, niektoré vlastnosti kvadratických splajnov a ich využitie.

Prvá kapitola má prehľadový charakter. Uvádza do vzniku teórie splajnov a sú tu zavedené základné pojmy pre polynomicke splajny.

V druhej kapitole sú študované kvadratické splajny. Je vychádzané najmä z prác [4], [6]. Najprv skúmame interpolačný kvadratický splajn interpolujúci predpísané hodnoty v uzloch splajnu. Je predložené prečo sa v teórii kvadratických splajnov touto cestou nedala konštruovať vhodná teória, tak ako je tomu pri kvadratických splajnoch. Následne je ukázaný iný prístup, ktorý umožnil rozvíjať teóriu kvadratických splajnov. Sú skúmané vhodné reprezentácie a podmienky nutné na jednoznačne určenie splajnu.

V tretej kapitole sme v špeciálnych prípadoch ukázali lokálne vlastnosti kvadratických splajnov – vplyv okrajových podmienok a interpolovaných hodnôt na splajn. Môžeme si všimnúť rozdiel medzi prístupom interpolovania dát v uzloch splajnu a interpolovania dát mimo tieto uzly.

Vo štvrtej kapitole skúmame kvadratický splajn interpolujúci hodnoty prvej derivácie.

Piata kapitola pojednáva o kvadratickom splajne interpolujúcom stredné hodnoty. Je tu vychádzané najmä z prác [3], [6], [9]. Dokážeme existenciu a jednoznačnosť tohto objektu. Je dokázaná jeho minimalizačná vlastnosť, na základe ktorej ukážeme existenciu a jednoznačnosť zhladzujúceho kvadratického splajnu. Odvodíme konštrukciu tohto objektu.

V šiestej kapitole je pojednané o využití kvadratických splajnov v numerickej matematike - numerickej derivácii a integrácii. V závere sú odvodené algoritmy na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc vychádzajúce z kvadratických splajnov. Bolo čerpané z prác [6] a [7].

Kapitola 1

Splajny

1.1 Splajn

V minulosti sa pojem „spline“ spájal s konštrukciou lodí, neskôr lietadiel. Presnejšie povedané, stavitelia lodí pri stavbe trupu lodí používali špeciálne drevené pravítko (anglicky výraz – spline). Toto pravítko upevnené v bodoch sa svojou vlastnou pružnosťou prehlo a vytvorilo tak pre konštrukciu „vhodnú“ hladkú krivku. Prípadný tvar krivky sa ešte „vylepšoval“ použitím závaží pôsobiacich na pravítko v určitých bodoch.

Zjednodušenou matematickou formuláciou sa dospelo k tomu, že takáto krivka je matematicky popísaná po častiach polynómom tretieho stupňa, ktorý má nespojitosti v tretích deriváciách v spojoch jednotlivých úsekov.

Do matematiky priniesol tento pojem I. J. Schoenberg (1901-1990) v roku 1946. Niektoré vlastnosti splajnov boli známe už skôr.

Prvé úlohy riešené pomocou splajnov mali vlastnosti, ktoré viedli k nepárnemu stupňu polynomického splajnu. K štúdiu splajnov párneho stupňa dochádza neskôr. Navyše pri skúmaní polynomických splajnov párneho stupňa sa od začiatku vyskytovali problémy, ktoré sa len postupne darilo uspokojivo riešiť tak, ako pri splajnoch nepárného stupňa.

Teória splajnov sa prudko rozvíjala vďaka ich dobrému uplatneniu v aplikáciach. Majú veľa „vhodných“ vlastností, sú dobré na aproximovanie funkcií, ľahké na výpočet a spracovanie na počítači. Prínos splajnov v numerickej matematike je značný. Stále je to aktívna téma.

1.2 Polynomické splajny

Definícia 1.2.1. Na delení $(\Delta x) := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$ uzavretého intervalu $[a, b]$ budeme polynomickým splajnom stupňa m s defektom d ($m \geq d \geq 0$, celé čísla) rozumieť funkciu $S_{m,d}(x)$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $S_{m,d}(x)$ je na každom intervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ polynóm stupňa najvyšš m ,
2. $S_{m,d}(x) \in C^{m-d}[a, b]$, t.j. v uzloch x_i má $S_{m,d}(x)$ spojité derivácie až do rádu $(m - d)$.

Množinu (Δx) , potom budeme nazývať sieť uzlov splajnu (niekedy skrátene – sieť uzlov, sieť).

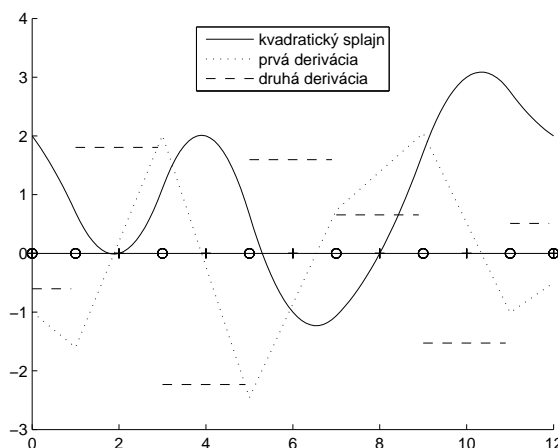
Práve definovaný pojem sieť uzlov splajnu, budeme v ďalšom texte stručnejšie zapisovať v tvare (Δx) a budeme tým rozumieť množinu $(\Delta x) := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$.

Je zrejmé, že pre dva polynomicke splajny $S_{m,d}(x)$ a $\tilde{S}_{m,d}(x)$ na sieti (Δx) platí, že objekty $S_{m,d}(x) + \tilde{S}_{m,d}(x)$ a $\alpha S_{m,d}(x)$, kde α je reálne číslo, sú tiež polynomicke splajny stupňa m s defektom d na sieti (Δx) . Preto zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 1.2.2. Symbolom $\mathcal{S}_{m,d}(\Delta x)$ budeme označovať lineárny priestor splajnov $S_{m,d}(x)$ na sieti uzlov (Δx) .

Definícia 1.2.3. Ak sú v uzloch x_i (resp. iných bodoch t_i) predpísané hodnoty s_i , $i = 0(1)n+1$, potom splajn $S_{m,d}(x)$ spĺňajúci $S_{m,d}(x_i) = s_i$ (resp. $S_{m,d}(t_i) = s_i$) nazývame interpolačným splajnom alebo presnejšie splajnom interpolujúcim hodnoty s_i v bodoch x_i (resp. t_i). Body, v ktorých je predpísaná hodnota sa nazývajú body interpolácie.

Poznámka 1. $\mathcal{S}_{2,1}(\Delta x)$ je lineárny priestor kvadratických splajnov. Z vyššie uvedených definícií vyplýva, že každý $S_{2,1}(x) \in \mathcal{S}_{2,1}(\Delta x)$ je prvkom priestoru $C^1[x_0, x_{n+1}]$ a $S_{2,1}(x)$ je na $[x_i, x_{i+1}]$ polynóm stupňa najviac 2, $i = 0(1)n$.



Obrázok 1.1: Kvadratický splajn, jeho prvá a druhá derivácia. Uzly splajnu x_i , $i = 0(1)7$, sú značené symbolom „o“ a body interpolácie t_i , $i = 0(1)6$ symbolom „+“. Príslušné hodnoty sú zapísané v tabuľke 1.1.

x_i	0	1	3	5	7	9	11	12
t_i	0	2	4	6	8	10	12	
$s_i = S_{2,1}(t_i)$	2	0	2	-1	0	3	2	

Tabuľka 1.1

Kapitola 2

Reprezentácia kvadratických splajnov

2.1 Reprezentácia na sieti (Δx)

V uzloch x_i siete (Δx) predpíšeme hodnoty splajnu hodnotami s_i , tj. $S_{21}(x_i) = s_i$, $i = 0(1)n+1$ a hľadáme interpolačný kvadratický splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ (interpolujúci hodnoty s_i).

Definícia kvadratického splajnu je návodom, ako môžeme reprezentovať interpolačný kvadratický splajn. Na príslušných intervaloch potrebujeme najšť polynómy stupňa nanajvýš 2, ktoré v uzloch budú interpolovať dané hodnoty a budú v nich mať spojitú prvú deriváciu. V podstate presne z definície je odvodená tzv. polynomická reprezentácia.

Polynomická reprezentácia

Je zrejmé, že funkcia splňajúca

$$\begin{aligned} S_{21}(x) &= a_2^i x^2 + a_1^i x + a_0^i \quad \text{na intervale } [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0(1)n, \\ S_{21}(x_i) &= s_i, \quad i = 0(1)n+1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

je pri splnení $(2n)$ podmienok spojitosti $S_{21}(x)$, $S'_{21}(x)$ vo vnútorných uzloch siete (Δx) a $(n+2)$ podmienok interpolácie interpolačný kvadratický splajn. Jeho predpis je určený $3(n+1)$ parametrami a_j^i , $i = 0(1)n$, $j = 0, 1, 2$. Takže spolu máme $(3n+2)$ podmienok na určenie $3(n+1)$ parametrov. Preto je na jednoznačné určenie splajnu nutné dodať ešte jednu podmienku (napr. $S'_{21}(x_0)$).

Pre neznáme koeficienty a_j^i z (2.1) dostaneme z podmienok spojitosti, interpolácie a počiatovej podmienky sústavu so zložitou maticou, čo je pre prácu veľmi nevýhodné.

Vhodnejšia reprezentácia

Ukážeme si inú reprezentáciu, nie tak intuitívnu ako bola predošlá, ktorá je zato z praktického hľadiska výhodnejšia (uvidíme neskôr).

Na sieti (Δx) s krokom $h_i = x_{i+1} - x_i$ a s predpísanými hodnotami s_i v uzloch označme

$$m_i = S'_{21}(x_i), \quad p_i = (s_{i+1} - s_i)/h_i.$$

Na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ zavedieme lokálnu premennú

$$q = (x - x_i)/h_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Potom na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ sa $S_{21}(x)$ dá zapísať v tvare

$$S_{21}(x) = S_{21}(x_i + qh_i) = (1 - q^2)s_i + q^2s_{i+1} + h_iq(1 - q)m_i, \quad i = 0(1)n. \quad (2.2)$$

Derivovaním vzťahu (2.2) na každom príslušnom intervale dostaneme

$$S'_{21}(x) = 2qp_i + (1 - 2q)m_i, \quad \text{pre } x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.3)$$

Dosadením sa presvedčíme, že $S_{21}(x)$ daný (2.2) spĺňa na $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ podmienky interpolácie $S_{21}(x_i) = s_i$, $S_{21}(x_{i+1}) = s_{i+1}$ a platí $S'_{21}(x_i) = m_i$, $S'_{21}(x_{i+1}) = 2p_i - m_i$.

Podmienky spojitosti sú pre $S_{21}(x)$ vo vnútorných uzloch splnené, pretože sú splnené podmienky interpolácie. Zavedieme si značenie $S_{21,i}(x) := S_{21}(x)$ pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$. Pre spojitosť $S'_{21}(x)$ vo vnútorných uzloch siete požadujeme

$$S'_{21,i}(x_{i+1}) = S'_{21,i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0(1)n - 1,$$

čo po úprave z (2.3) dáva $m_i + m_{i+1} = 2p_i$, $i = 0(1)n - 1$. Z identity $S'_{21}(x_{n+1}) = m_{n+1}$ po úprave z (2.3) dostaneme $m_n + m_{n+1} = 2p_n$. Celkom teda máme

$$m_i + m_{i+1} = 2p_i, \quad i = 0(1)n. \quad (2.4)$$

Podmienky (2.4) predstavujú sústavu $(n + 1)$ rovníc o $(n + 2)$ neznámych m_i , $i = 0(1)n + 1$. K jednoznačnému riešeniu sústavy (2.4) je potrebné určiť ešte jednu podmienku a splajn bude z reprezentácie (2.2) určený jednoznačne.

Veta 2.1.1. *Nech je daná sieť $(\Delta x) := \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$, hodnoty s_i , $i = 0(1)n + 1$ a jedna z podmienok*

$$a) \quad S'_{21}(x_k) = m_k, \quad \text{pre } k \in \{0, \dots, n + 1\}$$

$$b) \quad S''_{21}(x_k) = M_k, \quad \text{pre } k \in \{0, n + 1\} \text{ príslušné jednostranné derivácie}$$

Potom existuje práve jeden kvadratický splajn $S_{21}(x)$ interpolujúci hodnoty s_i v bodoch x_i spĺňajúci zvolenú podmienku a) alebo b).

Dôkaz. Z tvaru (2.2) plynie, že pri jednoznačne daných hodnotách m_i , $i = 0(1)n + 1$ je kvadratický splajn interpolujúci hodnoty s_i určený jednoznačne. Preto ukážeme, že vieme jednoznačne určiť všetky m_i a tým bude ukázaná existencia a jednoznačnosť plynúce z (2.2).

- a) Podmienky spojitosti pre kvadratický splajn sa dajú vyjadriť v tvare (2.4). Pri zadaní počiatocnej podmienky $S'_{21}(x_k) = m_k$ vieme jednoznačne určiť všetky hodnoty m_i , pretože na ich určenie máme z (2.4) tento rekurentný predpis

$$\begin{aligned} m_i &= 2p_i - m_{i+1} && \text{pre } 0 \leq i < k, \\ m_i &= 2p_{i-1} - m_{i-1} && \text{pre } k < i \leq n + 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

- b) Z (2.3) máme $S''_{21}(x) = 2\frac{(p_i - m_i)}{h_i}$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0(1)n$. Odkiaľ pre počiatocnú podmienku $S''_{21}(x_k) = M_k$, $k \in \{0, n+1\}$, dostávame $m_0 = p_0 - \frac{1}{2}h_0M_0$ resp. $m_n = p_n - \frac{1}{2}h_nM_{n+1}$. Ostatné hodnoty m_i jednoznačne určíme zo vzťahov (2.5).

□

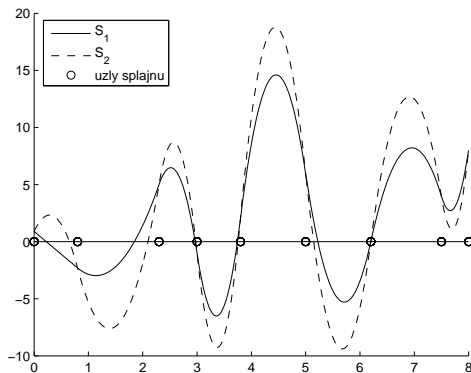
Nevýhoda reprezentácie na sieti (Δx) spočíva v tom, že na jednoznačné určenie splajnu zadávame „iba“ jednu počiatocnú podmienku. Menej v tomto prípade nie je viac. Voľba počiatocnej podmienky v ľubovoľnom uzle siete sa prejaví na celom splajne.

Zoberme si dva kvadratické splajny S_{21}, \tilde{S}_{21} interpolujúce v uzloch siete (Δx) tie isté hodnoty s_i . Predpíšeme počiatocnú podmienku v uzle x_0 takto: $S'_{21}(x_0) = m_0$, $\tilde{S}'_{21}(x_0) = \tilde{m}_0$. Z (2.4) dostaneme

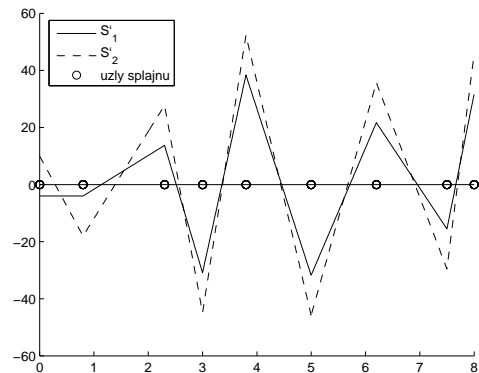
$$S'_{21}(x_j) - \tilde{S}'_{21}(x_j) = (-1)^j (m_0 - \tilde{m}_0).$$

Takže rozdiel v počiatocnej podmienke sa prejaví aj v ostatných uzloch (a nezoslabuje sa!).

V literatúre sa tvrdí, že podobný vplyv má aj chybné zadanie niektorej z interpolovaných hodnôt s_i . Je to spôsobené tým, že matica sústavy (2.4) nie je ostre diagonálne dominantná.



(a) Kvadratické splajny S_1 a S_2 na sieti (Δx) interpolujúce rovnaké hodnoty v uzloch splajnu, pri rôznych okrajových podmienkach: $S'_1(x_0) = \frac{s(2)-s(1)}{x(2)-x(1)}$, $S'_2(x_0) = 10$.



(b) Derivácie kvadratických splajnov S_1 a S_2 . Vidíme akým spôsobom sa prenáša rozdiel v počiatocných podmienkach. Vplyv sa vôbec netlmí! V každom uzle sa prejaví rovnakou mierou!

Obrázok 2.1: Vplyv okrajových podmienok na kvadratický splajn na sieti (Δx).

V prípade existencie periodického splajnu na sieti (Δx) za predpokladu $s_0 = s_{n+1}$ s počiatočnou podmienkou $m_0 = m_{n+1}$ v sústave (2.4) rovnicu $m_n + m_{n+1} = 2p_n$ prepíšeme na rovnicu $m_n + m_0 = 2p_n$. Dostaneme tak sústavu $(n+1)$ rovníc o $(n+1)$ neznámých. Z vety o rozvoji determinantu zistíme, že determinant matice tejto sústavy je rovný $1 + (-1)^n$. Takže pre n nepárne je matica sústavy singulárna. Teda riešenie nie je jednoznačné alebo neexistuje vôbec. V [6] (str. 61) sa tvrdí, že v takomto prípade sa dá ukázať existencia jediného splajnu, ktorý spĺňa podmienku antiperiodickosti $S'_{21}(x_{n+1}) = -S'_{21}(x_0)$.

Voľný parameter pre kvadratický splajn na sieti (Δx) je možné voliť nielen ako podmienku lokálneho charakteru (okrajové, počiatočné alebo interpolačné podmienky), ale aj pomocou globálnej podmienky. Napríklad riešením nasledujúcej úlohy: Určiť parameter m_0 tak, aby bol minimalizovaný funkcionál

$$f(S_{21}) = \sum_{j=0}^n w_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} [S''_{21}(x)]^2 dx, \quad w_j > 0 \text{ (dané)},$$

na triede všetkých kvadratických splajnov interpolujúcich na sieti (Δx) zadané hodnoty s_i , $i = 0(1)n+1$. Viď [6], strana 62.

2.2 Reprezentácia na sieti $(\Delta x \Delta t)$

V predošlom pohľade na kvadratické splajny boli stotožnené množiny *uzly splajnu* (prvky množiny (Δx) ; body v ktorých sa "spájajú" polynomicke časti splajnu) a *body interpolácie* (body, v ktorých je predpísaná funkčná hodnota, alebo hodnota derivácii splajnu). Poukázali sme na problémy s existenciou kvadratických splajnov a splajny nemali lokálne vlastnosti – rozdiel v počiatočnej podmienke sa prejavil na celom splajne v „rovnakej miere“. Toto splynutie bolo prirodzené v historicky prvých úlohách, ktoré boli riešené pomocou splajnov. Oddelením týchto množín sa podarilo v teórii kvadratických splajnov (všeobecne splajnov párneho stupňa) vyriešiť mnoho problémov, ktoré sa vyskytli v predošlom prístupe. Dosiahli sa vlastnosti analogické vlastnostiam kubických splajnov.

Definícia 2.2.1. *Buď $[a, b]$ uzavretý interval na reálnej ose, majme zadané množiny*

$$\begin{aligned} (\Delta x) &:= \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}, \\ (\Delta t) &:= \{t_i, i = 0(1)n; x_0 \leq t_0 < x_1, x_i < t_i < x_{i+1}, i = 1(1)n, x_n < t_n \leq x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

*Množinu (Δx) nazveme **sieť uzlov (splajnu)**, jej prvky **uzly splajnu** a prvky množiny (Δt) **body interpolácie**. Interpolujúcim kvadratickým splajnom na sieti $(\Delta x \Delta t) = (\Delta x) \cup (\Delta t)$ s predpísanými hodnotami s_i v bodoch interpolácie t_i , $i = 0(1)n$, nazývame funkciu s týmito vlastnosťami:*

1. $S_{21} \in C^1[a, b]$;
2. $S_{21}(x)$ je na každom intervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ polynóm stupňa nanajvyšš 2;
3. $S_{21}(t_i) = s_i$, $i = 0(1)n$.

Interpolačný kvadratický splajn na sieti $(\Delta x \Delta t)$ je prvok priestoru $\mathcal{S}_{12}(\Delta x)$, len interpoluje iné hodnoty ako v predošlom prípade (kvadratický splajn na sieti (Δx)). Opäť môžeme použiť rôzne typy reprezentácií tohoto objektu. Pozrime sa na tento objekt z pohľadu parametrov potrebných na jeho určenie a podmienok nutných na jeho jednoznačne určenie.

Odvodili sme, že celkový počet parametrov splajnu $S_{21}(x)$ je $3(n+1)$. Väzbové podmienky určujúce splajn pozostávajú z $2n$ podmienok spojitosti S_{21} , S'_{21} a $(n+1)$ podmienok interpolácie v bodoch t_i , $i = 0(1)n$. Ostávajú tak ešte 2 voľné parametre. Oproti prípadu pre sieť (Δx) je to o jednu potrebnú podmienku viac na jednoznačné určenie. V nasledujúcich odstavcoch odvodíme niektoré reprezentácie splajnu na sieti $(\Delta x \Delta t)$.

Reprezentácia s prvými deriváciami

Pre danú sieť $(\Delta x \Delta t)$ s krokom $h_i = x_{i+1} - x_i$, $S_{21}(t_i) = s_i$, $i = 0(1)n$ označme

$$m_i = S'_{21}(x_i) \text{ pre } i = 0(1)n+1, \quad d_i = \frac{t_i - x_i}{h_i} \text{ pre } i = 0(1)n.$$

Na každom intervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ je $S_{21}(x)$ polynóm stupňa najvyššie 2, takže $S'_{21}(x)$ je polynóm stupňa najvyššie 1, teda lineárna funkcia a na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ preto platí

$$S'_{21}(x) = m_i + (x - x_i)(m_{i+1} - m_i)/h_i. \quad (2.6)$$

Integrovaním vzťahu (2.6) dostaneme

$$S_{21}(x) = m_i x + \left(\frac{x^2}{2} - x_i x \right) \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.7)$$

Dosadením bodu interpolácie $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ do (2.7) máme

$$S_{21}(t_i) = s_i = m_i t_i + \left(\frac{t_i^2}{2} - x_i t_i \right) \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i}. \quad (2.8)$$

Z (2.7), (2.8) a dohodnutého značenia môžeme písať

$$\begin{aligned} S_{21}(x) &= S_{21}(t_i) + S_{21}(x) - S_{21}(t_i) = \\ &= s_i + m_i(x - t_i) + \left(\frac{x^2 - t_i^2}{2} - x_i(x - t_i) \right) \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i} = \\ &= s_i + (x - t_i) \left[m_i + \left(\frac{x + t_i}{2} - x_i \right) \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i} \right] = \dots \end{aligned}$$

Zavedieme lokálnu premennú $q = \frac{x - x_i}{h_i}$ a použijeme:

$$\begin{aligned} q - d_i &= \frac{x - x_i}{h_i} - \frac{t_i - x_i}{h_i} = \frac{x - t_i}{h_i}; \\ q + d_i &= \frac{x - x_i}{h_i} + \frac{t_i - x_i}{h_i} = \frac{x + t_i}{h_i} - \frac{2x_i}{h_i}, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$\dots = s_i + h_i(q - d_i) \left[m_i + \left(\frac{(q + d_i)h_i}{2} \right) \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i} \right].$$

Čo môžeme pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$ zapísať

$$S_{21}(x) = s_i + h_i(q - d_i) \left[m_i + \frac{1}{2}(q + d_i)(m_{i+1} - m_i) \right] \quad (2.9)$$

$$= s_i + h_i(q - d_i) [(2 - q - d_i)m_i + (q + d_i)m_{i+1}] / 2 \quad (2.10)$$

$$= s_i + u_1(x)m_i + u_2(x)m_{i+1}. \quad (2.11)$$

Kde $u_2(x) = \frac{(x-t_i)(x-2x_i+t_i)}{2h_i}$ a $u_1(x) = x - t_i - u_2(x)$. O platnosti (2.10) a (2.11) sa presvedčíme upravením výrazov.

Tieto reprezentácie ((2.9), (2.10), (2.11)) nám umožňujú pri známych hodnotách x_i, t_i a predpísaní $S_{21}(t_i) = s_i, S'_{21}(x_i) = m_i$ určiť hodnotu $S_{21}(x)$ v ľubovoľnom bode $x \in [x_0, x_{n+1}]$.

Pozrime sa však, ako je to so splnením podmienok pre interpolačný kvadratický splajn. Podmienky interpolácie sú zabezpečené konštrukciou. Spojitosť prvých derivácií vo vnútorných uzloch siete (Δx) je splnená, pretože v týchto bodoch sú predpísané spoločnou hodnotou $S'_{21}(x_i) = m_i$ v každom vnútornom uzle $x_i, i = 1(1)n$.

Teraz odvodíme podmienky spojitosti kvadratického splajnu vo vnútorných uzloch siete (Δx). Pre spojitost kvadratického splajnu $S_{21}(x)$ požadujeme $S_{21, i-1}(x_i) = S_{21, i}(x_i), i = 1(1)n$. Po úprave (najvhodnejšie z (2.11)) dostaneme sústavu rovníc vyjadrujúcu podmienky spojitosti v tomto tvare

$$a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = f_i, \quad i = 1(1)n. \quad (2.12)$$

Pre koeficienty a_i, b_i, c_i, f_i platí

$$\begin{aligned} a_i &= h_{i-1}(1 - d_{i-1})^2 > 0, & b_i &= h_{i-1}(1 - d_{i-1}^2) + h_i d_i(2 - d_i) > 0, \\ c_i &= h_i d_i^2 > 0, & f_i &= 2(s_i - s_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Všimnime si, že v špeciálnom prípade ekvidistantného kroku siete (Δx) tj. $h_i = h, i = 0(1)n$ a voľby bodov interpolácie $t_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ je $d_i = 1/2$ má sústava (2.12) veľmi jednoduchý tvar

$$m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = 8 \frac{s_i - s_{i-1}}{h}, \quad i = 1(1)n. \quad (2.14)$$

Sústava (2.12) resp. (2.14) predstavuje sústavu (n) rovníc o ($n+2$) neznámych $m_i, i = 0(1)n+1$. Takže k jednoznačnému určeniu hodnôt m_i potrebujeme poznať ešte ďalšie 2 podmienky. Z dôvodu stability algoritmu výpočtu a symetrie problému sa najčastejšie volia niektoré z okrajových podmienok uvedených v nasledujúcej časti (tvrdí [6]).

Všeobecný typ okrajovej podmienky

Za dodatočné podmienky môžeme voliť

$$\begin{aligned} b_0 m_0 + c_0 m_1 &= f_0, \\ a_{n+1} m_n + b_{n+1} m_{n+1} &= f_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Kde $b_0, c_0, a_{n+1}, b_{n+1}, f_0, f_{n+1}$ sú dané hodnoty. Tieto podmienky v sebe zahŕňajú nasledujúce špeciálne prípady:

[P1] predpísanie hodnôt splajnu v krajných bodoch siete ($\Delta x \Delta t$)

$$\begin{aligned} S'_{21}(x_0) &:= m_0, \\ S'_{21}(x_{n+1}) &:= m_{n+1}, \end{aligned}$$

čo odpovedá napr. hodnotám $c_0 = a_{n+1} = 0, b_0 = b_{n+1} = 1, f_0 = m_0, f_{n+1} = m_{n+1}$.

[P2] aproximovanie hodnôt $S'_{21}(x_0), S'_{21}(x_{n+1})$ pomocou dát úlohy s_i (napríklad pomocou vzorcov pre numerickú deriváciu)

[P3] predpísanie hodnôt $S''_{21}(x_{0+})$ (druhá derivácia funkcie $S_{21}(x)$ v bode x_0 sprava) a $S''_{21}(x_{n+1-})$ (druhá derivácia funkcie $S_{21}(x)$ v bode x_{n+1} zľava). Pripomeňme, že $S''_{21}(x)$ je na príslušných intervaloch konštantná funkcia, takže platí

$$\begin{aligned} S''_{21}(x_{0+}) &= \frac{m_1 - m_0}{h_0}, \\ S''_{21}(x_{n+1-}) &= \frac{m_{n+1} - m_n}{h_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Potom pre koeficienty v (2.15) dostaneme

$$\begin{aligned} b_0 &= b_{n+1} = 1, & c_0 &= a_{n+1} = -1, \\ f_0 &= -h_0 S''_{21}(x_{0+}), & f_{n+1} &= h_n S''_{21}(x_{n+1-}). \end{aligned}$$

Podmienky spojitosti splajnu $S_{21}(x)$ (2.12) spolu s okrajovými podmienkami (2.15) tvoria sústavu lineárnych rovníc s tridiagonálnou maticou (v matici sú zapísané len obecné nenulové prvky).

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_n & b_n & c_n & \\ & & & & a_{n+1} & b_{n+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Za predpokladov, ktoré boli použité do tohoto okamihu a za dodatočných podmienok

$$|b_0| \geq |c_0|, \quad |b_{n+1}| \geq |a_{n+1}|$$

na okrajové podmienky, má matica sústavy prevládajúcu diagonálu (viď Definícia 7.0.1), pretože z (2.13) dostávame:

$$\begin{aligned} b_i - a_i - c_i &= 2h_i d_i (1 - d_i) + h_{i-1} d_{i-1} (1 - d_i) > 0 \\ b_i &> a_i + c_i \\ |b_i| &> |a_i| + |c_i|, \text{ pretože } a_i, c_i \text{ sú kladné.} \end{aligned}$$

Pre predpísané hodnoty s_i a okrajové podmienky (2.15) má sústava (2.17), podľa Vety 7.0.2 práve jedno riešenie. To znamená, že dáta určujú jediný kvadratický splajn interpolujúci hodnoty s_i spĺňajúci všeobecný typ okrajovej podmienky (2.15).

Periodické okrajové podmienky

Pre kvadratický splajn môžeme zadať aj tzv. **periodické okrajové podmienky** a to pre prípad $t_0 = x_0, t_n = x_{n+1}$ nasledovne:

[P4]

- a) pre zadané interpolované hodnoty s_i platí: $S_{21}(t_0) = s_0 = s_n = S_{21}(t_{n+1})$;
- b) pre prvé derivácie platí: $S'_{21}(x_0) = m_0 = m_{n+1} = S'_{21}(x_{n+1})$;
- c) pre druhé derivácie platí: $S''_{21}(x_{0+}) = S''_{21}(x_{n+1-})$.

Pozrime sa, čo takéto podmienky od nás požadujú a čo nám poskytujú. Podmienka a) udáva predpoklady na dáta úlohy – interpolované hodnoty s_i . Podmienka b) nám redukuje počet neznámych v (2.12). Z podmienky c), pretože $S''_{21}(x)$ je na príslušných intervaloch konštantná funkcia, platí $S''_{21}(x_{0+}) = \frac{S'_{21}(x_1) - S'_{21}(x_0)}{h_0} = \frac{m_1 - m_0}{h_0}$, podobne $S''_{21}(x_{n+1-}) = \frac{m_{n+1} - m_n}{h_n}$, takže máme identitu

$$\frac{m_1 - m_0}{h_0} = \frac{m_{n+1} - m_n}{h_n},$$

odkiaľ po úprave a použití b) dostaneme

$$-\frac{h_n}{h_0} m_1 - m_n + \left(1 + \frac{h_n}{h_0}\right) m_{n+1} = 0. \quad (2.18)$$

Podmienky spojitosti splajnu $S_{21}(x)$ (2.12) spolu s podmienkou (2.18) plynúcej z periodických okrajových podmienok [P4] tvoria sústavu $(n+1)$ lineárnych rovníc pre $(n+1)$ neznámych $m_i, i = 1(1)n+1$. Maticovo zapísané

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & b_n & c_n \\ c_{n+1} & & & a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Ako sme odvodili v (2.18), platí $a_{n+1} = -1, b_{n+1} = 1 + h_n/h_0, c_{n+1} = -h_n/h_0, f_{n+1} = 0$ a a_i, b_i, c_i, f_i pre $i = 1(1)n$ sú dané (2.13). Matica sústavy má prevládajúcu diagonálu (viď Definícia 7.0.1).

Príslušné nerovnosti v prvých n riadkoch matice sme už odvodili pri matici sústavy (2.17). Pre nerovnosť v poslednom riadku si stačí uvedomiť, že existujú kladné čísla d_1, d_2, d_3 tak, že platí

$$|b_{n+1}| d_1 > |a_{n+1}| d_2 + |c_{n+1}| d_3.$$

Takže matica sústavy je podľa Vety 7.0.2 regulárna a preto má sústava (2.19) jediné riešenie pre ľubovoľné hodnoty interpolovaných dát spĺňajúce podmienku periodičnosti [P4].

Podmienky typu not-a-knot

Podmienka typu not-a-knot v tvare

[P5]

$$S''_{21}(x_{1-}) = S''_{21}(x_{1+}), \text{ resp. } S''_{21}(x_{n-}) = S''_{21}(x_{n+}) \quad (2.20)$$

vyjadruje, že na intervale $[x_0, x_2]$ resp. $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ je splajn $S_{21}(x)$ predpísaný jedným polynómom nanajvyš druhého stupňa. Podmienky (2.20) sa dajú prepísať do tvaru

$$\frac{m_1 - m_0}{h_0} = \frac{m_2 - m_1}{h_1}, \quad \frac{m_n - m_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{m_{n+1} - m_n}{h_n}. \quad (2.21)$$

Ak o podmienky (2.21) doplníme sústavu (2.12), vyrovnáme počet neznámych a počet rovníc. Úpravami sa dopracujeme k sústave s neznámymi m_1, \dots, m_n s regulárnou maticou. Z regularity dostaneme jednoznačné riešenie. Hodnoty m_0, m_{n+1} určíme po vypočítaní m_1, m_2, m_{n-1}, m_n z (2.21).

Celkovo teda platí, že na danej sieti $(\Delta x \Delta t)$, pri zadaných hodnotách s_i a pri splnení jednej z počiatočných podmienok [P1]–[P5] je možné jednoznačne určiť hodnoty parametrov m_i , $i = 0(1)n+1$, tj. existuje jediný kvadratický splajn $S_{21}(x)$ interpolujúci hodnoty s_i spĺňajúci jednu z podmienok [P1]–[P5].

Reprezentácia s druhými deriváciami

Podobne ako sme použili hodnoty prvých derivácií v uzloch na reprezentovanie splajnu na sieti $(\Delta x \Delta t)$, môžeme postupovať aj s druhými deriváciami. Problém je však v tom, že v uzloch splajnu spojitost' druhej derivácie nemusí byť splnená. Preto si nebudeme vsímať uzly splajnu, ale body ležiace medzi nimi. Ďalší postup presne kopíruje postup pri reprezentácii s prvými deriváciami, preto si len stručne popíšeme jednotlivé kroky. Podrobnejšie spracovanie je napríklad v [6], odkiaľ sú prevzaté niektoré výsledky tejto kapitoly.

Majme danú sieť $(\Delta x \Delta t)$ s krokmi $h_i = x_{i+1} - x_i$, $k_i = t_{i+1} - t_i$, na ktorej máme interpolačný kvadratický splajn $S_{21}(x)$ interpolujúci hodnoty s_i , $i = 0(1)n$. Označme

$$n_i = S'_{21}(t_i), \quad M_i = S''_{21}(t_i).$$

Na každom intervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ môžeme $S_{21}(x)$ v bode t_i rozvinúť do Taylorovej rady (uvedomme si, že $S_{21}(x)$ je polynomická funkcia nanajvyš druhého stupňa)

$$S_{21}(x) = S_{21}(t_i) + S'_{21}(t_i)(x - t_i) + \frac{1}{2}S''_{21}(t_i)(x - t_i)^2. \quad (2.22)$$

Takže kvadratický splajn môžeme reprezentovať, tzv. **Taylorovou reprezentáciou**

$$S_{21}(x) = s_i + n_i(x - t_i) + \frac{1}{2}M_i(x - t_i)^2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=0(1)n. \quad (2.23)$$

Z podmienok spojitosti S_{21} ($S_{21,i}(x_{i+1}) = S_{21,i+1}(x_{i+1})$) a S'_{21} ($S'_{21,i}(x_{i+1}) = S'_{21,i+1}(x_{i+1})$) môžeme pri známych hodnotách s_i , M_i , $i=0(1)n$ určiť všetky hodnoty n_i . Podmienky spojitosti tvoria sústavu $(n-1)$ lineárnych rovníc pre $(n+1)$ neznámych M_i , $i=0(1)n$, ktorú môžeme vyjadriť v tvare

$$a_i M_{i-1} + b_i M_i + c_i M_{i+1} = f_i, \quad i = 1(1)n - 1, \quad (2.24)$$

kde

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(x_i - t_{i-1})^2}{k_{i-1}(k_{i-1} + k_i)} > 0, & b_i &= \frac{(t_i - x_i)\left(1 + \frac{x_i - t_{i-1}}{k_{i-1}}\right) + (x_{i+1} - t_i)\left(1 + \frac{t_{i+1} - x_{i+1}}{k_i}\right)}{k_{i-1} + k_i} > 0, \\ c_i &= \frac{(t_{i+1} - x_{i+1})^2}{k_i(k_{i-1} + k_i)} > 0, & f_i &= 2 \frac{\frac{s_{i+1} - s_i}{k_i} - \frac{s_i - s_{i-1}}{k_{i-1}}}{k_{i-1} + k_i}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

V špeciálnom prípade uzlov $x_{i+1} = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$ má sústava (2.24) jednoduchší tvar

$$\frac{k_{i-1}}{k_{i-1} + k_i} M_{i-1} + 3M_i + \frac{k_i}{k_{i-1} + k_i} M_{i+1} = 8f_i. \quad (2.26)$$

Počiatkové podmienky

Situácia je podobná ako v § 2.2, preto len zmienime závery, ktoré sa odvodlia analogicky ako v predošlom prípade pre reprezentáciu s prvými deriváciami. Podrobnejšie viď [6].

Obecný typ okrajovej podmienky

Obecný typ okrajovej podmienky je daný týmito rovnicami

$$b_0 M_0 + c_0 M_1 = f_0, \quad a_n M_{n-1} + b_n M_n = f_n, \quad (2.27)$$

so zadanými koeficientami b_0 , c_0 , f_0 , a_n , b_n , f_n . Rozširujú sústavu (2.24) príp. (2.26) a dopĺňajú ju na sústavu s $(n+1)$ rovnicami pre $(n+1)$ neznámych. Ako špeciálny prípad okrajových podmienok sem patrí:

[P1_M] predpísanie hodnôt $S'_{21}(t_0) = n_0$, $S'_{21}(t_n) = n_n$,

[P2_M] aproximovanie prvých alebo druhých derivácií (napr. numerickou deriváciou),

[P3_M] predpísanie hodnôt druhej derivácie $S''_{21}(t_0) = M_0$, $S''_{21}(t_n) = M_n$.

Regularitu matice tejto sústavy dostaneme pri splnení podmienok

$$\begin{aligned} |b_0| &> |c_0|, \quad |b_n| < |a_n|, \\ \frac{1}{4}(t_{i-1} + 4t_i + t_{i+1}) &> x_i + \frac{1}{2} \left[\frac{d_i^2}{k_{i-1}} + \frac{d_{i+1}^2}{k_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Takže pre ľubovoľné interpolované hodnoty, bude mať jediné riešenie a kvadratický splajn bude z (2.23) určený jednoznačne.

[P4_M] **Periodické okrajové podmienky** (prípád $t_0 = x_0$, $t_n = x_{n+1}$)

- a) $s_0 = s_n$ (vlastnosť interpolovaných dát)
- b) $n_0 = n_n$ (periodickosť podmienok)
- c) $M_0 = M_n$ (periodickosť podmienok, znižuje počet neznámych v (2.24) resp. (2.26))

Periodické okrajové podmienky pre sústavu znamenajú vyrovnanie počtu neznámych a počtu rovníc. Pri splnení podmienok (2.28) a

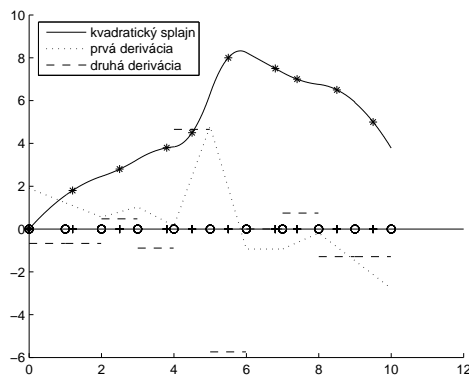
$$|b_0| > |a_0| + |c_0|, \quad |b_{n-1}| > |c_{n-1}| + |a_{n-1}|$$

dostaneme jednoznačnosť.

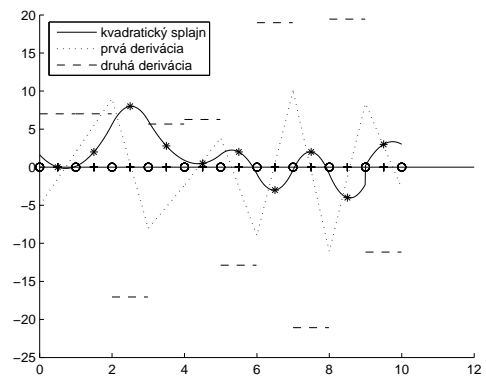
[P5_M] Podmienky typu *not-a-knot*

Podmienky typu not-a-knot pre splajn $S_{21}(x)$ znamenajú nasledujúce identity $M_0 = M_1$, $M_n = M_{n+1}$, ktoré zjednodušia sústavu a matica sústavy bude regulárna. Opäť tak máme jednoznačnosť.

Celkovo teda platí, že na danej sieti $(\Delta x \Delta t)$, pri zadaných hodnotách s_i a pri splnení jednej z počiatkových podmienok [P1_M]–[P5_M] je možné jednoznačne určiť hodnoty parametrov M_i , $i = 0(1)n$, tj. existuje jediný kvadratický splajn $S_{21}(x)$ interpolujúci hodnoty s_i spĺňajúci jednu z podmienok [P1_M]–[P5_M].



(a)



(b)

Obrázok 2.2: Kvadratický splajn na sieti $(\Delta x \Delta t)$ spĺňajúci podmienky typu not-a-knot. Môžeme si všimnúť spojitosť druhej derivácie v uzloch x_1 a x_n . Uzly sú značené symbolom 'o', body interpolácie '+' a interpolovaná hodnota '*'.

Kapitola 3

Lokálne vlastnosti kvadratických splajnov

Do tohto okamihu sme skúmali, ako možno jednoznačne určiť kvadratický splajn, aké počiatočné podmienky sú nutné, aby bol splajn jednoznačne určený, aké možnosti sú pri jeho reprezentácii. Pri skúmaní sme však predpokladali, že máme dané nejaké dáta úlohy – uzly siete, body interpolácie, interpolované hodnoty, atď. Teraz sa pozrieme, aký vplyv majú tieto dáta na kvadratický splajn, ako ho ovplyvňujú.

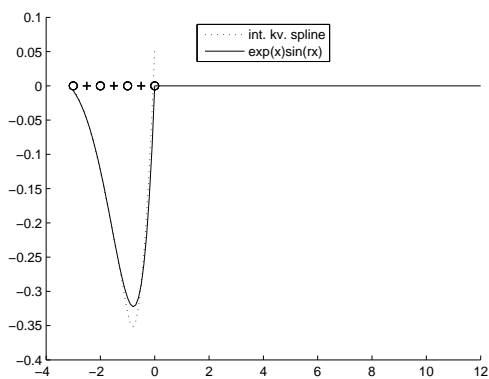
3.1 Výber uzlov, bodov interpolácie, okrajových podmienok

Body interpolácie t_i a k nim príslušné interpolované hodnoty s_i určujú body, ktorými prechádza graf splajnu. V týchto bodoch je graf „fixovaný“. Preto ich voľba odpovedá buď bodom, v ktorých poznáme funkčnú hodnotu (interpolovanú hodnotu) s dostatočnou presnosťou, alebo zvolíme také body, v ktorých chceme splajn „fixovať“.

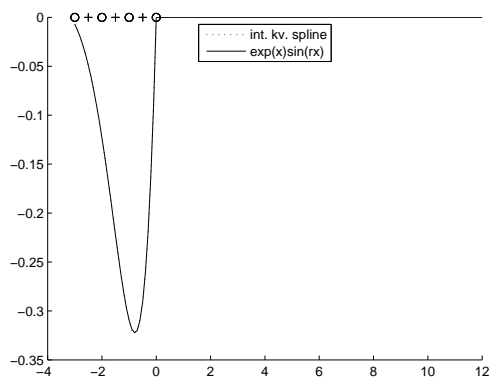
Uzly splajnu sú body, v ktorých sa „napájajú“ jednotlivé polynomické časti splajnu. Často sú to body nespojitosti druhej derivácie splajnu (od kvadratického splajnu požadujeme v uzloch len spojitosť do prvej derivácie). Volíme ich teda tak, aby dáta mali odpovedajúci charakter. Ak uzly takto určiť nevieme, potom vhodná voľba je $x_{i+1} = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$.

Okrajové podmienky buď plynú zo zadaných dát, alebo ich zvolíme ako aproximáciu prvých (resp. druhých) derivácii pomocou interpolovaných hodnôt.

Na nasledujúcich obrázkoch je zobrazená interpolácia funkčných hodnôt funkcie $\exp(x) \sin(rx)$. Uzly splajnu sú volené ako ekvidistantné delenie intervalu $[-3; 0.5]$ s krokom h , body interpolácie sú volené $t_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Počiatočná podmienka je počítaná z dát. Vidíme, že kvadratický splajn síce interpoluje hodnoty, ale pri malom počte fixných bodov nie je schopný „kopírovať“ tvar krivky dostatočne dobre. Nie je to prekvapujúce, ale je dobre si to uvedomiť.

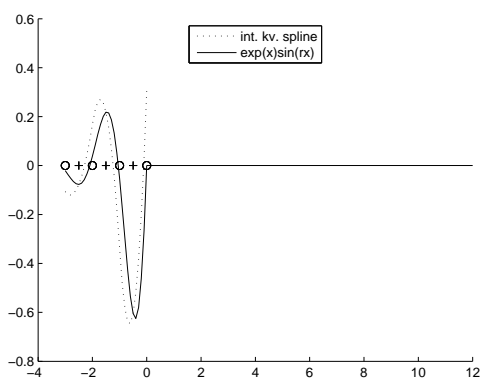


(a) $h=1$

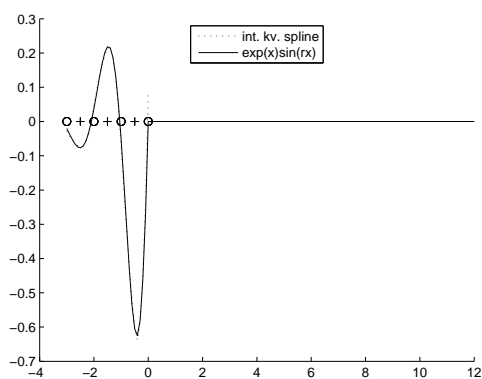


(b) $h=0.5$

Obrázok 3.1: $r=1$

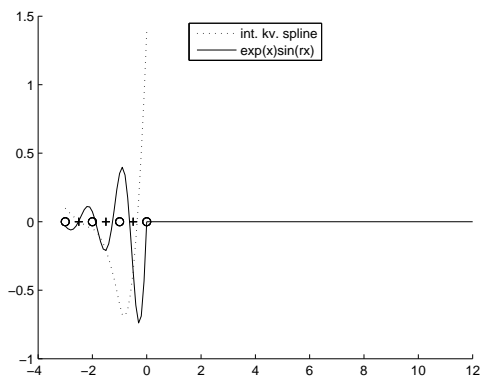


(a) $h=1$

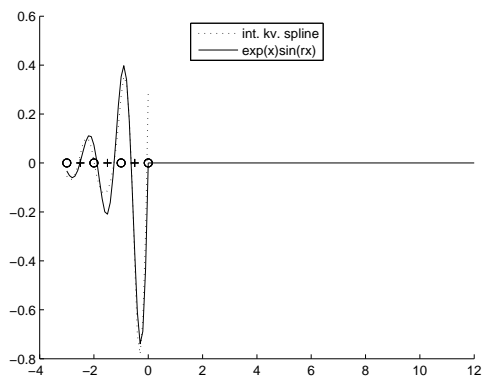


(b) $h=0.5$

Obrázok 3.2: $r=3$



(a) $h=1$



(b) $h=0.5$

Obrázok 3.3: $r=5$

Pre prvky matice $\mathbf{A}^{-1} = (\tilde{a}_{ij})$ existuje $0 < c < \infty$ (podľa Vety 7.0.3) také, že

$$|\tilde{a}_{ij}| \leq c \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|i-j|}{2}} \quad \text{pre } i, j \in \{1, \dots, n+2\}. \quad (3.2)$$

Z Vety 7.0.4 platí $8g'(y_i) = 8(s_i - s_{i-1})/h = f_i$, $i = 1(1)n$, kde $y_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Potom pre maximovú normu priestoru \mathbb{R}^{n+2} prvku \mathbf{f} a normu prvku g z priestoru $C^1[x_0, x_{m+1}]$ dostávame

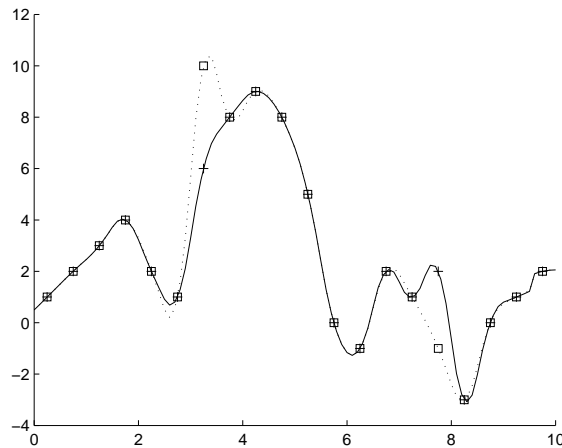
$$\|\mathbf{f}\|_{max} \leq \max\{8\|g'\|, |f_0|, |f_{n+1}|\} \leq 8 \max\{\|g'\|, |m_0|, |m_{n+1}|\}. \quad (3.3)$$

Položme $G := \max\{\|g'\|, |m_0|, |m_{n+1}|\}$. Postupne použitím (3.1); „ $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ “; $|f_i| \leq G$, $\forall i$; (3.2); (3.3) môžeme pre $i \in \{1, \dots, n\}$ písať

$$\left| m_i - \sum_{j=i-k}^{i+k} \tilde{a}_{i+1, j+1} f_j \right| = \left| \sum_{j \in I_k} \tilde{a}_{i+1, j+1} f_j \right| \leq \sum_{j \in I_k} |\tilde{a}_{i+1, j+1} f_j| \leq 8cG \sum_{j \in I_k} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|i-j|}{2}},$$

kde $I_k = 0, 1, \dots, i-k-1, i+k+1, \dots, n+1$.

Hodnoty m_i sú teda vzdialenými hodnotami f_j (tiež môžeme povedať, že hodnotami s_j , pretože f_j je funkciou s_j) ovplyvňované veľmi málo. S väčšou vzdialenosťou klesá vplyv. V literatúre sa uvádza, že podobné závery platia aj pre všeobecnejšie siete.



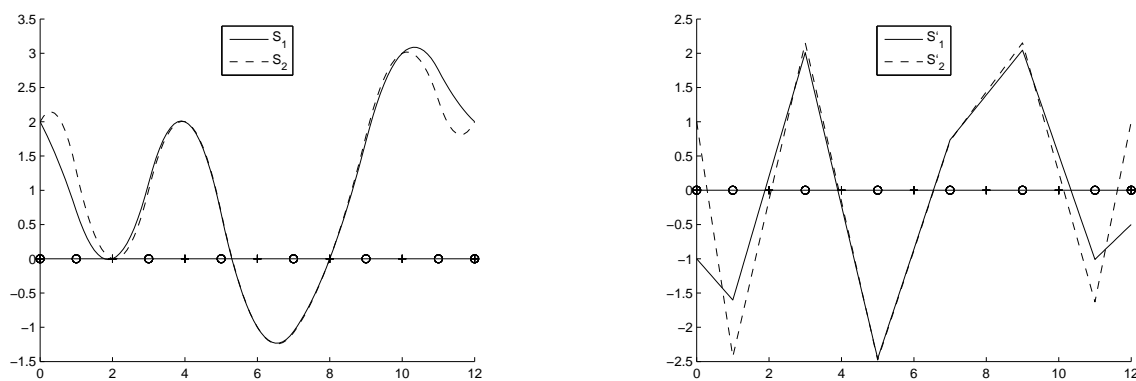
Obrázok 3.5: Dva kvadratické splajny interpolujúce hodnoty dané tabuľkou 3.1. Interpolované hodnoty pre oba kvadratické sa líšia v dvoch hodnotách. Z obrázku je zrejmé, že ako sme ukázali, tento rozdiel má „lokálny“ charakter – ovplyvňuje len časť splajnu. Kvadratický splajn interpolujúci hodnoty s_i je plnou čiarou, splajn interpolujúci hodnoty \bar{s}_i je čiarkované. Uzly splajnu sú volené nasledovne $x_i = i, 0, 5$ a body interpolácie $t_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Potom platí $D_n > 5^n$. Použitím Cramerovho pravidla (dosadením $\widehat{\mathbf{f}}_n$ za i -ty stĺpec matice \mathbf{A}_n , $i = 2(1)n - 1$; Veta 7.0.5) a následne vety o rozvoji determinantu (podľa i -teho stĺpca; Veta 7.0.6), dostaneme ďalším vhodným použitím vety o rozvoji determinantu pre \widetilde{m}_i vyjadrenie

$$\widehat{m}_i = \widetilde{m}_i - m_i = \frac{(-1)^i \widetilde{m}_0 D_{n-i} - (-1)^{n+i} \widetilde{m}_{n+1} D_{i-1}}{D_n}, \quad i = 1(1)n.$$

Vplyv okrajových podmienok na hodnoty m_i slabne so zväčšujúcou sa vzdialenosťou uzlu od okraja a zvyšovaním fixných bodov – predpísaním vyššieho počtu interpolovaných hodnôt. Je dobré si pripomenúť záver § 2.1, kde sme ukázali, že rozdiel v počiatkových podmienkach sa na sieti (Δx) prenáša na všetky uzly v absolútnej hodnote rovnako.

Z reprezentácie (2.11) je vidno, že vplyv okrajových podmienok na sieti ($\Delta x \Delta t$) slabne aj na funkčné hodnoty splajnu $S_{21}(x)$ na jednotlivých intervaloch.



(a) Kvadratické splajny S_1 a S_2 na sieti ($\Delta x \Delta t$) interpolujúce tie isté hodnoty v bodoch interpolácie (symbol „o“), pri rôznych okrajových podmienkach: $S'_1(x_0)$, $S'_1(x_7)$ určené z dát a $S'_2(x_0) = S'_2(x_7) = 1$.

(b) Derivácie kvadratických splajnov S_1 a S_2 . Vidíme akým spôsobom sa prenáša rozdiel v počiatkových podmienkach.

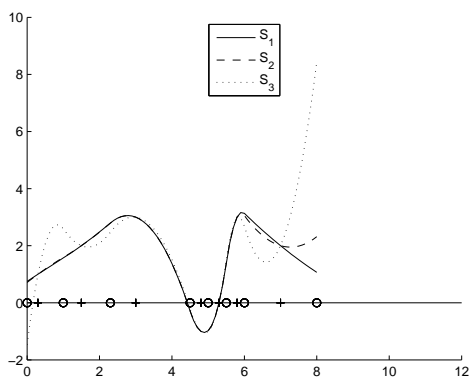
Obrázok 3.6: Vplyv okrajových podmienok na kvadratický splajn na sieti ($\Delta x \Delta t$).

3.4 Zachovanie monotónnosti a konvexnosti

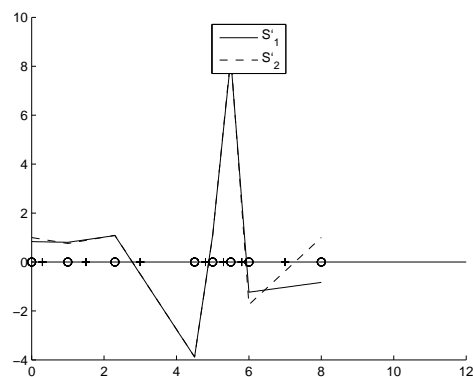
Dá sa ukázať (viď [6]), že za určitých okolností kvadratický splajn zachováva monotónnosť dát, ktoré interpoluje. Teda, ak interpolované hodnoty s_i , $i = 0(1)n$ odpovedajú monotónnej funkcii f , tj. $s_i = f(t_i)$, $i = 0(1)n$, tak splajn S_{21} túto vlastnosť zachová. Podobne je to aj so zachovaním konvexity.

3.5 Odhad chyby interpolácie

Pre odhad chyby interpolácie kvadratickým splajnom sa v literatúre nachádza veľmi málo výsledkov. Navyše výsledky, ktoré nájdeme sú v špeciálnych prípadoch siete.



(a) Kvadratické splajny S_1 , S_2 a S_3 na sieti $(\Delta x \Delta t)$ interpolujúce tie isté hodnoty, kde $S'_1(x_0)$, $S'_1(x_7)$ určené z dát, $S'_2(x_0) = S'_2(x_7) = 1$ a trochu prehnaná podmienka $S'_3(x_0) = S'_3(x_7) = 10$.



(b) Derivácie kvadratických splajnov S_1 a S_2 . Vidíme akým spôsobom sa prenáša rozdiel v počiatočných podmienkach.

Obrázok 3.7: Vplyv okrajových podmienok na kvadratický splajn na sieti $(\Delta x \Delta t)$, náhodné dáta.

Uvedieme si vetu s dôkazom, ktorá v špeciálnom prípade udáva odhad chyby interpolácie (spracované z [9]).

Veta 3.5.1. *Majme pravidelnú sieť $(\Delta x \Delta t) := \{x_0 = t_0 < x_1 < t_1 < \dots < t_{n-1} < x_n < t_n = x_{n+1}\}$ takú, že $x_{i+1} = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$, $i = 0(1)n - 1$. Buď funkcia $f \in C^3[x_0, x_{n+1}]$ a kvadratický splajn $S_{21} \in \mathcal{S}(\Delta x)$ interpolujúci hodnoty $f(t_i)$ spĺňajúci $S'_{21}(x_0) = f'(x_0)$ a $S'_{21}(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$. Potom platia nasledujúce odhady:*

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_0, x_{n+1}]} |f(x) - S_{21}(x)| &\leq \frac{5}{12} M h^3, \\ \max_{x \in [x_0, x_{n+1}]} |f'(x) - S'_{21}(x)| &\leq \frac{5}{6} M h^2, \\ \sup_{x \in \bigcup_{i=0}^n (x_i, x_{i+1})} |f''(x) - S''_{21}(x)| &\leq \frac{5}{3} M h, \end{aligned}$$

kde $M = \max_{x \in [x_0, x_{n+1}]} |f^{(3)}(x)|$.

Dôkaz. Budeme používať nasledujúce značenie $f_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$, $s_i^{(k)} = S_{21}^{(k)}(x_i)$. Na malý okamih budeme rozdiel $f(x) - S_{21}(x)$ značiť ako funkciu $z(x)$. Z definície kvadratického splajnu a spojitosti funkcie f plynie, že $z \in C^1[x_0, x_{n+1}]$. Z podmienok interpolácie dostávame $z(t_i) = 0$, $i = 0(1)n$. Vzhľadom na túto vlastnosť funkcie $z(x)$ platí nasledujúca rovnosť

$$z(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{t_i}^x z'(t) dt - \int_x^{t_{i+1}} z'(t) dt \right).$$

Odkiaľ pre $x \in [t_i, t_{i+1}]$ dostávame

$$\begin{aligned}
 |f(x) - s(x)| &= |z(x)| = \left| \frac{1}{2} \left(\int_{t_i}^x z'(t) dt - \int_x^{t_{i+1}} z'(t) dt \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} z'(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} |t_{i+1} - t_i| \max_{x \in [t_i, t_{i+1}]} |z'(x)| = \frac{1}{2} |t_{i+1} - t_i| \max_{x \in [t_i, t_{i+1}]} |f'(x) - s'(x)| \\
 &= \frac{1}{2} h \max_{x \in [t_i, t_{i+1}]} |f'(x) - s'(x)|. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

$S'_{21}(x)$ je na $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0(1)n$ lineárna funkcia, preto, pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0(1)n$, platí

$$\frac{S'_{21}(x_{i+1}) - S'_{21}(x)}{x_{i+1} - x} = \frac{S'_{21}(x) - S'_{21}(x_i)}{x - x_i},$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$S'_{21}(x) = \frac{1}{h} ((x - x_i)S'_{21}(x_{i+1}) + (x_{i+1} - x)S'_{21}(x_i)). \tag{3.5}$$

Z Taylorovho rozvoja funkcie f' na $[x_i, x_{i+1}]$ v bode x_i s Lagrangeovým tvarom zvyšku dostaneme

$$f'(x) = f'(x_i) + (x - x_i)f''(x_i) + (x - x_i)^2 \frac{f'''(\xi_1)}{2}, \text{ kde } \xi_1 \in (x_i, x). \tag{3.6}$$

Podobne pre rozvoj v bode x_{i+1} dostaneme

$$f'(x) = f'(x_{i+1}) + (x - x_{i+1})f''(x_{i+1}) + (x - x_{i+1})^2 \frac{f'''(\xi_2)}{2}, \text{ kde } \xi_2 \in (x, x_{i+1}). \tag{3.7}$$

Ak (3.6) vynásobíme $(x_{i+1} - x)$ a (3.7) vynásobíme $(x - x_i)$, takto vzniknuté rovnice sčítame a upravíme dostaneme pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f'(x) = \frac{1}{h} ((x - x_i)f'(x_{i+1}) - (x_{i+1} - x)f'(x_i)) + R, \tag{3.8}$$

kde pre $R = \frac{1}{2h} [(x_{i+1} - x)(x - x_i)^2 f'''(\xi_1) + (x - x_i)(x_{i+1} - x)^2 f'''(\xi_2)]$ platí $|R| \leq \frac{1}{2} M h^2$.

Z (3.5) a (3.8) dostaneme odhad

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(x) - S'_{21}(x)| &\leq \frac{1}{h} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x - x_i)(f'_{i+1} - s'_{i+1}) + (x_{i+1} - x)(f'_i - s'_i)| + |R| \\
 &\leq L_i + \frac{1}{2} h^2 M, \quad L_i = \max \{z'(x_i), z'(x_{i+1}); z = f - S_{21}\}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Teraz odvodíme odhad pre $L = \max_{i=0(1)n} L_i$.

Skúmame sústavu

$$\epsilon = \mathbf{A} \mathbf{w}, \tag{3.10}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} f'_1 - s'_1 \\ f'_2 - s'_2 \\ \vdots \\ f'_{n-1} - s'_{n-1} \\ f'_n - s'_n \end{pmatrix}$$

Vieme, že k matici \mathbf{A} existuje matica inverzná \mathbf{A}^{-1} , preto môžeme písať

$$L = \max_{i=0(1)n} L_i = \max_{i=0(1)n} z'(x_i) = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\epsilon\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\epsilon\| \leq \frac{1}{4} \|\epsilon\| \quad (3.11)$$

Posledná nerovnosť plynie z odhadu normy $\|\mathbf{A}^{-1}\|$. Maticu \mathbf{A} môžeme zapísať v tvare $\mathbf{A}=6\mathbf{I}+\mathbf{B}$, kde \mathbf{I} je jednotková matica. Odhadom maticovej normy \mathbf{B} indukovanej maximovou normou vektoru dostaneme

$$\|\mathbf{B}\| = \max_{i=1(1)n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq 2.$$

Preto pre $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ platí, že $\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{6x} + \mathbf{Bx}\| \geq \|\mathbf{6x}\| - \|\mathbf{Bx}\| \geq (6 - \|\mathbf{B}\|) \|\mathbf{x}\| \geq 4 \|\mathbf{x}\|$, odkiaľ

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{4}.$$

Odhadnúť L v tomto okamihu znamená urobiť odhad na $\|\epsilon\|$. Z (3.10) dostaneme (pre $i=2(1)n-1$)

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= (f'_{i-1} - s'_{i-1}) + 6(f'_i - s'_i) + (f'_{i+1} - s'_{i+1}) = (f'_{i-1} + 6f'_i + f'_{i+1}) - (s'_{i-1} + 6s'_i + s'_{i+1}) \\ &= (f'_{i-1} + 6f'_i + f'_{i+1}) - \frac{8}{h} (s(t_{i+1}) - s(t_i)) = (f'_{i-1} + 6f'_i + f'_{i+1}) - \frac{8}{h} (f(t_{i+1}) - f(t_i)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde sme v predposlednom kroku použili vyjadrenie podmienok spojitosti (2.14) a v poslednom podmienky interpolácie. Identitu (3.12) sme odvodili, pre $i=2(1)n-1$. Z predpokladov vety platí, že $s'_0 = f'_0$ a $s'_{n+1} = f'_{n+1}$, preto môžeme písať $\epsilon_1 = \epsilon_1 + (f'_0 - s'_0)$ a $\epsilon_n = \epsilon_n + (f'_{n+1} - s'_0)$. Takže vzťah (3.12) platí pre $i=1(1)n$.

Teraz odhadneme $\|\epsilon\|$. Z Taylorovho rozvoja funkcie $f(x)$ na okolí bodu x_i s Langrangeovým tvarom zvyšku dostaneme po dosadení t_i (rozvoj pre $x \in [x_{i-1}, x_i]$) a t_{i+1} (rozvoj pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$), príslušnom odčítaní a úprave

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = hf'_i + \frac{h^3}{48} (f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)), \quad \text{kde } \xi_1 \in (x, x_i), \xi_2 \in (x_i, x). \quad (3.13)$$

Podobne pre Taylorov rozvoj $f'(x)$ na okolí bodu x_i po dosadení x_{i-1} , x_i , x_{i+1} a úprave dostaneme tento vzťah

$$f'_{i-1} + 6f'_i + f'_{i+1} = 8f'_i + \frac{h^2}{2} (f^{(3)}(\xi_3) + f^{(3)}(\xi_4)), \quad \text{kde } \xi_3 \in (x_{i-1}, x_i), \xi_4 \in (x_i, x_{i+1}). \quad (3.14)$$

Dosadením (3.13) a (3.14) do vyjadrenia ϵ_i z (3.12) dostávame

$$\max_{i=1(1)n} |\epsilon_i| \leq \frac{4}{3} h^2 M,$$

preto dostaneme

$$\|\epsilon\| \leq \frac{4}{3}h^2M. \quad (3.15)$$

Z (3.11) a práve odvodeného odhadu normy pre ϵ v (3.15) dostávame

$$L = \max_{i=0(1)n} L_i \leq \frac{1}{3}h^2M. \quad (3.16)$$

Teraz už môžeme odvodiť chybu interpolácie a jej prvej derivácie. Z (3.9) plynie

$$\max_{x \in [x_0, x_{n+1}]} |f'(x) - s'(x)| = \max_{i=0(1)n} \left\{ \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(x) - s'(x)| \right\} \leq \max_{i=0(1)n} L_i + \frac{1}{2}h^2M \leq \frac{5}{6}h^2M.$$

Z odhadu (3.4) a práve odvodeného, plynie odhad pre interpolácie

$$\max_{x \in [x_0, x_{n+1}]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{12}h^3M.$$

Nakoniec ostáva určiť chybu interpolácie druhej derivácie. Druhá derivácia $S_{21}(x)$ je po častiach konštantná funkcia, preto pre $x \in (x_i, x_{i+1})$ platí

$$S_{21}''(x) = \frac{s'_{i+1} - s'_i}{h}. \quad (3.17)$$

Z Taylorovho rozvoja funkcie f' v bode x s Lagrangeovým tvarom zbytku, dosadením x_i a x_{i+1} do získaných formúl, odčítaní a úprave dostaneme

$$f''(x) = \frac{1}{h} (f'_{i+1} - f'_i) + R, \quad (3.18)$$

kde

$$\begin{aligned} |R| &= \frac{1}{h} \left| \frac{(x_{i+1} - x)^2 f^{(3)}(\xi_1) - (x_i - x)^2 f^{(3)}(\xi_2)}{2} \right| \leq \frac{1}{h} \left| \frac{(x_{i+1} - x)^2 M - (x_i - x)^2 M}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2h} M |2(x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x_i)| \leq Mh. \end{aligned}$$

Z (3.17), (3.18) a odhadu (3.16) dostávame pre každé $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0(1)n$

$$|f''(x) - s''(x)| \leq \frac{1}{h} |L_{i+1} - L_i| + |R| \leq \frac{5}{3}hM.$$

□

Nasledujúca veta pojednáva o interpolačných odhadoch funkcií z rôznych tried (prevzaté z [6]). Sieť nie je rovnomerná, ale uzly splajnu sú špeciálne volené.

Veta 3.5.2. *Nech je daná sieť $(\Delta x \Delta t)$ na $[a, b]$ s uzlami splajnu $x_{i+1} = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$, $i = 0(1)n-1$ a funkcia $g(x)$. Buď $S_{21,g} \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ kvadratický splajn interpolujúci v bodoch t_i hodnoty funkcie $g(x)$, tj. $g(t_i) = S_{21,g}(t_i)$, $i = 0(1)n$, splňajúci rovnaké okrajové podmienky ako funkcia $g(x)$. Potom platí*

$$\left\| (g - S_{21,g})^{(j)} \right\|_{\infty} \leq R_j, \quad j = 0, 1, 2,$$

kde vyjadrenie hodnoty R_j pre funkcie $g(x)$ z niektorých tried je uvedené v nasledujúcej tabuľke

<i>trieda funkcií</i>	\mathbf{R}_0	\mathbf{R}_1	\mathbf{R}_2
$C[a, b]$	$(1 + \frac{1}{2}r) \omega(g)$		
$C^1[a, b]$	$\frac{7}{8}K\omega(g')$	$4\omega(g')$	
$C^3[a, b]$	$0,022681K^3 \ g'''\ _\infty$ $+ \frac{1}{96}K^3\omega(g''')$	$\frac{1}{8}K^2 \ g'''\ _\infty$ $+ \frac{1}{48}K^2\omega(g''')$	$\frac{2}{3}K \ g'''\ _\infty$ $+ \frac{5}{48}K\omega(g''')$
$C^1C_\Delta^2[a, b]^1$	$\frac{11}{64}K^2\omega(g'')$	$\frac{11}{16}K\omega(g'')$	$3\omega(g'')$
$W_\infty^1[a, b]^2$	$K \ g'\ _\infty$		
$W_\infty^2[a, b]$	$\frac{7}{32}K^2 \ g''\ _\infty$	$\frac{7}{8}K \ g''\ _\infty$	
$C_1[a, b] \cap W_\infty^3[a, b]$	$\frac{1}{24}K^3 \ g'''\ _\infty$	$\frac{1}{6}K^2 \ g'''\ _\infty$	$\frac{7}{8}K \ g'''\ _\infty$

$$K = \max_{0 \leq i \leq n} \{t_{i+1} - t_i\}, \quad r = \frac{K}{\min_i \{t_{i+1} - t_i\}}, \quad \omega_i(f) = \max_{x, y \in [x_i, x_{i+1}]} \{|f(x) - f(y)|\}, \quad \omega(f) = \max_{0 \leq i \leq n} \{\omega_i(f)\}$$

¹ $C^k C_\Delta^m[a, b] = \{f \mid f \in C^k[a, b], f \in C^m[x_i, x_{i+1}], i = 0(1)n, k \leq m\}$

² $W_p^k[a, b] = \{f \mid f^{(k-1)}$ je absolútne spojitá, $f^k \in L^p[a, b]\}$

Kapitola 4

Interpolácia prvých derivácií

Doteraz sme skúmali kvadratické splajny, ktoré interpolovali nejaké predpísané hodnoty. Odvodzovali sme ich rôzne reprezentácie a hľadali dodatočné podmienky na ich jednoznačné určenie. Teraz sa pozrieme na kvadratický splajn, ktorý nebude interpolovať funkčné hodnoty, ale hodnoty prvých derivácií. Zvlášť si rozoberieme prípad pre interpoláciu v uzloch splajnu siete (Δx) a zvlášť pre interpoláciu v bodoch interpolácie na sieti $(\Delta x \Delta t)$.

4.1 Interpolácia prvých derivácií na sieti (Δx)

Definícia 4.1.1. Buď daná sieť uzlov $(\Delta x) = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$ a reálne hodnoty $m_i, i=0(1)n+1$. Splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$, ktorý spĺňa

$$S'_{21}(x_i) = m_i, \quad i = 0(1)n+1,$$

nazveme kvadratickým splajnom interpolujúcim hodnoty prvých derivácií.

Vieme (viď § 2.1), že interpolačný kvadratický splajn $S_{21}(x)$ na sieti (Δx) je určený $3(n+1)$ parametrami. Pri splnení podmienok spojitosti a interpolácie máme $(3n+2)$ podmienok, ktoré však splajn neurčujú jednoznačne. Preto musíme zadať jednu počiatočnú podmienku. Vhodné je predpísať funkčnú hodnotu v nejakom uzle.

Veta 4.1.2. Nech je daná sieť $(\Delta x) = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$, hodnoty $m_i, i = 0(1)n+1$, $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ a podmienky

a) $S'_{21}(x_i) = m_i, \quad i = 0(1)n+1,$

b) $S_{21}(x_k) = s_k.$

Potom existuje práve jeden kvadratický splajn interpolujúci hodnoty derivácií spĺňajúci počiatočnú podmienku b).

Dôkaz. Použijeme nasledujúce značenie:

$$p_i = \frac{S_{21}(x_{i+1}) - S_{21}(x_i)}{h_i}, \quad i = 0(1)n+1 \text{ a lokálnu premennú } q = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Pripomeňme si závery ukázané v § 2.1. Ukázali sme, že reprezentácia (2.2), pripomeňme:

$$S_{21}(x) = S_{21}(x_i + qh_i) = (1 - q^2)q_i + q^2q_{i+1} + h_iq(1 - q)S'_{21}(x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=0(1)n,$$

spĺňa podmienky spojitosti vo vnútorných uzloch, tj. platí $S_{21,i-1}(x_i) = S_{21,i}(x_i)$, $i = 1(1)n$. Pre spojitost prvých derivácií vo vnútorných uzloch sme dostali podmienky (2.4), pripomeňme:

$$2\frac{S_{21}(x_{i+1}) - S_{21}(x_i)}{h_i} = S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1}), \quad i = 0(1)n,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$S_{21}(x_{i+1}) - S_{21}(x_i) = \frac{1}{2}h_i(S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1})). \quad (4.1)$$

Z predpokladov poznáme hodnoty $S'_{21}(x_i)$, $i = 0(1)n+1$ a hodnotu $S_{21}(x_k)$. Z týchto hodnôt a (4.1) však vieme jednoznačne určiť hodnoty $S_{21}(x_i)$, $i = 0(1)n+1$, pretože na ich určenie máme z (4.1) tieto rekurentné vzťahy

$$\begin{aligned} S_{21}(x_i) &= S_{21}(x_{i+1}) - \frac{1}{2}h_i(S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1})) && \text{pre } 0 \leq i < k, \\ S_{21}(x_i) &= S_{21}(x_{i-1}) + \frac{1}{2}h_{i-1}(S'_{21}(x_{i-1}) + S'_{21}(x_i)) && \text{pre } k < i \leq n+1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Z reprezentácie (2.2) je zrejmé, že splajn je určený jednoznačne. \square

4.2 Interpolácia prvých derivácií na sieti $(\Delta x \Delta t)$

V predošlom odstavci, sme skúmali kvadratický splajn s predpísanými hodnotami prvých derivácií v uzloch siete. Teraz budeme skúmať prípad, keď hodnoty prvej derivácie nebudú predpísané v uzloch siete, ale v bodoch interpolácie $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1(1)n-1$, $t_0 = x_0$, $t_n = x_{n+1}$. Kvadratický splajn na sieti $(\Delta x \Delta t)$ má $3(n+1)$ parametrov. Pri splnení interpolačných podmienok

$$S'_{21}(t_i) = n_i, \quad i = 0(1)n \quad (4.3)$$

ostávajú 2 stupne voľnosti, pretože (4.3) určuje $(n+1)$ podmienok a spojitost $S_{21}(x)$ a $S'_{21}(x)$ vo vnútorných uzloch siete dáva $(2n)$ podmienok, spolu to však je len $(3n+1)$. Budeme používať značenie z predošlého odstavca a navyše zdefinujeme

$$d_i = \frac{t_i - x_i}{h_i}, \quad i = 0(1)n.$$

- a) Najprv preskúmame prípad $d_i = \frac{1}{2}$, $i=0(1)n$. Pretože $S'_{21}(x)$ je na každom intervale polynóm stupňa nanejvýš 1 (lineárna funkcia), v tomto špeciálnom prípade voľby bodov interpolácie platí medzi prvými deriváciami v uzloch a bodmi interpolácie vzťah

$$n_i = S'_{21}(t_i) = \frac{1}{2}(S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1})). \quad (4.4)$$

Podmienky spojitosti (4.1) s použitím (4.4) môžeme písať v tvare

$$S_{21}(x_{i+1}) - S_{21}(x_i) = \frac{1}{2}(S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1})) = h_i S'_{21}(t_i) = h_i n_i. \quad (4.5)$$

Z (4.5) nevieme pri známych hodnotách $S_{21}(x_i)$, $i=0(1)n+1$ a $S'_{21}(t_i) = n_i$, $i=0(1)n$ určiť hodnoty $S'(x_i)$, $i=0(1)n$. Predpísaním jednej hodnoty $S'_{21}(x_k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ sa zrejme tento problém vyrieši, pretože z (4.4) máme tieto rekurentné vzťahy:

$$\begin{aligned} S'_{21}(x_i) &= 2S'_{21}(t_i) - S'_{21}(x_i) && \text{pre } 0 \leq i < k, \\ S'_{21}(x_i) &= 2S'_{21}(t_{i-1}) - S'_{21}(x_{i-1}) && \text{pre } k < i \leq n+1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

b) V prípade $d_i \neq \frac{1}{2}$ použijeme na zápis splajnu $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ nasledujúcu reprezentáciu, s lokálnymi premennými A , B , C

$$S_{21}(x) = AS_{21}(x_i) + BS_{21}(x_{i+1}) + h_i CS'_{21}(t_i), \quad (4.7)$$

kde

$$A = \frac{1 + q(q - 2d_i)}{2d_i - 1}, \quad B = -\frac{q(q - 2d_i)}{2d_i - 1}, \quad C = \frac{q(q - 1)}{2d_i - 1}.$$

Derivovaním (4.7) dostaneme

$$S'_{21}(x) = \frac{2}{h_i} \frac{q - d_i}{2d_i - 1} S_{21}(x_i) - \frac{2}{h_i} \frac{q - d_i}{2d_i - 1} S_{21}(x_{i+1}) + \frac{2q - 1}{2d_i - 1} S'_{21}(t_i). \quad (4.8)$$

Z podmienok spojitosti prvej derivácie vo vnútorných uzloch siete x_i , $i=1(1)n$ dostaneme sústavu rovníc

$$-a_i S_{21}(x_{i-1}) + (a_i - b_i) S_{21}(x_i) + b_i S_{21}(x_{i+1}) = f_i, \quad i = 1(1)n, \quad (4.9)$$

kde

$$a_i = \frac{1 - d_{i-1}}{1 - 2d_{i-1}}, \quad b_i = \frac{d_{i-1}d_i}{h_i(1 - 2d_i)}, \quad f_i = \frac{h_{i-1}}{2} \left[\frac{S_{21}(t_{i-1})}{1 - 2d_{i-1}} + \frac{S'_{21}(t_i)}{1 - 2d_i} \right].$$

Takže máme sústavu n rovníc na určenie $n + 2$ parametrov $s_i = S(x_i)$, $i = 0(1)n + 1$. Sústava má dva stupne voľnosti. Dodaním okrajových podmienok

$$S_{21}(x_0) = s_0, \quad S_{21}(x_{n+1}) = s_{n+1},$$

dostaneme úpravou (4.9) sústavu n rovníc pre n neznámych s_i , $i = 1(1)n$, ktorá má takýto maticový zápis

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 & b_1 & & & & \\ -a_2 & a_2 - b_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -a_{n-1} & a_{n-1} - b_{n-1} & b_{n-1} & \\ & & & -a_n & a_n - b_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - a_1 s_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - b_n s_{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Matica sústavy je zrejme tridiagonálna a ako sa tvrdí v [6], regulárna pri splnení podmienok

$$\begin{aligned} (a_i - b_i) a_i b_{i-1} &> 0, \quad i = 3(1)n \\ (a_1 - b_1) [(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) + a_2 b_1] &> 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Je dobré si všimnúť, že podmienky (4.11) pre prípad ekvidistantného delenia sú automaticky splnené.

Zhrňme, čo sme vlastne všetko dostali. Ukázali sme, že ak na danej sieti $(\Delta x \Delta t)$ predpíšeme v bodoch $t_i, i=0(1)n$ hodnoty n_i a navyše:

- a) na obecnej sieti sú splnené podmienky (4.11) a predpísané hodnoty $S_{21}(x_0), S_{21}(x_{n+1})$, alebo
- b) na ekvidištantnej sieti s $d_i = d \neq \frac{1}{2}, i=0(1)n$ sú predpísané hodnoty $S_{21}(x_0), S_{21}(x_{n+1})$, alebo
- c) na ekvidištantnej sieti s $d_i = \frac{1}{2}, i=0(1)n$ sú predpísané hodnoty $S_{21}(x_k), S'(x_k)$,

potom existuje jediný kvadratický splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ spĺňajúci $S'_{21}(t_i) = n_i, i=0(1)n$.

Kapitola 5

Interpolácia stredných hodnôt

5.1 Kvadratický splajn interpolujúci stredné hodnoty

Majme danú sieť uzlov $(\Delta x) := \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$ s krokom $h_i = x_{i+1} - x_i$. Majme zadané dáta g_i , $i = 0(1)n$. Budeme riešiť úlohu zostrojiť kvadratický splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ tak, aby

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{21}(x) dx = h_i g_i \quad \text{pre } i = 0(1)n. \quad (5.1)$$

Definícia 5.1.1. *Dáta g_i , $i = 0(1)n$ pre úlohu (5.1) sa nazývajú stredné hodnoty. Kvadratický splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$, riešiaci úlohu (5.1) sa nazýva kvadratický splajn interpolujúci stredné hodnoty g_i .*

Už vieme, že kvadratický splajn je jednoznačne určený $3(n+1)$ parametrami. Ale počet podmienok, ktoré nám úloha (5.1) dáva splniť je len $(3n+1)$ ($2n$ pre spojitosť $S_{21}(x)$, $S'_{21}(x)$ v uzloch splajnu a $(n+1)$ podmienok interpolácie dát). Takže je potrebné zadať ešte ďalšie dve podmienky, najlepšie v krajných bodoch siete. Okrajové podmienky je možné zadať jedným zo spôsobov podrobnejšie popísanými pre reprezentáciu s prvými deriváciami (viď § 2.2), stručne pripomeňme:

- predpísanie hodnôt v krajných bodoch siete: $S_{21}(x_0) = s_0$, $S_{21}(x_{n+1}) = s_{n+1}$,
- predpísanie prvých derivácií v krajných bodoch siete: $S'_{21}(x_0) = s'_0$, $S'_{21}(x_{n+1}) = s'_{n+1}$,
- predpísanie druhých derivácií v krajných bodoch siete: $S''_{21}(x_{0+}) = s''_0$, $S''_{21}(x_{n+1-}) = s''_{n+1}$,
- periodické okrajové podmienky: $S_{21}(x_0) = S_{21}(x_{n+1})$, $S'_{21}(x_0) = S'_{21}(x_{n+1})$,
- zadať koeficienty $a_0, b_0, a_{n+1}, b_{n+1}, f_0, f_{n+1}$ pre obecnější okrajové podmienky splňajúce $|b_0| > |a_0|$ a $|a_{n+1}| < |b_{n+1}|$.

O existencii a jednoznačnosti riešenia úlohy (5.1) hovorí nasledujúca veta.

Veta 5.1.2. *Buď $(\Delta x) := \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$. Nech g_i , $i = 0(1)n$ sú zadané dáta. Potom existuje práve jeden kvadratický splajn $S_{21}(x) \in \mathcal{S}_{21}(\Delta x)$ interpolujúci stredné hodnoty g_i a splňajúci jednu z podmienok a)–e) uvedených vyššie.*

Dôkaz. Z Taylorovej reprezentácie (2.23) máme pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} S_{21}(x) &= s_i + m_i(x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i} (x - x_i)^2, \\ S_{21}(x) &= s_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) + \frac{1}{2} \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i} (x - x_{i+1})^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Integrovaním vzťahov (5.2) na $[x_i, x_{i+1}]$ dostaneme pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0(1)n$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{21}(x) dx &= s_i h_i + \frac{1}{6} h_i^2 (m_{i+1} + 2m_i), \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{21}(x) dx &= s_{i+1} h_i + \frac{1}{6} h_i^2 (-m_i - 2m_{i+1}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ukázali sme, že sústava (2.4) vyjadruje podmienky spojitosti kvadratického splajnu vo vnútorných uzloch x_i , $i=1(1)n$, pripomeňme:

$$\frac{1}{2}(m_i + m_{i+1}) = \frac{s_{i+1} - s_i}{h_i}, \quad i = 0(1)n.$$

Podmienky spojitosti prvej derivácie vo vnútorných uzloch sú reprezentáciou (5.2) splnené, dostaneme dosadením. Podmienky interpolácie stredných hodnôt vyjadrené pomocou (5.3) majú tvar (pre $i=0(1)n$)

$$s_i + \frac{1}{6} h_i (m_{i+1} + 2m_i) = g_i, \quad (5.4)$$

$$s_{i+1} + \frac{1}{6} h_i (-m_i - 2m_{i+1}) = g_i. \quad (5.5)$$

Odčítaním vyjadrenia g_{i-1} z (5.4) od vyjadrenia g_i z (5.5) dostaneme sústavu n rovníc pre $(n+2)$ neznámych m_i , $i = 0(1)n + 1$

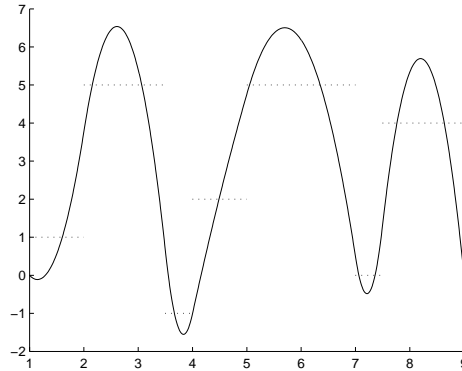
$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = 6(g_i - g_{i-1}), \quad i = 1(1)n. \quad (5.6)$$

Teraz sa pozrieme ako je to s jednoznačnosťou riešenia sústavy (5.6) za podmienok a)–e). Diskusia sa urobí podobne, ako v odstavci § 2.1, preto len stručne zhrnieme.

- Predpísaním hodnoty $S_{21}(x_0) = s_0$ príp. $S_{21}(x_{n+1}) = s_{n+1}$ dostaneme z (5.4) príp. (5.5) rovnicu $2h_0 m_0 + h_0 m_1 = 6(g_0 - s_0)$ príp. $h_n m_n + 2h_n m_{n+1} = 6(s_{n+1} - g_n)$, ktoré doplnia sústavu (5.6) na sústavu s tridiagonálnou, ostre diagonálne dominantnou maticou. Takže sústava má jediné riešenie (viď Veta 7.0.2).
- Predpísaním hodnôt $S'_{21}(x_0) = m_0$ a $S'_{21}(x_{n+1}) = m_{n+1}$ umožní v sústave (5.6) previesť m_0 , m_{n+1} na pravú stranu a vyrovnáť tak počet neznámych hodnôt s počtom rovníc. Matica sústavy bude regulárna, máme jednoznačnosť.
- Predpísanú hodnotu $S'_{21}(x_{0+}) = M_0$ príp. $S''_{21}(x_{n+1-}) = M_{n+1}$ môžeme prepísať do tvaru $m_0 - m_1 = -h_0 M_0$ príp. $m_{n+1} - m_n = h_n M_n$, ktoré doplnia sústavu (5.6) na sústavu s tridiagonálnou, prevládajúcou diagonálnou (viď Definícia 7.0.1). Takže sústava má podľa Vety 7.0.2 jediné riešenie.

- d) Podmienky periodičnosti $s_0 = s_{n+1}$ a $m_0 = m_{n+1}$ doplnia sústavu (5.6) na sústavu s maticou, ktorá je: cyklická, tridiagonálna, ostre diagonálne dominantná. Takže opäť máme jednoznačnosť.
- e) Okrajové podmienky $a_0 m_0 + b_0 m_1 = f_0$, $a_{n+1} m_n + b_{n+1} m_{n+1} = f_{n+1}$ s predpísanými koeficientami $a_0, b_0, f_0, a_{n+1}, b_{n+1}, f_{n+1}$ doplnia sústavu (5.6) tak, že matica takto vzniknutej sústavy bude tridiagonálna a pri splnení podmienok $|b_0| \leq |a_0|$, $|a_{n+1}| \leq |b_{n+1}|$ pôjde o maticu s prevládajúcou diagonálou, tým pádom regulárnu a opäť máme jednoznačnosť.

□



Obrázok 5.1: Kvadratický splajn interpolujúci stredné hodnoty. Čiarkovane je zobrazená funkcia $g(x)$, definovaná predpisom $g(x) = g_i \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$. Hodnoty sú zapísané v tabuľke 5.1. Okrajové podmienky boli volené $S_{21}(x_0) = S_{21}(x_{n+1}) = 0$.

x_i	1	2	3.5	4	5	7	7.5	9
g_i	1	5	-1	2	5	0	4	

Tabuľka 5.1

5.2 Minimalizujúca vlastnosť kvadratických splajnov

Veta 5.2.1. Buď daná sieť $(\Delta x) = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$ s krokom $h_i = x_{i+1} - x_i$ a hodnoty $g_i, i = 0(1)n$. Definujme množinu $\Omega = \left\{ w \in W_2^1[x_0, x_{n+1}] \mid \int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x) dx = h_i g_i, i = 0(1)n \right\}$ a na nej funkcionál $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, predpisom

$$J(w) = \|w'\|^2 = \int_{x_0}^{x_{n+1}} (w'(x))^2 dx. \quad (5.7)$$

V splajne S_{21} , interpolujúcom stredné hodnoty g_i nadobúda funkcionál J svoje jediné minimum:

- a) na množine Ω a S_{21} je prirodzený splajn, tj. $S'_{21}(x_0) = S'_{21}(x_{n+1}) = 0$,

- b) na množine $\tilde{\Omega} = \{w \in \Omega \mid w(x_0) = w(x_{n+1})\}$ a $S_{21}(x_0) = S_{21}(x_{n+1})$, $S'_{21}(x_0) = S'_{21}(x_{n+1})$ ¹,
c) na množine $\tilde{\Omega} = \{w \in \Omega \mid w(x_0) = S_{21}(x_0), w(x_{n+1}) = S_{21}(x_{n+1})\}$.

Dôkaz. Buď $w \in \Omega$. Zo vzťahu

$$0 \leq \|w' - S'_{21}\|^2 = \|w' - S'_{21}\|^2 - \|S'_{21}\|^2 + \|S'_{21}\|^2 = \|w'\|^2 - 2(w' - S'_{21}, S'_{21}) - \|S'_{21}\|^2,$$

dostaneme pre $(w' - S'_{21}, S'_{21}) = 0$ nerovnosť $\|S'_{21}\|^2 \leq \|w'\|^2$, tj. $J(S_{21}) \leq J(w)$. Nerovnosť hovorí, že S_{21} minimalizuje funkcionál J . V nasledujúcom postupe ukážeme, že za predpokladov a), b) alebo c) skutočne platí $(w' - S'_{21}, S'_{21}) = 0$. Použitím per partes dostávame

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (w - S_{21})'(x) \cdot S'_{21}(x) dx = [(w - S_{21})(x) \cdot S'_{21}(x)]_{x=x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (w - S_{21})(x) \cdot S''_{21}(x) dx. \quad (5.8)$$

Buď $f \in \{w, S_{21}\}$, potom použitím per partes dostávame

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) S''_{21}(x) dx = \left[\left(\int f(x) dx \right) S''_{21}(x) \right]_{x=x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) S'''_{21}(x) dx. \quad (5.9)$$

Pretože kvadratický splajn S_{21} je na $[x_i, x_{i+1}]$ polynomická funkcia najvyššieho druhého stupňa, druhý člen na pravej strane v rovnici (5.9) je rovný 0. Z interpolačných vlastností S_{21} a definície funkcie w pre prvý člen na pravej strane platí

$$c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = c_i h_i g_i, \quad (5.10)$$

kde $c_i = S''_{21}(x)$ pre $x \in (x_i, x_{i+1})$, lebo $S''_{21}(x)$ je po častiach konštantná funkcia. Takže z (5.10) dostávame, že druhý člen na pravej strane v rovnici (5.8) je rovný 0, preto z doteraz odvodených výsledkov môžeme písať

$$\begin{aligned} (w' - S'_{21}, S'_{21}) &= \int_{x_0}^{x_{n+1}} (w - S_{21})'(x) S'_{21}(x) dx = \sum_{i=0}^{n+1} [(w - S_{21})(x) S'_{21}(x)]_{x=x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= S'_{21}(x_{n+1}) [w(x_{n+1}) - S_{21}(x_{n+1})] - S'_{21}(x_0) [w(x_0) - S_{21}(x_0)]. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že posledný výraz je rovný 0 pri splnení podmienok a), b) resp. c). Teraz ukážeme jednoznačnosť minimálneho prvku pre funkcionál J . Majme dva prvky S a P , ktoré minimalizujú funkcionál J , tj.

$$\|S'\|^2 = J(S) = J(P) = \|P'\|^2.$$

¹podmienky periodičnosti: $S_{21}(x_0) = S_{21}(x_{n+1})$, $S'_{21}(x_0) = S'_{21}(x_{n+1})$

Jednoznačnost minimalizujúceho prvku, potom plyní z nasledujúceho

$$\begin{aligned} 0 \leq \|S' - P'\|^2 &= (S' - P', S' - P') = \|S'\|^2 - 2(P', S') + \|P'\|^2 = \\ &= -\|S'\|^2 + 2\|S'\|^2 - 2(P', S') + \|P'\|^2 = \\ &= -\|S'\|^2 + 2(S' - P', S') + \|P'\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Odkiaľ z definície normy platí $S' = P'$. Podľa [6], z absolútnej spojivosti S', P' dostávame jednoznačnosť $S = P$. \square

5.3 Chyba interpolácie stredných integrálnych hodnôt funkcie strednými integrálnymi hodnotami kvadratického splajnu

Veta 5.3.1. *Buď $g \in C^j[a, b]$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $(\Delta x) = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$ s krokom $h_i = x_{i+1} - x_i$. Nech $g_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx$, $i = 0(1)n$. Buď S_{21} kvadratický splajn interpolujúci stredné hodnoty g_i na sieti (Δx) a spĺňajúci okrajovú podmienku $S_{21}^{(k)}(x_i) = g^{(k)}(x_i)$, $i = 0, n+1$. Potom platí*

$$\left\| S_{21}^{(k)} - g^{(k)} \right\| = C_{jk} H^{j-k} \|g^{(j)}\|, \quad k \leq j - 1, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

kde $H = \max_{1 \leq i \leq n} \{h_i\}$, C_{jk} sú nasledujúcou tabuľkou zadané hodnoty

$j \setminus k$	0	1	2
1	0,86		
2	4/27	1/27	
3	1/24	1/6	1/r+r/2

$r = \max_{1 \leq i \leq n} \{h_i/h_{i-1}\}$.

Dôkaz. Dôkaz sa robí pomocou aplikácie vlastností kubických splajnov S_{32} , pretože na to nemáme rozvinutú teóriu, dôkaz nebudeme uvádzať. Možno ho nájsť v [3], strana 195. \square

5.4 Zhladzujúci kvadratický splajn

Doteraz sme riešili úlohy, ako čo „najlepšie“ interpolovať dáta úlohy. Otázkou však je, nakoľko je nutné a žiaduce dáta interpolovať čo najlepšie. Zoberme si situáciu, keď sú dáta zaťažené chybou. Interpolácia, ako sme sa na ňu pozerali doteraz, je „presná“ pre zadané dáta, ale pre „nepresné“ dáta je to nepotrebné. Spôsob akým zmenšiť vplyv nepresných dát, je metóda najmenších štvorcov. Rieši úlohu „vyhladiť“ chybou zaťažené dáta. Istým kompromisom medzi „presnou“ interpoláciou a vyhladením dát sú zhladzujúce splajny. Úloha sa obecné formuluje v tomto znení, viď [6]: Na danej sieti $(\Delta x) = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$ s predpísanými hodnotami y_i a váhami (váhovými koeficientami) $\omega_i \geq 0$ v uzloch x_i , $i = 0(1)n+1$ hľadáme minimum funkcionálu

$$J(f) = \int_{x_0}^{x_{n+1}} [f^{(m)}]^2 dx + \sum_{i=0}^{n+1} \omega_i [y_i - f(x_i)]^2,$$

lineárna na $[x_i, x_{i+1}]$, takže pre $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ platí $S'_{21}(\bar{x}_i) = \frac{1}{2}(S'_{21}(x_i) + S'_{21}(x_{i+1}))$. Budeme používať označenie $m_{i+\frac{1}{2}} = S'_{21}(\bar{x}_i)$, $S'_{21}(x_i) = m_i$. Pri tomto značení môžeme písať

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{n+1}} [S'_{21}(x)]^2 dx &= \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S'_{21}(x)]^2 dx = \sum_{i=0}^n \frac{1}{6} h_i [m_i^2 + 4m_{i+\frac{1}{2}}^2 + m_{i+1}^2] = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^n 2h_i [m_i^2 + m_i m_{i+1} + m_{i+1}^2] = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n m(i) [h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1}] = \\ &= \frac{1}{6} \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

kde sme postupne použili aditivitu integrálu, Simpsonovo pravidlo³, identitu $m_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(m_i + m_{i+1})$ a „šikovnú“ úpravu. Z (5.14) pri značení $\mathbf{D} = \text{diag}^4((h_i \sqrt{\omega_i})_{i=0}^n)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ môžeme písať

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{n+1}} [S'_{21}(x)]^2 dx + \alpha \sum_{i=0}^n \omega_i [h_i g_i - h_i p_i]^2 &= \frac{1}{6} \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} + \alpha (\mathbf{g} - \mathbf{p})^T \mathbf{D}^2 (\mathbf{g} - \mathbf{p}) \\ &= 6\mathbf{p}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{p} + \alpha (\mathbf{g} - \mathbf{p})^T \mathbf{D}^2 (\mathbf{g} - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

V poslednej rovnosti sme využili symetriu matice \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) a jej regularitu (z (5.13) $\mathbf{m} = 6\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{p}$; $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$). Na výraz v (5.15) sa môžeme pozeráť ako na funkciu premennej $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, teda zobrazenie z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} . Označme ju ako f . Nutnou podmienkou extrémú tejto funkcie v bode \mathbf{p} je $f'(\mathbf{p}) = 0$. Použitím retiazkového pravidla na určenie $f'(\mathbf{p})$ dostaneme

$$f'(\mathbf{p}) = 12\mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{p} - 2\alpha \mathbf{D}^2 (\mathbf{g} - \mathbf{p}) = 0,$$

odkiaľ použitím $\mathbf{m} = 6\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{p}$ dostaneme

$$2\mathbf{Q}^T \mathbf{m} - 2\alpha \mathbf{D}^2 (\mathbf{g} - \mathbf{p}) = 0. \quad (5.16)$$

Prenásobením (5.16) maticou $6\mathbf{Q} \mathbf{D}^{-2}$ ⁵ zľava a použitím (5.13) dostaneme po úprave

$$\left[\mathbf{R} + \frac{6}{\alpha} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-2} \mathbf{Q}^T \right] \mathbf{m} = 6\mathbf{Q} \mathbf{g}.$$

Odkiaľ už vieme spočítať parametre splajnu m_i , $i = 0(1)n$. Zo vzťahu (5.16) môžeme v prípade potreby určiť aj hodnoty stredných hodnôt

$$\mathbf{p} = \mathbf{g} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{D}^{-2} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}. \quad (5.17)$$

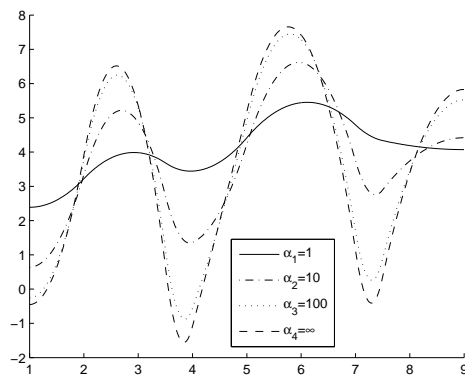
³ $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$. Pre $[S'_{21}(x)]^2$ platí rovnosť. Podrobnejšie viď [10] strana 64.

⁴ notácia z MATLABu, $\text{diag}(\mathbf{x})$ – matica so zložkami vektora \mathbf{x} na diagonále, inde 0.

⁵ $\mathbf{D}^{-2} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{D}^{-1})^2$

Z (5.4), (5.5), (2.4) môžeme určiť ďalší paramater kvadratického splajnu $s_i = S_{21}(x_{x_i})$, $i = 0(1)n+1$, opäť využijeme $m_0 = m_{n+1} = 0$ a dostaneme

$$s_0 = p_0 - \frac{1}{6}h_0m_1, \quad s_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}h_nm_n, \quad s_i = s_{i-1} + \frac{1}{2}h_{i-1}(m_{i-1} + m_i), \quad i = 1(1)n.$$



Obrázok 5.2: Zhladzovanie dát pre $\omega_i = 1$, $i = 0(1)6$ a α_i . Hodnoty dát sú dané tabuľkou 5.2

x_i	1	2	3.5	4	5	7	7.5	9
stredná hodnota g_i	1	5	-1	2	6	0	4	

Tabuľka 5.2

Kapitola 6

Aplikácie kvadratických splajnov v numerickej matematike

6.1 Numerickej derivácia

Numerickej deriváciou sa nazývajú „rozumné“ vzorce, ktoré nahrádzajú hodnotu „skutočnej“ derivácie. „Rozumné“ v tom zmysle, že na dostatočne presné určenie hodnoty derivácie funkcie $f^{(j)}(x)$ budú potrebovať len funkčné hodnoty, hodnoty nižších derivácií, prípadne hodnoty derivácií v nejakých bodoch v okolí bodu x . Pri konštrukcii kvadratických splajnov sme často používali ako parametre hodnoty derivácií (prvej resp. druhej). Zderivovaním „vhodnej“ reprezentácie môžeme dospieť ku vzorcu numerickej derivácie. V § 2.1 sme pri konštrukcii reprezentácie pracovne nazvanej *vhodná* v istom okamihu pracovali s výrazom (2.6), pripomeňme

$$S'_{21}(x) = m_i + \frac{(x - x_i)(m_{i+1} - m_i)}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad m_i = S'_{21}(x_i).$$

Zderivovaním dostaneme

$$S''_{21}(x) = \frac{m_{i+1} - m_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Tieto vzorce môžeme chápať ako vyjadrenie prvej a druhej numerickej derivácie. Predstavu o chovaní sa chyby, akej sa dopúšťame pri vyjadrení derivácie vzorcom pre numerickej deriváciu namiesto presnej hodnoty nám môže dať Veta 3.5.2. V [6] sú pre dostatočne hladkú funkciu $g(x)$ na pravidelnej sieti $(\Delta x \Delta t)$ uvedené nasledujúce vzťahy pre derivácie. Použité značenie:

$$g_i = S_{21}(t_i) = g(t_i), \quad n_i = S'_{21}(t_i), \quad N_i = S''_{21}(t_i).$$

V prípade siete $(\Delta x \Delta t)$ s uzlami $x_{i+1} = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$, $k_i = t_{i+1} - t_i$ pre hodnoty prvej derivácie v bodoch interpolácie platí

$$n_i = S'_{21}(t_i) = \frac{g_{i+1} + g_i}{k_i} - \frac{1}{8}k_i(3N_i + N_{i+1}).$$

Pre periodickú a dostatočne hladkú funkciu g na pravidelnej sieti $(\Delta x \Delta t)$ platí

$$\begin{aligned} N_i &= g_i'' - \frac{1}{24}h^2 g_i^{(4)} - \frac{7}{2880}h^4 g_i^{(6)} - \frac{23}{53760}h^6 g_i^{(8)} + \mathcal{O}(h^8); \\ n_i &= g_i' + \frac{1}{24}h^2 g_i^{(3)} - \frac{7}{960}h^4 g_i^{(5)} + \frac{53}{161280}h^6 g_i^{(7)} + \mathcal{O}(h^8). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Pre dostatočne hladkú funkciu g platí

$$\begin{aligned} g_i' &= \frac{g_{i+1} - g_i}{2h} - \frac{1}{12}h(N_{i+1} - N_{i-1}) + \mathcal{O}(h^4); \\ g_i'' &= \frac{1}{3} \left[2N_i + \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} \right] + \mathcal{O}(h^4); \\ g_i''' &= \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{h} - \frac{g_{i+2} - 2g_{i+1} + 2g_{i-1} - g_{i-2}}{2h^3} + \mathcal{O}(h^4); \\ g_i^{(4)} &= \frac{1}{3} \left[4 \frac{N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}}{h^2} - \frac{g_{i+2} - 4g_{i+1} + 6g_i - 4g_{i-1} + g_{i-2}}{h^2} \right] + \mathcal{O}(h^4); \\ g'(x_{i+1}) &= \frac{g_{i+1} - g_i}{h} - \frac{1}{24}h(N_{i+1} - N_i) + \mathcal{O}(h^4); \\ g'''(x_{i+1}) &= \frac{N_{i+1} - N_i}{h} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.2 Numerická integrácia

Tak ako pri numerickej derivácii išlo o nahradenie hodnoty derivácie v bode hodnotou získanou nejakým predpisom, podobne je tomu aj pri numerickej integrácii. Namiesto výpočtu hodnoty určitého integrálu spočítame jeho hodnotu približne. Všeobecný postup je ten, že funkciu definovanú na intervale $[x_0, x_{n+1}]$ aproximujeme nejakou jednoduchšou funkciou (v našom prípade kvadratickým splajnom). Namiesto počítania určitého integrálu spočítame hodnotu určitého integrálu z tejto aproximácie. Chyby akej sa dopúšťame pri nahradení presnej hodnoty určitého integrálu hodnotou získanou z aproximácie môžeme vyjadriť z identity

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_{n+1}} g(x) dx + \int_{x_0}^{x_{n+1}} (f - g)(x) dx,$$

kde $f(x)$ je pôvodná funkcia, $g(x)$ jej aproximácia.

Z prvého integrálu na pravej strane vyjadríme vzorec pre numericкую integráciu. Druhý integrál vyjadruje akej chyby sa pri numerickej integrácii dopúšťame. Hrubý odhad je

$$\left| \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_{n+1}} g(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_{n+1}} (f - g)(x) dx \right| \leq (x_{n+1} - x_0) \|f - g\|_{sup}.$$

Podrobnejším vyšetrením integrálu môžeme odhad spresniť.

Pre splajny nižších stupňov je numericкая integrácia výhodná z toho hľadiska, že integrál z nich sa dá spravidla analyticky spočítať. Takže dostaneme priamo vzorec. Zoberme si kvadratický splajn $S_{21}(x)$ aproximujúci funkciu $f(x)$. Za $\|f - S_{21}\|$ môžeme dosadiť príslušnú hodnotu z Vety 3.5.2.

Odvodíme si nejaké vzorce pre numerickú integráciu odvodené z aproximácie kvadratickými splajnami.

Uvažujme na intervale $[x_0, x_{n+1}]$ sieť $(\Delta x \Delta t)$. Z reprezentácie (2.9) kvadratického splajnu $S_{21}(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{x_{i+1}}^{x_i} S_{21}(x) dx &= \int_{x_{i+1}}^{x_i} s_i + h_i(q - d_i) \left[m_i + \frac{1}{2}(q + d_i)(m_{i+1} - m_i) \right] dx = \\ &= s_i h_i + \frac{1}{2} h_i^2 m_i (1 - 2d_i) + \frac{1}{6} h_i^2 (m_{i+1} - m_i) (1 - 3d_i^2), \quad i = 0(1)n. \end{aligned}$$

Odkiaľ dostávame tento vzorec pre numerickú integráciu

$$\int_{x_0}^{x_{m+1}} S_{21}(x) dx = \sum_{i=0}^n s_i h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n h_i^2 m_i (1 - 2d_i) + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^n h_i^2 (m_{i+1} - m_i) (1 - 3d_i^2),$$

kde $d_i = \frac{t_i - x_i}{h_i}$. V špeciálnom prípade $d_i = \frac{1}{2}$, $i = 0(1)n$, v ktorom sme ukázali, že výpočet sa zjednodušuje, vypadne druhý člen na pravej strane.

V [6] sa pre funkciu $g \in C^4([x_0, x_{n+1}])$ a kvadratický splajn, ktorý ju aproximuje na pravidelnej sieti uvádza tento odhad

$$\left| \int_{x_0}^{x_{n+1}} (g - S_{21})(x) dx \right| \leq 5,54 \cdot 10^{-3} (x_{n+1} - x_0) h^4 \|g^{(4)}\| < \frac{1}{180} (x_{n+1} - x_0) h^4 \|g^{(4)}\|.$$

6.3 Numerické riešenie ODR

Eulerova metóda je najjednoduchšou numerickou metódou na riešenie ODR prvého stupňa

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{na } [x_0, x_{n+1}]. \quad (6.3)$$

Algoritmus tejto metódy je odvodený z Taylorovho rozvoja funkcie $y(x)$ a je vyjadrený nasledujúcim algoritmom (explicitná Eulerova metóda)

```
[algoritmus 1]
y0 ← y(x0) [počiatočná podmienka]
for i=1(1)n [výpočet]
  [ yi+1 = yi + hif(xi, yi)
```

Podobne však môžeme postupovať aj pri kvadratickom splajne a hľadanií riešenia ODR druhého stupňa

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \text{na } [x_0, x_{n+1}]. \quad (6.4)$$

Lenže vo vzorci, ktorý získame, potrebujeme pri určení hodnoty y_{i+1} poznať vyjadrenie y_i , y'_i a y''_i . y_i poznáme z predošlého kroku (na začiatku z počiatočnej podmienky). y''_i určíme z (6.4) a nakoniec y'_i určíme z $y''_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{h_i}$.

V správnom poradí krokov dostaneme tento algoritmus

```
[algoritmus 2]
y0 ← y(x0) [počiatočná podmienka]
y'0 ← y'(x0) [počiatočná podmienka]
for i=1(1)n [výpočet]
  [
    y''i ← f(xi, yi, y'i)
    y'i+1 ← y'i + hiy''i
    yi+1 ← yi + hiy'i + ½hi2y''i
  ]
```

Kvadratické splajny sa môžu použiť aj na výpočet (6.3). Na sieti $(\Delta x) := \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$ môžeme pre $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $s_i = S_{21}(x_i)$, $m_i = S'_{21}(x_i)$ reprezentovať splajn Taylorovým rozvojom v tvare

$$S_{21}(x) = s_i + m_i(x - x_i) + \frac{(m_{i+1} - m_i)(x - x_i)^2}{2h_i}. \quad (6.5)$$

Odkiaľ po dosadení x_{i+1} , pri našom značení, dostaneme

$$s_{i+1} = s_i + \frac{h_i}{2}(m_i + m_{i+1}). \quad (6.6)$$

Z (6.3) a (6.6) dostaneme

$$m_{i+1} = f(x_{i+1}, s_{i+1}) = f(x_{i+1}, s_i + \frac{h_i}{2}(m_i + m_{i+1})). \quad (6.7)$$

Táto rovnica je nelineárna a jej aproximatívne riešenie m_{i+1} je možné hľadať iteratívne. Ako počiatočnú podmienku, ktorou „naštartujeme“ iterácie, môžeme vziať $m_{i+1}^0 = \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}}$. V literatúre sa uvádza, že pre lipschitzovskú funkciu $f(x, y)$ vzhľadom k premennej y s konštantou L^1 je postačujúcou podmienkou konverencie $h_i < 2L$.

V nasledujúcom algoritme sú algoritmicky spísané predošlé závery.

```
[algoritmus 3]
y0 ← y(x0) [počiatočná podmienka]
y'0 ← f(x0, y0) [ (6.3) ]
y1 ← y0 + h0f(x0, y0) [jeden krok explicitnej Eulerovej metódy]
for j=1(1)n [výpočet]
  [
    mj0 ← (yj - yj-1) / hj-1
    repeat
      [ mj+1k+1 ← (xj+1 + ½hj(y'j + mj+1k))
    until [konvergencia] , , mj+1k+1  $\xrightarrow{k \rightarrow \infty}$  mj+1 ' '
    y'j+1 ← mj+1
    yj+1 ← yj + ½hj(y'j + y'j+1)
  ]
```

¹lipschitzovská funkcia $f(x, y)$ vzhľadom k y s konštantou $L \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall [x, y], [x, z] \in D(f); |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$.

Poznámka 2. Dostali sme algoritmus konvergentnej lichobežníkovej metódy.

Pre kvadratický splajn na sieti $(\Delta x \Delta t) := \{x_0 \leq t_n < x_1 < \dots < x_n < t_n \leq x_{n+1}\}$ bol v § 2.2 odvodený vzťah (2.6)

$$S'_{21}(x) = m_i + (x - x_i)(m_{i+1} - m_i)/h_i, \quad \text{kde } m_i = S'_{21}(x_i),$$

z ktorého, pri značení $d_i = t_i - x_i$, dostaneme

$$S'_{21}(t_i) = \frac{d_i m_{i+1} + (h_i - d_i) m_i}{h_i}. \quad (6.8)$$

Po dosadení (6.8) do (6.3) a úprave, dostaneme pri značení $s_i = S_{21}(t_i)$, $m_i = S'_{21}(x_i)$

$$d_i m_{i+1} + (h_i - d_i) m_i = h_i f(x_i + d_i, s_i). \quad (6.9)$$

Z podmienok spojitosti (2.12), pripomeňme

$$a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = 2(s_i - s_{i-1}),$$

ktoré sme dostali pri reprezentácii splajnu pomocou prvých derivácií § 2.2, s koeficientami (2.13) vyjadrením s_i dostaneme vzťah

$$s_i = s_{i-1} + \frac{a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1}}{2h_i}. \quad (6.10)$$

Na ekvidištantnej sieti uzlov s voľbou bodov interpolácie $t_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ sa tento vzťah zjednoduší (viď (2.14)) na tvar

$$s_i = s_{i-1} + \frac{1}{8}h(m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1})$$

a vzťah (6.9) bude vyzerat

$$m_{i+1} = 2f\left(x_i + \frac{1}{2}h, s_i\right) - m_i = 2f(t_i, s_i) - m_i.$$

Tieto vzťahy sa v algoritmoch používajú na iteratívne spresňovanie hodnôt s_i , m_i .

Pre funkciu $y \in C^4([x_0, x_{n+1}])$, ktorej funkčné hodnoty v bodoch interpolácie sú interpolované kvadratickým splajnom S_{21} platí (6.2), pripomeňme:

$$y'(x_{i+1}) = \frac{S_{21}(t_{i+1}) - S_{21}(t_i)}{h} - \frac{1}{24}h[S''_{21}(t_{i+1}) - S''_{21}(t_i)] + \mathcal{O}(h^4).$$

Použitím tohoto vzťahu môžeme dostať metódu na riešenie (6.3) štvrtého rádu presnosti. Uvažujme ekvidištantnú sieť $(\Delta x \Delta t)$ s bodmi interpolácie t_i uprostred $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n$ tj. $t_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Použijeme niektoré vzťahy pre lokálne parametre na tejto sieti. Na danej sieti má sústava (2.24) vyjadrujúca podmienky spojitosti nasledujúci tvar

$$S''_{21}(t_{i-1}) + 6S''_{21}(t_i) + S''_{21}(t_{i+1}) = 8\frac{1}{h^2}(S_{21}(t_{i-1}) - 2S_{21}(t_i) + S_{21}(t_{i+1})). \quad (6.11)$$

Vyjadrením hodnoty $S_{21}(x_{i+1})$ pomocou Taylorovej reprezentácie (2.23) pre intervaly $[x_i, x_{i+1}]$ a $[x_{i+1}, x_{i+2}]$, sčítaním a úpravou dostaneme

$$S_{21}(x_{i+1}) = \frac{1}{2} [S_{21}(t_i) + S_{21}(t_{i+1})] - \frac{1}{16} h^2 [S_{21}''(t_i) - S_{21}''(t_{i+1})]. \quad (6.12)$$

Využitím týchto vzťahov dostaneme algoritmus na riešenie (6.3). Pre $t_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ a známe hodnoty $y(\mathbf{t}_i)$, $y(\mathbf{t}_i)$, $y''(\mathbf{t}_{i-1})$, $y''(\mathbf{t}_i)$ môžeme algoritmus zapísať v tvare s iteráciami v [1]–[3]:

$$\begin{aligned} y(\mathbf{t}_{i+1}) &\leftarrow y(\mathbf{t}_i) + hf(\mathbf{t}_i, y(\mathbf{t}_i)) \\ [1] y''(\mathbf{t}_{i+1}) &\leftarrow -6y''(\mathbf{t}_i) - y''(\mathbf{t}_{i-1}) + 8[y(\mathbf{t}_{i-1}) + 2y(\mathbf{t}_i) + y(\mathbf{t}_{i+1})]/h^2 \\ [2] y(\mathbf{x}_{i+1}) &\leftarrow \frac{1}{2} [y(\mathbf{t}_i) + y(\mathbf{t}_{i+1})] - \frac{1}{16} h^2 (2y''(\mathbf{t}_{i+1}) - y''(\mathbf{t}_i)) \\ [3] y(\mathbf{t}_{i+1}) &\leftarrow y(\mathbf{t}_i) + \frac{1}{24} h^2 (y''(\mathbf{t}_{i+1}) - y''(\mathbf{t}_i)) + hf(\mathbf{x}_{i+1}, y(\mathbf{x}_{i+1})) \end{aligned}$$

Kapitola 7

Dodatok

Táto kapitola je dodatkom k predošlému celku. Obsahuje niektoré vety a definície, ktoré boli v predošlom texte v istých okamihoch dosť podstatné a pre poriadok sú tu uvedené.

Definícia 7.0.1. Povieme, že štvorcová matica \mathbf{A} (reálna či komplexná) rádu n má prevládajúcu diagonálu alebo že matica \mathbf{A} je s prevládajúcou diagonálou práve vtedy, keď existujú kladné celé čísla d_1, d_2, \dots, d_n tak, že

$$|a_{ii}| d_i > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| d_k \quad \text{pre } i = 1(1)n. \quad (7.1)$$

V špeciálnom prípade $d_i = 1, i = 1(1)n$ hovoríme, že matica je ostre diagonálne dominantná.

Poznámka 3. V [2] sa matica \mathbf{A} pre prípad $d_i = 1, i = 1(1)n$, nazýva matica s rovnomerne prevládajúcou diagonálou.

Veta 7.0.2. Štvorcová matica s prevládajúcou diagonálou je regulárna.

Dôkaz. viď [2], strana 117. □

Veta 7.0.3. Pre $(2p+1)$ -pásovú maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ($a_{ij} = 0$ pre $|i - j| > p > 0$) tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$, kde $\|\mathbf{B}\| = q < 1$, prvky inverznej matice $\mathbf{A}^{-1} = (\tilde{a}_{ij})$ splňajú nerovnosť

$$|\tilde{a}_{ij}| < q^{\frac{|i-j|}{p}} / (1 - q). \quad (7.2)$$

Ak je matica \mathbf{A} ostre diagonálne dominantná, potom

$$|\tilde{a}_{ij}| \leq \frac{1}{|a_{jj}|} \max_k \left\{ \frac{|a_{kk}|}{r_k} \right\} \left[1 - \min_k \left\{ \frac{r_k}{|a_{kk}|} \right\} \right]^{\frac{|i-j|}{p}}, \quad \text{kde } r_k = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (7.3)$$

Veta 7.0.4 (1. veta o strednej hodnote). Nech je funkcia f spojitá v $[a, b]$ a nech v každom $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veta 7.0.5 (Cramerovo pravidlo). Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ regulárna štvorcová matica stupňa n a buď $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ľubovoľný vektor. Označme \mathbf{A}_j maticu, ktorá vznikne z matice \mathbf{A} nahradením j -tého stĺpca vektorom \mathbf{b} , položíme $x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}$, $j = 1(1)n$. Potom vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jediným riešením sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Dôkaz. viď [1], strana 60. □

Veta 7.0.6 (o rozvoji determinantu). Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ štvorcová matica rádu n . Označme \mathbf{M}_{ij} štvorcovú maticu rádu $n-1$, ktorá vznikne z matice \mathbf{A} vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca. Potom platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det(\mathbf{M}_{ik}) &= \det(\mathbf{A}) \quad [\text{rozvoj podľa riadku}], \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{M}_{kj}) &= \det(\mathbf{A}) \quad [\text{rozvoj podľa stĺpca}]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dôkaz. viď [1], strana 49. □

Veľmi často sme sa stretávali so slovným spojením „matica sústavy je triadiagonálna“. Tridiagonálne matice sú výhodne, pretože manipulácia s nimi nie je príliš „drahá“. Sústavy s tridiagonálnou maticou môžeme riešiť LU rozkladom. LU rozklad spočíva v tom, že štvorcová matica \mathbf{A} sa rozloží na hornú trojuholníkovú \mathbf{U} a dolnú trojuholníkovú maticu \mathbf{L} . Poznamenajme, že pre silne regulárne matice existuje práve jeden LU rozklad (dôkaz viď napr. [11]). Problém riešiť sústavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

sa redukuje na riešenie dvoch sústav $\mathbf{Ly} = \mathbf{d}$ a $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ (v tomto poradí), ktorých riešenie vieme veľmi ľahko vyčítať, pretože matice sú trojuholníkové. Z LU rozkladu dostaneme, že platí $y_1 = d_1/l_1$, $y_j = (d_j - a_j y_{j-1})/l_j$ pre $j = 2(1)n$ a $x_n = y_n$, $x_i = y_i - u_i x_{i+1}$, pre $i = n-1(-1)1$, kde $l_1 = b_1$, $l_k = b_k - a_k u_{k-1}$ pre $k = 2(1)n$ a $u_k = c_k/l_k$ pre $k = 1(1)n$. Sústavy s cyklickou tridiagonálnou maticou je tiež vhodné riešiť pomocou LU rozkladu. Podrobnejšie o LU rozklade je pojednané napr. v [10] alebo [11].

Literatúra

- [1] Bican L.: *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.
- [2] Fiedler M.: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha, 1981.
- [3] Kobza J., Zápalka D.: *Natural and smoothing quadratic spline*, Applications of Mathematics 36, 3 (1991), 187–204.
- [4] Kobza J.: *On algorithms for parabolic splines* AUPO, FRN, V.88 (1987), 169-185.
- [5] Kobza J.: *Some properties of interpolating quadratic spline* AUPO, FRN, V.97 (1990), 45-64.
- [6] Kobza J.: *Splajny*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1993.
- [7] Kobza J.: *Splines in solving Initial Value Problems*, Proc. Conf. SANM, Cheb 1993, 43-52.
- [8] Micula G. and Micula S.: *Handbook of Splines*, Kluwer academic publishers, 1999.
- [9] Najzar K.: *Základy teorie splinů*, Karolinum, Praha, 2006.
- [10] Segethová J.: *Základy numerické matematiky*, Karolinum, Praha, 2002.
- [11] Watkins D. S.: *Fundamentals of matrix computation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.