Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jak žáci řeší úlohy na zobecňování

How pupils solve generalising tasks

Bc. Aneta Nováková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program: Učitelství pro střední školy
Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Praha 2021

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Jak žáci řeší úlohy na zobecňování* vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 5.7. 2021

Poděkování:

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za odborné vedení při zpracování mé diplomové práce, za cenné rady, připomínky, velkou trpělivost, pečlivost a čas, který mé práci věnovala. Dále bych touto cestou ráda poděkovala všem vyučujícím, kteří mě provedli mým studiem na Pedagogické fakultě UK. V neposlední řadě patří mé poděkování rodině a blízkým přátelům za podporu, které se mi v průběhu mého studia dostávalo.

ABSTRAKT

Diplomová práce je zaměřena na úlohy na zobecňování, přičemž jejím cílem je získat vhled do řešitelských strategií, které žáci používají a zjistit, zda je zvolený přístup závislý na získaných vědomostech týkajících se proměnné.

Práce je rozdělena na část teoretickou a výzkumnou. Teoretická kapitola obsahuje tři části. První je věnována písmenům v matematice a úlohám na zobecňování jako jednomu ze způsobů, jak zavést proměnnou. Další část uvádí výsledky českých žáků v mezinárodním srovnávacím výzkumu TIMSS v oblasti Řady a posloupnosti. Poslední část je věnována kurikulárním dokumentům a analýze vybraných učebnic z pohledu výskytu úloh na zobecňování. Blíže jsou popsány učebnice, ve kterých se úlohy na zobecňování nacházejí, i s názornými ukázkami.

Jádrem práce je výzkumná část, jejímž cílem bylo popsat řešitelské strategie, které vybraní žáci zvolili. Podkladem pro vlastní výzkum byly čtyři úlohy, které byly vybrány autorkou z různých výzkumných pramenů a gradovány podle obtížnosti. Cílovou skupinou byli jak žáci, kteří se již s pojmem proměnná setkali, tak i žáci, pro které se jednalo o nový pojem. Celkem se výzkumu zúčastnilo 8 žáků, s nimiž byly provedeny rozhovory nad řešeními zadaných úloh. Protokoly rozhovorů byly analyzovány kvalitativně. Výzkum odhalil různé žákovské řešitelské strategie, které jsou v práci popsány a doplněny o názorné ukázky. Výzkumem nebyly zjištěny velké rozdíly ve způsobu ani rychlosti řešení z pohledu znalosti proměnné ze školního vyučování. V závěru práce je popsán rozpor mezi výsledky výzkumu této práce a testování TIMSS. Na základě práce je doporučeno zařadit úlohy na zobecňování do výuky či jako diagnostický nástroj pro porozumění proměnné.

KLÍČOVÁ SLOVA

Algebra, proměnná, úlohy na zobecňování, TIMSS, analýza učebnic

ABSTRACT

The diploma thesis focuses on generalization tasks. Its aim is to gain insight into the solving strategies that pupils use and to determine whether the chosen approach depends on the acquired knowledge about the variable.

The work is divided into theoretical and research part. The theoretical chapter contains three parts. The first is devoted to letters in mathematics and generalization problems as one of the ways of introducing a variable. The next part presents the results of Czech pupils in the international comparative research TIMSS in the problems on generalisation. The last part is devoted to curricular documents and the analysis of selected textbooks in terms of the occurrence of generalization problems. More attention was devoted to the only textbook series which includes generalization tasks.

The research part is the core of the work. Its aim is to describe the solution strategies of selected pupils. Four tasks were the basis of the research. They were selected by the author from various research sources and graded according to their difficulty. Pupils who had already encountered the term variable were the target group as well as pupils for whom it was a new term. Eight pupils participated in the research. They were interviewed about their solutions of the assigned tasks. Next, the protocols of the interviews were analyzed qualitatively. The research revealed various solving strategies. They are described in the work and supplemented by illustrative examples. Nevertheless, the research did not reveal large differences in the method or speed of solution in terms of knowledge about the variable from school teaching. At the end of the thesis, the discrepancy between the research results of this work and TIMSS testing is scrutinized. Based on the whole work, it is recommended to include generalization tasks in teaching or as a diagnostic tool for understanding the variable.

KEYWORDS

Algebra, variable, generalising tasks, TIMSS, textbook analysis

Obsah

Úvod

Téma své diplomové práce jsem si vybrala na základě přednášky Didaktiky matematiky, kde jsme téma úloh na zobecňování probírali v rámci typů úloh, kterými můžeme žáky „nasměrovat“ na intuitivní pochopení proměnné. Jedná se o typ úloh, který není v českém školství podpořen ani ve vzdělávacích programech ani v klasických učebnicích, zatímco např. v anglosaských zemích je tomu naopak. Sama jsem se s podobným typem úloh během své školní docházky nesetkala, a proto mým cílem bylo rozšířit své znalosti a zkušenosti s novým pojetím úloh na zobecňování v praxi.

Cílem práce je získat vhled do řešitelských strategií, která žáci používají při řešení úloh na zobecňování. Konkrétně jsem si položila tyto otázky: Jaké řešitelské strategie žáci použijí? Je zvolený přístup závislý na získaných vědomostech týkajících se proměnné? Struktura práce je v souladu s tímto cílem. Teoretická kapitola slouží jako východisko pro praktickou část, kde je popsán výzkum, jehož cílem bylo zodpovědět výzkumné otázky.

Teoretická kapitola je rozdělena na šest částí. První část je věnována problematice písmen v matematice, modelování a porozumění proměnné. Dále se soustředí na pojetí úloh na zobecňování jako jeden ze tří pilířů algebraických poznatků shrnutých dle Novákové a Vondrové (2015). Nejprve jsou vymezeny úlohy na zobecňování a ve druhé části následuje popis teorie generického modelu M. Hejného ilustrovaný na jedné konkrétní úloze. Třetí část zmiňuje mezinárodní výzkum TIMSS a výsledky českých žáků 8. ročníků v oblasti Řady a posloupnosti z TIMSS 2007. Ve čtvrté části jsou úlohy na zobecňování zařazeny do rámcového vzdělávacího programu, do školních vzdělávacích programů vybraných škol a učebnic. Pátá část obsahuje výsledky analýzy učebnic, a to z hlediska výskytu úloh na zobecňování. Ukázalo se, že tyto úlohy se vyskytují jen ve dvou řadách analyzovaných učebnic. Šestá a zároveň poslední část poskytuje shrnutí celé teoretické části.

Výzkumná část je rozdělena na pět částí. V první části je popsán výběr úloh a jejich didaktická analýza. Podkladem pro vlastní výzkum byla sada čtyř úloh vycházejících z různých zdrojů. Úlohy jsou shrnuty z pohledu možných řešitelských strategií a obtíží. Další část se věnuje výběru žáků a zahrnuje podmínky výběru a základní charakteristiku vybraných žáků. Výzkum měl kvalitativní design a byl uskutečněn ve dvou fázích – pilotní a hlavní studii. Data byla získána polostrukturovanými rozhovory s vybranými žáky. Ve třetí a čtvrté části, věnovaných pilotní a hlavní studii, jsou popsány žákovské řešitelské strategie podle jednotlivých úloh doplněné o ukázky žákovských řešení. Poslední část obsahuje shrnutí obou výzkumů.

Práce je ukončena závěrečným shrnutím, ve kterém jsou zodpovězeny mé výzkumné otázky a jsou nastíněny některé praktické důsledky.

1 Teoretická kapitola

1.1 Písmena v matematice

Podle Novákové a Vondrové se písmeno v roli neznámé „do hry dostává v izolovaných případech už na 1. stupni základní školy, těžiště výuky proměnné je však na 2. stupni“ (2015, str. 26). V následujícím textu jsou využity poznatky z publikace (Vondrová, 2019, str. 117–118).

O samotném písmenu lze v matematickém zápise uvažovat přinejmenším ze tří hledisek. Pro žáky je velmi důležité rozeznávat první dva způsoby chápání písmen, těmi jsou *určitá neznámá* a *zobecněné číslo*. Písmeno jako určitá neznámá, zkráceně jen neznámá, zastupuje konkrétní hodnotu, případně hodnoty. „Příkladem jsou rovnice o jedné neznámé“ (ibid., str. 117). Písmeno jako zobecněné číslo, tedy proměnná, je písmeno o hodnotě, která se mění. „Např. v rovnici $y = x - 5$ jsou x a y proměnné, přičemž hodnota y se mění v závislosti na hodnotě x. A pokud jedno z nich určíme, z druhého se stává neznámá. […] Z toho vyplývá, že pokud za písmeno můžeme dosadit jakékoli číslo (případně s omezením na číselný obor) a výrok zůstane pravdivý, pak je písmeno v roli zobecněného čísla“ (ibid., str. 117). Často se stává, že tyto dva pojmy žáci považují za synonyma, což může způsobit nepochopení zadání úlohy.

Jak dále shrnuje Vondrová, písmeno může mít také roli *konstanty, parametru* či *koeficientu*.

> Parametry apod. odkazují na celý soubor rovnic či výrazů, zatímco proměnná zastupuje množinu hodnot (např. $ax^2 + bx + c = 0$ pro a nenulové zastupuje všechny kvadratické rovnice, v níž mohou být koeficienty a, b, c podle potřeby nahrazeny konkrétními čísly). (ibid., str. 117)

To nejsou ale jediné způsoby, jakým lze písmena v matematickém zápise chápat. Dalším je „ztotožnění písmene se samotným *předmětem*“ (ibid., str. 117), např. b jako banán. Tento způsob chápání je využitelný např. při vysvětlování sčítání výrazů, kdy písmena nahrazují určité předměty (v zápise $5j + 6h$, kde j jsou jablka a h jsou hrušky, je vidno, že tyto dvě suroviny nelze sečíst, tudíž zápis je ve tvaru $5j + 6h$ konečný a nelze ho nijak zkrátit). Písmeno může navíc reprezentovat v geometrii *jednotku*. „Pak výraz „2m“ může být chápán jako 2 metry, nebo jako dvakrát proměnná m[1]“ (ibid., str. 117).

V úloze může písmeno zastávat více rolí, přičemž záleží na kontextu. Následující úloha ukazuje, jak složitá problematika písmen je:

> „Najděte rovnici přímky, která prochází bodem o souřadnicích [2;5] a má směrnici 3.“ Začneme rovnicí $y = ax + b$. Z kontextu úlohy plyne, že v ní jsou y a x proměnné a a a b parametry. Pak dosadíme hodnotu směrnice a dostaneme $y = 3x + b$. Nyní hledáme konkrétní hodnotu b. Tím se z b stává neznámá, jejíž hodnota záleží na parametrech x a y. Za x a y dosadíme souřadnice daného bodu a dostaneme rovnici $5 = 3 \cdot 2 + b$ s neznámou b. V získané rovnici $y = 3x - 1$ jsou x a y opět proměnné. (ibid., str. 118)

S odkazem na výše zmíněná pojetí písmen v matematice je nutné zmínit obtíže žáků s jejich chápáním. Častá žákova představa je, že za písmenem se skrývá pouze samotný předmět, nikoliv neznámý počet předmětů (např. b jako banán, nikoliv počet banánů).

> Tento způsob může být výhodný pro počáteční představu (např. při zápisu slovních úloh), ale může působit problémy později. Proto je nutné při použití této metafory zdůrazňovat i slovně, že se jedná o neznámý počet objektů, ne o objekt sám. (Nováková a Vondrová, 2015, str. 26)

Problém také může nastat v situaci při sčítání výrazů, kdy žáci mají na základě zkušeností s operacemi s přirozenými čísly tendenci sčítat vše dohromady, jako tomu bylo u sčítání číselných výrazů (např. $5j + 6h$ zapsat pouze jako $11jh$).

Výše řečené naznačuje komplexnost problematiky algebraické symboliky a jejího chápání. Historický vývoj proměnné a poukázání na souvislost s obtížemi žáků s jejím pochopením tuto tezi podporuje (Ely a Adams, 2012; Kvasz, 2013).

Vzhledem k povaze této práce je pozornost směřována pouze k písmenu jako zobecněnému číslu, tedy proměnné.

[1] „To platí zejména v ručně psaném textu. V tištěném textu platí pevně stanovená typografická pravidla pro jejich odlišení, proměnnou *m* (kurzívou) a zkratku pro metr (m). Mezi číslem a zkratkou pro metr se navíc vynechává mezera.“ (ibid., str. 117)

1.1.1 Modelování situací pomocí písmen

Modelování je dle Hejného (1989, str. 144) „nejnižší, ale metodicky nejdůležitější hladina jazyka algebry“. Dalšími dvěma je standardní manipulace a strategická manipulace se symboly. V následujícím textu jsou využity poznatky z publikace (Hejný, 1989, str. 143–146).

Modelováním rozumíme „vyjádření slovního textu symboly (např. sudé číslo zapíšeme jako $2k, k \in \mathbb{Z}$). Umět modelovat znamená chápat smysl a význam písmen v matematice“ (ibid., str. 144).

Příprava na modelování situací pomocí písmen v matematice by měla probíhat již od prvního stupně základní školy. Vhodnou úlohou je např. úkol „mysli si číslo“, při kterém učitel dává prostor žákům nalézt „kouzlo“, kterým na jejich myšlené číslo přijde. Hejný např. uvádí příklad, kdy učitel zadá: „Každý z vás si pomyslí číslo, připočítá k němu dvě, výsledek vynásobí třemi, odečte sedm a odečte původní číslo. Povězte mi, co vám vyšlo a já vám řeknu, jaké bylo původní číslo“ (ibid., str. 145). Cílem učitele je ukázat větší počet konkrétních příkladů, z nichž žáci dojdou k poznání, že původní číslo je výsledek plus jedna a vydělené dvěma. Učitel ukáže několik dalších příkladů. Řešení žáci nalézají stále lehčeji. Dalším krokem je vymýšlení pravidel samotnými žáky („Napište číslo, přidejte šest, vynásobte třemi, odeberte původní číslo, odeberte deset, dělte dvěma“ [ibid., str. 145].). Písmeno označující původní číslo se dostává do výuky automaticky při strukturovaném zápisu jednotlivých kroků (viz obrázek 1). V dalším kroku napíše učitel místo čísla osm písmeno.

$$8 \mapsto 8+6 \mapsto 3.8+3.6=3.8+18 \mapsto 3.8+18-8=2.8+18 \rightarrow 2.8+ \\ +18-10=2.8+8 \rightarrow (2.8+8):2=1.8+4.$$

Obrázek 1: „Mysli si číslo“, zdroj: Hejný, 1989, str. 145

Výše zmíněná úloha tvoří vhodnou propedeutiku pro úlohy na zobecňování. Učitel nemusí přímo vyžadovat zobecnění dané situace, stačí slovní popis pravidla. Důležité je uvědomění si podstaty takto zadaných úloh.

Další propedeutickou úlohou je například: $2 + \square = 5$, kde mají žáci písmeno (neznámou) nahrazenou prázdným čtverečkem. Dalším stupněm náročnosti mohou být tzv. algebrogramy,[2] kde jednotlivá písmena figurují taktéž jako neznámé, např. $\mathrm{AA} + 5 = \mathrm{A7}$ (algebrogramy lze

[2] http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/algebrogramy-hvezdickogramy

vytvářet gradovaným způsobem, a tím dělat úlohy složitější a připravovat žáky na práci s více písmeny).

Modelovat mohou žáci na druhém stupni základních škol mnohé pojmy a výroky, např. liché číslo; přirozené číslo, jehož poslední cifra je 5; x je celé atd. Hlubší pohled na modelování algebraických výrazů získá žák např. při řešení úloh, kdy má algebraický výraz či identitu modelovat geometricky (např. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$).

1.1.2 Porozumění proměnné

Důležitou součástí výuky proměnné je ověření porozumění proměnné. V rámci studie (Knuth et al., 2005) byly žákům 2. stupně položeny dvě otázky, které se týkaly porozumění proměnné. První úloha se týkala výrazu $2n + 3$ (na symbol n ukazovala šipka) a byla položena otázka: *Co znamená symbol?* Odpovědi žáků byly různé. Někteří uváděli, že symbol může představovat jakékoliv číslo, jiní dosazovali konkrétní hodnoty. Jako zajímavá je shledávána odpověď, kdy žák říká, že „symbol znamená x jako číslo, které tam platí“ (ibid., str. 73). Dle autorů se jedná o prototypickou představu získanou ve škole. Ze studie vyplývá, že správná interpretace (za n mohu dosadit libovolné hodnoty) měla mezi žáky zvyšující se úspěšnost (od necelých 50 % žáků v 6. ročníku, přes více než 60 % žáků v 7. ročníku až k více než 75 % v 8. ročníku). Dle Knuth et al. mají „velký podíl žádných či jiných odpovědí v 6. ročníku za příčinu učební osnovy, jelikož k prvnímu formálnímu zavedení pojmu dochází až v 7. ročníku“ (ibid., str. 73). Konkrétní hodnotu dosazovalo velmi malé procento žáků ve všech testovaných ročnících. Ve větší míře se objevovalo ztotožnění se s n jako s objektem samým.

Druhá úloha ze studie Knuth et al. byla zaměřena na porovnávání dvou výrazů: *Poznáte, co je větší,* $3n$ *nebo* $n + 6$*? Vysvětli svou odpověď.* Odpovědi byly autory rozdělené do kategorií ‚nemohu říct‘, ‚jedna hodnota‘, ‚operace‘, ‚jiné‘ či ‚nevím/žádná odpověď‘. V této úloze bylo zaznamenáno zvyšující se procentuální zastoupení žáků, kteří nemohli rozhodnout, co je větší, protože není určeno, co je n (11 % žáků v 6. ročníku, 51 % žáků v 7. ročníku, 60 % žáků v 8. ročníku). Necelá desetina žáků v 8. ročníku argumentovala s odkazem na operaci („$n + 6$ je větší protože $+$“ [ibid., str. 73]). Kromě velmi malého procentuálního zastoupení odpovědí jedné hodnoty či operace většina ostatních žáků ve všech ročnících uvedla nesprávné či žádné odpovědi.

Ověření porozumění proměnné je potřebné, neboť nepochopení významu proměnné v matematice vede k pozdějším problémům.

1.1.3 Úlohy na zobecňování

Úlohy na zobecňování patří dle Novákové a Vondrové (2015, str. 26) mezi tři hlavní pilíře algebraických poznatků. Dalšími dvěma pilíři jsou číselné výrazy a jejich aritmetika a geometrie.

Jako první zmíním číselné výrazy a jejich aritmetiku. „O algebře se někdy říká, že je to zobecněná aritmetika“ (ibid., str. 26). Nejedná se o zcela korektní vyjádření, protože „algebraické postupy se mnohdy od těch aritmetických liší“ (ibid., str. 26). Např. při úpravě číselných výrazů lze využít pouze znalosti přednosti početních operací, zatímco u algebraických výrazů nikoliv a při práci s nimi je nutné dodržovat další pravidla. I proto patří „úprava algebraických výrazů mezi nejobtížnější a pro žáky nejabstraktnější oblast matematiky“ (ibid., str. 26). Právě odkazy na úpravu číselných výrazů mohou žákům pomoci a oblast algebry více ozřejmit.

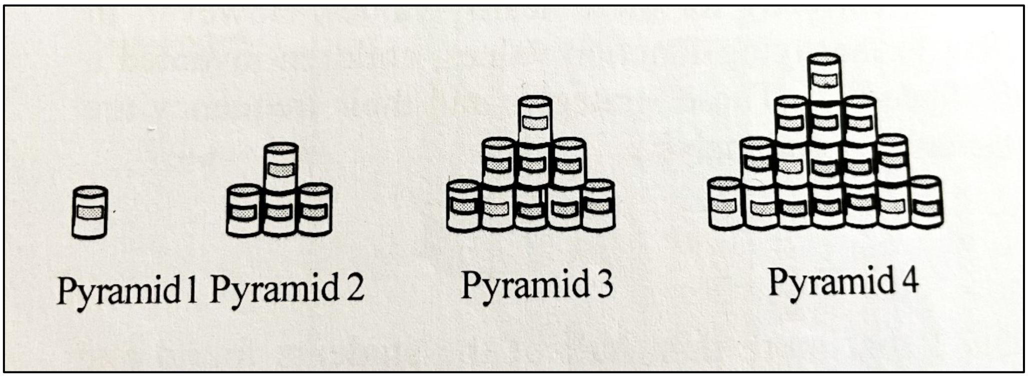
Dalším pilířem algebry je geometrie, což ve spojitosti s algebraickými výrazy znamená, že žáci mají získat vhled do algebraických výrazů pomocí geometrických útvarů. Spojením těchto dvou oblastí má dojít ke „korespondenci mezi obrazci a vzorci pro obsah, obvod apod.“ (ibid., str. 26). Geometrie umí také efektivně znázorňovat některé algebraické výrazy, vzorce či operace (např. distributivní zákon), což podporuje lepší porozumění algebraických postupů.

Třetí a pro tuto práci stěžejní pilíř algebraických poznatků tvoří úlohy na zobecňování.

> Jedná se o úlohy využívající k vytvoření posloupnosti skládání grafických (geometrických) prvků do stále složitějších (nebo přinejmenším větších) útvarů, u kterých jsou kladeny otázky na třech úrovních: většinou první otázka je zaměřena na doplnění počtu prvků, které vzniknou v nejbližších dalších členech posloupnosti; druhá otázka vyžaduje vyjádření (vypočítání) počtu prvků v konkrétních vzdálených členech posloupnosti; poslední krok vyžaduje obecné vyjádření (zobecnění) počtu prvků pro $n$tý člen posloupnosti. (Rendl a Vondrová, 2014, str. 41)

Příklad takové úlohy znázorňuje obrázek 2. Úloha byla zadána pouze obrázkovými reprezentacemi bez slovního zadání v rámci výzkumu autorů Sasman, Linchevski a Olivier (1999). Úkolem žáků bylo nalézt funkční pravidlo. Výzkumníci postupně kladli otázky na hodnoty f(1)[3], f(2), f(3), f(4), f(5) a f(6). Poté se ptali na funkční hodnoty vzdálených vstupních hodnot, přičemž chtěli vysvětlit a zdůvodnit žákovské odpovědi a strategie.

[3] f(x) znamená funkční hodnota pro číslo x, např. f(1) = 1, f(2) = 4 atd.



Obrázek 2: Pyramidy, zdroj: Sasman, Linchevski a Olivier, 1999, str. 408

Dle Vondrové (2019, str. 134) mají úlohy na zobecňování důležitou roli ve fázi, kdy se žáci s proměnnou teprve seznamují. Hlavním důvodem je fakt, že se do výuky dostává zcela přirozeně právě při řešení těchto úloh.

> Žák si přitom uvědomuje nutnost symbolického zápisu, jelikož si tím ušetří čas, aby nemusel vypisovat všechny možné případy, i jeho podstatu, jelikož výraz zastupuje různé případy, třeba i nekonečně mnoho různých případů. (Vondrová, 2019, str. 134)

K zápisu pomocí symbolů žáci dospějí po zkušenostech s dostatečným počtem konkrétních případů (izolovaných modelů[4]), přičemž mezistupněm „od konkrétních případů k symbolickému zápisu může být slovní popis pravidla, případně popis rekurentního pravidla“ (Vondrová, 2019, str. 134). U úloh na zobecňování žáci zpravidla najdou různé způsoby vyjádření obecného vztahu, a mohou tak být motivováni ke zjištění, zda mají všichni správné řešení. Tyto situace se dají při hodině vhodně využít jako motivace k úpravám výrazů.

Úlohy na zobecňování jsou vhodným nástrojem, jak žákům připravit adekvátní prostředí pro pochopení zákonitostí algebry. „Základem algebraického uvažování je právě pochopení korespondence mezi určitou slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen“ (Nováková a Vondrová, 2015, str. 26). Žákům by měl být poskytnut dostatečný počet úloh, v nichž zapisují slovní výroky určitými symboly či naopak z matematických symbolů vytvářejí různé reálné situace. Vždy je nutné, aby žáci získali co největší vhled do dané problematiky. Teprve poté lze přistoupit ke složitějším poznatkům.

[4] Pojem je vysvětlen v oddíle 1.2.

Úlohy na zobecňování lze zadat slovním popisem bez grafického znázornění či s obrázkovými reprezentacemi. Pro potřeby této práce bylo zvoleno zadání úloh obrázkovými reprezentacemi.

1.2 Mechanismus poznávacího procesu proměnné

Existuje více teorií poznávacího procesu. V této práci pracujeme s teorií generického modelu vypracovanou Milanem Hejným (Hejný, 2004, str. 27–29). Podle této teorie má poznávací proces 4 hladiny, které jsou jádrem poznávacího procesu: (1) hladina motivace, (2) hladina izolovaných (separovaných) modelů, (3) hladina generických (univerzálních) modelů, (4) hladina krystalizace a případně i automatizace[5] a dva hladinové přechody, zobecnění a abstrakční zdvih.

„Kostru mechanismu tvoří základní trojice: motivace → zkušenost → poznání“ (Hejný, 1989, str. 23). *Motivace* je nejdůležitějším hybným momentem v procesu poznávání, a to po celou dobu tohoto procesu, nikoliv jen na začátku. Hejný a Kuřina (2001, str. 105) chápou motivaci jako souhrn podnětů, důvodů k určitému jednání. „Kvalita motivace určuje, jakou intenzitou bude psychika žáka nabývat nových zkušeností“ (Hejný, 1989, str. 23).

Hladina izolovaných modelů zahrnuje postupné nabývání zkušeností (dlouhým opakovaným pozorováním, manipulací s předměty) s konkrétními případy budoucího poznání. Do hladiny izolovaných modelů patří i tzv. ne-model (jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu), zdánlivý model (jev, který modelem není, ale jeví se tak) a překvapivý model (jev, který se tváří, že modelem není). Různorodost a množství těchto modelů dle Hejného podporuje pevnější výsledné žákovo poznání. Izolované modely po jistém čase na sebe začnou vzájemně poukazovat, seskupovat se a organizovat, až dojde k jejich strukturaci, hlubšímu vhledu.

Zobecnění je podle Hejného samotný proces objevování a objevení generického modelu. V tomto stádiu se zkušenosti přeměňují na nový, abstraktně vyšší poznatek. *Hladina generických modelů* zahrnuje modely, které jsou „prototypem buď všech, nebo skupiny izolovaných modelů“ (Hejný, 2004, str. 28).

Následuje *abstrakční zdvih*, který podněcuje zrod abstraktního poznání. *Abstraktní znalost* není závislá na představě ve světě věcí, je často vyjádřena symbolickým zápisem, který novou strukturu reprezentuje – např. pomocí matematické symboliky.

---

[5] Hladina automatizace podle Hejného nenáleží do poznávacího procesu, protože nedochází k novému poznání, ale k nácviku poznaného.

Na *hladině krystalizace* dochází „k propojování nového poznání s předchozími vědomostmi, nejprve na úrovni izolovaných a generických modelů, potom na úrovni abstraktního poznání“ (Hejný, 2004, str. 29). Cílem je rozšíření získaných poznatků. Celý proces probíhá podle Hejného dlouhodobě, v průběhu celého poznávacího procesu.

Poznávací proces pojmu proměnná lze uchopit i prostřednictvím úloh na zobecňování. S odkazem na úlohu na obrázku 2 si ukážeme, jak teorii generického modelu aplikovat. V první fázi je vhodné žáky motivovat manipulací se samotnými plechovkami či jinými předměty, ze kterých budou stavět postupně větší pyramidy na základě dané posloupnosti. Manipulace mimo plochu papíru či grafické znázornění na papíře je nedílnou součástí poznávacího procesu. Hladinu izolovaných modelů představují konkrétní pyramidy. Důležité je zmínit i jiné typy modelů, zdánlivým modelem je např. pyramida složená ze tří plechovek, přičemž dvě z nich jsou na zemi. Překvapivým modelem je např. čtverec složený z plechovek (jedná se o velmi návodný model). Ne-model znázorňuje např. kruh složený z plechovek. Žáci mohou k zobecnění dojít přímo z dané situace nebo pomocí tabulky. Tabulku lze považovat za nejpřehlednější a nejstrukturovanější zápis konkrétních příkladů. Stádia generického modelu žák dosáhne, pokud je schopen vytvořit slovní popis vztahů a závislostí bez potřeby kreslit další izolované modely, např.: „Počet plechovek lze určit tak, že pyramidu přeskládáme do jiného obrazce (čtverce).“ Žák dosáhne abstraktní znalosti, pokud je schopen závislost vyjádřit matematickými symboly, tedy pomocí proměnné.

V rámci procesu poznávání je vhodné zařadit co nejvíce různých úloh (různé obrazce, označení proměnných, …). Předcházíme tím tzv. *formální znalosti*, tedy znalosti, která nemusí být dle Hejného opřena o žádný izolovaný model nebo se může jednat o paměťový údaj bez propojení na jiné poznatky a bez schopnosti použít ji v jiných standardních situacích.

1.3 Výsledky českých žáků u úloh na zobecňování v šetření TIMSS

V rámci mezinárodního šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) se zjišťuje úroveň znalostí a dovedností žáků 4. a 8. ročníků základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií v matematice a přírodovědných předmětech. Na mezinárodní úrovni je šetření koordinováno Mezinárodní asociací pro hodnocení výsledků vzdělávání (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA), v České republice je jeho realizátorem Česká školní inspekce (ČŠI). Šetření probíhá ve čtyřletých cyklech od roku 1995.[6]

Vzhledem k povaze této práce bylo zanalyzováno šetření TIMSS v roce 2007 pro 8. ročník. V tomto roce byly v okruhu matematiky zvoleny následující oblasti: *Čísla, algebra, geometrie a data a pravděpodobnost*. My se budeme věnovat jen části *Algebra*, přímo *Řadám a posloupnostem*.

Dle Tomáška (2009) jsou v oblasti algebry ověřovány následující znalosti a dovednosti:

> V rámci oblasti učiva algebra je prvořadý důraz kladen na funkční vztahy a jejich využívání k modelování a řešení úloh. Dále do ní patří rozvíjení číselných řad, užívání algebraických symbolů, ale i hodnocení výpočetní zběhlosti žáků. Žáci 8. ročníku by již měli dobře chápat lineární vztahy a pojem proměnné. Očekává se od nich používání a zjednodušování algebraických výrazů, řešení lineárních rovnic, nerovnic, soustav dvou rovnic o dvou neznámých a užívání funkcí. Součástí oblasti učiva algebra jsou tři tematické celky: řady a posloupnosti; algebraické výrazy; rovnice, vzorce a funkce. (str. 35)

V algebře, oproti minulým letům, došlo k největšímu zhoršení a výsledky českých žáků byly podprůměrné (Tomášek, 2008, str. 11). Pro tuto práci jsou analyzovány úlohy na zobecňování, které se v uvolněných úlohách z testování vyskytly. U každé úlohy je rozebráno, jak si čeští žáci při řešení úloh vedli.

V rámci šetření TIMSS byly matematické dovednosti rozděleny na tři oblasti, během kterých měli žáci prokázat své kognitivní dovednosti:

> Ke správnému zodpovězení testových otázek potřebují žáci nejen ovládat učivo, které je předmětem výzkumu, ale také uplatnit různé kognitivní dovednosti. Ve výzkumu TIMSS 2007 jsou dovednosti rozděleny do tří oblastí: prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování. První oblast matematických dovedností, prokazování znalostí, zahrnuje znalost důležitých faktů, postupů a pojmů. Druhá oblast, používání

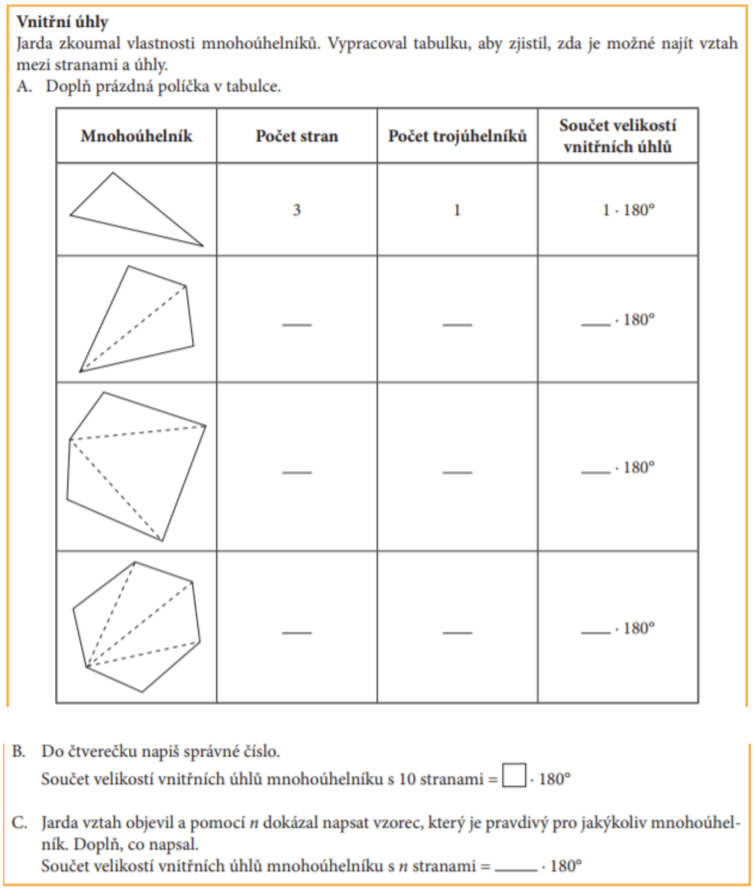
[6] Česká republika se zapojila v letech 1995, 1999, 2007, 2011, 2015 i v prozatím posledním cyklu roku 2019. V roce 1995 byly u nás testovány obě věkové kategorie, v roce 1999 jen žáci 8. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, poté opět v roce 2007 byly testovány obě věkové kategorie a od roku 2011 se do šetření zapojili pouze žáci 4. ročníků základních škol.

znalostí, se soustředí na schopnost žáků aplikovat příslušné znalosti a pojmy při řešení úloh a zodpovídání otázek. Třetí oblast, uvažování, přesahuje řešení rutinních úloh a týká se neznámých situací, složitých kontextů a úloh, jejichž řešení vyžaduje více kroků. (Tomášek, 2009, str. 105)

Šetření TIMSS nazývá úlohy, v nichž mají žáci hledat pravidlo na základě znalosti hodnoty několika prvních členů, *Řady a posloupnosti*.

V rámci uvolněných úloh byly k dispozici tři úlohy, z nichž dvě jsou přímo zaměřeny na zobecňování.

Úloha M28



Vnitřní úhly

Jarda zkoumal vlastnosti mnohoúhelníků. Vypracoval tabulku, aby zjistil, zda je možné najít vztah mezi stranami a úhly.

A. Doplň prázdná políčka v tabulce.

Mnohoúhelník	Počet stran	Počet trojúhelníků	Součet velikostí vnitřních úhlů
	3	1	$1 \cdot 180°$
	___	___	$\_\_\_ \cdot 180°$
	___	___	$\_\_\_ \cdot 180°$
	___	___	$\_\_\_ \cdot 180°$

B. Do čtverečku napiš správné číslo.

Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s 10 stranami = $\square \cdot 180°$

C. Jarda vztah objevil a pomocí *n* dokázal napsat vzorec, který je pravdivý pro jakýkoliv mnohoúhelník. Doplň, co napsal.

Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s *n* stranami = $\_\_\_\_ \cdot 180°$

Obrázek 3: Úloha M28, zdroj: Tomášek, 2009, str. 35-36

V úloze M28 části A bylo úkolem najít vztah mezi počtem stran mnohoúhelníku a součtem velikostí jeho vnitřních úhlů ve čtyřech konkrétních případech (viz obrázek 3). K nalezení vztahu je důležité rozdělit mnohoúhelníky na nepřekrývající se trojúhelníky. Ke správnému vyřešení úlohy tedy stačilo, když žáci z obrázku správně vyčetli počet stran mnohoúhelníků a počet nepřekrývajících se trojúhelníků vyjadřující činitel ve třetím sloupečku zadané tabulky. Pro vyplnění posledního sloupce si žáci museli uvědomit, že pro každý trojúhelník platí, že součet velikostí jeho vnitřních úhlů je 180°, a tuto tezi použít. V tomto případě byla za správně vyřešenou úlohu považována pouze plně a správně vyplněná celá tabulka, tedy všech devět čísel. V hodnocení nebylo sledováno částečné řešení úloh. Jak ukazuje tabulka 1, více jak polovina českých žáků tuto úlohu vyřešila správně.

Tabulka 1: Četnost odpovědí úlohy M28 A, zdroj: Tomášek, 2009, str. 37

Řešení	Správná odpověď	Nesprávná odpověď	Bez odpovědi
Četnost [%]	54,0	40,8	5,1

Čeští žáci dosáhli lepšího výsledku, než byl mezinárodní průměr, jak v celkovém hodnocení, tak i v hodnocení chlapců a dívek.

Tabulka 2: Úspěšnost řešení úlohy M28 A, zdroj: Tomášek, 2009, str. 36

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	54,0	54,5	53,6
Mezinárodní průměr	47,4	50,3	44,5

V úloze M28 části B měli žáci prokázat schopnost rozpoznat pravidlo pro výpočet součtu velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku z předchozí části a použít ho pro konkrétní případ mnohoúhelníku s deseti stranami (viz obrázek 3). Pro tuto část úlohy jsou v části A jednotlivé konkrétní případy, tzv. izolovanými modely dle Hejného. Tato úloha zkoumá matematickou dovednost nazvanou uvažování. „Žáci mají prokázat schopnost této úvahy: mnohoúhelník s deseti stranami lze rozdělit na osm nepřekrývajících se trojúhelníků (počet trojúhelníků je o dva menší, než počet stran mnohoúhelníku), součet velikostí jeho vnitřních úhlů je tedy 8 · 180°“ (Tomášek, 2009, str. 38). Žáci mohou úlohu řešit i pomocí obrázku, jako je tomu u části A. Mezi nejčastější odpovědi českých žáků patřily odpovědi nesprávné včetně přeškrtnutých, vygumovaných či nečitelných. Výsledky ukazují, že řešení této úlohy již dělalo českým žákům potíže (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Četnost odpovědí úlohy M28 B, zdroj: Tomášek, 2009, str. 37

Řešení	Správná odpověď	Nesprávná odpověď	Bez odpovědi
Četnost [%]	23,4	57,1	19,5

U části B se také zvýšil počet žáků, kteří řešení úlohy přeskočili. Čeští žáci se umístili pod mezinárodním průměrem (viz tabulka 4), což ukazuje, že jsou schopni použít své znalosti na konkrétní případy, ale v případě, že již dochází k abstrakci, stává se pro ně úloha daleko obtížnější.

Tabulka 4: Úspěšnost řešení úlohy M28 B, zdroj: Tomášek, 2009, str. 36

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	23,4	23,6	23,2
Mezinárodní průměr	27,6	28,1	26,9

V části C měli žáci zobecnit pravidlo pro výpočet součtu velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku z předchozích dvou částí úlohy A a B a pomocí proměnné vyjádřit hledaný vztah mezi počtem stran a součtem velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku (viz obrázek 3). Matematická dovednost, která touto úlohou byla zkoumána, bylo uvažování. Cílem této úlohy je zobecňování vztahů uvnitř posloupností pomocí čísel, slov nebo algebraických řešení. Mezi nejčastější patřily nesprávné odpovědi nebo žáci ani neodpověděli (viz tabulka 5).

Tabulka 5: Četnost odpovědí úlohy M28 C, zdroj: Tomášek, 2009, str. 38

Řešení	Správná odpověď	Nesprávná odpověď		Bez odpovědi
		„n“	ostatní	
Četnost [%]	6,4	20,3	37,8	35,5

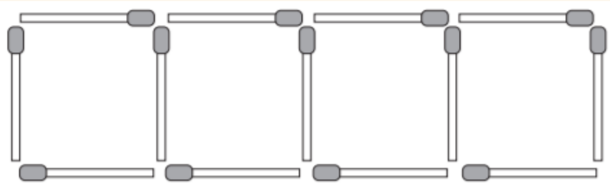
Část C měla velmi malé procento úspěšnosti řešení, jak je prezentováno v tabulce 5. Celková úspěšnost jak v České republice, tak na mezinárodní úrovni byla velmi nízká, přičemž úspěšnost českých žáků byla ještě výrazně nižší než mezinárodní průměr.

Tabulka 6: Úspěšnost řešení úlohy M28 C, zdroj: Tomášek, 2009, str. 36

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	6,4	7,0	5,8
Mezinárodní průměr	15,7	16,5	14,8

Z výsledků úlohy části B a C se dá usuzovat, že čeští žáci nedokáží provést zobecnění na základě několika známých příkladů, resp. nejsou schopni zapsat výsledek pomocí proměnné. Vzhledem ke klesající úspěšnosti úloh A, B, C lze vyvodit, že žáci v České republice jsou obecně schopni použít své znalosti na konkrétní případ, ale již nejsou na takové úrovni, aby daný jev dokázali zkonstruovat. Důvod je zřejmě ten, že na takové postupy nejsou ze škol zvyklí, jelikož se s podobnými úlohami nesetkávají. Možnou cestou, která by žákům mohla při řešení úloh pracujících s proměnnou pomáhat a vedla by ke zlepšení úspěšnosti, je zařazení úloh na zobecňování do běžné výuky.

Úloha M29



Ze 13 zápalek byly složeny 4 čtverce v řadě, které jsou na obrázku. Kolik čtverců v řadě můžeme složit stejným způsobem ze 73 zápalek? Napiš výpočet, jak jsi dospěl ke své odpovědi.

Obrázek 4: Úloha M29, zdroj: Tomášek, 2009, str. 38

V úloze se očekává, že žáci objeví pravidlo, které popisuje závislost mezi dvěma veličinami – mezi počtem čtverců a počtem zápalek. K určení počtu čtverců mohli žáci využít např. tabulku, která je přehledným způsobem řešení, jelikož z ní lze vyčíst, že počet zápalek se vždy zvětšuje o tři. Žáci si mohou první případy také nakreslit. Na základě této úvahy lze sestavit hledané pravidlo vyjádřené pomocí proměnné: $4 + 3 \cdot (n - 1)$, kde n vyjadřuje počet čtverců. Počet čtverců vytvořených pomocí sedmdesáti tří zápalek je kořenem rovnice $4 + 3 \cdot (n - 1) = 73$. K nalezení počtu čtverců bylo možné využít samozřejmě i grafické zobrazení, ale toto řešení bylo hodnoceno jako částečné, protože v zadání byl vyžadován výpočet, kterým žáci výsledného řešení dosáhli.

Úspěšnost řešení úlohy byla velmi nízká jak v České republice, tak i v jiných zemích (viz tabulka 8). Nejčastější odpověď u českých žáků byla nesprávná, dokonce více jak 50 %, a více jak 20 % žáků neodpovědělo (viz tabulka 7).

Tabulka 7: Četnost odpovědí úlohy M29, zdroj: Tomášek, 2009, str. 39

Řešení	Správná odpověď	Částečně správná odpověď[7]	Nesprávná odpověď	Bez odpovědi
Četnost [%]	8,8	11,7	57,9	21,5

Tabulka 8: Úspěšnost řešení úlohy M29, zdroj: Tomášek, 2009, str. 39

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	8,8	8,6	9,1
Mezinárodní průměr	8,7	8,5	8,9

Tato úloha je zřejmě pro žáky obtížná proto, že si konkrétní mezikroky musí sami navrhnout a pracovat s nimi, oproti úloze M28, ve které mají izolované modely v rámci první části předpřipravené.

Úloha M30

2, 5, 11, 23, ...
Řada začíná číslem 2. Které z následujících pravidel použiješ při výpočtu dalších členů číselné řady nahoře?
A) K předchozímu členu přičti 1 a potom vynásob číslem 2.
B) Předchozí člen vynásob číslem 2 a potom přičti 1.
C) Předchozí člen vynásob číslem 3 a potom odečti 1.
D) Od předchozího členu odečti 1 a potom vynásob číslem 3.

Obrázek 5: Úloha M30, zdroj: Tomášek, 2009, str. 40

Podstatou této úlohy je identifikovat pravidlo, podle kterého je vytvořena číselná řada. Žáci nemusí pravidlo vymyslet, ale ověřit, které ze čtyř možností je správné (B). Tato úloha je dle Tomáška (2009, str. 40) zaměřena na používání znalostí na zobecňování vztahů. Vzhledem k předchozím úlohám se tato úloha jeví jako nejsnazší, jelikož pro vyřešení žákům stačilo,

[7] 24 bez výpočtu, nebo výpočet neodpovídá (včetně pouhého nákresu a spočítání čtverců)

aby ověřili každé nabízené pravidlo. Úspěšnost této úlohy byla nejvyšší ze třech zmiňovaných. Důvodem je i fakt, že oproti předchozím úlohám žáci správnou odpověď vybírali a nekonstruovali ji.

Tabulka 9: Četnost odpovědí úlohy M30, zdroj: Tomášek, 2009, str. 40

Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	4,5	80,5	7,5	2,5

Česká republika skončila vysoko nad mezinárodním průměrem, což ukazuje tabulka 10.

Tabulka 10: Úspěšnost řešení úlohy M30, zdroj: Tomášek, 2009, str. 40

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	80,5	82,4	78,8
Mezinárodní průměr	63,0	64,4	61,5

1.3.1.1 Shrnutí

Ukazuje se, že algebra v rámci TIMSS je pojata v mnohem širších souvislostech, než je běžné na našich základních školách a v učebnicích pro základní školu. Zatímco v zahraničí tvoří úlohy, ve kterých hledají žáci pravidelnosti v řadě graficky nebo číselně prezentovaných kvantit, jeden z pilířů algebry, u našich žáků se to dle výsledků jeví jako slabina. Naši žáci zvládají poměrně dobře úpravu výrazů a také jednoduché případy korespondence mezi výrazem a explicitně popsanou či zobrazenou situací, nezvládají však složitější případy, v nichž se má identifikovat a vyjádřit funkční závislost dvou řad údajů.

Rendl a Vondrová (2014), kteří analyzovali výsledky i v úlohách, které nebyly uvolněné, dospěli k závěru, že výkony českých žáků se zhoršují na dvou kritických místech:

> na přechodu od názorné představivosti k pochopení závislosti, ale zejména na přechodu od pochopení funkční závislosti (díky němuž dokážou žáci pracovat s konkrétními čísly) k jejímu algebraickému vyjádření. (str. 44)

Podle Rendla a Vondrové (2014) to vychází z výsledků českých žáků, kteří se blíží k mezinárodnímu průměru či jsou dokonce pod ním a také ze stoupajícího procenta žáků, kteří ani nezkoušejí úlohy řešit. Rendl a Vondrová (2014) porovnávají úlohy z oblastí Řady a posloupnosti a Výrazy (obecný předpis posloupnosti lze chápat jako vyjádření vztahů v reálné situaci), ve kterých je dle autorů patrný výrazný rozdíl v úspěšnosti řešení. Má na to vliv zřejmě to, že u Výrazů mají žáci na výběr z odpovědí (úspěšnost dvou nejobtížnějších úloh byla 35,5 %, resp. 42,5 %), zatímco v Řadách a posloupnostech jde o odpovědi otevřené (úspěšnost se pohybuje mezi 6,4 % až 12,9 %). Podle Rendla a Vondrové (2014) se dají výsledky testování českých žáků shrnout tak, že kolem 40 % žáků dokáže rozeznat či uhádnout správný výraz, avšak neumí jej sama sestrojit.

1.4 Proměnná a úlohy na zobecňování v kurikulárních dokumentech a učebnicích

Pojem proměnná je ukotven v rámcovém vzdělávacím programu (RVP), který je závazným dokumentem pro tvorbu školních vzdělávacích programů (ŠVP). RVP stanovuje na národní úrovni povinný rámec učiva, který by měl každý absolvent dané úrovně vzdělávání a daného oboru schopen zvládnout. ŠVP stanovuje upřesňující podmínky pro vzdělávání na jednotlivých školách. Pro potřeby práce byl analyzován RVP pro základní vzdělávání (RVP ZV), a to ve verzi Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání – 2017[8].

1.4.1.1 RVP pro základní školy

RVP ZV je rozdělen na část určenou pro žáky prvního stupně základního vzdělávání (resp. 1. až 5. ročník) a část určenou pro žáky druhého stupně základního vzdělávání (resp. 6. až 9. ročník) i pro odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Vzdělávací obsah je rozdělen na devět částí, z nichž jedna se nazývá Matematika a její aplikace.

S pojmem proměnná se žáci setkávají poprvé na druhém stupni základní školy. Proměnná je zahrnuta pod oblastí *Číslo a proměnná*, která navazuje na okruh *Číslo a početní operace* z prvního stupně. Proměnná je zařazena pod učivo Výrazy. Cílem tohoto učiva dle RVP ZV je znát pojmy číselný výraz a jeho hodnota, proměnná, výrazy s proměnnými a mnohočleny. Výstup druhého stupně (M-9-1-07) v této oblasti je vymezen tak, že žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.

[8] http://www.nuv.cz/file/4986/

RVP ZV poskytuje učitelům velký prostor k vlastnímu pojetí učiva, tedy je čistě na nich, jaké metody, postupy a formy výuky zvolí. Důležité je, aby dosáhli požadovaného cíle – výstupů. RVP ZV nespecifikuje, v jakém ročníku mají školy daná témata učit, a nechává to tedy na nich. Vzhledem k tomu může nastat situace, že každá škola zavádí pojem proměnná v jiném ročníku. Nicméně po ukončení povinné školní docházky by dosažené znalosti žáků měly odpovídat předepsaným standardům.

Úlohy na zobecňování v RVP ZV zakotvené žádným způsobem nejsou. Tato skutečnost poukazuje na to, že oficiální dokumenty tento typ úloh nijak nevyzdvihují.

1.4.1.2 ŠVP vybraných škol

Školní vzdělávací program musí být v souladu s příslušným rámcovým vzdělávacím programem. Pro bližší analýzu byl vybrán ŠVP škol, kde později probíhaly i samotné rozhovory. Prozkoumány byly ŠVP škol, které je mají volně dostupné na webových stránkách.[9] Jedná se konkrétně o dvě školy: ŠVP A (ŠVP základní školy A) a ŠVP B (ŠVP základní školy B).[10]

ŠVP stanovuje zejména konkrétní cíle vzdělávání, délku, formy, obsah a časový plán vzdělávání, podmínky přijímání uchazečů, průběhu a ukončování vzdělávání, včetně podmínek pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. Dále stanovuje popis materiálních, personálních a ekonomických podmínek a podmínek bezpečnosti práce a ochrany zdraví, za nichž se vzdělávání v konkrétní škole nebo školském zařízení uskutečňuje. ŠVP je rozdělen do několika částí, stěžejní části pro výuku jsou učební plány (hodinové dotace), učební osnovy (charakteristika a vzdělávací obsah vyučovaného předmětu) a pravidla pro hodnocení žáků. Tvorba ŠVP dává možnost svobodně formulovat představy o nejvhodnější podobě vzdělávání na dané škole. Dává především příležitost k propojení úsilí a zkušeností jednotlivých učitelů, které by mělo vést k vytvoření společné představy o tom, jaké postupy zvolí k realizaci požadavků RVP ZV na škole (výchovné a vzdělávací strategie školy), jak je budou zajišťovat (promyšlená organizace, vhodné klima, fungující vztahy aj.), jaký vzdělávací obsah zvolí a jak jej přizpůsobí potřebám žáků a podmínkám školy (dohoda o specifikaci očekávaných výstupů, o výběru, rozčlenění a propojení učiva), jak budou společně působit na žáky, jejich rodiče, partnery školy atd.

---

[9] Pro zachování anonymity nejsou odkazy na ŠVP uvedeny ani v referencích.

[10] Názvy škol nejsou pro zachování anonymity uvedeny.

Největším rozdílem mezi ŠVP A a ŠVP B je ročník, ve kterém školy proměnnou zavádějí. Zatímco v ŠVP A se žáci poprvé s pojmem proměnná seznamují v 8. ročníku, dle ŠVP B je to již v 6. ročníku. Obě školy mají proměnnou zařazenou do učiva nazvaného Výrazy.

ŠVP A v rámci výstupu M-9-1-07 zmiňuje následující okruhy učiva: *přepis slovních vyjádření do algebraických výrazů*; *mocniny s přirozeným mocnitelem; jednočlen, mnohočlen; součet, rozdíl a součin mnohočlenů; hodnota výrazu; rozklad na součin; užití vzorců* $(a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2$*; výpočet neznámé ze vzorce.* Úlohy na zobecňování se explicitně v rámci ŠVP A nevyskytují. Jediná oblast, pod kterou by tento typ úloh mohl spadat, je ten první: *přepis slovních vyjádření do algebraických výrazů*. Tento předpoklad byl konzultován v rámci rozhovoru s jednou vyučující školy, která potvrdila, že úlohy na zobecňování při zavádění pojmu proměnná nezařazuje.

V ŠVP B se pod učivem Výrazy skrývají následující okruhy: *číselný výraz a výrazy s proměnnou, hodnota výrazu a vlastnosti početních operací.* I tady explicitně úlohy na zobecňování zmíněné nejsou. Při konzultaci s učiteli, které vyučují žáky, s nimiž byly provedeny rozhovory, se ukázalo, že jeden z učitelů úlohy na zobecňování nezařazuje, zatímco druhý učitel ano. Tento učitel vyučuje dle tzv. Hejného metody, a právě v učebnicích z nakladatelství H-mat jsou úlohy na zobecňování zařazovány.

Jak bylo řečeno, žáci se s pojmem proměnná mohou setkat v různém ročníku. Proto je zřejmé, že způsoby, jakým budou úlohy na zobecňování řešit, se budou lišit v závislosti na získaných zkušenostech.

1.4.1.3 Standardy pro základní vzdělávání

Mezi kurikulární dokumenty můžeme zařadit i tzv. Standardy pro základní vzdělávání, které vznikly pod záštitou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy.

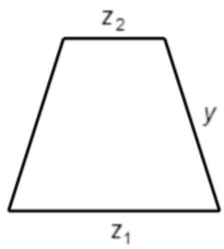
> Standardy pro základní vzdělávání představují minimální cílové požadavky na vzdělávání. Smyslem standardů je účinně napomáhat především školám a učitelům při naplňování cílů vzdělávání stanovených v RVP ZV.[11]

Standardy vycházejí z očekávaných výstupů vzdělávacích oborů stanovených v RVP ZV. Tyto výstupy jsou zpřesněny pomocí indikátorů, které mají za cíl konkretizovat znalosti

[11] http://www.nuv.cz/t/zarazeni-standardu-do-rvp-zv

a dovednosti žáků, kterých mají v rámci tematických okruhů dosáhnout. Standardy se předchází především vzniku velkých rozdílů dovedností a znalostí mezi jednotlivými školami. Obrázek 6 znázorňuje standardy pro oblast *Číslo a proměnná* přímo zaměřené na výuku proměnné. Obsahují konkretizované očekávané výstupy v podobě jednotlivých indikátorů, které jsou nastaveny na minimální úroveň. V rámci dokumentu *Standardy pro základní vzdělávání – Matematika a její aplikace* byly ještě vytvořeny *Metodické komentáře k oboru Matematika a její aplikace*, které doplňují standardy o ilustrativní úlohy a metodická doporučení či obecné postřehy vztahující se k výuce jednotlivých matematických oblastí.

Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	1. Číslo a početní operace
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-1-07** Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním
Indikátory	1. žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných 2. žák využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ 3. žák vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci
Ilustrativní úloha	
Obvod rovnoramenného lichoběžníku lze vypočítat podle vztahu $o = z_1 + z_2 + 2y$ Vypočti číselnou hodnotu o, je-li $y = 12$, $z_1 = 15$, $z_2 = 7$.	
Poznámky k ilustrativní úloze	M-9-1-07.1



Obrázek 6: Standardy pro oblast *Číslo a proměnná*, zdroj: Fuchs a Zelendová, 2013, str. 80

Ilustrativní úlohy v *Matematických komentářích* jsou rozděleny do tří úrovní obtížnosti (minimální, optimální a excelentní), přičemž úroveň obtížností byla stanovena na základě Bloomovy taxonomie kognitivních výukových cílů.[12] Bloomova taxonomie je jedna z nejvýznamnějších pedagogických teorií, která ovlivňuje koncepce plánování výuky a tvorby kurikula. Její přínos je vnímán především z hlediska naznačení způsobu konkretizace a operacionalizace vzdělávacích cílů. Úlohy obsažené v *Metodických komentářích* se vztahují k danému tématu

[12] https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/10347/priloha_c_1___bloomova_taxonomie_kognitivnich_cilu.pdf

a pomohou čtenářům lépe pochopit některá úskalí výuky matematiky. Úlohy jsou doplněny možnými řešeními s metodickým komentářem, jehož cílem je popsat myšlenkové operace žáků vedoucích k vyřešení úloh.

Ilustrativní úlohy, které byly pro tuto práci vybrány, odkazují na výše zmíněné poznatky k výuce proměnné. Úloha uvedená na obrázku 7 byla vybrána proto, že odkazuje na geometrii, která je jednou z pilířů výuky proměnné. Ilustrativní úloha 15 představuje úlohu na porozumění proměnné (viz obrázek 8). V materiálu *Metodické komentáře ke standardům* se se zobecňujícími úlohami počítá jako s nástrojem pro pochopení a zavedení pojmu proměnná (viz obrázek 9).

Ilustrativní úloha 8	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní
Načrtni, co by mohlo být v geometrii znázorněním výrazu 2*x*.				
Možná řešení s metodickým komentářem				
Možným řešením je úsečka o délce 2*x*, ale také obsah obdélníku o stranách 2 a *x*. Druhá interpretace je pro žáky často nezvyklá, protože mají představu, že pro obsah by měla být proměnná ve druhé mocnině.				
Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním			

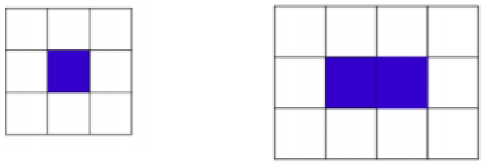
Obrázek 7: Ilustrativní úloha z Metodických komentářů, zdroj: Nováková a Vondrová, 2015, str. 32

Ilustrativní úloha 15	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní
Víme, že *n* je reálné číslo. Co je víc, 3*n*, nebo *n*+6?				
Možná řešení s metodickým komentářem				
Řešení: Rovnost nastane pro číslo 3, první výraz je větší než druhý pro čísla větší než 3. Při řešení úlohy žák musí prokázat, že rozumí podstatě proměnné jako označení libovolného čísla v daném oboru. Žáci však často odpovídají nesprávně. Někdo říká, že větší je 3*n*, protože se tam jedná o součin. Jiný považuje za větší druhý výraz kvůli přítomnosti čísla 6, které je větší než 3 v prvním výrazu. Tyto odpovědi přirozeně vedou učitele k výzvě, aby žáci zjistili, za jakých okolností je větší první výraz, kdy nastane rovnost a kdy je větší druhý výraz.				
Očekávaný výstup	M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav			

Obrázek 8: Ilustrativní úloha z Metodických komentářů, zdroj: Nováková a Vondrová, 2015, str. 37

Ilustrativní úloha 19	Obtížnost	minimální	A) optimální	B) excelentní

Na obrázku jsou jezírka o různé velikosti. Modrá část představuje jezírko, bílá část dlažbu.



Jezírko o velikosti jedna (jeden modrý čtverec) vyžaduje 8 dlažebních kamenů. Na jezírko o velikosti dva je třeba 10 dlažebních kamenů. Šířku jezírka ponecháme vždy jen na šířku jednoho dlažebního kamene.

A) Urči počet dlažebních kamenů pro jezírko velikosti 3, 5, 10, 100…

B) Urči počet dlažebních kamenů pro libovolně velké jezírko.

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:

Velikost jezírka	Počet dlažebních kamenů
1	8
2	10
3	12
4	14
5	16
10	26
100	206
…	…
n	$2n + 6$

Jedná se o úlohu na zobecňování. Ty jsou zpravidla formulované tak, že nejprve je vyloženo pravidlo, pomocí kterého vznikají členy nějaké „řady čísel“. Pak je položena otázka na několik následujících členů, dále na nějaký vzdálený člen (kde už nelze situaci modelovat obrázkem nebo jednoduše dopočítat a žák musí hledat pravidlo). Nakonec je vyžadováno obecné pravidlo pomocí symbolického zápisu. Jedná se tedy o úlohy, v nichž se přirozeně objevuje proměnná – žák si uvědomuje její smysl jako zástupného symbolu mnoha čísel.

Mezistupněm na cestě k popisu pomocí symbolů je, když si žák uvědomí, že každý další řádek tabulky lze vyplnit tak, že přičteme číslo 2 k předchozímu počtu kamenů (každá velikost jezírka vyžaduje o 2 dlažební kostky víc než předchozí). Pak žáci mohou pravidlo vyslovit slovy. Např. „Vždy potřebujeme 6 krajních dlažebních kamenů ($2 \cdot 3$) a mění se pouze vnitřní kameny zakreslené na náčrtku podél horní a dolní strany, přičemž při každém následujícím zvětšení se přidají dva.“ Odtud je už jen krůček k zobecnění.

U úlohy je dále důležité, že žáci mohou k zobecnění dojít buď přímo z dané situace nebo z tabulky.

Úloha byla s úspěchem použita i u žáků 5. a 6. ročníku. Žáci přišli s dvěma pravidly: $8 + 2(n - 1)$ a $6 + 2n$. Protože ještě neuměli zjistit, že je to totéž (výrazy ještě upravovat neuměli), přesvědčili se o správnosti jen na úrovni dosazení konkrétních velkých čísel.

Poznámka: Úloha je převzata z (Little, Benson, 2007).

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Obrázek 9: Ilustrativní úloha 19 z Metodických komentářů, zdroj: Nováková a Vondrová, 2015, str. 40-41

1.4.1.4 Výskyt úloh na zobecňování v učebnicích matematiky

Úlohy na zobecňování ve smyslu uvedeném výše (Rendl a Vondrová, 2014, str. 41) by nejpravděpodobněji byly zařazeny v kapitolách věnujících se zavedení proměnné či algebraickým výrazům. Ty bývají zařazeny do 7. a 8. ročníku základní školy či odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Byly analyzovány učebnice, které jsou podle mých zkušeností a informací z kurzů didaktiky matematiky běžně používány. Jsou zahrnuty i učebnice, které využívají školy žáků, s nimiž byly provedeny rozhovory:

- *Matematika pro gymnázia (Základní poznatky z matematiky, Rovnice a nerovnice) (Bušek, Calda; nakl. Prometheus)*
- *Matematika pro 8. ročník základní školy (Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, výrazy) (Odvárko, Kadleček; nakl. Prometheus)*
- *Matematika Sekunda (Výrazy [1]) (Herman; nakl. Prometheus)*
- *Matematika Tercie (Výrazy [2]) (Herman; nakl. Prometheus)*
- *Matematika 8 pro základní školy a víceletá gymnázia (Aritmetika) (Fuchs, Tlustý, Binterová; nakl. Fraus)*
- *Učebnice matematiky pro 2. stupeň a víceletá gymnázia (Hejný et al., H-mat)*

Ukázalo se, že kromě učebnic matematiky vytvořených pro tzv. Hejného metodu žádná z učebnic úlohy na zobecňování v požadovaném smyslu neobsahuje. Všechny tyto učebnice zavádějí proměnnou v rámci kapitoly Výrazy, případně podkapitoly Výrazy s proměnnými. Na začátku jsou vysvětleny pojmy proměnná a obor proměnné, výjimečně i další pojmy, např. konstanta. Následují části věnované práci s výrazy – dosazení do výrazu, sčítání, násobení, dělení a rozklad mnohočlenů. Operace jsou zavedené pomocí konkrétního řešeného příkladu, za nímž následují procvičující úlohy. Výjimkou je učebnice *Matematiky pro 8. ročník základní školy* (Odvárko a Kadleček), kde není proměnná v rámci kapitoly Výrazy explicitně zmíněna.

V učebnicích z nakladatelství H-mat se úlohy na zobecňování vyskytují v hojné míře. Navíc se ukázalo, že učebnice pro 2. stupeň již pracují s tím, že žáci mají s těmito úlohami zkušenost z 1. stupně. Proto byly analyzovány i učebnice pro 1. stupeň, a to v původním vydání z nakladatelství Fraus. Výsledky této analýzy jsou shrnuty v oddíle 1.5.

1.5 Úlohy na zobecňování v učebnicích matematiky nakladatelství Fraus a H-mat

Jak bylo uvedeno, vzhledem k výskytu úloh na zobecňování v učebnicích nakladatelství Fraus již na prvním stupni, byly analyzovány učebnice pro oba stupně školy:

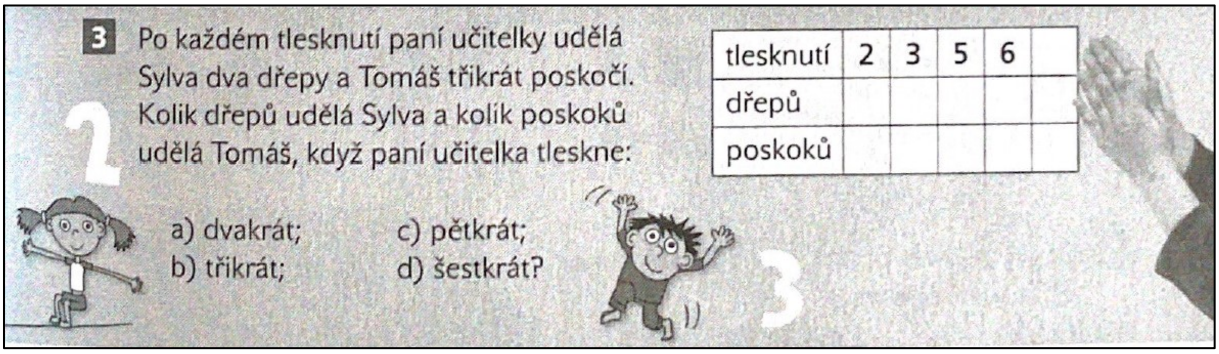
- *Matematika pro 1. ročník základní školy (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematice pro 2. ročník základní školy, 1 díl. (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematiky pro 2. ročník základní školy, 2. díl. (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematika pro 3. ročník základní školy (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematika pro 4. ročník základní školy (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný et al.; nakl. Fraus)*
- *Matematika, Hejného metoda A (Hejný et al.; nakl. H-mat)*
- *Matematika, Hejného metoda B (Hejný et al.; nakl. H-mat)*
- *Matematika, Hejného metoda C (Hejný et al.; nakl. H-mat)*
- *Matematika, Hejného metoda D (Hejný et al.; nakl. H-mat)*
- *Matematika, Hejného metoda E (Hejný et al.; nakl. H-mat)*
- *Matematika, Hejného metoda F (Hejný et al.; nakl. H-mat)*

V následujícím textu jsou zmíněné pouze učebnice, ve kterých byly zobecňující úlohy nalezeny.

1.5.1 Matematika pro první stupeň

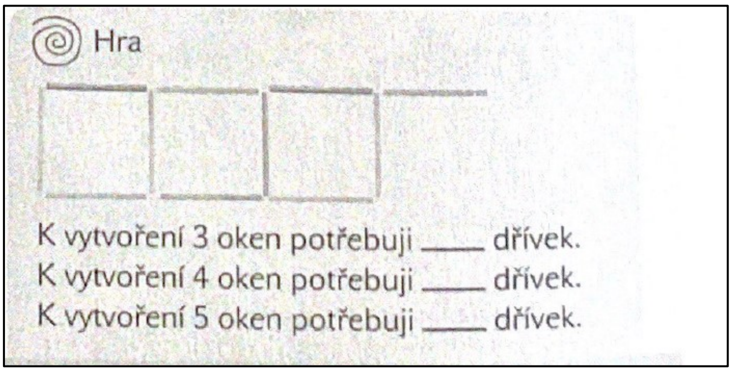
Matematika, učebnice pro 1. stupeň obsahuje několik úloh založených na principu zobecňování. Úlohy nejsou koncipovány způsobem, že by žáci měli v konečném důsledku vyjádřit vztah pro proměnnou, ale pomocí tabulky mají zapsat jednotlivé dílčí výsledky.

V *Matematice pro 2. ročník základní školy, 1 díl.* je obsaženo několik úloh v rámci různých kapitol, které učí žáky pracovat s tabulkou jako nástrojem pro přehlednější zápis různých situací či možností (viz obrázek 10). Právě tabulka je pro úlohy na zobecňování velmi důležitá, především pro svou přehlednost a viditelnost vztahů, které mezi jednotlivými řádky vznikají.

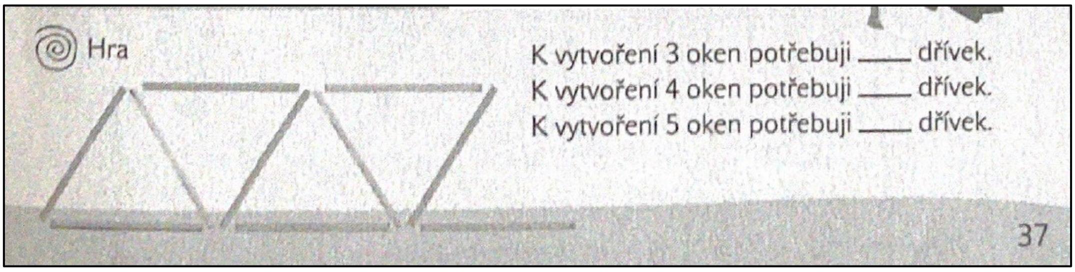


Obrázek 10: Dřepy a poskoky, zdroj: Hejný et al., 2008, str. 35

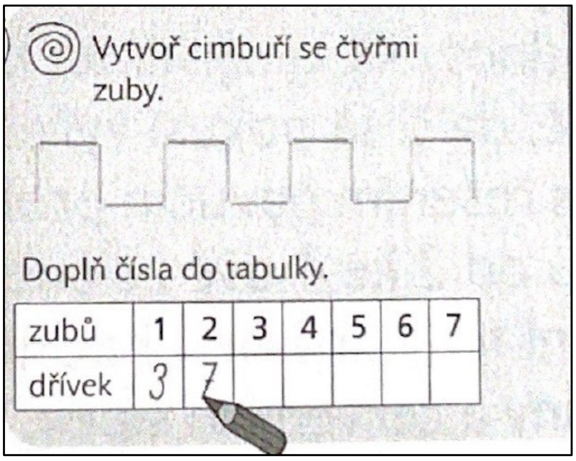
Úlohy podobného typu jsou v učebnicích seřazeny gradovaným způsobem a jsou zařazeny vždy navíc k probírané látce pod znakem Hra. Autoři u těchto úloh (viz obrázek 11, 12 a 13) předpokládají, že žáci je budou řešit pomocí manipulace s dřívky, kdy správný počet dřívek zjistí postupným přidáváním. V příručce pro učitele autoři učitele odrazují, aby pokládali žákům otázku: *Kolik dřívek je třeba na každé další okno?* V případě, že tato otázka je položena od učitele, znemožní se tím žákům samostatně odhalit, který jev je u tohoto vzoru matematicky důležitý. Úloha na obrázku 12 vznikla modifikací úlohy na obrázku 11. Geometricky se jedná o složitější situaci, ale početně o něco snazší. Na rozdíl od předchozích úloh se v úloze na obrázku 13 zjišťuje sedm čísel, která se mají zapsat do tabulky. V příručce pro učitele je autory zmíněno, že z tabulky by vnímavý žák již mohl vyčíst, že ve druhém řádku přibývají čísla po čtyřech a díky tomu by měl být schopen vyplnit celou tabulku bez budování cimbuří. Autoři shledávají jako nejdůležitější poznatek: „Aniž vytvoří objekt, dokáže žák zjistit, kolik dřívek v něm bude“ (Hejný et al., 2008, str. 73).



Obrázek 11: Čtverce, zdroj: Hejný et al., 2008, str. 18



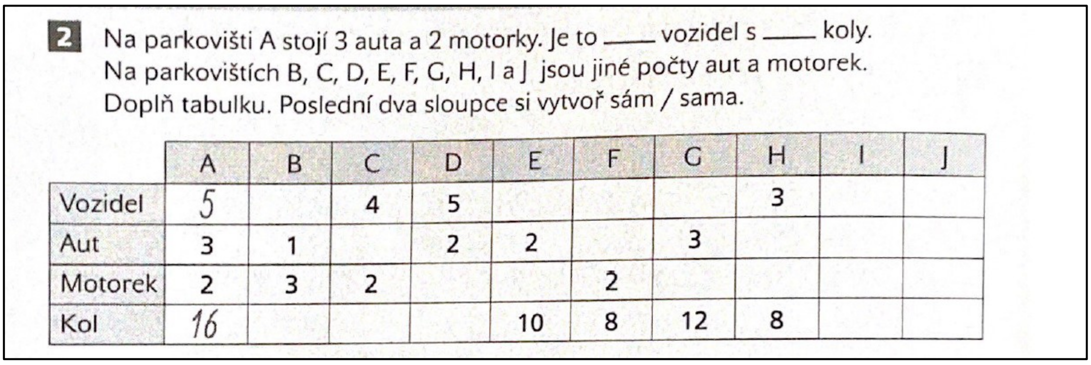
Obrázek 12: Trojúhelníky, zdroj: Hejný et al., 2008, str. 37


Vytvoř cimbuří se čtyřmi zuby.

Doplň čísla do tabulky.

zubů	1	2	3	4	5	6	7
dřívek	3	7					

Obrázek 13: Cimbuří, zdroj: Hejný et al., 2008, str. 47

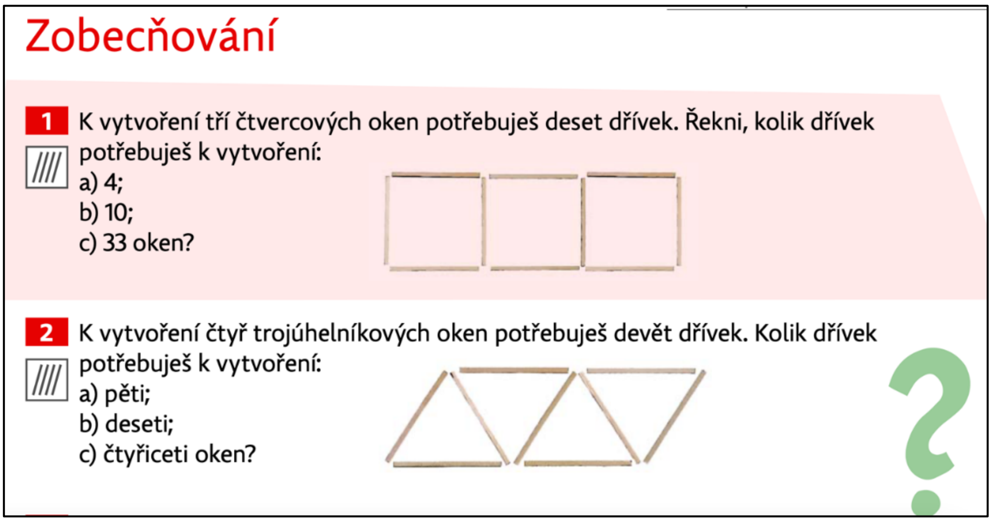

2 Na parkovišti A stojí 3 auta a 2 motorky. Je to ___ vozidel s ___ koly.
Na parkovištích B, C, D, E, F, G, H, I a J jsou jiné počty aut a motorek.
Doplň tabulku. Poslední dva sloupce si vytvoř sám / sama.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Vozidel	5		4	5				3		
Aut	3	1		2	2		3			
Motorek	2	3	2			2				
Kol	16				10	8	12	8		

Obrázek 14: Parkoviště, zdroj: Hejný et al., 2008, str. 18

Úloha na obrázku 14 je převzata z *Matematiky pro 2. ročník základní školy, 2. díl.* Úloha již vyžaduje zkušenosti s prací s tabulkou a je zajímavá hlavně z pohledu posledních dvou prázdných sloupců, ve kterých si žáci mohou zvolit libovolné hodnoty a s nimi pracovat. I tento mezikrok k zobecnění je velmi důležitý.

V učebnici *Matematika pro 3. ročník základní školy* se objevuje přímo kapitola s názvem *Zobecňování*. Úlohy v této kapitole jsou zaměřené na postupné zobecňování daných jevů. Cílem stále není dojít k obecnému vyjádření vztahů mezi dvěma čísly, ale uvědomění si, že určitý vztah mezi těmito čísly existuje, a případně ho slovně vyjádřit. S podobnými úlohami se žáci setkali již v předchozím ročníku, jak je uvedeno výše. Úlohy v předešlé učebnici byly omezeny pouze na pár oken/zubů, které si lze snadno představit, nakreslit či vymodelovat. V tomto případě se jedná o počet oken, který již není tak snadno představitelný (viz obrázek 15).



Obrázek 15: Ukázka úloh z kapitoly na zobecňování, zdroj: Hejný et al., 2009, str. 23

V učebnici je na konci strany shrnuto, co je cílem daných úloh. Vysvětlení dle autorů slouží učitelům a rodičům.

> V úlohách 1, 2 změníme jedno číslo (parametr) a poté pozorujeme změnu jiného čísla. Hledáme zákonitost této změny. Odhalíme zákonitost této změny. Odhalíme ji, když budeme systematicky měnit parametr a výsledky evidovat pomocí tabulky. (Hejný et al., 2009, str. 23)

Parametr zde nahrazuje slovo proměnná. Žáci se snaží najít určitý vztah mezi počtem oken a počtem dřívek a slovně ho vyjádřit. Žáci tedy u této úlohy mají využít předešlé zkušenosti s prací s tabulkou a volbou parametru.

Úlohy, jejichž příklady byly uvedeny výše a které jsou zařazené do učebnic pro první stupeň, slouží k přípravě známého prostředí, ve kterém se žáci budou orientovat a které mohou autoři použít v obtížnější formě v dalších dílech učebnic.

1.5.2 Matematika pro druhý stupeň

Tato řada učebnic je rozdělena podle písmen (A, B, C, D, E, F), nikoliv podle ročníků a učiva. Stejné učivo se prolíná napříč všemi učebnicemi, přičemž úlohy v nich obsažené jsou postupně složitějšího typu. Kapitoly od učebnice C již nejsou nazvány jen podle prostředí, ale častěji jako nějaký tematický celek, přičemž v některých celcích se vyskytuje více prostředí. Autoři tak předpokládají, že žáci si budou souvislosti mezi prostředími uvědomovat a budou mít možnost volby, v jakém prostředí chtějí úlohy řešit.

Díky propedeutice zobecňování si autoři mohou dovolit už u první úlohy použít proměnnou. Tato úloha se vyskytuje v učebnici C pod prostředím *Schody*, ve kterém se poprvé žáci setkají s otázkou položenou přímo na proměnnou n (viz obrázek 16). Úloha je zadána jako námět na téma ročníkové práce. Tato kategorie úloh se objevuje nově v díle C, přičemž se jedná o náročnější úlohy, které vyžadují hlubší porozumění problematice. Ve většině případů se jedná o rozšíření probíraného učiva či na něj úlohy přímo navazují. Úloha na obrázku 16 navazuje na úlohu: *Irena a Juraj jsou na schodech, Irena chodí po jednom schodu nahoru nebo dolů, tedy její jeden krok je dlouhý jeden schod, Jurajův krok je dlouhý dva schody. Úkolem je vyřešit úlohu, kdy Irena stojí na schodu 0 a Juraj na schodu k, přičemž udělají dohromady d*[13] *pohybů, a nakonec budou stát na sousedních schodech – Irena na schodu i a Juraj na schodu j.*

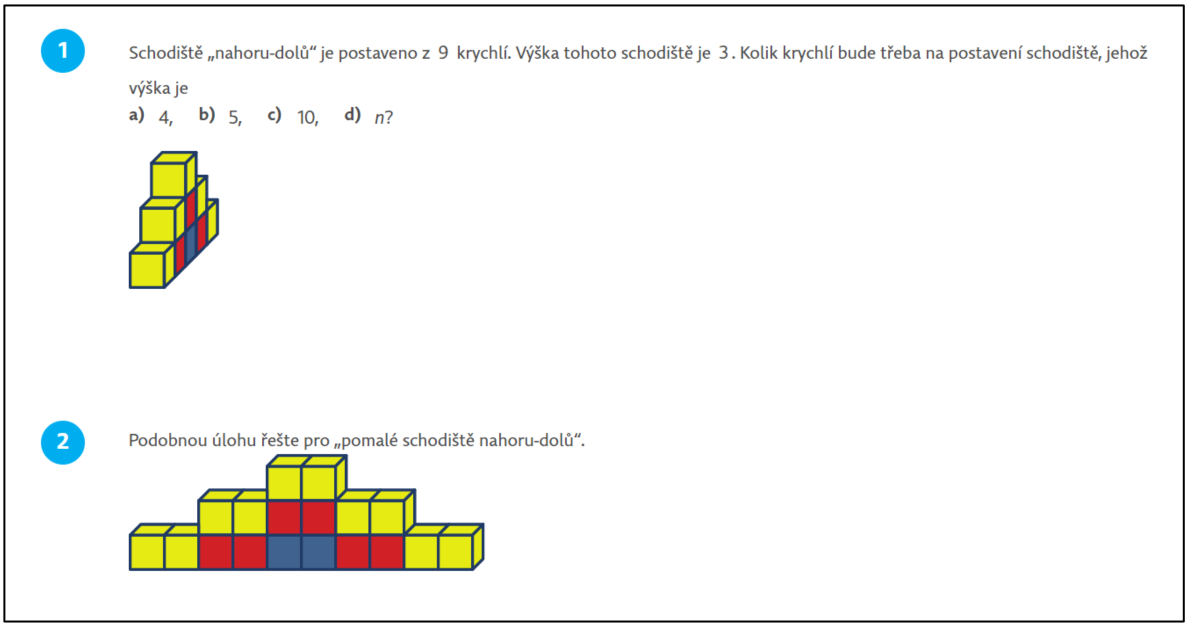
V této úloze se objevuje již několik proměnných, přičemž úkolem žáka je prozkoumat danou situaci na základě předchozí úlohy s konkrétními čísly. V úloze Schodiště „nahoru-dolů" žáci zobecňují situaci na základě předchozích zkušeností. Zavádějící by zde pro žáky mohlo být, že krychle jsou různě barevné, a tedy by mohli na základě zvolených barev hledat souvislosti. Přidanou hodnotou je v tomto případě, že žáci mohou vztah hledat opět manipulací. Jednotlivé krychle, potažmo čtverce, mohou přesouvat tak, aby jim vznikl nový obrazec (útvar). Práce s tabulkou je dalším krokem k nalezení řešení.

Kapitola, která se přímo zavedení proměnné věnuje, se jmenuje *Jazyk písmen I*, přičemž proměnná je zde zavedena právě pomocí úlohy na zobecňování. V učitelské příručce je nejdříve doporučeno, aby učitel dal otázku, jak spočítat obvod obdélníku. Odpovědi žáků mohou být libovolné, ale v případě, že slovně pravidlo popíší, učitel by měl požádat o nějaký matematický popis, např. $o = š + d$[14]. „Písmena pak mají určitý význam a nejedná se pouze o abstraktní prvky" (Hejný et al., 2017, str. 62).

---

[13] V předchozí úloze stojí Irena na schodu 5, Juraj na schodu 9 a udělají dohromady a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7 pohybů.

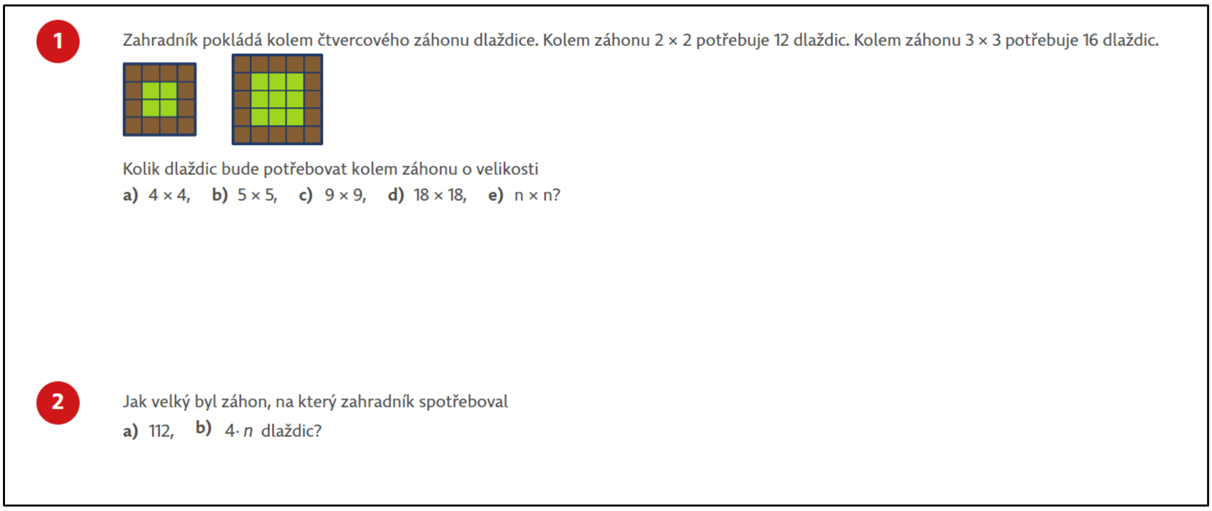
[14] o = obvod, š = šířka, d = délka



Obrázek 16: Schody, zdroj: Hejný et al., 2016, str. 6

První úloha v rámci kapitoly *Jazyk písmen* je v novém prostředí, které bude v práci nazváno *Záhon*. Prostředí se dále objevuje v kapitolách *Jazyk písmen I, II* v rámci většiny dalších učebnic. Autoři nejprve zvolili tvar čtverce, který je pro žáky nejlépe představitelný a práce s ním bývá intuitivní. K zobecňování dochází postupně přidáváním jednoho sloupce a jednoho řádku záhonu. Žáci tak mají možnost postupně objevovat závislost mezi velikostí záhonu a množstvím dlaždic jemu přilehlých. Počet dlaždic je chápán v podstatě jako obvod záhonu (i proto je na začátku zvolena otázka právě na obvod). I v rámci této úlohy dochází ke gradaci, pomocí níž žáci objevují generický model a poprvé jsou vedeni k abstraktnímu vyjádření pomocí písmen.

Žádoucí při řešení úlohy je, aby se objevilo co nejvíce možných vyjádření vztahu. Příručka pro učitele doporučuje, aby různost přístupů byla rozebrána již u zadání d), a ne až v obecném e). Další důležitou fází řešení úlohy je porovnání a zdůvodnění různých přístupů s cílem zjistit, zda jsou všechny správné či zda jsou ekvivalentní. Tento krok vede k úpravě výrazů, s čímž žáci zatím zkušenosti nemají, ale mohli bychom ho považovat za motivaci pro tyto úpravy.


1 Zahradník pokládá kolem čtvercového záhonu dlaždice. Kolem záhonu 2 × 2 potřebuje 12 dlaždic. Kolem záhonu 3 × 3 potřebuje 16 dlaždic.

Kolik dlaždic bude potřebovat kolem záhonu o velikosti

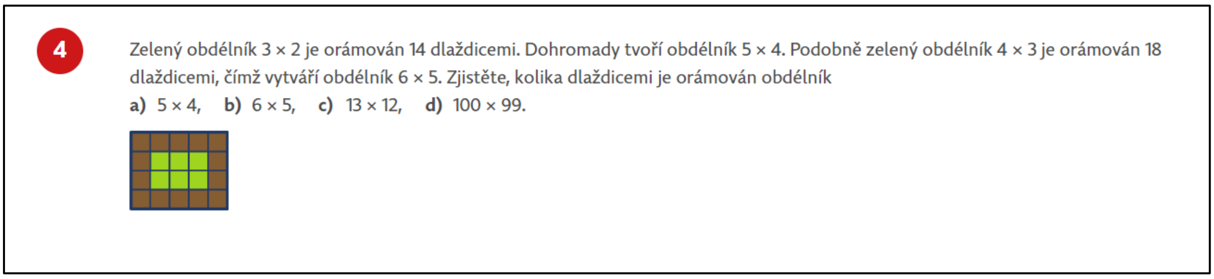
a) 4 × 4, **b)** 5 × 5, **c)** 9 × 9, **d)** 18 × 18, **e)** n × n?

2 Jak velký byl záhon, na který zahradník spotřeboval

a) 112, **b)** $4 \cdot n$ dlaždic?

Obrázek 17: Záhony, zdroj: Hejný et al., 2016, str. 36

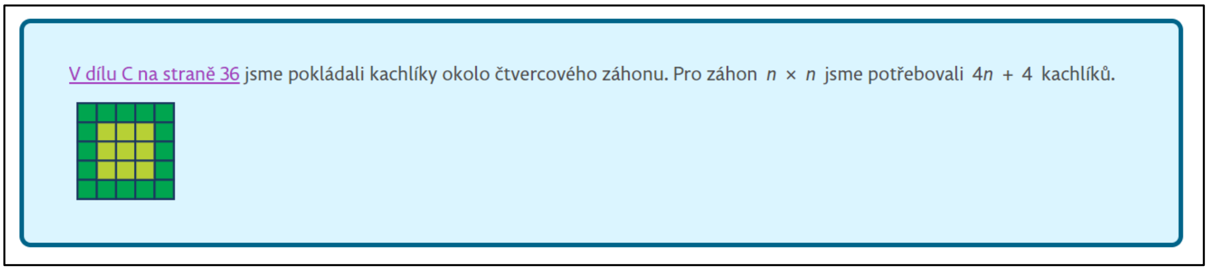
V učebnici C následuje několik úloh, které jsou formulovány v prostředí *Záhon*, a zároveň se objevují i nová prostředí, kde se žáci s proměnnou seznamují. Jak je vidět z obrázku 17, druhá úloha je inverzní úlohou k úloze předchozí; máme známý počet dlaždic a hledáme rozměry záhonu. V poslední úloze kapitoly (viz obrázek 18) se pracuje s obdélníkovým záhonem, tedy dochází ke gradaci předchozích úloh.


4 Zelený obdélník 3 × 2 je orámován 14 dlaždicemi. Dohromady tvoří obdélník 5 × 4. Podobně zelený obdélník 4 × 3 je orámován 18 dlaždicemi, čímž vytváří obdélník 6 × 5. Zjistěte, kolika dlaždicemi je orámován obdélník

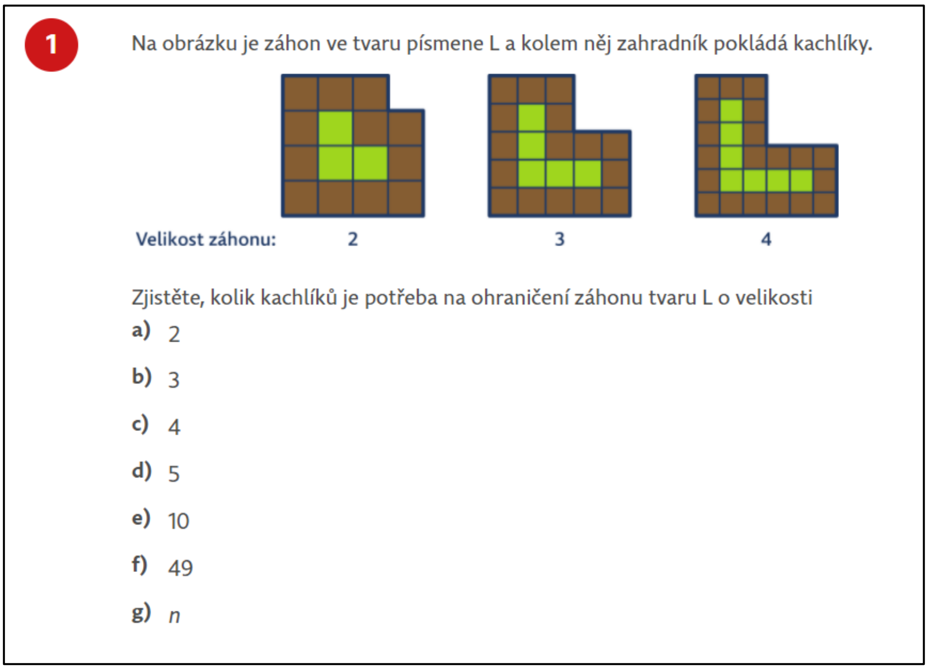
a) 5 × 4, **b)** 6 × 5, **c)** 13 × 12, **d)** 100 × 99.

Obrázek 18: Obdélník, zdroj: Hejný et al., 2016, str. 36

V kapitole *Jazyk písmen II* učebnice D se autoři nejdříve vrací k předchozímu dílu učebnice a úloze, se kterou se žáci již setkali (viz obrázek 19). Poté následuje úloha na obrázku 20, která je tvarem a velikostí záhonu složitější. Princip gradovaných úloh je u úloh na zobecňování žádoucí. Další pozitivum je fakt, že u žáků nevznikají mylné představy, že při zobecňování pracují jen se čtverci (nevytvářejí se nevhodné prototypy).


V dílu C na straně 36 jsme pokládali kachlíky okolo čtvercového záhonu. Pro záhon $n \times n$ jsme potřebovali $4n + 4$ kachlíků.

Obrázek 19: Upamatování, zdroj: Hejný et al., 2017, str. 47


1 Na obrázku je záhon ve tvaru písmene L a kolem něj zahradník pokládá kachlíky.

Zjistěte, kolik kachlíků je potřeba na ohraničení záhonu tvaru L o velikosti

a) 2

b) 3

c) 4

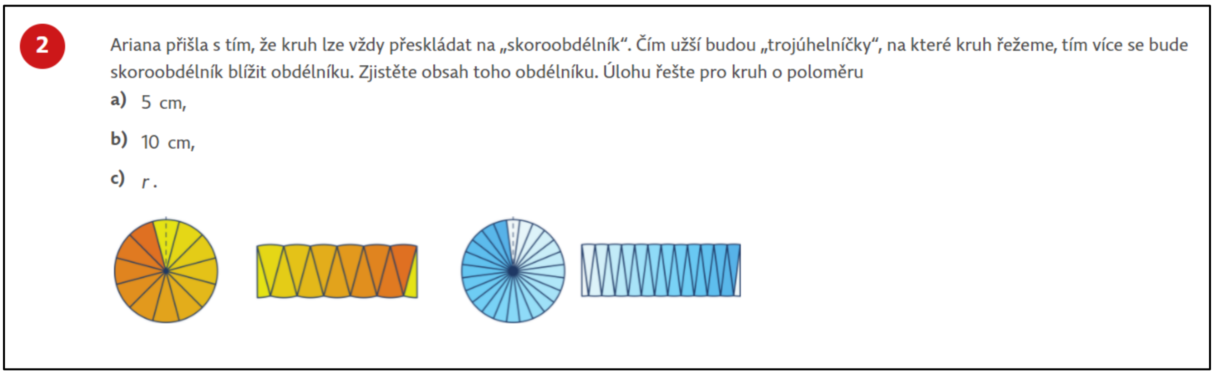
d) 5

e) 10

f) 49

g) n

Obrázek 20: Záhon, zdroj: Hejný et al., 2017, str. 47


2 Ariana přišla s tím, že kruh lze vždy přeskládat na „skoroobdélník". Čím užší budou „trojúhelníčky", na které kruh řežeme, tím více se bude skoroobdélník blížit obdélníku. Zjistěte obsah toho obdélníku. Úlohu řešte pro kruh o poloměru

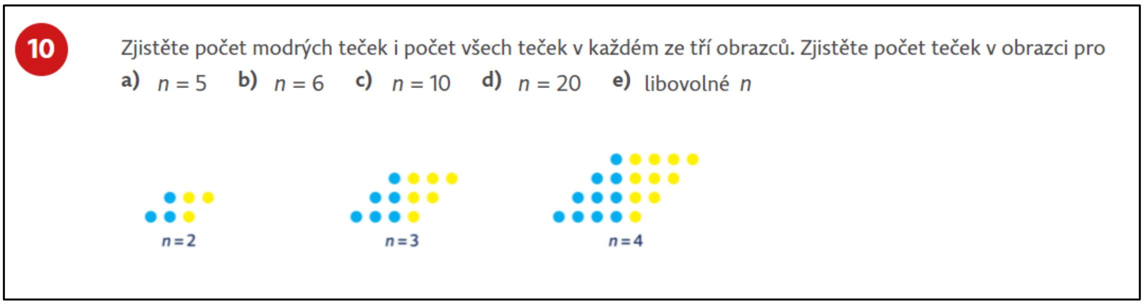
a) 5 cm,

b) 10 cm,

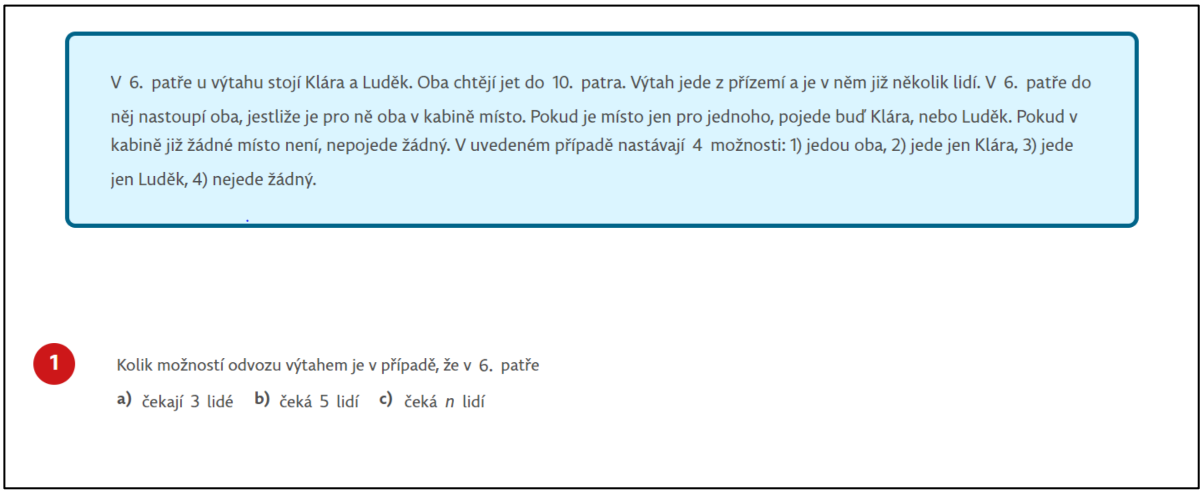
c) r.

Obrázek 21: Obsah kruhu, zdroj: Hejný et al., 2017, str. 57

Dalším rysem zkoumaných učebnic je, že úlohy na zobecňování jsou zařazeny i do kapitol, kde žáci odvozují různé vzorce. Zobecňující úlohy v nich slouží jako nástroj pro objevování vztahů mezi různými veličinami. Za zmínku stojí problematické oblasti učiva jako *Kombinatorika*, *Obvody*, *Obsahy*, *Objemy* či *Mocniny a odmocniny* (viz obrázek 21 a 23).



Obrázek 22: Tečky, zdroj: Hejný et al., 2017, str. 56



Obrázek 23: Výtah, zdroj: Hejný et al., 2018, str. 27

Úloh na zobecňování se vyskytuje v Hejného učebnicích třicet, v práci nejsou všechny zařazeny. Zmíním např. úlohy v učebnici *C (Dělitelnost,* str. 20/3), *učebnice D* (*Mnohoúhelníky*, str. 51/7, 52/2; *Mocniny,* str. 55/5,6), *učebnice E* (*Pavučiny*, str. 26, 27; *Procenta*, str. 37/opakování; *Jazyk písmen II,* str. 56/11, 12, 13; *Oblé útvary*, str. 75/6) a *učebnice F (Oblé útvary,* str. 19/6, *Mnohoúhelníky,* str. 35/1, 2, *Kombinatorika a pravděpodobnost,* str. 55/12).

1.5.3 Shrnutí

V analýze učebnic jsou detailněji popsány učebnice z nakladatelství Fraus a H-mat (v obou je autorem Hejný), v nichž se úlohy na zobecňování vyskytují hojně. Žák se v této řadě učebnic učí rozlišovat různé role písmene v matematice a používá je pro matematizaci úloh a jejich řešení. Proměnnou se učí používat pro vyjádření vztahů, závislostí či pro zobecňování situací. Proměnná v této řadě učebnic vstupuje do jednotlivých prostředí, žáci ji tedy mají možnost uchopit z několika stran. Výrazným rysem učebnice je důkladná propedeutika proměnné, algebraického myšlení a jazyka již na prvním stupni. Přesto, že hodně úloh pracovalo s proměnnou n, v několika úlohách se objevila i jiná proměnná. Tak je předcházeno prototypické představě, že proměnná se vyjadřuje pouze písmenem n. Úloh s různým vyjádřením proměnné není ovšem zařazeno mnoho.

1.6 Shrnutí teoretické části

Úlohy na zobecňování představují jednu z cest k algebře jako zobecněné aritmetice a tvoří dobrý základ porozumění proměnné (např. Radford, 2011; Vondrová, 2019). Ovšem jak je ukázáno výše, čeští žáci však s nimi s velkou pravděpodobností nemají příliš zkušeností.

Za prvé, v RVP pro základní školy není problematika úloh na zobecňování a číselné posloupnosti vůbec zmíněna. Úlohy na zobecňování nejsou zakotveny ani v jednom ŠVP škol, na kterých jsem prováděla výzkum, přesto se na základní škole B využívají. Tyto skutečnosti byly brány v potaz při výběru žáků pro vlastní výzkum. Cílem bylo vybrat cca deset žáků, z nichž někteří již výuku proměnné absolvovali a jiní nikoliv a někteří se mohli s úlohami na zobecňování setkat a jiní ne.

Za druhé, úlohy na zobecňování se nevyskytují v běžně používaných učebnicích, až na učebnice určené pro Hejného metodu. Lze tedy předpokládat, že by se s nimi žáci setkali jen u těch učitelů, kteří si jsou důležitostí těchto úloh vědomi a zařadí je nad rámec učebnic.

Za třetí, z výzkumu TIMSS jasně vyplývá, že čeští žáci mají s řešením úloh na zobecňování potíže. Naši žáci prokázali dovednosti v odhadu řešení či správném výběru při možné volbě mezi odpověďmi, nikoliv při zkonstruování vlastních závěrů a zápisu obecné zákonitosti jazykem algebry.

Cílem mé práce je poskytnout vhled do uvažování žáků, kteří úlohy na zobecňování řeší.

2 Výzkumná část

Cílem práce je získat vhled do uvažování žáků při řešení úloh na zobecňování, zejména jak se dostávají ke slovnímu popisu obecného pravidla a k nalezení vyjádření pomocí proměnné. Byly stanoveny dvě výzkumné otázky. Jaké řešitelské strategie u úloh na zobecňování žáci použijí? Jsou zvolené přístupy závislé na vstupních vědomostech o proměnné?

Výzkum využívá kvalitativní metodologii. Data byla získána především z polostrukturovaných individuálních rozhovorů s žáky. Žákům byly postupně zadány čtyři úlohy. Po zadání každé úlohy probíhal polostrukturovaný rozhovor, který měl za cíl získat vhled do žákovských řešení.

2.1 Výběr a didaktická analýza úloh

Na základě poznatků uvedených v první kapitole jsem předpokládala, že žáci budou mít s řešením úloh na zobecňování problém, jelikož se s nimi během výuky nesetkávají. Proto byly vybrány úlohy, které jsou zadány pomocí geometrických vzorů, a které lze spojit s reálným kontextem. Obrázkové reprezentace byly vybrány tak, že funkční pravidlo je zakotveno již ve struktuře obrázků (Sasman, Linchevski a Olivier, 1999, str. 407). Celkem jsem vybrala čtyři úlohy a seřadila jsem je podle jejich obtížnosti, kterou jsem posuzovala na základě poznatků z teoretické kapitoly a svých zkušeností.

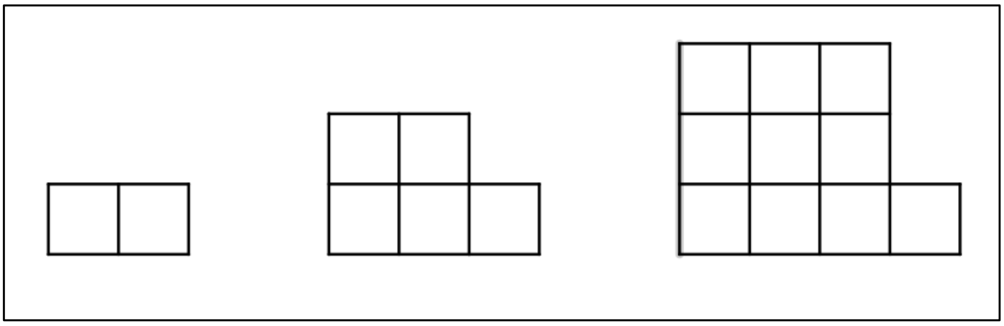
Každá úloha byla nejdříve analyzována, přičemž jsem se zaměřila na nalezení co nejvíce možných přístupů k řešení, které by se při rozhovorech mohly objevit, a na obtíže, které by mohly nastat. V možných přístupech k řešení úloh uvádím vždy nejdříve vyjádření řešení tabulkou a poté slovní popis spojený s algebraickým vyjádřením. Touto přípravou jsem se snažila předejít nechtěnému napovídání při samotných rozhovorech. Mým záměrem bylo vyhnout se tzv. funnelling pattern („trychtýřování“, Vondrová, 2014), přičemž jsem plánovala volit otázky tak, aby žáka podněcovaly k rozvíjení vlastních myšlenek a případně mu pomohly dostat se ze „slepé uličky“ (focusing pattern; „nasměrování“).

Žákům nebylo dopředu prozrazeno, jaký mají úlohy cíl. Na základě geometrického vzoru měli zjistit klíč k pravidelnosti, který je možné zapsat jako zobecněné pravidlo pro tvorbu těchto vzorů. Nebylo nezbytné, aby žáci k přesnému vyjádření pomocí proměnné dospěli, ale bylo důležité, aby poskytli doklady o svém uvažování. Všechny úlohy použité ve výzkumu jsou koncipovány jako otevřené, tudíž jsou předpokládány různé řešitelské strategie. Již výše jsem uvedla, že tabulky mohou tvořit vhodnou podporu pro nalezení pravidla, proto v případě, že žák si nebude vědět s řešením rady, budu se snažit mu pomocí tabulky napovědět.

Smysl proměnných v úlohách byl zvolen různě, aby žáci museli přemýšlet nad významem a získali ihned několik izolovaných modelů pojmu proměnná. Jednou to je strana čtverce, pak propojení závislosti mezi dvěma útvary, samotné čtverce, a nakonec stoly ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku.

Obrazce nebyly očíslovány, ale při rozhovoru na ně bylo odkazováno čísly (první, druhý atd.). Při rozhovoru jsem se plánovala zeptat na několik následujících obrazců (4. a 5.) a poté na takové obrazce, které je již těžké nakreslit, např. padesátý, stý či tisící. Pokud žák dokáže řešení pro tyto obrazce najít, položím mu otázku pro nalezení funkčního vztahu platného pro libovolně velký obrazec.

2.1.1 Úloha *Čtverce*



Obrázek 24: Zadání 1. úlohy, zdroj: vlastní obrázek

Zadání úlohy je převzato z publikace (Sasman, Linchevski a Olivier, 1999, str. 408). Vzor sestává ze čtverce o postupně se zvětšující straně, k němuž je přidán jeden malý čtvereček. Otázka zní: „Kolik ‚malých čtverečků‘ tvoří celý obrazec?“ Hlavní myšlenka této úlohy spočívá v rozdělení obrazce na dva čtverce (velký a malý čtvereček) či na dva obdélníky, kdy jeden je tvořen spodní řadou čtverečků a druhý zbylými čtverečky. Žáci by si při řešení úlohy měli uvědomit, že počet čtverečků, který tvoří velký čtverec, je roven obsahu tohoto velkého čtverce, a poté přičíst malý čtvereček, který znázorňuje jednotku. Podobnou myšlenku lze využít i při výpočtu přes obdélníky.

U úlohy by určitě neměli mít problém žáci, kteří umí dobře pracovat v mříži a dobře rozumí obsahu čtverce/obdélníku.

Možné přístupy k řešení úlohy:

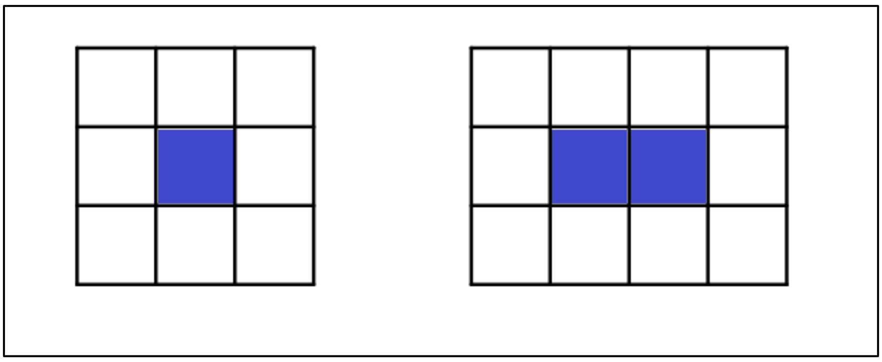
- Vyjádřeno tabulkou:

Obrazec	1.	2.	3.	4.	5.	10.	50.	100.	$n.$
Počet čtverců	2	5	10	17	26	101	2501	10001	$n^2 + 1$

- Žák vypočte obsah velkého čtverce a přičte číslo jedna: $n^2 + 1$.
- Žák vynásobí strana krát strana velkého čtverce a přičte číslo jedna: $n \cdot n + 1$.
- Vezme-li žák spodní řadu čtverců obrazce $(n + 1)$ a přičte horní část $(n \cdot (n - 1))$, dostane hledaný obecný zápis: $(n + 1) + n \cdot (n - 1)$. Jedná se o řešení, kterým rozdělí obrazec na dva obdélníky.
- Žák útvar doplní na plný obdélník, spočte všechny čtverečky a odečte ty, které přidal: $n \cdot (n + 1) - (n - 1)$.

Možné obtíže: Základní problém by mohl být, že žák si nerozdělí útvar na dva různé nebo nedoplní na jeden celý, ale bude pracovat s celým obrazcem. Dalším aspektem by mohlo být, že žák si neuvědomí souvislost s obsahem čtverce či jiného útvaru, a tudíž nebude schopen přijít na hledaný vztah. Oba aspekty budou brány v potaz při rozhovorech v podobě návodných otázek („Lze útvar rozdělit?“; „Jakým způsobem určíš počet čtverečků ve velkém obrazci?“ atd.).

2.1.2 Úloha *Jezírko*



Obrázek 25: Zadání 2. úlohy, zdroj: vlastní obrázek

Zadání úlohy je převzato z publikace (Littler a Benson, 2007, str. 211–212). Otázka, na kterou je hledána odpověď, zní: „Kolik dlaždic lemuje jezírko?“ K této úloze je možné přistupovat z několika hledisek založených na různém rozdělení obrazce (viz níže). Pro tuto úlohu je stěžejní si uvědomit, jaká závislost existuje mezi velikostí jezírka a počtem dlaždic, tedy která veličina je závislá a na čem závisí.

Možné přístupy k řešení úlohy:

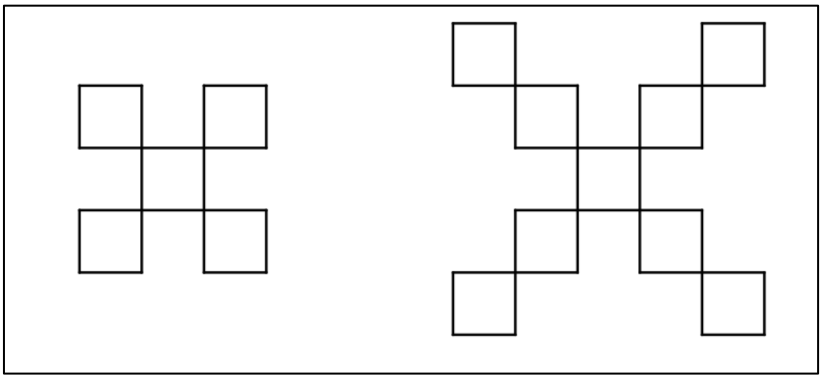
- Vyjádřeno tabulkou:

Obrazec	1.	2.	3.	5.	10.	50.	1000.	n.
Počet čtverců	8	10	12	16	26	106	2006	$2 \cdot n + 6$

- Žák sečte šest krajních dlaždic (napravo a nalevo od jezírka) s dvojnásobkem dlaždic nad a pod jezírkem: $2 \cdot n + 6$.
- Žák vychází z prvního obrázku, ve kterém je kolem jezírka osm dlaždic, a všimne si, že v každém dalším kroku přidá dvě dlaždice: $8 + 2 \cdot (n - 1)$.
- Žák sečte jednu dlaždici napravo a jednu nalevo od jezírka s dvojnásobkem těch, které se nachází nad a pod jezírkem, zvětšeným o dvě dlaždice nacházející se v rozích: $2 + 2 \cdot (n + 2)$.
- Žák sečte čtyři dlaždice v rozích jezírka s dvojnásobkem součtu dlaždic nad jezírkem a jednou dlaždicí: $4 + 2 \cdot (n + 1)$.
- Žák spočte čtverečky v celém obdélníku a poté odečte ty, které tvoří jezírko: $3 \cdot (n + 2) - n$.
- Žák si všimne, že všechna čísla označující počet dlaždic jsou dělitelná dvěma. Počet dlaždic rozdělí na dlaždice nad, pod, napravo a nalevo od jezírka, uvědomí si, že počet dlaždic nad a pod je roven a že to samé platí i pro dlaždice napravo a nalevo od jezírka (pevný počet tři); proto lze vynásobit dvěma součet počtu dlaždic nad jezírkem a tří dlaždic: $2 \cdot (n + 3)$.

Možné obtíže: Někteří žáci by si mohli pouze všimnout, že s každým dalším jezírkem přibydou dvě dlaždice, a svou teorii nijak nerozvést. S touto myšlenkou je důležité pracovat a na základě ní se případně snažit dojít k obecnému vyjádření. Problém by mohl nastat v neuvědomění si, že proměnná nevyjadřuje stranu čtverce, ale čtvereček/y, které tvoří jezírko (narozdíl od předchozí úlohy). Mohly by také vzniknout obtíže v samotné závislosti mezi velikostí jezírka a počtem dlaždic, které ho lemují. Na tyto skutečnosti bude brán při rozhovorech ohled a bude položena otázka na vysvětlení, co proměnná vyjadřuje.

2.1.3 Úloha *Pavouk*



Obrázek 26: Zadání 3. úlohy, zdroj: vlastní obrázek

Zadání úlohy je převzato z publikace od Sasman, Linchevski a Olivier (1999, str. 409). Otázka, na kterou je hledána odpověď, zní: „Kolik čtverečků obsahuje libovolně velký pavouk?“ Úloha je z pohledu rozložení čtverečků oproti předchozím úlohám složitější. Cílem je najít obecný vzorec, ve kterém sčítáme jeden čtvereček (resp. pět čtverečků), který se v jednotlivých členech posloupnosti nemění a čtverečky tvořící jednotlivé „nohy“ pavouka.

Možné přístupy k řešení úlohy:

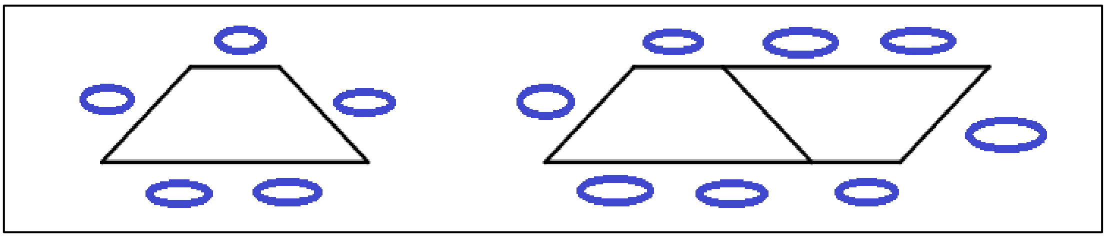
- Vyjádřeno tabulkou:

Obrazec	1.	2.	5.	10.	15.	50.	n.
Počet čtverců	5	9	21	41	61	201	$4 \cdot n + 1$

- Žák vynásobí počet nohou (čtyři) s délkou jedné nohy (počet čtverečků) a přičte jeden prostřední čtvereček: $4 \cdot n + 1$.
- Žák sečte pět základních čtverečků s čtyřnásobkem délky jedné nohy pavouka poníženým o číslo jedna: $5 + 4 \cdot (n - 1)$.
- Žák sečte počet čtverečků, které tvoří nohy pavouka, zvlášť a přičte jeden prostřední čtvereček: $n + n + n + n + 1$.
- Další strategie by mohla vzejít i z rozdělení pavouka na čtverečky na pravé a levé noze: $2 \cdot n + 2 \cdot n + 1$.

Možné obtíže: V této úloze by mohlo žákům dělat obtíže rozložení čtverečků, které je na pohled komplexnější než v předchozích dvou úlohách. Proto byl název úlohy zvolen právě *Pavouk* (přesto, že pavouk má reálně osm nohou), čímž se snažím žákům poskytnout prostředí, které si dokáží představit. Termín *Pavouk* by mohl vyvolat dojem neměnného těla.

2.1.4 Úloha *Stoly*



Obrázek 27: Zadání 4. úlohy, zdroj: vlastní obrázek

Zadání úlohy je převzato z publikace (Blanton a Kaput, 2005, str. 425). Otázka, na kterou je hledána odpověď, zní: „Kolik míst k sezení je k dispozici kolem libovolného počtu stolů?“ Tato úloha je zařazena záměrně až jako poslední vzhledem k využití nového tvaru stolů. Doteď hrály v úlohách svou roli pouze čtverečky, v této úloze je zvolen tvar rovnoramenného lichoběžníku. Je nutné si uvědomit, že dvě židle v čele jsou vždy přítomné a že u každého stolu jsou navíc tři židle, které je nutné vynásobit počtem stolů.

Možné přístupy k řešení úlohy:

- Vyjádřeno tabulkou:

Obrazec	1.	2.	5.	10.	15.	50.	n.
Počet čtverců	5	8	17	32	47	152	$3 \cdot n + 2$

- Žák sečte dvě židle v čele stolů s trojnásobkem počtu stolů (trojnásobek znamená tři židle kolem jednoho stolu): $3 \cdot n + 2$.
- Žák sečte osm židlí u krajních stolů s trojnásobkem počtu stolů poníženým o dva krajní stoly: $8 + 3 \cdot (n - 2)$.
- Žák určí celkový počet židlí kolem stolů a odečte počet židlí, které „zmizí“ přisunutím stolů k sobě: $5n - 2(n - 1)$.

Možné obtíže: V předchozích úlohách pracovali žáci se čtverečky, které jsou pro ně známé a umí s nimi dobře pracovat. Obtíž shledávám v nepravidelném tvaru (mnohoúhelníku), kterým rovnoramenný lichoběžník je. Představa žáků při konstrukci dalších obrazců by proto mohla být náročnější.[15] V této úloze je velmi důležité si uvědomit, co jsou závislé veličiny.

[15] Ze ŠVP obou škol vyplývá, že s lichoběžníkem se žáci poprvé setkávají v 7. ročníku.

Mohlo by se stát, že žák si nebude myslet, že počet lidí u stolu je závislý na počtu stolů, tedy že n nejsou lidé (židle), ale stoly. I proto se během rozhovorů na tuto obtíž budu cíleně zaměřovat a ptát se na význam proměnné. Při výpočtu přes celkový počet židlí a odečtením „zmizelých“ je větší pravděpodobnost udělat chybu kvůli složitosti uvědomění si, jak vyjádřit počet židlí, které je nutné odečíst.

2.2 Výběr žáků

Do výzkumu byli zapojeni žáci 7. a 8. ročníků základních škol s dobrými komunikačními schopnostmi a průměrnými výkony v matematice. Vzhledem ke druhé výzkumné otázce, zda mají vliv na řešení dosažené znalosti žáků, byli vybráni jak žáci, kteří s proměnnou pracovali, tak žáci, pro něž se jednalo o nový pojem.

Výběr škol pro výzkum byl ovlivněn vzniklou pandemií COVID-19. Základní škola A byla zvolena na základě pozitivního přístupu paní učitelky, se kterou jsem komunikovala, k vedení rozhovoru přes videohovor. Základní školu B jsem vybrala na základě dobrých zkušeností a vztahů během praxe v době studia a využívání úloh na zobecňování v rámci výuky dle Hejného metody. Oslovila jsem učitele 7. a 8. ročníků na základní škole A a B ohledně pomoci s výběrem vhodně zvolených žáků na základě mých kritérií (žák 7. či 8. ročníku, komunikativní s průměrnými výsledky v matematice).

Pilotní studie se zúčastnili žáci z mimopražské základní školy A (viz oddíl 1.4.1.2). Na doporučení paní učitelky bylo vybráno 6 žáků. Vzhledem k omezením, která vznikla v rámci pandemie COVID-19 na podzim roku 2020, kdy výuka na školách probíhala pouze distančně, měly rozhovory proběhnout pouze online. Proto se několik žáků výzkumu odmítlo zúčastnit, a nakonec rozhovory proběhly se třemi žáky (viz tabulka 11). Všichni žáci na této škole mají výuku proměnné zařazenou v 8. ročníku. Známky uvedené v tabulce poskytla paní učitelka. Informace z pátého a šestého sloupce byly získány přímo od žáků při rozhovorech.

Tabulka 11: Žáci účastníci se pilotní studie

Žák	Pohlaví	Ročník	Známky na vysvědčení	Oblíbenost matematiky	Pojem proměnná	Délka rozhovoru
Ž1	Chlapec	7.	2–3	Jde mu, ale moc ho nebaví.	Nezná.	50 minut
Ž2	Dívka	7.	1	Jedná se o oblíbený předmět.	Nezná.	30 minut

Ž3	Dívka	8.	2	Nevadí ji.	Už o tom slyšela.	37 minut

Paní učitelka žáky vybrala především pro jejich komunikativnost. Všichni školu navštěvují od 1. ročníku základní školy a setkali se s klasickou výukou (na škole neprobíhá výuka Hejného metodou ani žádnou alternativní metodou). Žáci ze sedmého ročníku proměnnou neprobírali, z osmého ano. Ž1 je žákem 7. ročníku, v matematice je spíše průměrný, ale dle vyučující právě v zajímavých a netradičních úlohách vyniká. Ž2 je výbornou žákyní a řešení matematických problémů ji baví. Přesto, že nesplňuje podmínku průměrného žáka, byla vybrána díky zajímavým řešitelským strategiím, se kterými v hodinách přichází. Ž3 nemá v matematice výborné výsledky a učitelka ji popsala jako tichou dívku, která ale v hodinách mnohdy překvapí svými řešitelskými invencemi.

Hlavní šetření se uskutečnilo na pražské základní škole B (viz oddíl 1.4.1.2). Oproti pilotní studii se tento výzkum konal již prezenčně, a to přímo v budově školy. Rozhovory se konaly v prosinci 2020, kdy žáci do škol docházeli střídavě dle týdnů, tedy vždy jedna třída z ročníku byla přítomna prezenčně a druhá měla distanční výuku a v dalším týdnu došlo k výměně tříd. Učitel matematiky a ředitel školy zajistili pro můj výzkum dobré podmínky. Požadavky na výběr žáků byl stejný jako u pilotní studie – dobré komunikační schopnosti, žáci 7. a 8. tříd a spíše průměrné výkony v matematice. Snaha byla také o to, aby byli co nejvyváženěji zastoupeni chlapci a dívky (viz tabulka 12). Po konzultaci s vyučujícími na škole B se ukázalo, že význam proměnné s jednoduchými úlohami (dosazení za proměnnou, určení hodnoty číselného výrazu atd.) je zařazen v již zmíněném 6. ročníku, ale s explicitně vyjádřeným pojmem se žáci seznámí až v 8. ročníku. Díky výuce dle Hejného metody s podporou výše zmíněné sady učebnic (Hejný et al., oddíl 1.5.1 a 1.5.2) se s proměnnou dříve setká pouze Ž6. Známky uvedené v tabulce poskytli vyučující tříd. Informace z pátého a šestého sloupce byly získány přímo od žáků při rozhovorech.

Tabulka 12: Žáci účastnící se hlavní studie

Žák	**Pohlaví**	**Ročník**	**Známky na vysvědčení**	**Oblíbenost matematiky**	**Pojem proměnná**	**Délka rozhovoru**
Ž4	Chlapec	8.	3	Nemá ji rád.	Něco mu to říká.	28 minut

Ž5	Chlapec	7.	2–3	Baví ho, ale u testů je nervózní, a proto má horší známky.	Už to slyšel.	36 minut
Ž6	Dívka	7.	2	Má ji ráda.	Zaslechla to.	27 minut
Ž7	Dívka	7.	2–3	Nevadí ji.	Nic ji to neříká.	43 minut
Ž8	Chlapec	8.	2	Je to jeho nejoblíbenější předmět.	Zná.	15 minut

Pan učitel vybíral žáky především z pohledu komunikativnosti při hodinách matematiky. Ž4 je průměrným žákem, který nemá k matematice kladný vztah, ale pan učitel ho vyhodnotil jako vhodného kandidáta pro jeho zajímavé nápady, které v hodinách matematiky občas prezentuje. Ze stejné třídy byl zvolen i Ž8, který je v matematice poměrně dobrý a má ji rád. V minulých letech se zúčastnil i několika matematických soutěží, ve kterých podával slušné výsledky. Do stejné třídy 7. ročníku dochází Ž5 a Ž7. Oba žáci mají v průměru stejné známky, ale zatímco Ž5 se snaží v hodinách přispívat svými řešeními, Ž7 se moc nevyjadřuje a snaží se spíše nevyčnívat. Jejich vyučující je vybral především pro to, aby si sám ověřil, jak budou tyto úlohy řešit. Vzhledem k velkému výskytu úloh na zobecňování v Hejného učebnicích bylo cílem zvolit alespoň jednoho žáka, který je vyučován Hejného metodou. Tou je Ž6, která byla učitelem označena jako pracovitá a svědomitá. Předpokládala jsem tedy, že s řešením úloh na zobecňování nebude mít velké obtíže a její řešitelské strategie by mohly být fundovanější.

Od rodičů žáků z pilotní i hlavní studie byl získán souhlas s tím, že rozhovor s jejich dítětem proběhne a že bude nahráván.

2.3 Pilotní studie

Cílem pilotní studie bylo odhalit úskalí, která by při zadávání úloh mohla nastat, a místa, ve kterých se v procesu řešení může vyskytnout problém. Proto bylo velmi důležité, aby byli vybráni žáci, kteří jsou komunikativní a budou při rozhovoru spolupracovat. Rozhovory proběhly na platformě ZOOM.

Na začátku rozhovoru jsem se krátce představila a uvedla důvod, proč dělám daný výzkum. Žáci byli požádáni o souhlas, zda jim nevadí, že vznikne zvukový záznam, a byli požádáni o co největší spolupráci. Rozhovor začal otázkou, jak je u nich matematika oblíbená. Následně již byla zadána první úloha. Na konci rozhovoru byla položena otázka, zda žáci ví, co znamená pojem proměnná.

Pokud žák při rozhovoru nepochopil zadání úlohy, slovně jsem nejdříve obrazce popsala a posléze teprve žák úlohu řešil. Pokud se žáci zmínili o proměnné, snažila jsem se ověřit, že chápou, co proměnná vyjadřuje, popřípadě nahrazuje.

Při řešení úloh nebylo vyžadováno obecné vyjádření, ale snahou bylo, aby žák vyjádřil základní pravidlo, na kterém je úloha založena. V případě, že si žák uvědomoval závislosti a vztahy, které v daných úlohách vznikají, postupně jsem se jej snažila dovést i k možnému zápisu závislosti a jeho úpravě. Pokud došlo k pochopení obecného vyjádření až u následující úlohy, s žákem jsem se vrátila i k předchozím úlohám, u kterých se to zprvu nepodařilo. Výskyt tohoto jevu jsem sledovala u všech žáků.

Doba vypracování úloh byla různá. V tabulce 11 je zaznamenána délka celého rozhovoru od zadání první úlohy až po vyřešení či zakončení poslední úlohy. Žáci sice pracovali ochotně, ale nebyli vždy sdílní a potřebovali více času na formulování svých myšlenek. Doba řešení jednotlivých úloh se ale postupně zkracovala.

Vzhledem k provedení rozhovorů přes konferenční hovor jsem nezískala písemná řešení žáků. Žáci na mou prosbu ohledně zaslání fotografií své práce bohužel nereagovali. Následující řešitelské strategie jsou tudíž popsány na základě zvukového záznamu v ZOOM a mých terénních poznámek.

2.3.1 Úloha *Čtverce*

Ž1 zaskočila netypičnost úlohy. Po zadání úlohy mi řekl, že takové úlohy ve škole neřeší a že neví, jak ji vypočítat. Nejprve jsem mu celou úlohu vysvětlila a se čtvrtým obrazcem mu více pomohla. Ž1 již poté dokázal úlohu řešit sám. Úlohu zprvu řešil pouze geometricky a měl tendence si nakreslit i sebevětší obrazec. Nakonec pravidlo dokázal popsat slovy: „Vypočítáme obsah toho velkého čtverce a pak přičteme ten jeden malý.“ Ze slovního popisu již žákovi nedělalo problém vyjádřit pravidlo pomocí proměnné a, tedy $a \cdot a + 1$. Volbu písmena provedl žák sám s vysvětlením, že se jedná o stranu čtverce.

Ž2 dokázala pro jakékoliv konkrétní číslo určit počet čtverečků (nejdříve pomocí geometrického znázornění, posléze už bez opory), z nichž se daný obrazec skládá. Ve chvíli, kdy jsem si byla jistá, že Ž2 pochopila princip úlohy, zeptala jsem se jí, kolik čtverečků by obsahoval libovolně velký obrazec. Ž2 začala vyjmenovávat jednotlivá dílčí řešení pro konkrétní obrazce. Její řešení jsem odsouhlasila, ale doplnila jsem, že by mě zajímal počet čtverečků u $n$tého obrazce.[16] Ž2 chvíli přemýšlela, ale pak odpověděla, že neví. V tuto chvíli jsme úlohu opustily a zadala jsem úlohu *Jezírko.* U ní Ž2 na obecné pravidlo přišla, a tudíž jsme se vrátily k první úloze. Téměř okamžitě Ž2 určila, že řešení je $a \cdot a + 1$ a zdůvodnila výpočet pomocí obsahu velkého čtverce a přičtení malého čtverečku. Stejně jako u druhé úlohy použila proměnnou a, přestože jsem zadala n.

Ž3 využila také především geometrické reprezentace a na jejich základě pomocí tabulky, kterou si sama udělala, dospěla k obecnému vyjádření pomocí proměnné a: $a^2 + 1$. Písmeno a si žákyně zvolila sama.

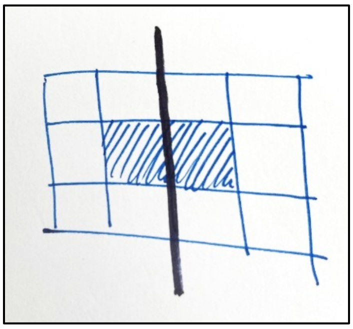
Bohužel jsem se ani jednoho z žáků nezeptala na důvod, proč zvolili jiné písmeno, či zda můžeme volit písmena libovolná. Domnívám se ale, že písmeno a použili díky zažitému prototypu, že strana čtverce je tak nejčastěji označována. Zpětně se domnívám, že kdybych použila písmeno a ve své otázce, mohlo to Ž2 pomoci hned a k úloze by se nebylo třeba vracet.

2.3.2 Úloha *Jezírko*

Na základě předchozí úlohy Ž1 dokázal bez větších obtíží úlohu vyřešit. Pro výpočet si volil dvě z několika možných cest. Slovně popsal a poté obecně vyjádřil pravidlo pomocí výpočtu přes čtyři rohové dlaždice a dlaždice po obvodu jezírka ($2 \cdot j + 2 + 4$), matematický zápis následně dokázal upravit. Pak si navíc všiml, že to není jediný způsob, kterým lze pravidlo vyjádřit. Jelikož se díval na obrázek s jezírkem o velikosti dvě, rozdělil si útvar na dvě části podle obrázku 28. Nahlas přemýšlel, že vlastně má stejný počet dlaždic na obou stranách, takže je to dvakrát počet dlaždic a může zkoumat jen tu levou část. Nakreslil si obrázek jezírka o velikosti tři a zjistil, že jeho pravidlo již neplatí, protože jezírko nelze dobře rozdělit. Tento způsob tedy opustil. Všiml si ale, že na každé straně jsou tři krajní dlaždice, které tam jsou za každé situace. Na základě toho vyřkl pravidlo: „Ty dlaždice můžeme vypočítat tak, že vezmeme ty tři dlaždice napravo a tři nalevo, to je šest, a pak ty nad a pod jezírkem, a to je vlastně dvakrát počet jezírka.“ Tento postup zapsal algebraicky: $6 + 2 \cdot j$. Zeptala jsem se na písmeno j, co v zápisu znamená. Ž1 odpověděl, že to je počet čtverečků v jezírku.

[16] Předpokládala jsem, že písmeno žákyni pomůže více, ale zpětně vyjádření „u *n*tého obrazce“ vnímám jako neobratnost. V případě, že bych zůstala u vyjádření „u libovolného“, mohla bych Ž2 zjednodušit přechod k *n*.

Ž2 opět dokázala úlohu vyřešit pro všechny konkrétní velikosti jezírka. Na otázku ohledně libovolně velkého[17] jezírka si nakreslila ještě několik dalších obrázků a pak se vyjádřila: „Jedná se vždy o dvě řady dlaždic, ke kterým musíme přičíst dvě dlaždice z kratších stran.“ Nic jsem nevyvracela a nechala jsem ji ověřit, zda to platí. Nevycházelo jí to, proto si po chvíli znovu situaci nakreslila a pak prohlásila: „Vlastně musím přičíst šest dlaždic, a ne dvě. Já jsem zapomněla na ty čtyři rohové dlaždice.“ Poté již správně vyjádřila pravidlo slovním popisem i s pomocí proměnné: $2 \cdot a + 6$.



Obrázek 28: Rozdělení útvaru dle Ž1

Ž3 jako jediná v tomto případě zvolila opačný postup a nejdříve si spočítala všechny čtverečky, kterými je obdélník tvořen, a poté odečetla počet čtverečků, které tvoří jezírko. Jediné, co jí dělalo problém, bylo vzpomenout si, jak vypočítá obsah obdélníku, což nakonec sama odvodila. Algebraicky svůj postup vyjádřila takto: $3 \cdot (n + 2) - n$.

2.3.3 Úloha *Pavouk*

Ž1 vyřešil oproti dívkám úlohu jiným způsobem. Vycházel z prvního obrázku, který tvoří pět čtverečků s tím, že v každém dalším přidá čtyři čtverečky. Takto popsal pravidlo slovně a nejdříve si zcela nevěděl rady, jak pravidlo vyjádřit algebraicky. Zapisoval si proto jednotlivé dílčí výpočty, až nakonec prohlásil: „Jasně, takže první je pět, pak devět, pak třináct, takže máme těch pět a k tomu musíme přičíst čtyřikrát počet nohou [ve čtverečcích][18] a zmenšený o čtyři [čtverečky přidružené k prostřednímu], což je $5 + 4 \cdot n - 4$.“ Proměnnou n označil jako počet čtverečků v jedné noze.

[17] Po předchozí zkušenosti s otázkou na *n*tý obrazec jsem zvolila otázku na libovolně velké jezírko s předpokladem, že by takto položená otázka mohla Ž2 pomoci více. Otázku jsem záměrně položila i z důvodu, že libovolně velké jezírko je snáze představitelné než *n*té jezírko.

[18] Poznámky v hranatých závorkách upřesňují objekty, které žák explicitně nezmínil v mluveném slově, ale ukazoval na ně při rozhovoru.

Úlohu *Pavouk* vyřešila Ž2 bez obtíží a pravidlo vyjádřila ihned algebraicky: $4 \cdot n + 1$. Významu proměnné rozuměla: „Za písmeno n dáme počet čtverečků v jedné té noze." Zajímavé je, že v tuto chvíli již použila proměnnou n. Taktéž zde ale z mé strany nedošlo k prověření přesného důvodu.

Ž3 řešila úlohu stejně jako Ž2, jen využila pro zobecnění tabulku, kterou si sama opět udělala.

2.3.4 Úloha *Stoly*

Úloha *Stoly* činila Ž1 největší problém. Nedokázal najít žádné pravidlo, které by platilo pro všechna n. Geometricky si dokázal znázornit konkrétní případy, ale nevytvořil si generický model pravidla.

Ž2 dokázala úlohu vyřešit bez problémů. Obecné řešení nejdříve shrnula slovním popisem: „No, vždycky máme ty dvě židle a pak u každého stolu jsou tři, takže ten počet stolů vynásobíme třemi a přičteme ty dvě židle." Poté jej vyjádřila algebraicky jako $3 \cdot n + 2$, přičemž n správně popsala jako počet stolů.

Stejně jako u úlohy *Jezírko* zvolila Ž3 postup pomocí výpočtu všech židlí, od nichž odečetla židle mezi stoly, které se srazí dohromady. Výpočet jí trval o něco déle než Ž2, ale ke správnému výsledku se u konkrétních výpočtů vždy dostala. Algebraicky pravidlo zapsala takto: $5 \cdot n - 2 \cdot (n - 1)$.

2.3.5 Shrnutí pilotní studie

Tabulka 13: Shrnutí řešení pilotní studie

	Čtverce	*Jezírko*	*Pavouk*	*Stoly*
Ž1	$a \cdot a + 1$	$2 \cdot j + 2 + 4$ $6 + 2 \cdot j$	$5 + 4 \cdot n - 4$	Nevyřešil obecně, pouze dílčí řešení.
Ž2	$a \cdot a + 1$	$2 \cdot a + 6$	$4 \cdot n + 1$	$3 \cdot n + 2$
Ž3	$a^2 + 1$	$3 \cdot (n + 2) - n$	$4 \cdot n + 1$	$5 \cdot n - 2 \cdot (n - 1)$

Pilotní výzkum byl z mého pohledu celkově překvapením. Očekávala jsem, že s žáky všechny úlohy nestihneme, ale rychlost, kterou úlohy vyřešili, předčila má očekávání. Na rozdíl od Ž1 dokázaly obě dívky úlohy vyřešit i pomocí matematického zápisu. Rychlost vyřešení jednotlivých úloh se u každého žáka zvyšovala, vyjma Ž1, u kterého to platilo pouze do úlohy *Pavouk*. Vyskytly se různé řešitelské strategie, což jsem očekávala. Postupně také žáci potřebovali méně kreslit a graficky reprezentovat dílčí řešení. Ve chvíli, kdy pochopili princip úloh, začali hledat vztahy a pravidla určující dané obrázky.

Na základě nejasností, které vznikly během pilotních rozhovorů, jsem v přípravě na hlavní studii provedla určité úpravy, především co se týče zadávání úloh. Přestože jsem se snažila žákům neudávat směr či nepomáhat nevhodnými otázkami, zpětně ze zvukových záznamů jsem zjistila, že jsem žáky občas nasměrovala více, než bylo třeba. Uvědomila jsem si také, že je nutné vědět důvod výběru písmene, pomocí kterého žák zapisuje pravidlo, a zaměřit se na nástroj tabulky a žákům ho nabídnout (v pilotním výzkumu jej využila pouze Ž3).

2.4 Hlavní studie

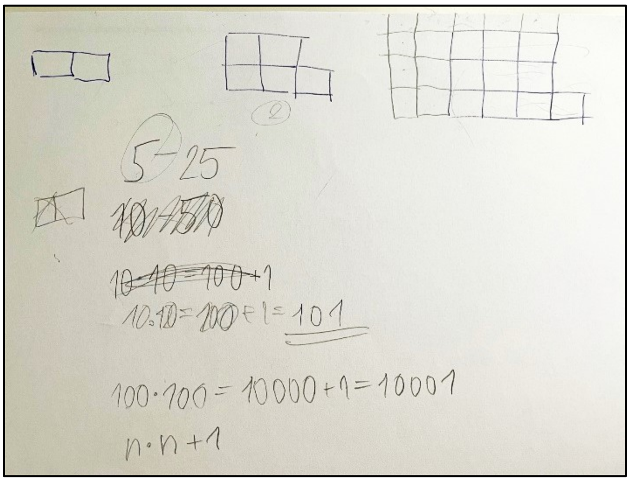
Rozhovory v rámci hlavní studie probíhaly prezenčně na chodbě školy, což nemělo velký vliv na soustředění žáků, jelikož, jak je zmíněno výše, obsazenost školy byla poloviční a ruch ze tříd nebyl slyšitelný. Průběh rozhovorů byl nahráván pouze zvukově na mobilní zařízení, s čímž každý žák vyslovil souhlas.

Začátek rozhovoru byl stejný jako v pilotní studii. Každý žák měl k dispozici vytištěné zadání úloh a čisté papíry, které mohl využít k poznámkám, a byl požádán, aby veškeré své postupy a myšlenky zaznamenával na papír či slovně popisoval. Na konci rozhovoru byla položena otázka, zda žáci vědí, co znamená pojem proměnná. Průběh rozhovoru byl stejný jako u pilotní studie, jen s větší snahou o nenapovídání, připraveností nabídnout tabulku jako nástroj řešení a snahou zjistit důvod volby písmene pro proměnnou.

Jak je vidět z tabulky 12, délka rozhovorů se velmi lišila, pohybovala se od 15 do 43 minut. Důvodem byly jak problémy s řešením úloh, tak i ochota či neochota některých žáků o způsobech řešení i o úlohách hovořit.

2.4.1 Úloha *Čtverce*

Řešení Ž4 je znázorněno na obrázku 29. Do pátého obrazce žák úlohu vyřešil pomocí grafického znázornění. Začal si být nejistý, když jsem se zeptala na desátý obrazec. První myšlenka, kterou žák rozvinul, byla, že pokud pátý obrazec tvoří dvacet pět čtverečků, pak desátý obrazec tvoří padesát čtverečků. Zeptala jsem se, jak došel k výpočtu dvaceti pěti čtverečků pro pátý obrazec. Znovu si tedy výpočet přepočítal a opravil se na dvacet šest čtverečků (chyba nastala v důsledku toho, že se mu celý obrazec nevešel na papír). Má další otázka zněla, zda mezi těmi jednotlivými obrázky vzniká vztah v podobě přímé úměrnosti, který žák nastínil svou výše uvedenou úvahou. Žák zkusil daný poměr pro obrazce na nižších pozicích a jeho předpoklad nevycházel. Po chvíli dívání se na obrazce řekl, že u druhého obrazce jsou vlastně dva čtverečky krát dva čtverečky, takže dohromady čtyři, a ještě musí přičíst jedničku. Zkusil tedy svou tezi ověřit pro obrazec číslo deset. Přesto sám nebyl přesvědčený, že tomu tak opravdu je. V hlavě nejdříve zkusil výpočet pro menší čísla s grafickým ověřením, a nakonec si nakreslil i desátý obrazec. Došel ke zjištění, že tomu tak opravdu je. Poté své pravidlo dokázal aplikovat i na další obrazce a zapsat obecným vyjádřením: $n \cdot n + 1$.



Obrázek 29: Řešení Ž4 úlohy *Čtverce*

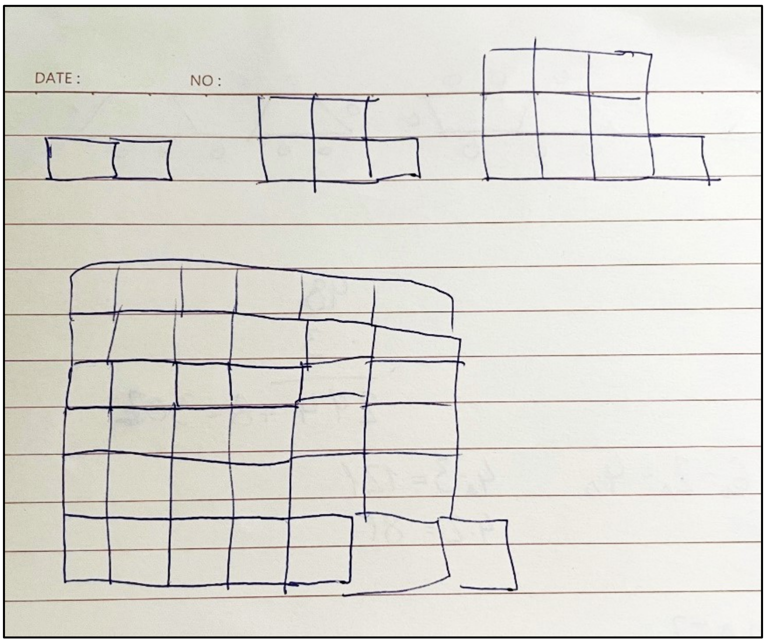
Ž5 a Ž8 si pravidlo propojili s výpočtem obsahu čtverce a přičtením čísla jedna. Jediné, v čem se lišili, bylo zvolené označení. Ž5 použil algebraické vyjádření $a \cdot a + 1$, kde a vyjádřil jako délku strany většího čtverce. Na mou otázku ohledně volby písmene odpověděl, že stranu čtverce vždycky ve škole označují a. Ž8 vyjádřil vztah jako $x^2 + 1$, kde x^2 byl podle něj počet čtverečků ve větším čtverci. Podobně jako Ž5 odpověděl, že neznámá čísla je zvyklý označovat písmenem x.

Ž7 dokázala pravidlo vyjádřit pouze slovně: „Počítá se to jako obsah čtverce a přičtu jedničku.“ Problém nastal, když jsem se zeptala na $n$tý obrázek.[19] Snažila jsem se zjistit, jak písmeno chápe. „Co si pod n představuješ?“ „Nějaké písmenko.“ „A můžeme něco dosadit za to písmenko?“ „Nějaké číslo.“ Přesto, že Ž7 vlastně pravidlo vyjádřila slovy přesně, nedokázala

[19] Ž7 jsem položila nejdříve otázku na libovolně velký obrazec, na kterou mi nebyla schopná vůbec nic odpovědět, proto jsem zkusila zvolit otázku na *n*tý obrazec.

přejít od slovního popisu k matematickému. Nabídla jsem jí možnost použít tabulku, ale s tou pracovat nechtěla.

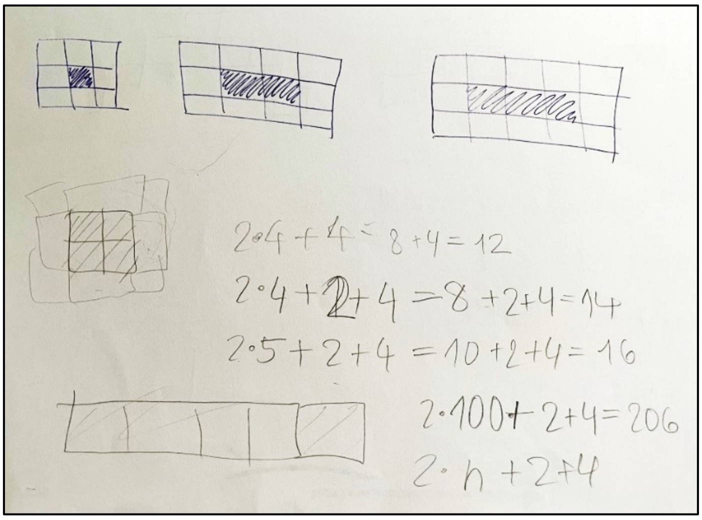
Ž6 nejdříve dílčí řešení kreslila (viz obrázek 30). Velký obrazec v dolní části obrázku v sobě skrývá nakreslený čtvrtý, pátý a šestý obrazec. Ž6 nejdříve hledala souvislosti v počtu nabývání čtverečků. Když jsem se jí zeptala na desátý obrazec, pronesla, že tam musí existovat nějaké pravidlo. Zopakovala si tedy nahlas řadu čísel, která jí vznikla, z čehož jí nic nevyplynulo. Pak prohlásila, že je to vždycky: „To krát to plus jedna." Má otázka směřovala na vysvětlení, co myslím tím „to". Odpovědí bylo: $x \cdot x + 1$. Na otázku, co je x, odpověděla, že libovolný obrazec, pro který to chceme vypočítat, což následně opravila na stranu většího čtverce.



Obrázek 30: Řešení Ž6 úlohy *Čtverce*

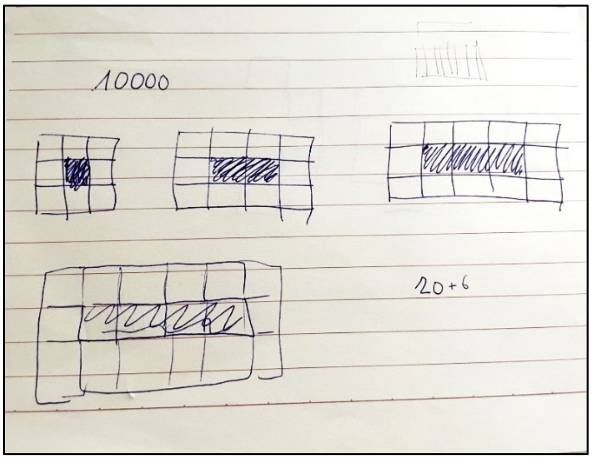
2.4.2 Úloha *Jezírko*

Ž4 předvedl zajímavý pohled na situaci a to, že dle obrázku 31 si čtvrtý obrazec v řadě nakreslil úplně jiným způsobem, než byla daná řada. Nechala jsem ho to tak provést a vyřešit. Výpočet provedl správně, ale posléze jsem mu vysvětlila, že se nejedná o obrazec, který by vycházel ze zadané posloupnosti, a že budeme pokračovat v dané řadě a nechť výpočet provede znovu. Ž4 s tím neměl problém a situaci dokázal popsat i obecně (vždy počítal dvakrát počet jezírek, což jsou dlaždice pod a nad jezírkem, pak dvě ze stran a čtyři v rozích, viz jeho výpočty na obrázku 31).



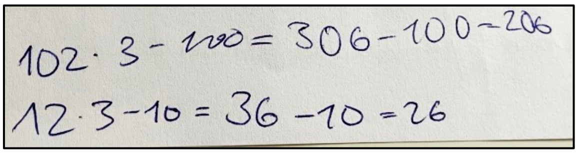
Obrázek 31: Řešení Ž4 úlohy *Jezírko*

Ž6 po zadání úlohy vznesla dotaz, jak jezírko tvořit dále, zda v řadě, jako je tomu v zadání, nebo i jiným způsobem. Bylo překvapující, že nápad jiného postavení měli dva žáci nezávisle na sobě. Úlohu pak vyřešila bez větších obtíží. Zvolila postup přes součet šesti krajních dlaždic a dvojnásobku dlaždic nad jezírkem (resp. pod jezírkem). Tento vztah vyjádřila pomocí proměnné n, $2 \cdot n + 6$. Zádrhel se vyskytl při vysvětlování, co proměnná vyjadřuje. Žákyně začala plést dlaždice s jezírkem a teprve při návratu k dílčím výpočtům si ujasnila, že se jedná o velikost jezírka.



Obrázek 32: Řešení Ž6 úlohy *Jezírko*

Ž5 volil stejně jako Ž7 výpočet obsahu celého obdélníku a následně odečetl jen čtverečky vyznačující jezírko. Ž5 narozdíl od Ž7 dokázal vztah vyjádřit i pomocí proměnné. Ž7 se jako u předchozí úlohy nedokázala dostat od slovního popisu k matematickému zápisu. Jak lze vidět na obrázku 33, žákyně dokázala provést libovolný výpočet pro desátý či stý obrazec, slovně popsat své myšlenky, ale pomocí matematických symbolů nikoliv. Ž5 oproti tomu popsal slovně i matematicky pravidlo $3 \cdot (n+2) - n$, kde n správně označil jako velikost jezírka.



Obrázek 33: Řešení Ž7 úlohy *Jezírko*

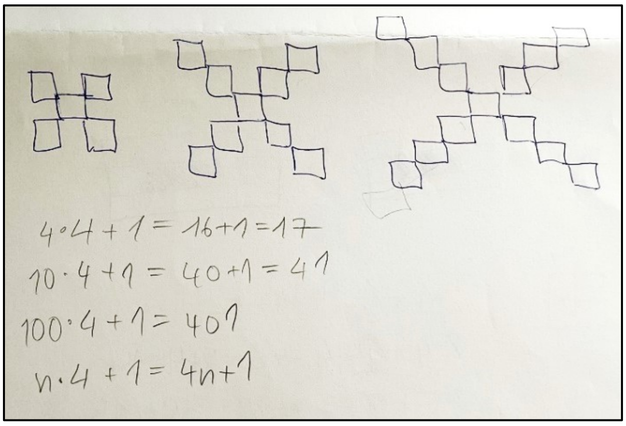
Ž8 neměl s úlohou žádné velké potíže. Postup si nezapisoval, ale své myšlenky říkal nahlas. Vzhledem k počítání dílčích výpočtů zpaměti udělal chybu, kterou si při kontrole sám našel. Jeho strategie byla stejná jako u Ž6.

2.4.3 Úloha *Pavouk*

V této úloze neměl potíže žádný žák s výjimkou Ž7, která ani tuto úlohu nebyla schopna obecně zapsat. Slovní popis pravidla ale zvládla.

Ž6 se u této úlohy vrátila k řešení první úlohy a snažila se najít propojení těchto dvou úloh, což se jí nedařilo, proto se pak soustředila jen na úlohu *Pavouk*.

Žáci se při řešení úlohy *Pavouk* rozdělili na dvě skupiny, kdy jedna (Ž5, Ž6) řešila přes výpočet pomocí pěti prostředních čtverečků a zbylí žáci (Ž4, Ž7, Ž8) řešili přičtením jednoho prostředního čtverečku. Ž7 také nejdříve zvolila postup přes prostředních pět, ale u výpočtu stého pavouka nechtěla počítat $99 \cdot 4 + 5$, tak navrhla, že je pro ni výhodnější spočítat $4 \cdot 100 + 1$ a je to také správně. Ostatní žáci počítali všechny možnosti stejným způsobem.



Obrázek 34: Řešení Ž4 úlohy *Pavouk*

Žáci v první skupině vyjádřili algebraicky svá řešení jako $5 + 4 \cdot (n - 1)$, kde n vyjadřuje počet čtverečků v noze. Druhá skupina žáků, s výjimkou Ž7, vyjádřila vztah následovně: $4 \cdot n + 1$, kde n vyjadřuje taktéž počet čtverečků v noze.

2.4.4 Úloha *Stoly*

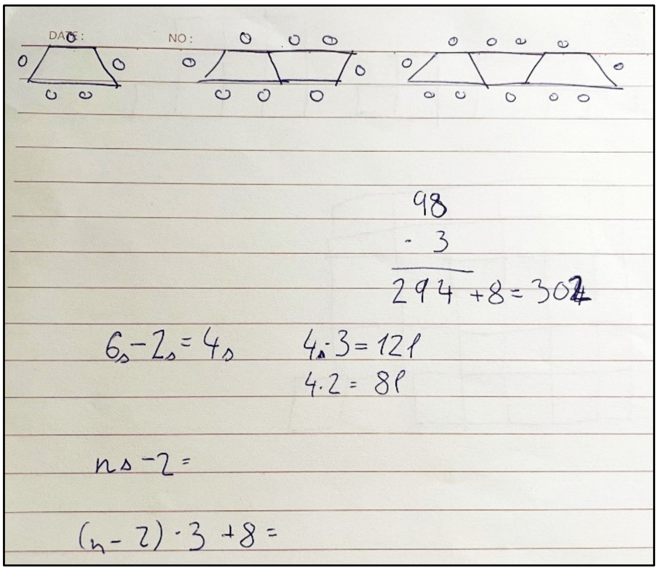
U této úlohy se objevilo více různých strategií řešení. Zcela bez komplikací vyřešil úlohu Ž8, který vyslovil myšlenku, že u každého stolu jsou tři židle a pak musíme přičíst ještě dvě krajní. To aplikoval na všechny výpočty a vyjádřil řešení i obecně jako $3 \cdot n + 2$, kde písmenem n označil počet stolů.

Ž5 a Ž7 zvolili stejný postup pomocí výpočtu všech míst k sezení a následného odečítání míst, které zmizí přisunutím stolů. Ž5 narozdíl od Ž7 dokázal vztah vyjádřit i algebraicky. Ž5 opět zůstala pouze v rovině slovního popisu: „Vezmu počet stolů a vynásobím to pěti a odečtu vždycky dvakrát číslo o jedno menší, než je počet stolů.“ Ž5 vyjádřil vztah následovně: $5 \cdot s - 2 \cdot (s - 1)$, kde s znázorňuje počet stolů.

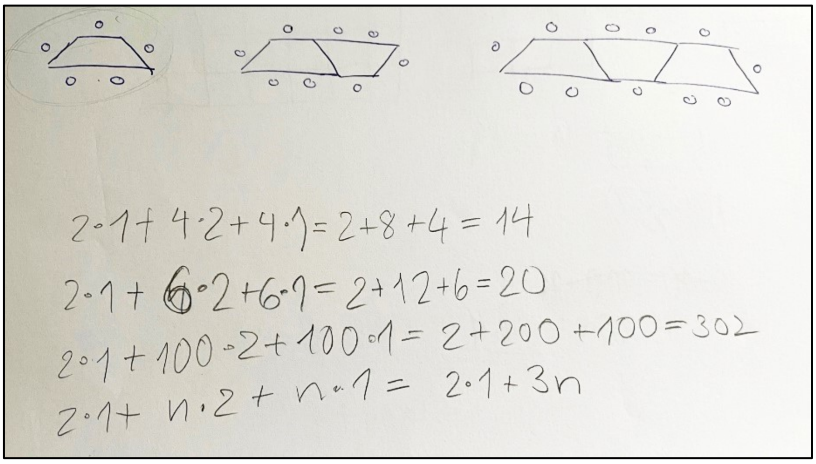
S písmenem s pracovala i Ž6, jak ukazuje obrázek 35, ale v úplně jiném kontextu. Ž6 si na základě známých údajů tvořila různé výpočty. Písmeno s představuje v jejím zápise pouze jeden stůl, písmeno l znamená lidi. Prostředním výpočtem ($6s - 2s = 4s$) počítá počet míst okolo šesti stolů, kdy odečítá dva krajní stoly, kolem kterých se posadí osm lidí, a zbylé čtyři stoly vynásobí třemi ($4s \cdot 3 = 12l$), což je počet osob, které mají místo u prostředních stolů. Stejný výpočet aplikuje i pro sto takto postavených stolů. Ve spodní části obrázku je zobecnění jejího postupu. Jako jediná zvolila řešení, kdy počítá zvlášť s celými krajními stoly; písmeno n vyjadřuje počet stolů.

Ž4 zvolil ještě jiné řešení (viz obrázek 36), postupně si vypisoval možnosti, jaké mohou nastat. Nejdříve počítal dvakrát židli na kraji a přičetl počet stolů vynásobený počtem míst na delší straně stolu a počet stolů vynásobený počtem míst na kratší straně stolu. Na základě dílčích výpočtů dokázal pravidlo zobecnit.

Znalost pojmu rovnoramenný lichoběžník nehraje při řešení úlohy roli. Z výsledků vyplývá, že ani vyšší náročnost na představu zadaného útvaru nezpůsobovala žákům obtíže a úlohu vyřešili (vyjma Ž1 v pilotní studii).



Obrázek 35: Řešení Ž6 úlohy *Stoly*



Obrázek 36: Řešení Ž4 úlohy *Stoly*

2.5 Shrnutí pilotní i hlavní studie

Do shrnutí jsou zařazeny i výsledky žáků z pilotní studie, jelikož řešili stejné úlohy a ve vedení rozhovorů nebyly velké rozdíly (viz tabulka 14).

Tabulka 14: Shrnutí řešení pilotní a hlavní studie

	Čtverce	***Jezírko***	***Pavouk***	***Stoly***
Ž1	$a \cdot a + 1$	$2 \cdot j + 2 + 4$ $6 + 2 \cdot j$	$5 + 4 \cdot n - 4$	Nevyřešil obecně, pouze dílčí řešení.
Ž2	$a \cdot a + 1$	$2 \cdot a + 6$	$4 \cdot n + 1$	$3 \cdot n + 2$

Ž3	$a^2 + 1$	$3 \cdot (n + 2) - n$	$4 \cdot n + 1$	$5 \cdot n - 2 \cdot (n - 1)$
Ž4	$n \cdot n + 1$	$2 \cdot n + 2 + 4$	$4 \cdot n + 1$	$2 \cdot 1 + 3 \cdot n$
Ž5	$a \cdot a + 1$	$3 \cdot (n + 2) - n$	$5 + 4 \cdot (n - 1)$	$5 \cdot s - 2 \cdot (s - 1)$
Ž6	$x \cdot x + 1$	$2 \cdot n + 6$	$5 + 4 \cdot (n - 1)$	$(n - 2) \cdot 3 + 8$
Ž7	„Počítá se to jako obsah čtverce a přičtu 1.“	„Vypočtu plochu jezírka i dlaždic a odečtu velikost jezírka.“	„Vynásobím čtyřma velikost nohou a přičtu jedničku.“	„Vezmu počet stolů a vynásobím to pěti a odečtu vždycky dvakrát číslo o jedno menší, než je počet stolů.“
Ž8	$x^2 + 1$	$2 \cdot n + 6$	$4 \cdot n + 1$	$3 \cdot n + 2$

Nahrané rozhovory a písemná řešení žáků byla podrobena kvalitativnímu zkoumání, ve kterém bylo cílem zjistit, jak žáci při řešení uvažovali.

Jak ukazuje tabulka 14, vyskytly se různé řešitelské strategie. Téměř všichni žáci byli úspěšnými řešiteli a průběh rozhovorů mě překvapil. Celkově jsem očekávala, že všechny úlohy ani nestihneme.

Obecně lze říci, že žáci postupovali v řešení úloh v souladu s mým očekáváním. Zpočátku úlohy řešili pomocí grafického znázornění, ze kterého odvozovali obecná pravidla. Postupně potřebovali méně kreslit a graficky reprezentovat dílčí řešení. Ve chvíli, kdy pochopili princip úloh, začali hledat vztahy a pravidla určující dané obrázky. Pouze jedna žákyně (Ž3) využila pro svá řešení tabulku, kterou si sama udělala. Ostatní žáci na mou radu ohledně využití tabulky nereagovali. Tabulku jsem jim nabízela v případě, že jsem viděla, že jejich zápis je nepřesný a nevědí, jak úlohu dál řešit. Žák Ž4 sice nevyužil přímo tabulku, ale zapsal si strukturovaný zápis, z něhož odvodil zobecnění.

Úlohu *Čtverce* dokázali vyřešit všichni žáci. Strategie řešení se nijak nelišily. Pouze Ž3 a Ž8 vyjádřili algebraický zápis ve zkrácené formě, ostatní žáci jej nechali v nezkrácené podobě. V úloze *Jezírko* se objevily tři způsoby řešení. Ž1 a Ž4 zvolili řešení přes výpočet čtyř rohových dlaždic a přičtením dlaždic po obvodu jezírka. Ž1, Ž2, Ž6 a Ž8 úlohu vyřešili sečtením dlaždic nad a pod jezírkem a šesti dlaždic na stranách. Ostatní žáci řešili výpočtem celkového počtu čtverečků zmenšeným o počet čtverečků tvořících jezírko. U úlohy *Pavouk* se objevily dva způsoby řešení, sečtením všech čtverečků v nohách a jednoho prostředního čtverečku (Ž2, Ž3, Ž4, Ž7, Ž8) a využitím prostředních pěti čtverečků (Ž1, Ž5, Ž6). Úlohu *Stoly* vyřešilo algebraickým zápisem sedm žáků a objevily se čtyři různé strategie řešení. Ž2 a Ž8 vyřešili úlohu sečtením dvou krajních židlí s počtem stolů vynásobeným počtem lidí. Stejní žáci (Ž3, Ž5, Ž7) jako u druhé úlohy zvolili výpočet všech míst k sezení zmenšený o místa, která zmizí spojením stolů. Ž6 zvolila originální řešení. Sečetla počet míst kolem dvou krajních stolů a místa kolem prostředních stolů. Obdobně originální řešení navrhl Ž4, který počítal místa na krátkých a dlouhých stranách stolů zvlášť a přičetl dvě místa v čele.

Zajímavé u Ž7 je, že nedokázala přejít od slovního popisu k algebraickému zápisu i přesto, že s úlohou dokázala pracovat jako ostatní žáci. Odpověděla mi na všechny mé otázky týkající se konkrétních výpočtů a dovedla vyřešit úlohy i pro velká čísla. Bohužel se ji nepodařilo najít korespondenci mezi slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen.

Cílem mé práce bylo mj. porovnání způsobu řešení žáků, kteří proměnnou již znají, s těmi, pro které se jedná o nový pojem. Zajímalo mě, zda žáci, kteří proměnnou znají, používají jiné postupy či jsou v řešení rychlejší a zda jim jejich znalost proměnné při řešení pomáhá. Došla jsem k závěru, že tento faktor (stejně jako fakt, že Ž6 se na rozdíl od ostatních žáků učí dle Hejného metody) nehraje u mnou zkoumaných žáků žádnou roli. Z výsledků není patrné, že by žákyně měla výhody plynoucí ze znalosti prostředí úloh na zobecňování. Faktor nehrál při řešení úloh žádnou roli ani v úspěšnosti řešení, ani mezi způsoby a rychlostmi řešení. Rychlost řešení se odvíjela i od komunikativnosti žáků. Někteří cítili potřebu o řešení více diskutovat, jiní řešení znali, ale trvalo nějakou dobu, než mi dokázali na otázky odpovědět.

Nakonec uvedu několik význačných jevů, k nimž při rozhovorech došlo.

Za prvé, překvapující pro mě bylo, že dva žáky u úlohy *Jezírko* napadlo nakreslit si čtvrtý obrázek jiným způsobem, než byla zadána řada. Ž6 se mě přímo zeptala, jak bude řada pokračovat, tam jsem z mého pohledu zareagovala správně. Zpětně bych situaci u Ž4 vyhodnotila jinak, nechala bych jej výpočet provést a zeptala se, jak by nakreslil pátý obrázek. Nastala by situace, že by se musel rozhodnout, v jakém vzoru bude pokračovat, a sám by na základě toho mohl vyhodnotit, že je třeba dodržet předepsaný tvar. Navíc neproběhlo porovnání obou výsledků, které se vzájemně liší.

Za druhé bych vyzdvihla způsoby řešení Ž4. Pozitivně shledávám jeho nepřesvědčení pouhým jedním konkrétním příkladem u úlohy *Čtverce*. Jeho potřeba grafického znázornění a využití více případů signalizovala, že nad úlohou opravdu přemýšlí. To se projevilo i u úlohy *Jezírko*, ve které navrhl dva správné způsoby řešení a jedno nesprávné rozpracoval.

Za třetí, někteří žáci použili jiné písmeno, než bylo zadáno, což jsem původně nepředpokládala. Z odpovědí žáků hlavní studie plyne, že se jedná o následek prototypického myšlení. Nejvíce je to vidět z prvního sloupce u úlohy nazvané *Čtverce* v tabulce 14. S výjimkou dvou žáků se objevuje označení strany čtverce a nebo x. Obojí značení je nejčastěji používáno v mnoha řadách učebnic. Různá písmena využívali žáci i u druhé a čtvrté úlohy, přičemž u jednoho žáka se jednalo o označení písmene jako předmětu. Z teoretické části vyplývá, že chápání písmene jako předmětu je vhodné pro prvotní představu. Je nutné ověřit, zda žákova představa je opřena o znalost, že se jedná o počet daných předmětů nikoliv o předmět sám. Při ověření se mi potvrdilo, že žáci chápou význam proměnné.

Zajímalo mě také, zda řešení nějaké úlohy pomůže žákům vyřešit ostatní úlohy. V jednom případě se stalo, že žákyně (Ž2) nejdříve první úlohu nevyřešila a teprve pak, když úspěšně vyřešila druhou úlohu, byla schopna první úlohu *Čtverce* dořešit. Tedy zkušenost ze druhé úlohy pozitivně ovlivnila řešení první. Je možné, že žákyně potřebovala více zkušeností s daným typem úloh. Teprve u druhé úlohy si zřejmě uvědomila podstatu úloh na zobecňování. Ž6 se u úlohy *Pavouk* vrátila k řešení první úlohy a snažila se hledat souvislosti mezi úlohami, které by ji vedly k rychlejšímu nalezení řešení. Stejného postupu využil i Ž1 u druhé úlohy.

Práce s proměnnou v tomto pojetí při řešení úloh byla pro většinu žáků novou zkušeností. Závěrem jen konstatuji, že i žáci, kteří matematiku označili jako neoblíbený předmět, úlohy řešili s nadšením, diskutovali se mnou a argumentovali svá řešení.

3 Závěr

Diplomová práce měla za cíl zjistit, jaké řešitelské strategie žáci používají při řešení úloh na zobecňování a zda na jejich řešení má vliv předchozí znalost proměnné. Byly provedeny rozhovory s osmi žáky, kterým byly předloženy čtyři úlohy na zobecňování. Tyto úlohy byly převzaty či inspirovány úlohami použitými v zahraničním výzkumu. Žáci byli v řešení úloh poměrně úspěšní a využili různé formy obecného vyjádření závislosti pomocí písmen či slovním popisem. Kromě jedné žákyně, která byla schopna si vytvořit jen generický model, se všichni žáci dostali až do stádia abstraktní znalosti a dokázali použít algebraické vyjádření. U každé úlohy žáci navrhli alespoň dva různé způsoby, jak ji lze řešit, přičemž nejvíce řešení nabídli u úlohy *Stoly*. Ukázalo se, že pokud mají žáci dostatek času a podporu, jsou schopni úlohy na zobecňování řešit. Výzkumem nebyly zjištěny velké rozdíly ve způsobu ani rychlosti řešení z pohledu absolvované výuky a znalosti proměnné ze školního vyučování, což však vzhledem k malému vzorku nelze zobecnit na celou populaci žáků. Rychlost žáků při řešení úloh byla individuální a odvíjela se od více aspektů shrnutých v oddíle 2.5.

Výsledky mého výzkumu nejsou v souladu s mým očekáváním. Na základě analýzy učebnic i výsledků z testování TIMSS jsem předpokládala, že žáci budou mít při řešení úloh obtíže, a to zejména při identifikaci a vyjádření funkční závislosti v úlohách na zobecňování. V mém vzorku žáků se však tyto obtíže neprojevily. Tento rozpor lze vysvětlit malým počtem žáků, se kterými jsem pracovala. Na základě rozhovoru s osmi žáky nelze dělat závěry, že čeští žáci jsou schopni úlohy na zobecňování řešit bez velkých obtíží. Úspěšnost žáků lze přisoudit jejich výběru – lze předpokládat, že při jiném výběru žáků bych získala výsledky jiné. Za druhé, na rozdíl od testování TIMSS můj výzkum probíhal pouze mezi žákem a mnou, přičemž žákovi byly kladeny otázky postupně a na další úroveň se přicházelo až po získání výsledku předchozí úrovně. Nelze zcela srovnávat výsledky písemného testu, u kterého je žák sám, a rozhovoru, u kterého výzkumník klade otázky dle aktuální situace. Dalším rozdílem mezi výzkumy je počet úloh. V mém výzkumu žáci řešili sadu čtyř úloh stejně zaměřených. Lze tedy očekávat, že při řešení každé další úlohy mohli žáci využít i zkušenosti z řešení předchozí úlohy (což se i při několika rozhovorech stalo – čas nutný pro řešení úloh se u mnohých žáků postupně zkracoval a žáci rychleji získávali do další úlohy vhled). Oproti tomu TIMSS se zaměřuje na více matematických oblastí rozdělených na menší části, přičemž Řady a posloupnosti tvoří jednu z nich a žáci se setkali jen s jednou úlohou daného typu. Dalším nesrovnatelným aspektem je volba úloh. V mém výběru se neshodovala ani jedna úloha s úlohou z TIMSS. Já jsem se mj. snažila zvolit takový kontext úloh, který by byl českým žákům blízký, a úlohy tak lépe řešitelné.

Domnívám se, že cíl diplomové práce byl splněn. Výzkum přinesl vhled do matematického uvažování žáků, popsala jsem žákovské strategie řešení a způsob, jakým do řešení žáci vnesli proměnnou. Na základě toho, že zkoumaní žáci byli schopni samostatně nebo po nápovědě zadané úlohy vyřešit, se domnívám, že úlohy na zobecňování by bylo možné v české výuce matematiky využít. Hlavní přínos úloh na zobecňování shledávám v přirozené cestě k procesuálnímu i konceptuálnímu generickému modelu, což vede žáky k potřebě použití symbolu k zápisu obecného jevu. Při řešení úloh se písmeno v roli proměnné do hry dostává zcela přirozeně. Na základě toho si žáci uvědomují smysl symbolického zápisu a hlavně jeho opodstatnění. Jak jsem uvedla při analýze učebnic, v učebnici z nakladatelství H-mat se vyskytuje proměnná zadávaná především písmenem n. I já sama jsem jiné písmeno pro zobecnění nepoužila. Na základě rozhovorů s žáky bych doporučila, aby byla volena i jiná písmena či aby byla volba přenechána žákům.

Diplomovou práci a zejména úlohy v ní uvedené mohou využít učitelé matematiky jako podklad pro výuku proměnné či jako diagnostický nástroj, jak jejich žáci proměnné rozumí. Popsané vhledy do uvažování žáků mohou učitelům ukázat, s čím mohou přijít jejich žáci, a uvedené nápovědy jim mohou pomoci úlohy implementovat. Jak bylo již uvedeno, výsledky rozhovorů nelze zobecnit. Bylo by tedy vhodné provést šetření na větším vzorku žáků s cílem zjistit, které řešitelské strategie se mezi žáky objevují nejčastěji a jaké obtíže při jejich řešení nastávají. Domnívám se, že téma úloh na zobecňování si zaslouží větší pozornost, než je mu věnována. Potenciál úloh je zatím pro většinu učitelů skryt.

Pro mou učitelskou praxi byl nejpřínosnější kontakt s žáky a možnost nahlédnout do jejich uvažování. Roli výzkumníka jsem si vyzkoušela poprvé. Zjistila jsem, jak je tato role obtížná a na jakých drobnostech záleží. Výzkumu vždy předchází dlouhá příprava, a přesto při samotném rozhovoru nastane situace, kterou tazatel neočekává. Rozhovory a následná analýza záznamů mi umožnily hlouběji proniknout do kritického místa výuky algebry a hlavně do myšlenkových procesů žáků. V budoucnu by mi práce mohla pomoci při výběru vhodných úloh k výuce proměnné. Potěšilo mě, že při poděkování žákům za součinnost a pomoc s vypracováním mé diplomové práce se někteří zajímali, zda bude možné do ní nahlédnout. Cítila jsem, že se mnou nespolupracovali jen proto, že museli, ale samotný výzkum je zajímal. Po rozhovoru mi několik z nich povědělo, že je řešení úloh bavilo a klidně by je řešili i při hodinách matematiky. Z reakcí žáků usuzuji zájem o nové poznání a řešení netradičních úloh.

4 Literatura

BLANTON, Maria L. a James J. KAPUT (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.

BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Česká školní inspekce (ČŠI): TIMMS [online], [cit. 2021-05-15]. Dostupné: https://www.csicr.cz/cz/home

ELY, Robert a Anne E. ADAMS (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x? *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 19–38. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0029-9

FUCHS, Eduard a Eva ZELENDOVÁ, eds. (2013). *Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace.* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2021-5-19]. Dostupné z www: https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

HEJNÝ, Milan (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (ed.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, sv. 1, str. 23–42.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. Mate*matika pro 2. ročník základní školy*, *1. díl*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy, 2. díl.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*, *příručka pro učitele*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus, 2009.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika, Hejného metoda C*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2016.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika CD, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2017.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika*, *Hejného metoda D*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2017.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika, Hejného metoda E*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2017.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika, Hejného metoda F*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018.

KNUTH, Eric J., Martha W. ALIBALI, Nicole M. MCNEIL, Aaron WEINBERG a Ana C. STEPHENS (2005). Middle school student's understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37(1), 68–76. https://doi.org/10.1007/BF02655899

KVASZ, Ladislav (2013). Historické aspekty vyučování algebry. In RENDL, Miroslav et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, str. 301–324

LITTLER, Graham a David BENSON (2007). Pravidelnosti vedoucí k algebře. In *Náměty na podnětné vyučování matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, str. 197–256

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV): RÁMCOVÉ VZDĚLÁVACÍ PROGRAMY [online], [cit. 2021-02-27]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani

NOVÁKOVÁ, Eva a Naďa VONDROVÁ (2015). Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In *Metodické komentáře ke Standardům ZV k oboru matematika* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2021-5-18], str. 8–41. Dostupné z www: http://www.nuv.cz/t/metodicke-komentare

RADFORD, Lorraine (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in Mathematics Education* (str. 303–322). Berlin: Springer-Verlag.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace, 24*(1), 22–57. http://dx.doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22

SASMAN, Marlene C., Liora LINCHEVSKI a Alwyn OLIVIER (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In J. Kuiper (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (str. 406-415). Harare, Zimbabwe.

TOMÁŠEK, Vladislav. *Výzkum TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2009.

TOMÁŠEK, Vladislav. *Výzkum TIMSS 2007: obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2008.

VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019.

VONDROVÁ, Naďa. *Úvod do didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014.