Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Geometrické pojmy kolmost a rovnoběžnost ve 4. a 5. ročníku ZŠ

Geometrical concepts of perpendicularity and parallelism in 4th and 5th grade of primary school

Alena Kopecká

Vedoucí práce: PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Geometrické pojmy kolmost a rovnoběžnost ve 4. a 5. ročníku ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 27.6.2021

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí diplomové práce PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za cenné rady, odborný komentář, trpělivost a za všechen věnovaný čas. Dále bych chtěla poděkovat účastníkům výzkumu a v neposlední řadě rodině a přátelům za jejich podporu.

Abstrakt

Diplomová práce se zaměřuje na žáky 4. a 5. tříd základních škol, u kterých je zkoumána znalost geometrických pojmů kolmost a rovnoběžnost a hloubka jejich porozumění.

V teoretické části práce jsou vymezeny geometrické pojmy kolmost a rovnoběžnost. Další kapitoly představují různé teorie zabývající se procesem budování poznatků a kategorie vymezující vývoj jazyka užívaného v geometrii. V rámci kurikulárních dokumentů jsou také zkoumány výstupy týkající se této problematiky za 2. vzdělávací období. Následně jsou popsány tři učebnicové řady, způsob, jakým připravují žáky na porozumění těmto pojmům a jak je zavádějí.

Praktická část zahrnuje kvalitativní výzkum ve formě před-experimentu a dvou experimentů. Nástrojem zkoumání byly vytvořené pracovní listy s různorodými úlohami v tomto tématu, které měly prověřit znalosti žáků o kolmosti a rovnoběžnosti na různých úrovních. Tyto experimenty byly nahrávány a posléze analyzovány prostřednictvím pozorovaných jevů. Na základě těchto jevů byly pak zodpovězeny výzkumné otázky stanovené na začátku výzkumu.

Klíčová slova: kolmost, rovnoběžnost, propedeutické úlohy, hloubka porozumění, experiment

Abstract

The diploma thesis is focused on pupils attending 4th and 5th grade in primary school. These children are observed for their knowledge of perpendicularity and parallelism and their ability to use it in practice.

The theoretical part describes two geometrical terms – perpendicularity and parallelism. Other chapters describe different theories of learning, the process of knowledge construction and also the stages of language development in geometry. Furthermore the thesis explores the topic in state curriculum documents. The geometrical terms and their occurance, frequency and preparative tasks are searched in different textbooks.

The practical part includes experiments based on qualitative research. The survey is conducted through a worksheet with different types of tasks which were chosen to test the participants´ knowledge of above-mentioned terms. These experiments were recorded and analyzed by means of phenomena that appeared. The phenomena allowed me to answer the questions that were posed in the beginning of the research.

Key words: perpendicularity, parallelism, preparative tasks, depth of knowledge, experiment

Úvod

Jako téma své diplomové práce jsem si vybrala *Geometrické pojmy kolmost a rovnoběžnost ve 4. a 5. ročníku základních škol.* S těmito pojmy, které se mohou v oblasti Geometrie snadno ztratit, se žáci mohou setkat v různých podobách, ale třeba ne tak často. Záleží na tom, jaký přístup učitel volí, nebo jak toto téma pojímají učební materiály.

Než jsem si zvolila toto téma, věděla jsem, že se chci věnovat geometrii, kterou jsem po celá léta povinné školní docházky měla v oblibě. Byla jsem jeden z těch šťastnějších jedinců, kteří měli dobrou představivost, potřebnou pro pochopení mnoha geometrických témat. Měla jsem zálibu především v rovinách, jejich vzájemných polohách a řezech 3D tělesy. Při studiu na vysoké škole jsem se však seznámila s trochu jinou geometrií, kde se úlohy zaměřují na logické přemýšlení, řešení problémů, či hledání více řešení. Často jsem si pak kladla otázku, zda je pro žáky lepší naučit se pár vzorečků zpaměti a mechanické nácviky pro rýsování, nebo dostávat podněty k přemýšlení a řešit problémové úlohy. Po pěti letech studií na Pedagogické fakultě se spíše přikláním ke druhé možnosti. Jedním z důvodů je, že jsem mezi spolužačkami, budoucími učitelkami, vnímala strach a značnou nejistotu, které pramenily z představy vyučování geometrie. Věřím tedy, že výuka geometrie způsobem, kdy žáci mohou manipulovat s různými pomůckami a přicházet na zákonitosti vlastními objevy, může tento postoj budoucích generací ke geometrii změnit. I proto jsem si vybrala právě takové téma, ve kterém mohu pozorovat přístupy žáků při řešení různých úloh a jejich schopnost popasovat se s nimi.

V teoretické části práce se věnuji základní terminologii vymezující termíny kolmost a rovnoběžnost. Dále shrnuji teorie zabývající se hloubkou žákova porozumění pojmům, jejich formování a etapizací geometrického jazyka, který mapuje vývoj myšlení žáka. Poté se zaměřuji na pojetí kolmosti a rovnoběžnosti kurikulárními dokumenty. Nakonec analyzuji jejich výskyt ve třech učebnicových řadách pro 1. až 5. ročník.

Praktickou část práce jsem realizovala formou pozorování a rozhovoru, při kterém účastníci vyplňovali mnou vytvořený pracovní list. Z těchto rozhovorů jsem následně zaznamenávala jevy, které jsem dále komentovala.

Cílem této práce je zkoumat, do jaké míry žáci těmto dvěma pojmům rozumí, tzn. na konkrétních řešeních úloh sledovat jejich postupy a evidovat v nich jevy, které umožňují posoudit míru porozumění těmto pojmům. V úvodu praktické části je cíl konkrétně formulován dílčími otázkami. Zpracováním experimentu budu schopna odpovědět na dílčí otázky, a tím pravděpodobně splním cíl této práce.

Teoretická část

1. Vzájemné polohy přímek

Pro přesnější porozumění pojmům kolmost a rovnoběžnost, kterými se tato práce zabývá, je první kapitola věnována jejich vymezení různými autory.

Pro určování vzájemných poloh dvou přímek je žádoucí zmínit, o jaké přímky se jedná, tj. zda tyto přímky leží ve stejné rovině, či nikoliv. Tento fakt nám totiž určuje množství vztahů, které jsou pro dvě přímky možné. Podle Kouřima můžeme přímky, *„které leží v téže rovině, nazývat komplanární a přímky, které neleží ve stejné rovině, nekomplanární."* (Kouřim, 1985. str. 18)

Podle Perného také určujeme vzájemné polohy přímek podle toho, *„co je jejich průnikem"*. (Perný, 2009, str. 42) V případě, že přímky mají právě jeden společný bod, jedná se o přímky různoběžné. Přímky, které mají společné všechny body, nazýváme rovnoběžné splývající. Pokud nemají přímky žádný společný bod a leží ve stejné rovině, označujeme jejich vztah za rovnoběžnost. Stejná situace u nekomplanárních přímek vyústí v mimoběžnost. (Perný, 2009, str. 42) V rámci 1. stupně základní školy se žáci se vztahem mimoběžnosti nekomplanárních přímek mohou setkat jako s ne-modelem výše zmíněných vztahů. Je také možné, že tento vztah objeví zvídaví žáci např. na modelu krychle.

1.1. Kolmost

Perný popisuje kolmost jako zvláštní případ různoběžných přímek, které svým průnikem *„rozdělí rovinu na čtyři shodné části. Tyto shodné části nazýváme pravými úhly."* (Perný, 2009, str. 43)

Pomykalová pak definuje kolmost jako odchylku, tedy úhel, který různoběžné přímky svírají. *„V případě, že se velikost úhlu rovná 90°, nazýváme různoběžky přímkami kolmými neboli kolmicemi."* (Pomykalová, 1993, str. 19)

1.2. Rovnoběžnost

Přímky ležící v jedné rovině, *„které mají od sebe stále stejnou vzdálenost, se nazývají rovnoběžné."* (Perný, 2009, str. 42)

Vztah rovnoběžnosti může být podle Csachové et al. určen podle odchylky. *„Odchylku dvou přímek definujeme jako velikost menšího z úhlů, který tyto přímky svírají."*

(Csachová et al., 2012, str. 22) Jelikož dvě rovnoběžné přímky nevytváří průnik, velikost odchylky je 0°. (Csachová et al., 2012)

F. Kuřina definuje tento vztah s pomocí úhlů, které svírá *„jiná přímka ve stejné rovině protínající obě zkoumané přímky*." (Kuřina, 1996, str. 38) Dle jeho popisu jsou dvě přímky rovnoběžné právě tehdy, když jsou střídavé úhly, které svírá přímka protínající tyto dvě přímky, shodné. (Kuřina, 1996, str. 38)

Pod tento vztah zároveň spadá i totožnost přímek. (Csachová et al., 2012;) Jiní autoři také mluví o splývajících přímkách, kdy dvě přímky mají všechny své body společné. (Pomykalová, 1997; Perný, 2009)

2. Teorie poznání

2.1. Teorie generického modelu

Teorie generického modelu je etapizací poznávacího procesu založenou na myšlenkách matematika Víta Hejného, který byl přesvědčen, že problémy žáků s matematikou jsou způsobeny mechanickým učením. Na základě toho bylo popsáno pět etap, které mapují cestu k hlubokému porozumění.

Schéma teorie generického modelu dle Milana Hejného:

motivace	→	izolované modely	→ 1	generický model	→ 2	abstraktní poznatek	→	krystalizace

(Hejný, 2014, str. 40)

První fází je *motivace*, která vyjadřuje potřebu žáka vyřešit *„rozpor mezi existujícím stavem nevím a intencí potřebuji znát"* (Hejný, 2014, str. 43). Tato etapa je velmi křehká, závisí na předchozích úspěších a zkušenostech s naplňováním potřeb. Velkou roli zde hraje dospělý, který by měl s ohledem na potřeby dítěte jemně pomáhat v jeho usměrňování, ale nebránit mu v jeho přirozené zvídavosti. (Hejný a Kuřina, 2015)

Další etapou jsou dle Hejného a Kuřiny (2015) *izolované modely.* V této fázi dítě nabývá konkrétních zkušeností, které mu pomohou v budování příštího poznatku. Pro určitý jev je nutno nasbírat tolik izolovaných modelů, aby v nich dítě mohlo objevit propojení a vytvořit obecný model. Když žák odhaluje stejné chování u série různých izolovaných modelů, nastává první *mentální zdvih*, který vede k další fázi. Podle Jirotkové je pro budování pojmu dobré, aby se žák setkal v této fázi nejen se zástupnými modely, ale také s *„ne-modely, zdánlivými modely a modely překvapivými."* (Jirotková, 2012, str. 20)

Jakmile nastane proces zobecnění, posouváme se dále k fázi *generických modelů*. Generický model je jakýmsi obecným prototypem izolovaných modelů určitého jevu. I když byl vytvořen spojením množství konkrétních případů, tvoří také vzor pro zatím neobjevené izolované modely. *„Člověk, který má tuto vazbu u daného poznatku vytvořenou, umí k danému izolovanému modelu vytvořit paralelní model v jiné sémantické situaci."* (Hejný, Kuřina, 2015)

Druhým *mentálním zdvihem* se od generického modelu dostáváme k *abstraktnímu poznatku*. Charakteristickým znakem pro tuto fázi je užívání matematického jazyka s pomocí písmen. Žáci se s *jazykem písmen* mohou setkat již na prvním stupni, ve větší míře však na druhém stupni ZŠ. (Hejný, Kuřina, 2015)

Ve chvíli, kdy zkušenosti z předchozích etap začnou vstupovat do kognitivní struktury žáka a utvářet propojenou síť, dochází ke *krystalizaci*. V této etapě jsou získané poznatky porovnávány s těmi předchozími, přehodnocovány a utvářeny do nových struktur. Hejný a Kuřina však uvádějí, že umístění této fáze na konec poznávacího procesu není zcela přesné. Stejně tak tvrdí Hejný ve své tzv. „modré knize", že proces krystalizace spíše probíhá paralelně s ostatními fázemi. (Hejný a Kuřina, 2015; Hejný, 2014).

Nezbytnou součástí celého poznávacího procesu jsou *aha momenty*, které dítě zažívá při objevování matematických zákonitostí. Je zřejmé, že doprovázející pocity radosti z vlastní činnosti a úspěchu mají velký vliv na průběh každé etapy. Pokud jsou některé z těchto etap urychleny učitelem, nebo podceněny, může docházet k tvorbě nežádoucích *formálních poznatků*. (Hejný a Kuřina, 2015)

2.2.Úrovně geometrického porozumění

S teorií geometrického porozumění přišel holandský pár van Hiele, který pozoroval obtíže žáků při výuce geometrie a na základě zkušeností pak popsal vývoj porozumění geometrickým pojmům v pěti úrovních. Byli přesvědčeni o tom, že pro skutečné porozumění komplexních geometrických konceptů musí žák projít nižšími úrovněmi. Pro charakteristiku těchto úrovní čerpám z prací autorů M.Mason (1998) a J. Břehovský (2011). V závorkách uvedu překlad úrovní podle J.Břehovského (2011).

- Level 1: Visualization (Vizualizace)

Dle M. Masona (1998) jsou žáci v této počáteční fázi schopni rozpoznat obrazec podle vzhledu, jeho vlastnosti však ještě nevnímají. Často dochází k porovnávání s již známým prototypem[1]. Žákova rozhodnutí jsou řízena vnímáním, ne zdůvodněním. J. Břehovský také uvádí, že často poznávané základní tvary, žáci propojují se zástupcem z reálného světa, např. čtverec vypadá jako dlaždice. V případě, že se daný obrazec liší od prototypu polohou, může dojít k chybnému určení.

- Level 2: Analysis (Analýza)

Na této úrovni M. Mason (1998) uvádí, že žáci vidí obrazce skrze soubor jejich vlastností. Tyto vlastnosti dokáží identifikovat a pojmenovat u různých tvarů, avšak ještě

[1] **prototyp** = zastupující model pro určitou komunitu izolovaných modelů (Hejný, 2013, str. 53)

nenachází vztahy mezi nimi. Autor také zmiňuje, že při charakterizování obrazců žáci dokáží vyjmenovat jejich vlastnosti, ještě ale nezvládnou rozeznat, které jsou pro jejich charakteristiku opravdu podstatné.

- Level 3: Abstraction (Abstrakce)

Tato fáze je podle M. Masona(1998) charakteristická schopností žáka najít vztahy jak mezi útvary, tak mezi jejich vlastnostmi. Žáci rozvíjejí svou argumentaci a uvádí jednoduché definice. „Rozpoznají rozdíly mezi jednotlivými typy tvarů, mezi pojmy čtverec a čtyřúhelník, rozumí nutným a postačujícím podmínkám. Na této úrovni nelze provádět geometrické důkazy, žák nechápe komplexní argumenty." (Břehovský, 2011, str. 20)

- Level 4: Deduction (Dedukce)

V této úrovni „žák chápe objekty pomocí deduktivních odůvodnění, kombinuje formu a systém formálních důkazů." (Břehovský, 2011, str. 20) Jak tvrdí M. Mason (1998), žáci jsou schopni porozumět také definicím a axiomům. S touto etapou se můžeme setkat především u středoškolské geometrie.

- Level 5: Rigor (Přesnost)

Na této poslední úrovni žáci rozumí deduktivnímu geometrickému systému a pohybují se i v neeukleidovské geometrii.

M. Mason (1998) ve své práci také odkazuje na Level 0, pocházející od autorů Clements a Battista, kteří ho pojmenovali jako *„Předrozpoznávání"* (G. Vlková, 2016, str. 25). V této nulté fázi si žáci všímají jen některých vzhledových charakteristik útvarů, což často vede k neschopnosti rozlišit různost tvarů.

Dále M. Mason (1998) zmiňuje, že postup jednotlivými etapami není spojený s věkem žáků, nebo jejich vyspělostí. Záleží na zkušenostech, které žák vzděláváním získal. Některé zkušenosti mohou žáka posouvat dál, jiné ho mohou v posunu i brzdit.

Častou překážkou pro výstup na další level je rozdíl mezi úrovněmi vyučujícího a jeho studentů. K dosažení efektivnosti komunikace by měl učitel nejprve zjistit úroveň svých žáků, a poté přizpůsobit interpretaci daného tématu jejich úrovni.

Pro lepší porozumění a podpoření posunu žáků do další fáze přišel Van Hiele s pěti fázemi, které mohou být učiteli pomocné při organizaci výuky a formulování instrukcí. Fáze popsané M. Masonem (1998), jejich překlad v závorkách od J. Břehovského (2011):

Information (Informace) - S pomocí diskuze učitel zjišťuje úroveň žáků a jejich povědomí o tématu.

1. Guided orientation (Vést žáky k orientaci) - Skrze řízenou a pečlivě naplánovanou manipulativní činnosti, jako skládání, stavění, měření žáci poznávají tvary. Učitel by se měl ujišťovat o naplnění cílů daných aktivit.
2. Explicitation (Jednoznačnost) - Žáci vlastními slovy popisují známé objekty. Učitel pak pro ně zavádí základní matematické pojmy.
3. Free orientation (Volná orientace) - Žáci aplikují získané znalosti pro řešení problémových úloh. Nové informace by měly přicházet skrze vlastní objevování.
4. Integration (Integrace) - Žáci dokáží shrnout získané informace, zařadit je a vidět propojení s dalšími poznatky.

2.3.Pojmotvorný proces

Na základě teorií L.S. Vygotského a J. Piageta představil M. Hejný et al. (1989) etapy, kterými si žák prochází při poznávání geometrických objektů.

1. Etapa synkretická

V této etapě žáci vyčleňují zážitky, které se pojí s budoucím pojmem. Zkoumají objekty hlavně skrze manipulaci a pozorování. Zatím nedochází ke specifikaci představ a propojením se slovním pojmenováním.

2. Etapa předmětných představ

Zde si žáci budují představy o osobnostech objektů, které však zůstávají spojené s konkrétními jevy reality. Začínají pojem popisovat s použitím hovorového jazyka, či ikonických zápisů. V této fázi je důležitá možnost manipulace s pojmem.

3. Etapa intuitivně-abstraktních představ

Tato etapa se vyznačuje širším užíváním termínů. Pojmy a jejich vlastnosti se navzájem propojují v představách žáka. Manipulativní činnost se již odehrává v hlavě žáka.

4. Etapa strukturální

V této etapě se *„pojem stává prvkem axiomatizované teorie."* (Hejný et al., 1989, str. 29)

Pro první stupeň ZŠ je nejpodstatnější druhá etapa a přechod do etapy třetí. Od učitelů se očekává znalost třetí etapy, a to proto, že by měl znát směr, kam své žáky vede.

2.4.Bloomova taxonomie

Původní Bloomova taxonomie vytvořena v roce 1956 sloužila jako rámec pro tvorbu takových testů, aby skutečně odpovídaly úrovni znalostí, kterých má žák dosáhnout. Dále pomáhala stanovovat cíle tak, aby se cíl hodnocení a cíl vzdělávání ubíraly stejným směrem. Po čtyřech dekádách došlo k její inovaci. Důvodem byla především potřeba obohatit teorii o nové poznatky rozvíjející se kognitivní psychologie a přizpůsobit ji změnám tehdejšího amerického školství. Nově uspořádaná kategorizace se skládá ze dvou dimenzí, a to *dimenze znalostní* a *dimenze kognitivního procesu*. (Hudecová, 2004, str. 5) Pro účely této práce se zaměřím pouze na uspořádání dimenze kognitivního procesu, která popisuje vzdělávací cíle dle náročnosti z hlediska žákovy kognitivní aktivity.

První kategorií je *Zapamatovat,* kdy je žák schopen identifikovat daný poznatek a vyvolat ho z dlouhodobé paměti. Druhá kategorie *Porozumět* zahrnuje kognitivní procesy interpretování, klasifikování, doložení příkladu, sumarizování, porovnávání, vysvětlování a odvozování. Následující kategorií je *Aplikovat*. Zde žák používá postupy a procesy k řešení známých úloh, či nových problémových situací. Další kategorie *Analyzovat* zahrnuje *„rozložení materiálů na na části a určení, jaký je vzájemný vztah částí a v jakém jsou vztahu k celkové struktuře nebo účelu."* (Hudecová, 2004, str. 6) V kategorii *Hodnotit* by měl žák být schopen posuzovat na základě určených kritérií a standardů a kontrolovat průběh procesu. V poslední kategorii *Tvořit* nalezneme procesy navrhování, plánování a konstruování.

Toto rozvrstvení mentálních procesů umožňuje učitelům lépe formulovat cíle výuky, vybírat vhodné nástroje a aktivity. Dle Průchy má však Bloomova taxonomie význam i pro psychologii učení, protože specifikuje, *„které kognitivní operace mají být uplatňovány prostřednictvím vyučování."* (Průcha, 2020, str. 44)

3. Etapizace jazyka

Protože žáci mladšího školního věku přirozeně nedoprovází svou manipulativní činnost slovy, je na učiteli, aby poskytl žákovi k aktivitě slovní doprovod. Z počátku učitel žáka slovně doprovází, časem žák přebírá slova učitele a začíná je sám užívat. Nebo učitel zadává takové aktivity, kde má dítě potřebu doprovázet činnost (řešitelský proces) slovním komentářem, např. hra Telefon, Sova (kde má dítě přirozenou potřebu slovního doprovodu). Vývoj doprovodného jazyka žáka zaznamenala D. Jirotková (2012), která ho na základě experimentů a pozorování rozdělila do sedmi etap.

0. **Etapa beze slov** - Tato etapa, označena jako nultá, je charakteristická samostatnou žákovou prací bez slovního doprovodu. Informace, které v průběhu činnosti žák získá autorka nazývá *poznáním v činnosti.*

1. **Etapa slovesného slovního doprovodu** - Pro tuto etapu je typické užití ukazovacích zájmen místo podstatných jmen. Žáci dokáží s pomocí tohoto jazyka popisovat svou činnost. K porozumění takového mluveného komentáře je však nutné konkrétní situaci vidět.

2. **Etapa metaforického jazyka** - Zde se setkáváme se slovními popisy, které jsou založeny na předchozích zkušenostech jedinců. Žáci začínají využívat metafor, které jsou dobře srozumitelné. Riziko užití tohoto jazyka spočívá v nepřesnosti, která může být důsledkem komunikačního nedorozumění, nebo vázanosti na kontext.

3. **Etapa upřesňování metaforického jazyka** - S nepřesností metaforického jazyka přichází potřeba specifikace jeho pojmů. Během tohoto procesu dochází také k upřesnění představ a budování základů pro porozumění budoucím termínů.

4. **Etapa nástupu matematického jazyka** - Charakteristikou této etapy je přecházení z metaforického do matematického jazyka. Tato fáze jazyka by měla být učitelem časově přizpůsobována specifickým potřebám každého jedince, aby se zamezilo komplikacím při osvojování pojmů. Někteří žáci mohou matematické termíny přijmout, zatímco jiní na to ještě nejsou připraveni.

5. **Etapa nástupu znakového systému** - Po uvedení matematického jazyka je často zaveden jazykový systém s využitím znaků. Typicky je užíváno ikonických znaků pro vyjádření některých geometrických tvarů, vztahů jako kolmost (⊥) a rovnoběžnost (||), nebo vlastních znaků vymyšlených žáky.

6. **Etapa matematické terminologie a znakového systému** - V této etapě je kladen důraz na přesnost vyjádření určitého termínu s frekventovaným užitím znaků. Tato preciznost s sebou může nést nesrozumitelnost a větší mentální zátěž. Zároveň ale u žáků, kteří jsou na tuto fázi mentálně připraveni *„urychluje kultivaci jejich abstraktního myšlení"*. (Jirotková, 2012, str. 112)

7. **Etapa axiomatizace** - K použití tohoto jazyka, který využívá k popisům axiomy, dospějí spíše studenti *„vysokoškolské matematiky na matematicko-fyzikální fakultě"*. (Jirotková, 2012, str. 113)

(D. Jirotková, 2012)

4. Zakotvení v kurikulárních dokumentech

V této kapitole se zabývám obsahem kurikulárních dokumentů jak na státní, tak na školní úrovni, a popisuji jejich vymezení konkrétně pro kolmost a rovnoběžnost. Na státní úrovni pracuji s obsahem Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) a pro popis vzdělávání v tomto tématu na jednotlivých školách použiji školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP) tří škol, s jejichž žáky jsem prováděla experimenty ve výzkumné části.

4.1.RVP

RVP ZV vymezuje Geometrii jako jeden z tematických okruhů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Dále jsou pak charakterizovány vzdělávací obsahy každého okruhu, které jsou formulovány očekávanými výstupy a učivem. Tyto očekávané výstupy, které říkají, co by měl žák zvládnout, jsou rozděleny na 1. období (výstupem je 3. ročník) a 2. období (výstupem je 5. ročník). Výstupy spojené s tématem této práce najdeme na konci 2. vzdělávacího období.

První nepřímou zmínku o kolmosti a rovnoběžnosti můžeme v tomto dokumentu najít již v úvodním popisu tematického okruhu Geometrie, kde jsou zmíněny činnosti žáků jako: *„uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině“*. (RVP ZV, str. 30) Jeden z obsahových bodů učiva tohoto okruhu konkrétně specifikuje téma *„vzájemná poloha dvou přímek v rovině“.* (RVP ZV, str. 34) Výstup *M-5-3-01 „narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník)”* (RVP ZV, str. 33) nespecifikuje užití kolmic, avšak pro sestrojení čtverce již žáci musí znát postup jejich tvoření. Podle očekávaného výstupu *M-5-3-03* za druhé období by pak měli být žáci ukončující pátý ročník schopni sestrojit rovnoběžky a kolmice. Tento výstup je i součástí *„minimální doporučené úrovně pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření“.* (RVP ZV, str. 33)

4.2.ŠVP

Základní škola Klobuky, kde jsem prováděla před-experiment, předkládá ve svém ŠVP shodný výstup s výstupem RVP *M-5-3-03 „sestrojí rovnoběžky a kolmice”* (RVP ZV, str. 33). V rámci tohoto výstupu pak specifikuje školní výstup a učivo za oba ročníky 2. vzdělávacího období, tj. 4. a 5. třídu. Jako školní výstup pro 4. ročník uvádí: *„Učí se správným postupům při geometrických konstrukcích”*. (ŠVP ZŠ Klobuky, str. 70) Školní výstup z 5. ročníku se shoduje s výstupem RVP *M-5-3-03*. Obsahem učiva pro oba tyto ročníky jsou rovnoběžky, různoběžky a kolmice.

Veřejně dostupné ŠVP Základní školy Antonína Čermáka nepoukazuje na konkrétní výstupy, uvádí jen časovou dotaci předmětu Matematika v konkrétních ročnících. (ŠVP ZŠ Antonína Čermáka)

Poslední skupina žáků v experimentu dochází na Základní školu ve Zlonicích. Ta své ŠVP koncipuje tak, že charakterizuje výstupy RVP za 2. období jak ve 4., tak v 5. ročníku, přičemž dále specifikuje učivo v rámci jednotlivých výstupů. Ve 4. ročníku se u výstupu *M-5-3-01* setkáme s učivem *„rýsování pravoúhlého trojúhelníku a rýsování kolmic.*" (ŠVP ZŠ Zlonice, str. 70) V témž ročníku jako učivo pro výstup *M-5-3-03* uvádí vzájemnou polohu dvou přímek a rýsování kolmic a rovnoběžek. Charakteristika obsahu učiva pro 5. ročník není oproti 4. ročníku v tomto tématu více rozšířena. (ŠVP ZŠ Zlonice)

5. Analýza učebnicových řad

V této kapitole se zaměřím na tři učebnicové řady od nakladatelství H-mat, Fraus, SPN a Alter a jejich zpracování různých úloh, které připravují žáky k porozumění pojmům kolmost a rovnoběžnost a jejich aplikaci. Uvedu i takové úlohy, kde propedeutika těchto pojmů je přítomna tacitně, to jsou úlohy především z 1. a 2. ročníku. Dále uvedu i úlohy, kde je zřejmá příprava těchto pojmů (především ve 3. ročníku). Na závěr se budu věnovat tomu, jak jednotlivé řady zavádí tyto dva pojmy (4. ročník).

U každé z řad od 1. po 4. ročník uvedu s komentářem zástupné příklady úloh, které ilustrují jistý typ. Tím chci dokumentovat míru bohatosti pohledu autorů v řadě učebnic na to, co je zapotřebí budovat u žáka k porozumění těmto pojmům. Nakonec provedu porovnání zmíněných učebnicových řad.

Úlohy budou rozděleny do čtyř základních kategorií, a to podle toho, na jakém tvaru je kolmost a rovnoběžnost ukázána. V každé učebnicové řadě pak okomentuji toto rozdělení, popřípadě uvedu jeho úpravu, či úlohy, které do žádné z kategorií nespadají.

Kategorie:

- rovnoběžnost a kolmost ve čtverci
- rovnoběžnost a kolmost v obdélníku
- rovnoběžnost a kolmost v trojúhelníku
- rovnoběžnost a kolmost v nepravoúhlých rovnoběžnících a lichoběžnících

5.1. Nakladatelství H-mat, o.p.s. (1. - 3. ročník) a Fraus (4. ročník)

V této části se budu věnovat dvěma řadám učebnic, které jsou obě založené na metodě pana profesora Hejného. Důvodem tohoto rozdělení je, že organizace H-mat vydala nový soubor učebních materiálů, který prozatím pokrývá jen tři ročníky prvního stupně základních škol. Protože zkoumám nejen propedeutiku, ale i zavádění pojmů kolmost a rovnoběžnost, pro další zpracování budu tedy čerpat z učebnice pro 4. ročník vydanou nakladatelstvím Fraus.

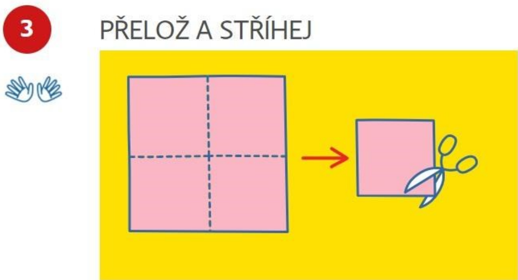
Soubor nově vydaných učebnic profesorem Hejným a kolektivem H-mat, o.p.s. obsahuje pracovní učebnice rozložené do tří dílů pro 1. a 2. ročník a sadu učebnice a dvou pracovních sešitů pro 3. ročník. Učební materiály od nakladatelství Fraus pro 4. ročník pak poskytují učebnici a dva pracovní sešity.

U každého kategorie uvedu příklad z některých geometrických prostředí *Dečky, Dřívka, Geoboard* a *Mříž,* přičemž *Mříž a Geoboard* se v úlohách často prolínají. Všechna tato prostředí nabízí možnost manipulace s pomůckami, až na jedno prostředí, kterým je čtvercová mříž. Ta výrazně podporuje vizualizaci kolmosti a rovnoběžnosti.

5.1.1. Propedeutické úlohy

Rovnoběžnost a kolmost ve čtverci

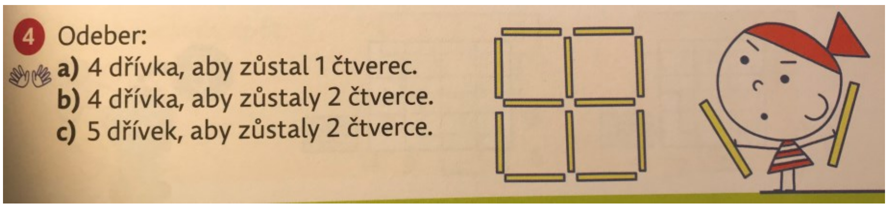
Prvním typem úloh jsou takové, kde se žáci setkají s kolmostí a rovnoběžností ve čtverci. Žáci pozorováním různých izolovaných modelů čtverců a manipulací s nimi získávají zkušenost s rovnoběžností protilehlých stran, kolmostí stran sousedních, ale také kolmostí úhlopříček čtverce, nebo jeho středních příček. Se čtvercem učebnice pracuje hned od 1. ročníku napříč všemi geometrickými prostředími.



***Obrázek 1** úloha z pracovní učebnice H-mat pro 1.* ročník, *str. 32*

Komentář:

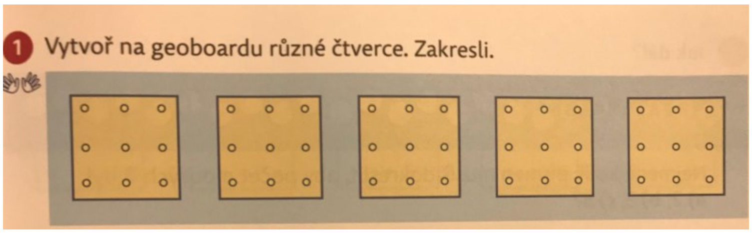
V této úloze žáci překládají čtvercový papír dvakrát na polovinu podle středních příček, tím se nepřímo seznamují s výše uvedenými jevy. Po rozložení papíru mají žáci možnost vidět přehyby (střední příčky), tedy kolmost je vizualizována. Poté odstřihnou trojúhelník z vrcholu, přičemž vzniklý tvar může být čtverec (záleží na tom, jestli ustříhnutý trojúhelník bude rovnoramenný a jestli vrchol, který stříhají, leží na průsečíku středních příček).



***Obrázek 2** úloha z pracovní učebnice H-mat pro 2. ročník, str. 51*

Komentář:

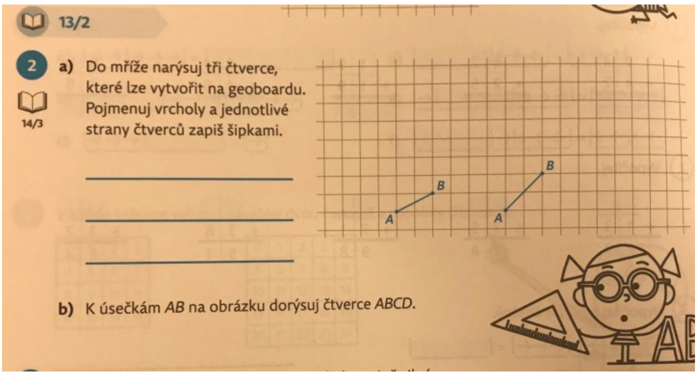
Tato úloha používá názornou ukázku čtverců ve čtverci. V zadání jich vidíme 5. Kolmost je zde ukázána nejen jako vztah dvou sousedních stran čtverce, ale také dvou středních příček čtverce největšího. Na dřívkách je také znázorněna stejná vzdálenost mezi rovnoběžnými stranami čtverců.



Obrázek 3 *úloha z pracovní učebnice H-mat pro 2. ročník, str. 105*

Komentář:

V této úloze žáci zkoušejí vytvářet různé čtverce. Je zde vyžadována znalost základních vlastností, např. že čtverec má všechny strany stejně dlouhé. Žáci zde v rámci tvoření čtverců vytvářejí rovnoběžné a kolmé linie. Vzdálenost mezi jednotlivými stranami zde určuje vzdálenost kolíků geoboardu. Zároveň jsou různá řešení této úlohy možným podnětem k diskuzi. V případě, že některý žák přijde s řešením, kdy jsou vrcholy čtverce umístěny na prostředních kolíkách stran geoboardu, setkáváme se se čtvercem, který mnozí mohou považovat za kosočtverec. V tomto případě dochází na argumentaci a ověřování vlastností čtverce.



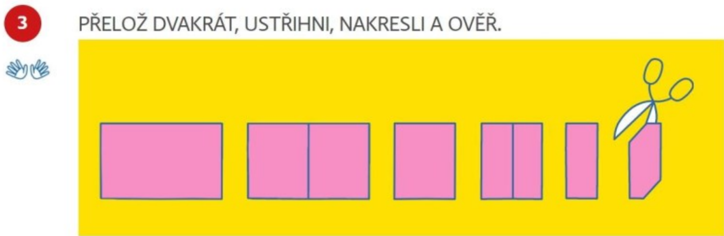
Obrázek 4 *úloha z pilotní verze pracovního sešitu H-mat pro 3. ročník, str. 10*

Komentář:

Ve druhé části této úlohy mají žáci za úkol sestrojit čtverce v síti se zadanou stranou. Znalost o kolmosti a rovnoběžnosti ve čtverci je třeba pro narýsování jeho dalších stran. Pro hledání kolmé úsečky je žákovi nápomocná síť, kde žáci odpočítáváním čtverečků hledají další body (v budoucnu důležité pro analytickou geometrii).

Rovnoběžnost a kolmost v obdélníku (a ve čtverci)

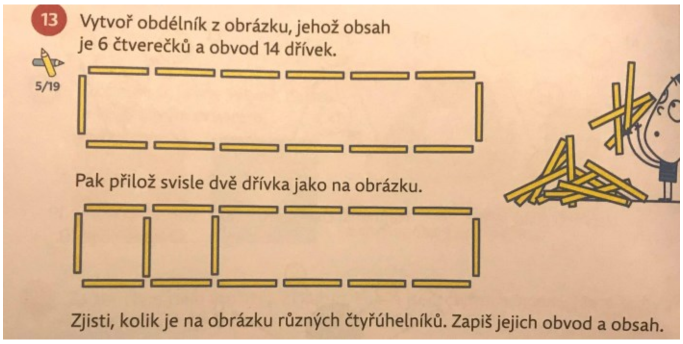
Dalším typem úloh jsou ty, které operují s kolmostí a rovnoběžností v obdélníku a ve čtverci. V těchto úlohách se často setkáváme s obdélníkem, který je součástí čtverce, nebo jehož část je čtverec. Proto tyto dva tvary uvádím pospolu.



***Obrázek 5** úloha z pracovní učebnice H-mat pro 1. ročník, str. 73*

Komentář:

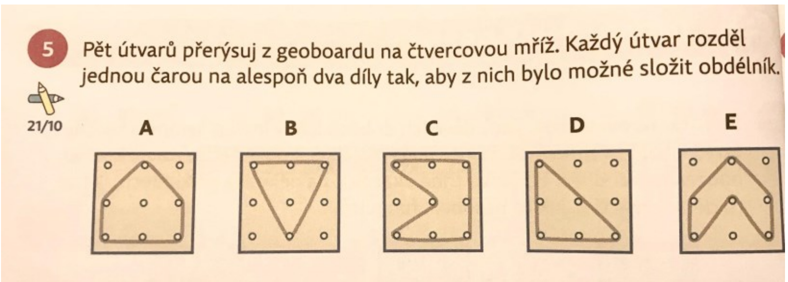
Tato úloha žákům zprostředkovává jednu z prvních zkušeností s opakovaným rovnoběžným přehýbáním na poloviny. Zároveň tvar, který žáci mají za úkol přehýbat již není čtverec, ale obdélník. Dle doporučení příručky pro učitele může vyučující při provádění této aktivity popsat přehyby papíru jako *rovnoběžné*.



***Obrázek 6** úloha z pilotní učebnice H-mat pro 3. ročník, str. 8*

Komentář:

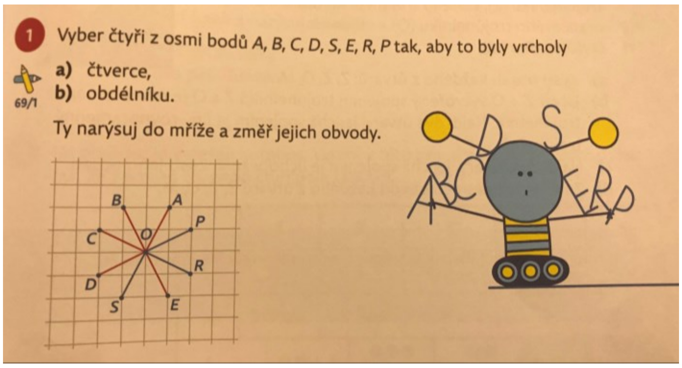
V této úloze žáci rozdělují obdélníky na čtverce, nebo obdélníky přikládáním dřívek jako kolmice, které spojují rovnoběžné strany obdélníku. Mohou si přímo vyzkoušet vzdálenost mezi rovnoběžnými stranami, kterou tvoří jedno dřívko. Zároveň se zde setkáme s pojmem obsah a obvod, úloha již předpokládá určité porozumění těmto pojmům. Jednotkou délky je zde jedno dřívko a jednotkou obsahu je jeden čtvereček.



***Obrázek 7** úloha z pilotní učebnice H-mat pro 3. ročník, str. 20*

Komentář:

Tato úloha propojuje dvě prostředí – *Geoboard a Mříž*. Aby žáci poskládali ze dvou částí každého útvaru obdélník, potřebují znát vztahy mezi jeho stranami, tj rovnoběžnost protilehlých stran a kolmost stran sousedních. V příkladu A) musí žák vést řez tak, aby byl rovnoběžný s nejkratšími stranami pětiúhelníku. Takový řez je zároveň kolmý na jeho nejdelší stranu a tvoří osu souměrnosti.



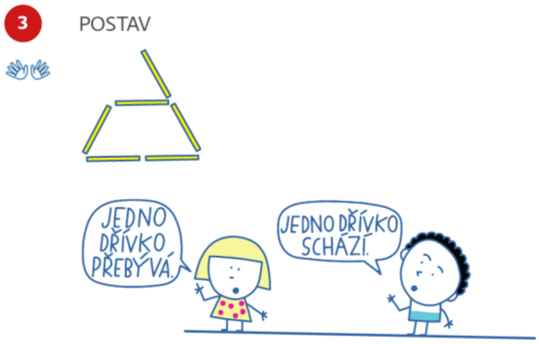
***Obrázek 8** úloha z pilotní učebnice H-mat pro 3. ročník, str. 53*

Komentář:

V této úloze žáci aplikují poznatky o čtverci a obdélníku a jejich úhlopříčkách. Pro nalezení čtverců a obdélníků mohou být žákům oporou uvedené úhlopříčky. Uvidět takový čtverec může být těžké pro ty, kteří si utvořili představu o čtverci pouze v horizontálně-vertikální poloze.

Rovnoběžnost a kolmost v trojúhelníku (a ve čtverci, či obdélníku)

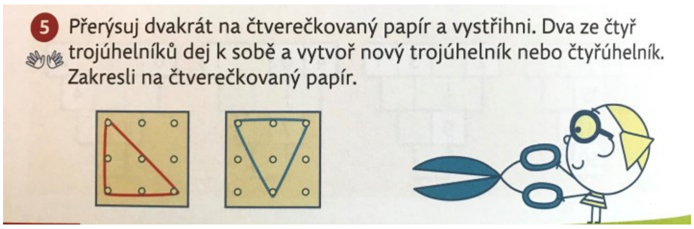
V těchto úlohách žáci pracují s trojúhelníky různých typů. Především jsou to pravoúhlé trojúhelníky. U rovnoramenných trojúhelníků se s kolmostí setkávají např. při překládání přes osu souměrnosti. Rovnoběžnost pak najdeme v úlohách, kde jsou dané trojúhelníky součástí nějakého rovnoběžníku, popřípadě když žáci vytvářejí střední příčky trojúhelníků.



Obrázek 9 *úloha z pracovní učebnice H-mat pro 1. ročník, str. 74*

Komentář:

V této úloze žáci diskutují o tom, zda postavený tvar je neúplný, nebo jedno dřívko přebývá. V případě, že se rozhodnou dostavit velký trojúhelník, vidí pak rovnoběžnost strany a střední příčky. Pokud se rozhodnou jedno dřívko ubrat, vznikne jim lichoběžník, ve kterém se taktéž střetnou s rovnoběžností právě jedné dvojice protějších stran.

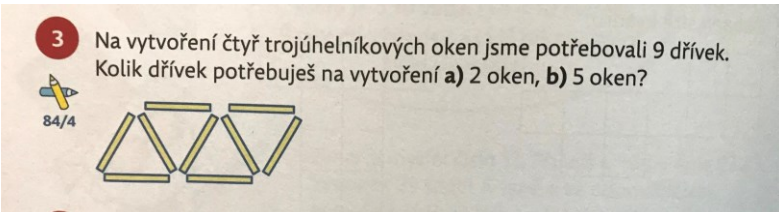


Obrázek 10 *úloha z pracovní učebnice H-mat pro 2. ročník, str. 112*

Komentář:

Zde opět vidíme propojení dvou prostředí (Geoboard a Mříž). Žáci dvakrát překreslují pravoúhlý rovnoramenný a ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník, a poté z nich skládají další tvary. S kolmostí se zde setkáváme v pravoúhlém trojúhelníku, ale také ve čtverci, který ze dvou takových můžeme složit. Rovnoběžnost pak pozorujeme u již zmíněného čtverce, nebo také u kosodélníku, který vznikne ze dvou rovnoramenných trojúhelníků.

Rovnoběžnost a kolmost v nepravoúhlých rovnoběžnících a lichoběžnících



Obrázek 11 *úloha z pilotní učebnice H-mat pro 3. ročník, str. 29*

Komentář:

V této úloze žáci dotvářejí rovnostranné trojúhelníky pomocí dřívek. Trojúhelníky pak dohromady tvoří rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník. Zde se žáci setkávají pouze s rovnoběžností, kterou vidíme mezi protějšími stranami vzniklých čtyřúhelníků.

5.1.2. Zavádění pojmu

V učebnici pro 4. ročník od nakladatelství FRAUS na straně 30 se setkáváme s uvedením pojmu *kolmost*. Učebnice ho představuje formou zmínky jedné z postav, poté dává žákům prostor diskutovat a zkoumat jeho význam. Jako podporu upozorňuje na kolmosti, se kterými se žáci již setkali, např. strany čtverce, nebo ručičky na hodinách ukazující devět hodin. Následně vybízí k hledání kolmosti v reálném světě. Žáci tak mají možnost propojit nový pojem s objekty ze svého okolí. Autoři zde zmiňují nejen kolmost ve 2D, ale tento vztah ukazují i na trojrozměrných předmětech, kde se kolmost týká např. sousedních stěn.

Kolmost je v učebnici prezentována také jako určující faktor pro pojmenování trojúhelníku. Je zde spojována s pojmem *pravoúhlý* a označením pro pravý úhel. V navazujících úlohách se žáci učí rozpoznávat pravoúhlý trojúhelník v síti.

O několik stránek dále, na straně 34, je představen pojem *rovnoběžnost*. Nejprve je tento vztah ukázán v rovnoběžníku, konkrétně kosodélníku, jako vztah jeho protilehlých stran. Podobně pak, jako u kolmosti, uvádí učebnice několik obrázků reálných věcí, kde můžeme pozorovat rovnoběžnost a nabádá žáky k hledání dalších takových příkladů.

Pokračování můžeme najít na straně 75, kde autoři děti instruují k rýsování kolmic za pomoci trojúhelníku s ryskou. Zároveň se zde žáci seznamují se zápisem kolmosti, a to paralelním slovním popisným zápisem a zápisem znakovým. Následně se na straně 89 učebnice věnuje postupu rýsování rovnoběžek, opět s pomocí trojúhelníku s ryskou a dalšího pravítka, a znakovému zápisu.

Poté se tomuto tématu věnuje několik stran druhého dílu pracovního sešitu, kde je větší prostor pro zkoumání spojitostí těchto vztahů.

5.2.SPN

Soubor pracovních učebnic matematiky vydaný nakladatelstvím SPN obsahuje sadu tří pracovních učebnic pro 1. ročník, dvě pracovní učebnice pro 2. ročník a učebnici s dvěma pracovními sešity pro 3. ročník. Počínaje sérií pro 2. ročník je geometrie vyčleněna a umístěna na poslední stránky učebnic.

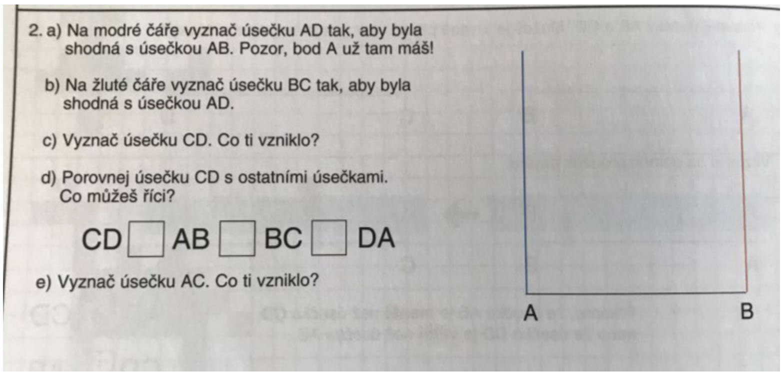
V této učebnicové řadě danou typologii upravím odebráním kategorie *Rovnoběžnost a kolmost v v nepravoúhlých rovnoběžnících a lichoběžnících*. Zároveň ji obohatím o kategorii *Rovnoběžnost a kolmost jako vzájemná poloha dvou úseček/přímek*. Dané úlohy totiž nelze zařadit ani do jedné z výše zmíněných kategorií.

5.2.1. Propedeutické úlohy

Rovnoběžnost a kolmost ve čtverci

V učebnicích jsou četně zastoupeny úlohy se čtvercovou sítí. Autorka zde používá čtvercovou síť pro práci s *programem*, který pomocí šipek a barevných bodů určuje cesty po síti. Jiné využití čtvercové sítě se zaměřuje na dokreslování tvarů podle vzoru, nebo doplňování jejich poloviny podle osy souměrnosti.

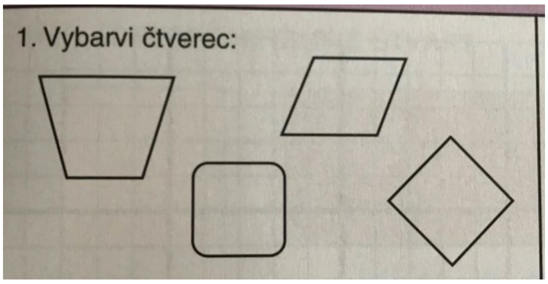
Další úlohy operující se čtvercem jsou úlohy identifikační, kde žáci rozeznávají čtverec od ostatních tvarů.



***Obrázek 12** úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 2. díl, str.72*

Komentář:

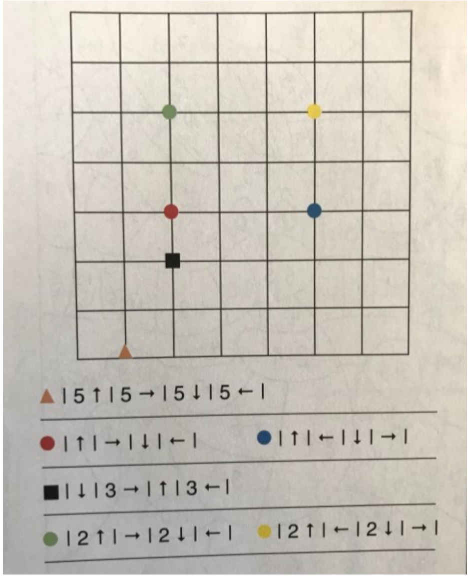
V této úloze žáci pracují s pojmem *shodná úsečka*. Přenášením délky úsečky AB tvoří další, shodné úsečky AD a BC. Výsledná úsečka CD je pak rovnoběžná se stranou vzniklého čtverce AB. Žáci zde získávají zkušenost s podstatou rovnoběžnosti tím, že nanášejí stejnou vzdálenost na modrou, i žlutou polopřímku, na které je pak výsledná úsečka kolmá. Protože obě tyto polopřímky svírají s úsečkou úhel 90°, (platí totéž i kdyby to byly jiné velikosti úhlů, které svírají ty polopřímky s přímkou AB a jsou stejné) je zajištěno, že výsledná úsečka bude rovnoběžná s AB a dokonce útvar ABCD musí být čtverec.



***Obrázek 13** úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 2. díl, str. 85*

Komentář:

V této úloze mají žáci za úkol poznat čtverec mezi dalšími tvary a vybarvit ho. Při porovnávání musejí zvážit rovnoběžnost obou dvojic protějších stran, čemuž neodpovídá lichoběžník. Jako další kritérium porovnání musí zvážit kolmost všech sousedních stran čtverce a jejich délku, což vyřadí kosodélník. Očekáváme, že žáci budou namítat, že poslední zbývající obrázek je nepřesně narýsovaný čtverec, samozřejmě se o čtverec nejedná.

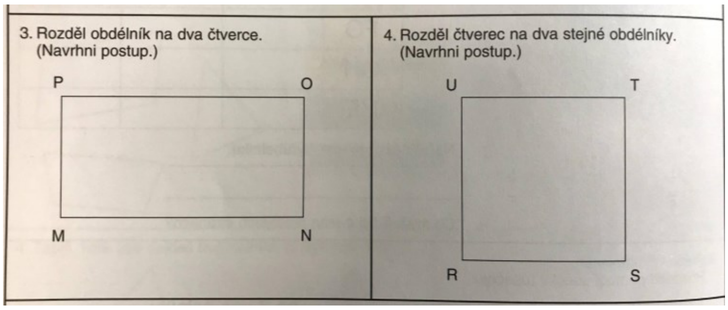


***Obrázek 14** úloha z pracovní učebnice SPN pro 1. ročník, 2. díl, str. 35*

Komentář:

V této úloze žáci zakreslují cestu v síti podle programu. Prvními čtyřmi cestami žákům vzniknou různé čtverce. Při každé změně směru cesty v síti žáci tvoří kolmé úsečky, každý druhý povel pak tvoří úsečky rovnoběžné a všechny úsečky jsou shodné.

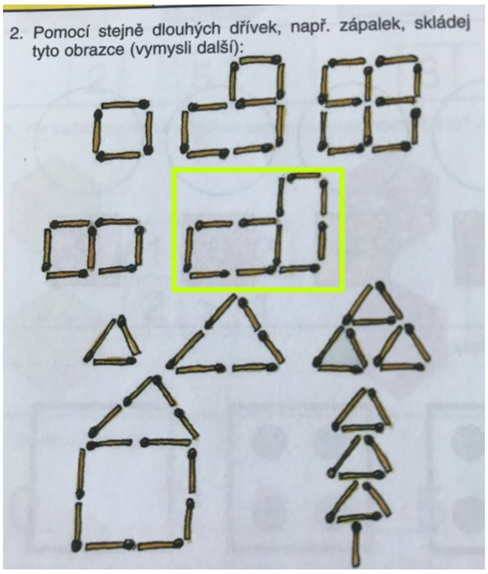
Rovnoběžnost a kolmost v obdélníku (a ve čtverci)



***Obrázek 15** úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 2. díl, str. 82*

Komentář:

V těchto úlohách vidíme obdélník, jehož polovina je čtverec, a poté čtverec, jeho polovina je obdélník. Při řešení těchto úloh žáci tvoří střední příčku kolmou na dvojici protilehlých stran (středy těchto stran střední příčka prochází) a rovnoběžnou na druhou dvojici protilehlých stran. Úloha může být také obohacena o manipulaci v podobě překládání papíru. Tato činnost by žáky vedla k rovnoběžnému překládání čtverce, nebo obdélníku.

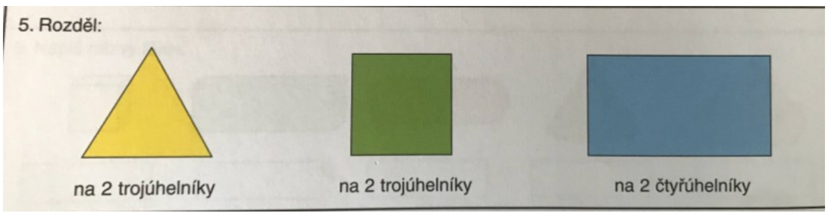


Obrázek 16 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 1. díl, str. 22*

Komentář:

V této manipulativní úloze se žáci několikrát setkají s obdélníkem, složeným ze dvou čtverců, nebo jako součástí většího tvaru. V konkrétním označeném příkladu pak tvoří šestiúhelník složený ze dvou na sebe kolmých obdélníků. Žáci zde tvoří kolmé a rovnoběžné strany jednotlivých obdélníků.

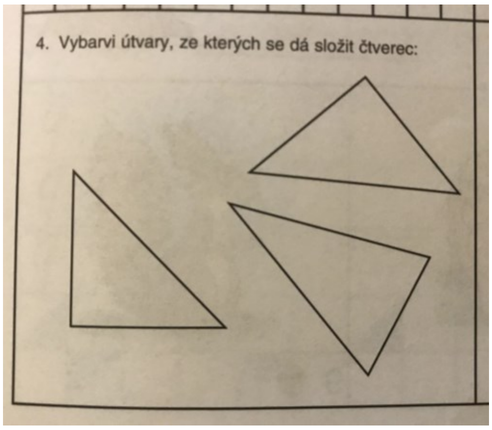
Rovnoběžnost a kolmost v trojúhelníku (a ve čtverci, či obdélníku)



Obrázek 17 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 2. díl, str. 80*

Komentář:

V prvním příkladu této úlohy žáci mají rozdělit rovnostranný trojúhelník na 2 trojúhelníky. Za předpokladu, že žáci rozdělí žlutý trojúhelník výškou, která je zároveň osou souměrnosti, vzniknou pak dva pravoúhlé trojúhelníky. V příkladu se čtvercem pak žáci vytvoří narýsováním úhlopříčky dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky.

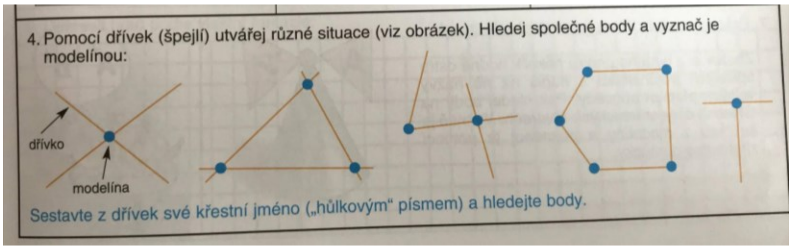


Obrázek 18 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 1. ročník, 2. díl, str. 5*

Komentář:

V této úloze žáci vybírají ze tří trojúhelníků dva tak, aby jejich složením vznikl čtverec. Pro splnění úkolu musí zvolit dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, což si mohou vyzkoušet, když si trojúhelníky vystřihnou a nakonec dané trojúhelníky přiloží jejich přeponami k sobě.

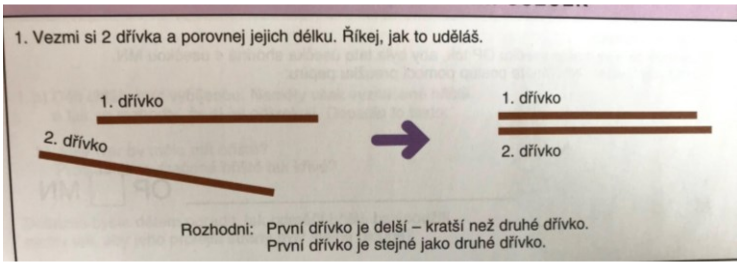
Rovnoběžnost a kolmost jako vzájemná poloha dvou přímek/úseček



Obrázek 19 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 1. díl, str. 83*

Komentář:

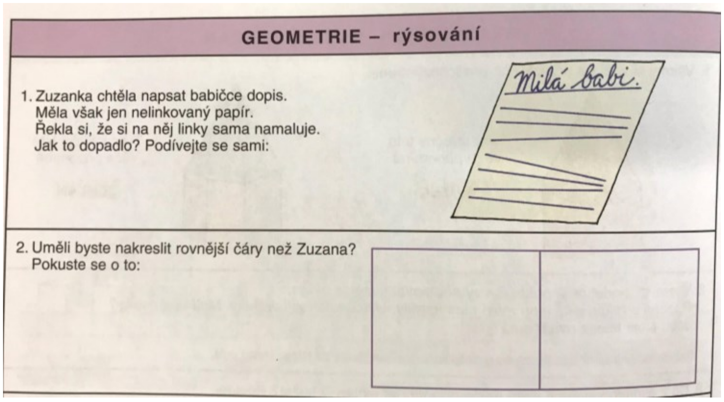
Zde se jedná o 5 dílčích úloh spojování dřívek modelínou. Žáci zde modelínou označují průsečíky přímek (špejlí). Zkoušejí si vytvářet obrazce, nebo přímky v různých polohách, ve dvou posledních případech je cílem sestavit k sobě špejle tak, aby na sebe byly kolmé. Při modelování pětiúhelníku se setkáme i s jednou rovnoběžnou dvojicí protějších stran.



Obrázek 20 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 2. díl, str.71*

Komentář:

Zde vidíme způsob porovnávání délek dvou dřívek. I když se domnívám, že to nejspíš není záměrem úlohy, aby žák mohl dřívka poměřit přesně, musí je vedle sebe umístit rovnoběžně. Žák zde může objevit, že pokud je vzdálenost dvou dřívek na obou koncích různá, pak nejsou dřívka ve vzájemné poloze rovnoběžné a zkresluje to představu o jejich délce, a tedy je obtížné je porovnat.



Obrázek 21 *úloha z pracovní učebnice SPN pro 2. ročník, 1. díl, str. 82*

Komentář:

V těchto dvou úlohách žák pracuje se známým sémantickým modelem linkovaného papíru. Je zde patrné, že linky nejsou rovnoběžné. Úkolem žáka je, aby se pokusil nakreslit lepší verzi, než vidí na obrázku. Jelikož se jedná o sešit pro 2. ročník, autorka zde ještě nepoužívá termín *rovnoběžnost*, nahrazuje ho *rovnou čarou*. Je otazné, zda opravdu rovná čára znamená rovnoběžná čára.

5.2.2. Zavádění pojmu

Již v učebnici pro 3. ročník se žák setká s pojmem *rovnoběžky.* V geometrické části nacházíme jako druhé téma, hned po opakování, právě vzájemnou polohu dvou přímek. Žáci už mají zkušenost s rýsováním protínajících se různoběžek z 2. ročníku. Učebnice nabízí ukázkový příklad různoběžek a rovnoběžek s definicí:„ Různoběžky *mají společný jeden bod - průsečík."* a *„Rovnoběžky nemají žádný společný bod."* (Čížková, 2008, str. 114) Následuje cvičení, ve kterém je úkolem rozhodnout, zda jsou zakreslené přímky rovnoběžky, nebo různoběžky. V učebnici pro 3. ročník se však žáci učí pouze identifikovat a pojmenovat vztah dvou přímek, postupy konstrukce rovnoběžek zde nejsou.

Procvičení vzájemné polohy dvou přímek se věnuje jedna strana 1. dílu pracovního sešitu pro 3. ročník. Kromě úloh, jejichž cílem je rozpoznání a pojmenování vztahu dvou přímek, jsou zde i takové, které vyžadují porozumění těmto dvěma vztahům. Žáci se zde učí argumentovat, proč jsou přímky různoběžné, nebo rovnoběžné.

V učebnici pro 4. ročník na straně 110 najdeme návod na rýsování rovnoběžek s pomocí dvou pravítek, zde se žáci učí technice rýsování rovnoběžek. Taktéž jsou zde žáci seznámeni se znakem pro zápis rovnoběžnosti ||. Následně se této kapitole věnuje i pracovní sešit (1. díl str. 32). V první úloze je úkolem rozpoznat vzájemný vztah dvou přímek, v dalších úlohách žák rýsuje rovnoběžky k přímkám v zadání. Dokonce tři z pěti úloh vyžadují orientaci ve čtvercové síti. Zde jsou žáci vyzváni přemýšlet o rovnoběžnosti bez použití pravítek.

V geometrické sekci se také setkáváme s rozšířením tématu *vzájemná poloha dvou přímek* o *kolmice*. Žákům je nejprve představen návod k sestrojování kolmic, který si mohou vyzkoušet v pracovním sešitě, a znak pro jejich zápis ⊥. Dále se úlohy zaměřují na kombinaci všech tří vztahů a jejich znázornění. Následně se žáci seznamují s pravým úhlem, jeho značením a výskytem v pravoúhlém trojúhelníku.

Pokračováním tohoto tématu je představení rovnoběžníků, kde jsou čtyřúhelníky představovány nejen modely rovnoběžníků, ale také jejich ne-modely (lichoběžník, nekonvexní čtyřúhelník). Postava lva, která provází geometrii, poukazuje na přítomnost kolmosti a rovnoběžnosti v různých geometrických obrazcích. Žáci se zde seznamují s pojmenováním *rovnoběžník* a *pravoúhelník*. K procvičení poté pracovní sešit nabízí řadu úloh, některé z nich s použitím čtvercové sítě.

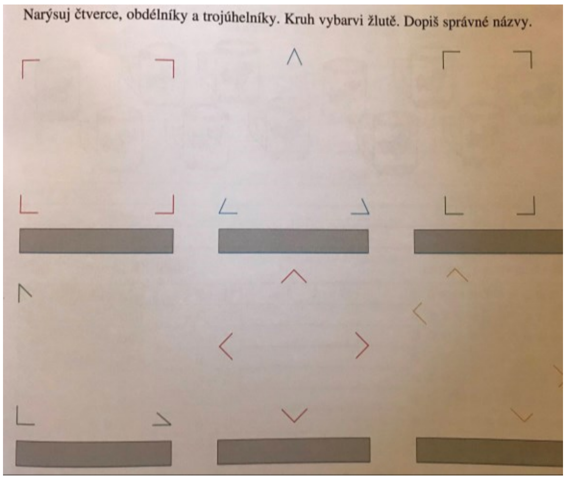
5.3. Alter

Soubor pracovních učebnic vydané nakladatelstvím Alter obsahuje 4 díly pracovních učebnic pro 1. a 2. ročník. Od 3. ročníku výše se pak výukové materiály dělí na učebnici a dva pracovní sešity. Geometrie je v této řadě průběžně vkládána mezi aritmetické učivo.

Pro tuto řadu nelze využít typologii zmíněnou v úvodu kapitoly, a to z toho důvodu, že rovnoběžnost a kolmost jsou většinou v úlohách zobrazeny ve více geometrických útvarech najednou. S ohledem na menší množství propedeutických úloh uvedu pouze několik příkladů s komentářem bez upravených kategorií.

5.3.1. Propedeutické úlohy

Od prvního ročníku v učebnicích najdeme úlohy identifikační, kde mají žáci za úkol rozlišit geometrické tvary. Dalšími úlohami, kde se žáci setkávají s kolmostí a rovnoběžností, jsou rýsovací úlohy, kde je úkolem spojení vyznačených vrcholů za vzniku geometrického objektu.

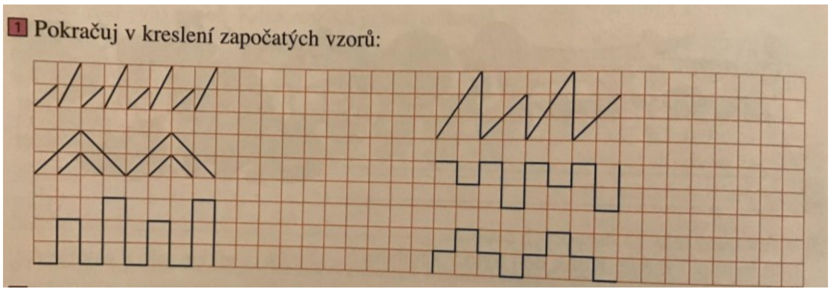


Obrázek 22 *úloha z pracovní učebnice Alter pro 1. ročník, díl 4 A, str. 15*

Komentář:

Žáci mají v této úloze spojit naznačené strany geometrických útvarů. Ve dvou případech žáci rýsují čtverec, dále dva obdélníky a dva rovnoramenné trojúhelníky, jeden z nich pravoúhlý. Setkáváme se zde také se čtvercem a obdélníkem, které nejsou v horizontálně-vertikální poloze. Narýsování takového čtverce může podnítit diskuzi, o jaký tvar se jedná. Podle Jirotkové se často žáci spokojí s pojmenováním *„čtverec nakoso".* (Jirotková, 2012, str. 95)

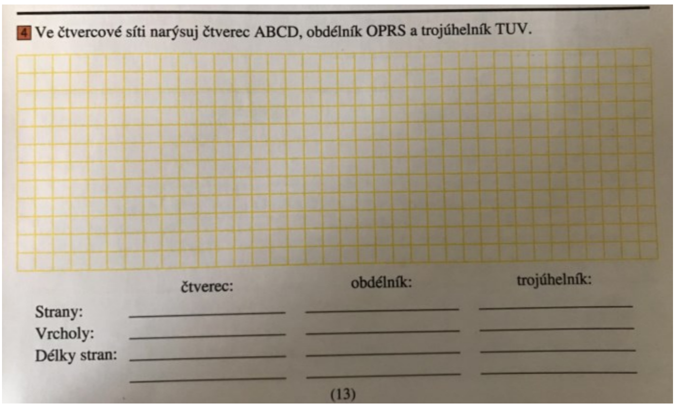
Od 2. ročníku se v učebnicích setkáváme také s použitím čtvercové sítě, kde je úkolem pokračování v geometrickém rytmu. Žáci tak obtahují strany čtverců v síti, které jsou na sebe kolmé. Častěji se však prostředí čtvercové sítě vyskytuje u rýsovacích úloh.



***Obrázek 23** úloha z pracovní učebnice Alter pro 2. ročník, díl 4 B, str. 16*

Komentář:

V této úloze žáci dokreslují geometrické vzory ve čtvercové síti, kde obtahují kolmé a rovnoběžné linky sítě. U druhého vzoru se také setkávají s na sebe kolmými úsečkami, které ovšem tvoří úhlopříčky čtverců v síti.



***Obrázek 24** úloha z pracovní učebnice Alter pro 2. ročník, díl 7, str. 13*

Komentář:

U této úlohy žáci mají za úkol rýsovat čtverec, obdélník a trojúhelník ve čtvercové síti a zapsat o nich základní údaje. Pro rýsování čtverce a obdélníku musejí mít znalost o délce stran v těchto útvarech, ale také o kolmosti sousedních a rovnoběžnosti dvojic protějších stran. Pro tento úkol je síť velmi nápomocná, žáci pravděpodobně zvolí cestu stranami čtverců sítě. Překvapivé by bylo, kdyby některý žák narýsoval čtverec, či obdélník, které nejsou v horizontálně-vertikální poloze. V tom případě by se jednalo o žáka s hlubším porozuměním těmto pojmům.

5.3.2. Zavádění pojmu

Ve čtvrtém díle pracovní učebnice pro 2. ročník jsou na straně 19 představeny vzájemné polohy dvou přímek. Nejprve učebnice žákům ilustruje tři páry různoběžných přímek, z nichž jeden pár specifikuje jako *kolmice*. Součástí definice kolmic je i znak pro jejich zápis. Zároveň žákům poskytuje návod na výrobu pomůcky pro ověření přítomnosti kolmosti, a to dvojitým přeložením papíru. V návaznosti na téma *vzájemná poloha dvou přímek* se na straně 27 setkáváme se zavedením pojmu *rovnoběžky* a znakem pro jejich zápis. Taktéž jsou zde vyobrazeny tři páry rovnoběžek v různých polohách, aby si žáci nepropojili tento vztah pouze s jednou podobou. V obou případech je předložena úloha, kde žáci rýsují kolmé, nebo rovnoběžné přímky do čtvercové sítě. Učebnice také jasně vymezuje, že tyto polohy přímek se týkají pouze takových, které leží v jedné rovině. Dle didaktické poznámky je cílem, aby žáci dokázali vztah přímek identifikovat a pojmenovat, a také narýsovat přímky s takovým vztahem do čtvercové sítě.

V učebnici pro 3. ročník se jedna strana věnuje připomenutí těchto vztahů, jejich znakového zápisu a rýsování. Úlohy jsou stále zasazeny do prostředí čtverečkovaného papíru, kde rýsují zatím úsečky kopírující strany čtverců v síti. Dále odkazuje učebnice k tomuto tématu při popisu čtverce a obdélníku, kde žáci hledají rovnoběžné a kolmé strany v těchto útvarech. V pracovních sešitech se neobjevují vyčleněné části k procvičení těchto vztahů.

Učebnice pro 4. ročník toto téma rozebírá obšírněji. Ze 32 geometrických pasáží se jich 8 přímo věnuje kolmosti a rovnoběžnosti a dalších 8 tyto vztahy používá pro charakteristiku geometrických útvarů, jejich rýsování, či definování nových pojmů. Postupně se objevuje opakování charakteristiky vzájemných poloh dvou přímek, kde najdeme převážně úlohy s cílem identifikovat, pojmenovat a zaznamenat. Některé úlohy se zaměřují na modelaci a manipulativní činnost. Dále je téma prohlubováno, žákům je představen postup rýsování kolmic a rovnoběžek s pomocí pravítka s ryskou. Tento návod je rozdělen na samotný nácvik rýsování kolmic a rovnoběžek, poté se zaměřuje na rýsování takových úseček procházejících daným bodem. Následně je téma obohaceno o pojem *pravý úhel* a jeho výskyt v různých geometrických útvarech. V neposlední řadě se učebnice zabývá *rovnoběžníky*, jejich pojmenováním, ověřováním vztahů dvojic stran, a nakonec samotným sestrojováním. V každém geometrickém úseku se také nacházejí úlohy, které mají za cíl upevnit předchozí učivo.

5.4.Porovnání učebnicových řad

Pro porovnání učebnicových řad použiji kritérium četnosti výskytu propedeutických úloh a jejich typu. Dále také provedu srovnání dle toho, v jakém ročníku jsou pojmy zaváděny a který pojem je zaveden dříve.

Z hlediska propedeutiky je nejvíce rozmanitá řada H-mat, která také nabízí mnoho možností pro manipulaci již od 1. ročníku. Série SPN má velmi rozsáhlou zásobu úloh využívajících čtvercovou síť, se kterými se také setkáme hned na začátku školní docházky. Učebnice od nakladatelství Alter se obecně geometrickému učivu věnují až od druhého ročníku. Propedeutických úloh je tu z těchto tří řad nejméně. Pravděpodobně je to proto, že Alter žákům předkládá problematiku vzájemné polohy dvou přímek již na konci druhé třídy.

Tímto se přesouváme k dalšímu bodu porovnání. Jak jsem již zmínila výše, série od nakladatelství Alter se tímto tématem zabývá nejdříve, a to od konce 2. ročníku, konkrétně se jedná o čtvrtou pracovní učebnici pro 2. ročník. Následně se v učebnicích pro 3. a 4. ročník ke kolmosti a rovnoběžnosti vrací a úlohy se postupně z identifikačních mění v aplikační. Pracovní učebnice SPN žákům otevírají kolmost a rovnoběžnost ve 3. ročníku, a řada od nakladatelství FRAUS nejpozději, a to ve 4. ročníku. Z hlediska pořadí zavádění kolmosti a rovnoběžnosti zavádějí řady FRAUS a Alter nejdříve kolmost, až poté rovnoběžnost. Učebnice SPN tyto pojmy zavádějí v opačném řazení.

Všechny výše zmíněné učebnice byly schváleny MŠMT a odpovídají pojetí a cílům RVP ZV. Poskytují tedy žákům materiál pro přípravu na očekávaný výstup RVP ZV za druhé vzdělávací období, konkrétně *„M-5-3-03 sestrojí rovnoběžky a kolmice" (RVP ZV, str. 33)* Ve všech těchto učebnicových řadách se autoři vzájemným polohám dvou přímek věnují. Každá z nich pojímá průpravu pro porozumění těmto pojmům a jejich zavádění jinak. Učebnice však není jediným výukovým materiálem, který může žákovo porozumění těmto pojmům podpořit, záleží také na metodách, postupech učitele a v neposlední řadě přístupu žáka, jeho motivaci a schopnostech.

Praktická část

Cílem praktické části je s pomocí vybraných úloh zjistit, jaké mají žáci 4. a 5. ročníků základních škol povědomí o kolmosti a rovnoběžnosti. Dále také diagnostikovat vnímání těchto pojmů a popsat hloubku jejich porozumění.

Dílčí otázky výzkumu:

1. Do jaké míry je rozvinut geometrický jazyk pro popis kolmosti a rovnoběžnosti u žáků 4. a 5. ročníku?
2. Převládá u žáků sémantické, nebo geometrické vnímání kolmosti a rovnoběžnosti?
3. Do jaké míry je u žáků vyvinuto vnímání geometrické?
    a. Co je příčinou chyb vzniklých při řešení úloh? Jak postupovat při reedukaci?

6. Metodologie výzkumu

Prováděný výzkum byl rozdělen na několik částí. Nejprve začal před-experiment v květnu 2020, dále pokračoval sběr dat experimentem v červnu 2020 a březnu 2021. Všechny tyto části výzkumu byly provedeny s několika žáky ze 4. a 5. ročníků základních škol. Pro uskutečnění experimentu byly vytvořeny dva pracovní listy s úlohami (pilotní materiály H-mat pro tvorbu učebnice pro 4. ročník), které účastníci vyplňovali a komentovali své postupy, případně odpovídali na dodatečné otázky výzkumníka. Průběh před-experimentu vedl ke změnám organizační formy a úpravám obsahu pro samotný experiment.

6.1. Výzkumný přístup a design

Pro praktickou část diplomové práce byl zvolen přístup kvalitativní s prvky designu mnohopřípadové studie. Kvalitativní přístup dovoluje intenzivní pozorování a hlubší poznání. Pro analýzu takového výzkumu je vhodné proces zdokumentovat audio, nebo video záznamem, což dovoluje pozorovateli zachytit detaily, které při samotném pozorování může přehlédnout. Z těchto důvodů jsem z každé části experimentu pořídila videozáznam. (Gavora, 2000) Mnohopřípadovou studii charakterizuje Švaříček jako *„výzkumy, v nichž se šetření realizují u více, minimálně dvou, případů."* (Švaříček, 2014, str. 106)

6.2. Výzkumné metody

V rámci mého výzkumu byly použity tři metody, aby byla zajištěna triangulace dat, a to pozorování, rozhovor a obsahová analýza textu. Hlavní metodou výzkumu bylo **otevřené nestrukturované zúčastněné pozorování**. Otevřené pozorování je charakteristické tím, že jsou účastníci informováni o činnosti pozorovatele. (Švaříček, 2014). Nestrukturované pozorování definuje Hendl (2005) jako takové, pro který nebyl předem stanoven určitý předpis. Zúčastněné pozorování pak popisuje roli pozorovatele, který je *„účastníkem interakcí, přičemž se od ostatních lidí odlišuje mírou účasti na aktivitách"*(Švaříček, 2014, str. 143). Pro zúčastněné pozorování je podstatné, aby se účastníci experimentu v přítomnosti experimentátora *„chovali přirozeně a otevřeně"* (Gavora, 2000, str. 154), což umožňuje získat kvalitní materiál pro výzkum. Toto jsem se snažila ve výzkumu zajistit výběrem účastníků, které jsem již znala ze školy, praxe, či zájmových aktivit, což se také promítlo do formulace kritérií pro výběr výzkumného vzorku, viz 6.3. Nástrojem pro pozorování byly sledované jevy, které byly formulovány při analýze videozáznamů a žákovských řešení. Důvodem výběru této metody byla možnost sledování, jak děti postupují při řešení pracovních listů.

Jak zmiňuje Švaříček (2014), často se ve výzkumu kloubí metoda pozorování s rozhovorem. Další realizovanou metodou pro tento výzkum byl tedy **nestrukturovaný hloubkový rozhovor**. Takový rozhovor je charakterizován jako *„nestandardizované dotazování jednoho účastníka výzkumu zpravidla jedním badatelem pomocí několika otevřených otázek"* (Švaříček, 2014, str. 159). Pro rozhovor nebyly předem specifikovány žádné otázky, výzkumník měl pouze připravené jejich zaměření dle konkrétních úloh. Tyto otázky byly formulovány v průběhu rozhovoru a reagovaly na konkrétní situaci, nebo řešitelský postup. Tato metoda byla pro výzkum vhodná díky tomu, že žáci měli možnost okomentovat svá řešení, která by mohla být pouze z písemného zápisu nejasná.

Další realizovanou metodou je **obsahová analýza** vyplněných pracovních listů, která umožnila komparaci zaznamenaných žákovských řešení a evidenci jevů. (Gavora, 2000)

6.3.Charakteristika výzkumného vzorku

Jelikož experiment zkoumá do jaké míry sahá porozumění žáků pojmům kolmost a rovnoběžnost, které se vyskytují nejdříve v učebnicích pro 3. ročník, zaměřuji se na žáky 2. vzdělávacího období podle RVP ZV. Pro výběr žáků jsem volila tato kritéria:

1. **Žáci jsou ve 4., nebo 5. ročníku ZŠ.**
2. **Žáci jsou vedeni jednou z učebnic, jejichž úlohy jsem analyzovala v teoretické části.**
3. **S žáky se osobně znám, a díky tomu budu moci lépe analyzovat jejich řešení.**

Pro předexperiment jsem si vybrala skupinu žáků ze 4. třídy ze Základní a Mateřské školy v Klobukách. Jedná se o vesnickou školu s jednou až dvěma třídami v ročníku. Třídu důvěrně znám, neboť jsem tyto děti částečně učila v první třídě a dodnes je učí moje maminka. Tito žáci jsou od 1. ročníku vedeni Hejného metodou.

První část experimentu jsem uskutečnila s některými žáky 5. třídy ze Základní školy Antonína Čermáka. Tato pražská škola má většinou 4 třídy v jednom ročníku. Tuto třídu jsem vedla jako třídní učitelka během 2. pololetí 2020. Žáci se učili od 1. třídy podle učebnic od nakladatelství Alter.

Poslední část experimentu byla plánována s žáky 5. ročníku na Základní škole Pod Žvahovem, kde působím od září 2020. Tito žáci byli zvyklí pracovat s učebnicemi od nakladatelství SPN. Díky nepříznivé epidemiologické situaci a přechodu některých ročníků na distanční výuku jsem s těmito žáky pracovat nemohla. Z těchto důvodů jsem experiment provedla s některými žáky 5. třídy Základní školy ve Zlonicích, v místě mého bydliště, kde jsou většinou 2 třídy na jeden ročník. Tyto děti byly taktéž vedeny Hejného metodou a znám je většinou díky sousedským vztahům na vesnici. Experiment tedy neprobíhal v rámci návštěv školy, ale v rámci domluvených osobních setkání s dětmi.

6.4.Etika výzkumu

Žáci byli osloveni přímo mnou, nebo třídní učitelkou, kterou jsem zkontaktovala. Účast na před-experimentu nebyla zcela dobrovolná, protože jsem s žáky pracovala v jejich hodinách matematiky. Účast na experimentu byla již dobrovolná. Žákům bylo předem sděleno zaměření práce a důvod výzkumu, stejně jako časová náročnost. Pro možnost pořízení videozáznamů dostal každý předem informovaný souhlas, který podepsal zákonný zástupce dítěte. Anonymita osobních údajů byla zajištěna zaznamenáním jmen jako kódů složených ze dvou náhodně zvolených písmen.

7. Příprava experimentu

K tvorbě pracovních listů jsem čerpala z pilotních materiálů pro přípravu učebnic pro 4. ročník poskytnuté paní doktorkou Slezákovou. U každé úlohy uvádím důvod výběru, popřípadě komentář k obsahu. Úlohy jsou záměrně zvolené tak, aby nebyly stejného typu a žáci museli při jejich řešení využít co nejvíce různých přístupů. Nakonec jsem vybrala 7 úloh, z nichž jsou 3 úlohy řešeny ústně a 4 úlohy písemně. Pro takové množství jsem se rozhodla pracovní list rozdělit na dva. Do výběru úloh jsem úmyslně nezahrnula takové, kde žáci rýsují na čistém papíře, tj. bez čtvercové sítě. Mým záměrem bylo sledovat jak a zda vůbec žáci, dokáží využít vlastností mříže pro hledání, či zaznamenávání kolmosti a rovnoběžnosti. Po provedení před-experimentu jsem ve vybraných úlohách provedla několik změn, které jsou popsané v kapitole 9.1.

Úloha 1.

Obrázek 25 *k zadání úlohy v pracovním listu, vyroben autorkou práce v MS Word*

Můžeš něco říct o tom, co vidíš na obrázku?

Komentář:

V této úvodní úloze se žáci setkávají s dvěma dvojicemi přímek. Jedny jsou na sebe kolmé, druhé pojí vztah rovnoběžnosti. Cílem úlohy je zjistit, zda žáci dokáží specifikovat vztah přímek na obrázku. Přímky jsou barevně odlišené proto, aby nedocházelo k jejich záměně při popisu.

Úloha 2

Ariana přinesla zajímavé obrázky: co je na nich zajímavého?

Obrázek 26 *k zadání úlohy v pracovním listu (4 obrázky sdružené autorkou pro užití v pracovním listu)* [2]

Kira: „Podívejte, ty čáry a linky jsou také rovnoběžné."

Ariana: „Tak já zkusím protáhnout ty fialové přímky z úlohy 1. Budu zkoumat, jak dlouho poběží ty čáry vedle sebe a nebudou se přibližovat."

Zkusíš to také?

Komentář:

Touto úlohou bych ráda ověřila, do jaké míry sahá žákovo porozumění pojmu rovnoběžnost. Při samotném experimentu ji rozdělím do dvou částí. V první části nechám žáky diskutovat nad obrázky a otázkou *Co je na nich zajímavého?*. Mezi obrázky je záměrně

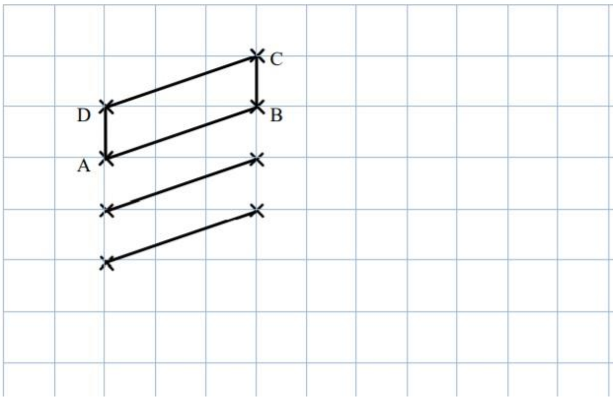
[2] **Zdroj obrázků:**
ptáci - https://pixy.org/5761669/
kniha - https://pixabay.com/photos/book-open-lines-paper-transparent-4341105/
knihovna - https://www.needpix.com/photo/1794309/bookshelf-isolated-transparent-background-books-shelves-reading-library-writing-writer
koleje - https://pixabay.com/photos/railroad-tracks-railroad-tracks-1081952/

vložena fotografie kolejí, které se z pohledu perspektivy přibližují. Předpokládala jsem však, že žáci tento model důvěrně znají a vědí, že se koleje nikdy nepotkají. Chtěla jsem sledovat, jak rychle žák odhalí rovnoběžnost na sémantických modelech.

V druhé části bylo cílem sledovat způsob argumentace, který žáci zvolí. Může se samozřejmě také stát, že se žák touto úlohou vůbec nebude zabývat, protože již nepotřebuje konkrétní příklady k pochopení tohoto vztahu.

Úloha 3

Elmar k obrázku rovnoběžníku začal rýsovat další rovnoběžné úsečky. Pokračuj.



***Obrázek 27** z pilotních materiálů H-mat pro 4. ročník*

Komentář:

V této úloze mají žáci za úkol pokračovat v rýsování rovnoběžných úseček se stranou čtyřúhelníka ve čtvercové síti. Tím, že zadané úsečky neleží v linkách čtvercové mříže, ale tvoří úhlopříčku obdélníku o obsahu 3 jednotkových čtverců, může být úloha náročnější. Zadání ovšem nabízí žákům jistou nápovědu, protože jsou ke straně rovnoběžníku již dvě rovnoběžné úsečky narýsované. Řešení úlohy nevyžaduje pouze schopnost zopakovat mechanický nácvik sestrojování rovnoběžek, ale vnímat vztah mezi úsečkami díky vlastnostem čtvercové sítě.

Úloha 4

Podobně jako v předchozí úloze rýsuj k úsečce další rovnoběžné úsečky:

A. $A\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow B$

B. $C\leftarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow D$

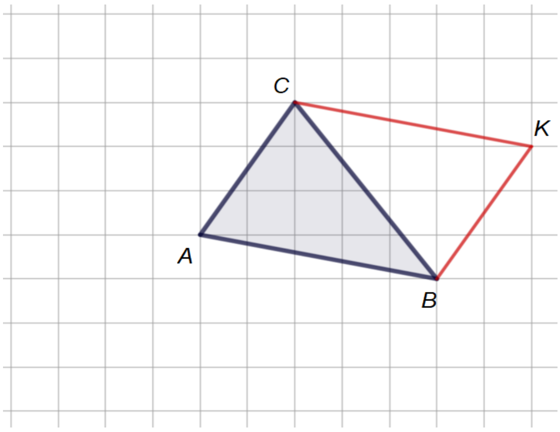
C. zvol svoji úsečku *EF*.

Komentář:

V této úloze žáci rovněž rýsují rovnoběžky k úsečkám ve čtvercové síti. Zde se ale setkáváme s tím, že zadaná úsečka není v síti zakreslená, je nám k dispozici pouze šipkový zápis k jejímu sestrojení. V podúloze A i B žáci pracují s mřížovými úsečkami, které neleží na lince mříže. U této úlohy se může stát, že žáci, kteří nemají zkušenost s Hejného metodou neporozumí šipkovému zápisu v zadání.

Úloha 5

Na obrázku je mřížový trojúhelník *ABC* doplněn na kosodélník *ABKC*. Najdi další možnosti, jak doplnit trojúhelník *ABC* na rovnoběžník.



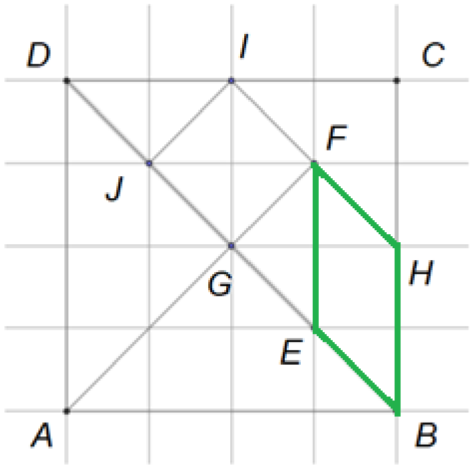
Obrázek 28 *z pilotních materiálů H-mat pro 4. ročník*

Komentář:

Zde vidíme zaměření opět na aplikační schopnost, ovšem s rovnoběžnými úsečkami, které jsou součástí nějakého geometrického útvaru (jeho strany). Tento úkol zároveň vyžaduje znalost charakteristických vlastností kosodélníku a rovnoběžníku. Žák musí mít určitou představivost, aby byl schopen přijít na to, jakým způsobem nalezneme další rovnoběžníky.

Úloha 6

Na obrázku je sedmidílný čínský tangram. Jednotlivé dílky tangramu se nazývají tany. Vyber tany, které mají některé dvě strany na sebe kolmé. Zapiš. Najdi, které strany různých tanů jsou na sebe kolmé.



Obrázek 29 *z pilotních materiálů H-mat pro 4. ročník*

Komentář:

Tato úloha sestává ze dvou úkolů. Jeden je zaměřen na hledání takových tanů, v nichž lze evidovat kolmost jeho dvou stran. Druhý jde za hranice jednoho tanu a chce po žácích zkoumat vztah stran různých tanů. Tento druhý úkol je náročný tím, že se týká vztahu stran dvou různých tanů a navíc se v celé úloze používá nový pojem, tan. Pro splnění úlohy by měli mít žáci představu o kolmosti jako vztahu stran, ale i úhlopříček čtverce.

Úloha 7

Elmar: Zelený čtyřúhelník *EBHF* z obrázku tangramu se nazývá **kosodélník**. Jeho strany *BH* a *EF* a také *BE* a *HF* jsou stejně dlouhé.

Kira: To by pak ale byl obdélník. Ten má také obě dvojice protějších stran stejně dlouhé.

Elmar: Aha, já jsem ale zapomněl ještě něco říct.

Co Elmar zapomněl dodat, aby skutečně popsal kosodélník?

Komentář:

Zde se dostáváme k diskuzi o rozdílech mezi obdélníkem a kosodélníkem. Žáci by již měli mít vybudovanou představu o obdélníku. Kosodélník je zde zobrazený, u obdélníku se však předpokládá, že u žáka již nastal druhý *mentální zdvih* (viz 2.1), a tudíž nepotřebuje konkrétní obraz pro představu. Úloha zjišťuje, zda jsou schopni popsat vztahy mezi stranami obdélníku a zobrazeného kosodélníku. Předkládá žákům jeden společný jev, a to délku stran, a nechává prostor pro další argumentaci.

8. Před-experiment

Předexperiment jsem uskutečnila 14. a 22. května roku 2020. Z důvodu nouzového stavu a následného uzavření škol jsem se rozhodla ho realizovat online prostřednictvím zoom hovorů. Tyto videohovory byly náhradou hodin matematiky, kterou měli žáci pravidelně každý den.

8.1.Průběh před-experimentu

Žáky jsem rozdělila do osmi tříčlenných skupin, se kterými jsem naplánovala dvě třiceti minutová sektání. Na prvním setkání jsme společně uvažovali nad prvním pracovním listem, na druhém setkání nad listem druhým. Protože většina žáků neměla k dispozici tiskárnu, předpřipravené pracovní listy jsem jim zalepené do obálky rozvážela domů spolu s informovaným souhlasem. Na každou obálku jsem nadepsala čas schůzky a upozornění, aby děti obálku neotvíraly před společným hovorem. Tyto pracovní listy jsem si po experimentu vyzvedla.

Žáci před samotnou schůzkou věděli jen to, že se bude jednat o matematické úlohy, blíže jim obsah nebyl specifikován. Záměrně jsem jim neprozrazovala zaměření práce na kolmost a rovnoběžnost, abych u prvních dvou úloh mohla získat neovlivněné reakce.

V úvodu jsem žáky přivítala a vysvětlila jim, co je záměrem toho setkání. Představila jsem jim, co studuji a proč s nimi tento experiment dělám. Vysvětlila jsem jim, že tam nejsem proto, abych je něco naučila, ale abych se od nich něco dozvěděla, a že budu pouze sledovat, jakým způsobem řeší konkrétní úlohy a co pro ně při řešení daných úloh může být náročné. Snažila jsem se je povzbudit, aby se nebáli mluvit, že je nebudu opravovat, nic, co řeknou nebude špatně, jen je to pro mě materiál ke zpracování. A čím víc budou mluvit, tím lépe.

Následně jsem jim sdílela obrazovku s první úlohou a první částí úlohy druhé, které jsme řešili pouze ústně. V tuto chvíli děti ještě neměly možnost nahlédnout do celého pracovního listu. Chtěla jsem tím zamezit tomu, že by nakoukli do dalších úloh, kde již byly pojmy kolmost a rovnoběžnost použity. Pokládala jsem žákům otázky, které byly v zadání a u první části úlohy 2 jsem často přidala otázku *Co mají tyto obrázky společného?*

.

Po diskuzi nad prvními dvěma úlohami jsem žáky nechala rozbalit obálku a přečíst druhou část Úlohy 2. Zeptala jsem se, zda někdy slyšeli slovo *rovnoběžné,* a co si myslí, že to znamená. Následně jsme se vrátili k úvahám nad předchozími úlohami, kdy jsem žákům položila otázky, zda nám to o těch obrázcích prozradilo nějakou informaci, popřípadě jakou. K těmto otázkám jsem se neuchýlila v případě, že odpověď žáků z prvních dvou cvičení již popisovala vztahy kolmosti, či rovnoběžnosti.

Dále jsme přešli k Úloze 3. Zde jsem již neměla přímý dohled nad plněním úkolu, protože jsem žákům neviděla takzvaně „pod ruce". Pouze jsem se doptávala na to, jak úlohu pochopili a co se po nich žádá. Chtěla jsem, aby mi zkusili popsat, jakým způsobem úlohu řeší a jak zajistí, aby ty další nakreslené přímky byly skutečně rovnoběžné, což bylo velmi závislé na schopnosti komunikace v geometrickém jazyce.

Podobně jsem postupovala i u Úlohy 4, kde jsem s žáky přečetla společně instrukce, zeptala se, zda rozumí zadání a vyzvala je, aby pokračovali sami. Následně jsme opět debatovali o tom, jak úlohu řešili. Většinou mi žáci nejdříve popisovali rýsování zadaných úseček pomocí cest v síti. Poté jsem navázala otázkou *Jak jste postupovali při kreslení těch rovnoběžek?.*

Další pracovní list jsme s žáky procházeli na druhé společné schůzce. Na začátku schůzky jsem se pouze zeptala, zda si pamatují na předchozí pracovní list a o čem se v něm jednalo. Úlohy 5 až 7 žáci vyplňovali víceméně sami, jejich řešení jsem pak zaznamenávala z odevzdaných pracovních listů. V případě, že měli žáci pocit, že úloze nerozumí, přečetla jsem ji nahlas s důraznou intonací.

8.2.Úskalí před-experimentu

Celý průběh před-experimentu ovlivnilo mnoho faktorů. Jedním z nich byla určitě nutnost využití online prostředí namísto osobního setkání. Jelikož žáci ještě neměli příliš zkušeností s nastavováním kamer, mnohdy ani neměly potřebná vybavení, nemohla jsem přímo sledovat jejich ruce při řešení úloh zaměřených na rýsování a musela jsem se spoléhat na jejich slovní popis. Dále jsem se potýkala s častými výpadky internetu, kolísajícím připojením, ozvěnami, nefunkčními mikrofony, nebo zaseklými obrazy.

Setkala jsem se také s mírnou neochotou účasti, což bylo způsobeno pravděpodobně tím, že na jaře 2020 byla ještě distanční výuka v podobě online hodin zcela dobrovolná.

Celkově se na první setkání přihlásilo 24 dětí, z nichž se zoom hovoru zúčastnilo 20 a vyplněný pracovní list mi vrátilo jen 8 dětí. Na druhé schůzce jsem se měla setkat s 22 dětmi, protože dvě děti se v tu dobu nevyskytovaly na místě s možností internetového připojení, ve skutečnosti se jich zúčastnilo již jen 16 a druhý pracovní list mi vrátilo též 8. Některé děti ani po opakované žádosti pracovní list nedodaly, protože ho ztratily.

Proces před-experimentu byl také ovlivněn tím, že jsem nemohla zajistit všem účastníkům shodné podmínky. I když jsem na obálku psala, aby ji neotvírali, vím, že určitě dvě děti obálku otevřenou měly ještě před hovorem, což jim mohlo dát prostor připravit se na dané téma. Následně jsem také nemohla zajistit, že děti nebudou před vracením listů vypracované listy dodatečně upravovat pod vedením rodičů, či starších sourozenců.

V návaznosti na předchozí odstavec také zmíním vliv rodičů. I přes počáteční prosby, byli rodiče některých dětí přítomni při online setkání a mnohdy žákům napovídali odpovědi. U jednoho chlapce jsem se setkala i s tím, že s ním maminka probírala, co znamená rovnoběžnost, předchozí den.

V neposlední řadě bych chtěla zmínit vliv spolužáků, kteří byli společně na hodině. Při počtu žáků 3-4 se často stávalo, že se ostatní takzvaně vezli s odpovědí jednoho, popřípadě jen přeformulovali větu svého kamaráda. Pak jsem neměla možnost posoudit, zda na danou otázku odpověď neznají, nebo ji jen nedokáží formulovat, nebo je jejich myšlenka opravdu stejná, jako ta spolužákova.

8.3.Pozorované jevy

V této části zaznamenávám sledované jevy, které se objevily během řešení pracovních listů. Přítomnost, nebo nepřítomnost jevů u ústně řešených úloh zaznamenávám pouze v rámci skupin, ne za každého jednotlivého žáka. Je to proto, že se odpovědi žáků ve skupině většinou shodovaly s první vyslovenou odpovědí. U úloh písemných pak jevy zapisuji za jednotlivé účastníky, kteří mi pracovní listy odevzdali (8 žáků). Skupiny značím číslem podle pořadí, ve kterém se před-experimentu účastnily. Dále také uvádím umístění žáků, od kterých se mi pracovní listy vrátily, do skupin.

Skupina:

1. žák TI
2. -

3. žák DA
4. žák SI
5. žák ŠO
6. žák AD
7. žák JK
8. žáci VE, JŠ

Úloha 1

Jev		Skupina							
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
P11	žák popisuje žluté kolmice jako znaménko plus a fialové rovnoběžky jako znaménko rovná se	/	-	/	/	/	/	/	-
P12	žák používá pojmy kolmice a rovnoběžky	-	/	-	-	-	-	-	-
P13	žák popisuje žluté kolmice jako křížek a fialové rovnoběžky jako dvě čárky	-	-	-	-	-	-	/	-
P14	žák popisuje žluté kolmice jako křížek a fialové rovnoběžky jako znaménko rovná se	-	-	-	-	-	-	-	/

Úloha 2

Jev		Skupina							
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1. část úlohy									
P21	žák používá pro popis obrázků pojmy linky/čáry	-	-	-	/	/	/	/	/
P22	žák nenachází žádné společné znaky	-	/	/	-	-	-	-	-
P23	žák obrázky klasifikuje podle barevnosti - barevné a černobílé	/	-	-	/	-	-	-	-
P24	žák popisuje, že knížka patří do knihovny a ptáci sedí na drátech nad kolejemi	-	-	-	-	/	-	-	-

P25	žák popisuje, že se na obrázcích vyskytuje vždy větší množství ptáků, linek, knih	-	-	-	-	-	-	/	-
	2. část úlohy								
P26	žák tvrdí, že se rovnoběžky nikdy nesetkají/nepřiblíží	/	/	/	/	/	-	/	/
P27	žák argumentuje tím, že přímky běží stále stejným směrem	-	-	/	/	-	-	-	-
P28	žák neodpověděl na otázku	-	-	-	-	-	/	-	-
P29	žák argumentuje tím, že jsou přímky v jedné rovině	-	-	-	-	-	-	-	/

Úloha 3

Jev		Žák							
		TI	DA	SI	AD	ŠO	VE	JK	JŠ
P31	žák narýsoval rovnoběžné úsečky k zadané úsečce	-	-	-	/	/	-	-	-
P32	žák neví, jak úlohu řešit	/	-	-	-	-	-	-	/
P33	žák rýsuje vlastní úsečky, ke kterým následně rýsuje úsečky rovnoběžné, ne však k úsečkám zadaným	-	/	-	-	-	-	/	-
P34	žák narýsoval úsečku zdánlivě rovnoběžnou k úsečce zadané (původní tvořila úhlopříčku obdélníku o obsahu 3 jednotkových čtverců, ta žákova byla úhlopříčkou obdélníku s obsahem 4 čtverců), k ní pak narýsoval rovnoběžné úsečky	-	-	-	-	-	/	-	-
P35	žák narýsoval 4 shodné kosodélníky se zadaným kosodélníkem ABCD	-	-	/	-	-	-	-	-

Úloha 4

Jev		Žák							
		TI	DA	SI	AD	ŠO	VE	JK	JŠ
P41	žák našel krajní body všech úseček, úsečky narýsoval a k nim následně narýsoval úsečky rovnoběžné	-	-	-	/	-	/	/	-
P42	žák našel krajní body úseček, úsečky narýsoval, ale už k nim nesestrojil úsečky rovnoběžné	/	/	-	-	-	-	-	/
P43	žák nachází krajní body úseček odpočítáváním čtverců v síti	-	-	-	/	-	/	-	-
P44	žák sestrojil první dvě úsečky, ke každé narýsoval jednu úsečku rovnoběžnou, následně spojil jejich krajní body a vytvořil kosodélník	-	-	/	-	-	-	-	-
P45	žák narýsoval první dvě úsečky dle zadání, následně spojil jejich krajní body, vytvořil lichoběžník a zvýraznil jeho úhlopříčky	-	-	-	-	/	-	-	-

Úloha 5

Jev		Žák							
		TI	DA	SI	AD	ŠO	VE	JK	JŠ
P51	žák hledal doplnění trojúhelníku na kosodélník	-	-	/	-	/	/	/	/
P52	žák hledal další řešení	-	-	/	-	/	-	-	/
P53	žák nachází dvě řešení, doplňuje trojúhelník dva lichoběžníky, v každém případě se nejedná o mřížové mnohoúhelníky	-	-	-	-	/	-	-	/
P54	žák nachází jedno řešení, kdy doplňuje trojúhelník na mřížový lichoběžník	-	-	-	-	-	/	/	-
P55	žák nevěděl, jak úlohu řešit	/	/	-	-	-	-	-	-

P56	žák nachází dvě řešení, doplňuje trojúhelník dva lichoběžníky mřížové lichoběžníky	-	-	/	-	-	-	-	-
P57	žák s pomocí trojúhelníku s ryskou vytvořil kolmici na stranu BC, dále k této kolmici narýsoval další kolmici procházející bodem A a následně k této úsečce udělal další kolmici procházející bodem C, trojúhelník ABC tedy zarámoval do obdélníku, jehož jedna strana byla shodná se stranou BC	-	-	-	/	-	-	-	-

Úloha 6

Jev		Žák							
		TI	DA	SI	AD	ŠO	VE	JK	JŠ
P61	žák vypsal některé tany, jejichž dvě strany jsou na sebe kolmé	-	/	/	-	-	/	-	-
P62	žák vypsal úsečky na sebe kolmé bez použití znaku komosti	-	-	-	/	/	-	-	-
P63	žák nevěděl, jak úlohu řešit	-	-	-	-	-	-	/	/
P64	žák vypsal některé strany tanů kolmé na strany jiných tanů s použitím znaku kolmosti a znaku pro pravý úhel (pro označení úhlů v obrázku)	/	-	-	-	-	-	-	-

Úloha 7

Jev		Skupina							
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
P71	žák argumentuje tím, že obdélník má všechny vnitřní úhly 90°/všechny úhly pravé	/	-	/	/	-	-	-	-
P72	žák argumentuje tím, že obdélník nemůže být nakřivo	-	/	-	-	-	-	/	-
P73	žák argumentuje tím, že sousední strany obdélníku jsou na sebe kolmé a u	/	-	-	-	-	-	-	-

	kosodélníku nikoliv								
P74	žák neumí pojmenovat rozdíl mezi obdélníkem a kosodélníkem	-	-	-	-	/	-	-	-
P75	žák popisuje, jak kosodélník doplnit na obdélník	-	-	-	-	/	-	-	-
P76	žák říká, že kosodélník se liší od obdélníku tím, že má sousední strany na sebe kolmé	-	-	-	-	-	-	-	/

9. Experiment

Experiment jsem uskutečnila jako osobní setkání nejprve 23. června roku 2020, následně jsem experiment pro nedostatek účastníků opakovala v první polovině března roku 2021.

V prvním případě jsem s žáky pracovala individuálně během vyučování. V druhé části jsem pak s žáky domluvila individuální schůzku v jejich domácím prostředí. Z časových důvodů jsem uskutečnila pouze jedno setkání, kde žáci řešili oba pracovní listy najednou.

9.1.Úpravy

Po uskutečnění před-experimentu jsem usoudila, že pro samotný experiment bude vhodné udělat několik změn jak v pracovních listech, tak při samotném zadávání.

Podstatná změna se týkala organizační formy. Před-experiment jsem uskutečnila se skupinami 2 až 4 žáků, což neumožnilo sledovat reakce všech dětí bez vlivu odpovědí jejich vrstevníků. Pro experiment jsem tedy zvolila individuální formu pouze za přítomnosti žáka a mne. Velkým rozdílem byla také příznivější epidemiologická situace, která mi dovolila experiment uskutečnit prezenčně, což mi umožnilo sledování nekomentovaných postupů žáků při plnění úloh.

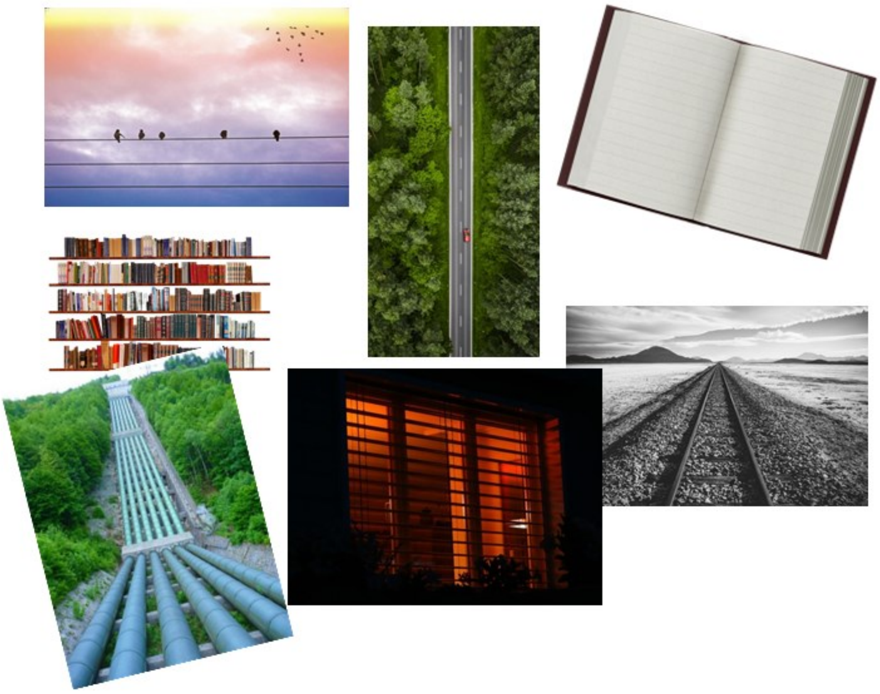
Pracovní listy s úlohami také vyžadovaly několik změn. Zde jsem upravovala pořadí úloh, počet podúloh, formulaci zadání, nebo množství doplňujících ilustrací. U každé z úloh uvedu její úpravu a odůvodnění.

Úloha 1

Tato úloha byla v pracovním listu v pořadí původně druhá, důvodem pro změnu pořadí byla její sémantičnost. Usoudila jsem, že bude pro žáky přirozenější začít úlohou opírající se o obrázky z reálného světa. Zároveň jsem u této úlohy upravila formulaci na základě výsledků z před-experimentu, ve kterém jsem žákům pokládala doplňující otázku, abych je nasměrovala k odpovědi. O tuto otázku jsem tedy znění úlohy obohatila.

Dále jsem rozšířila počet ilustrací a k původním čtyřem obrázkům jsem přidala další tři. Snažila jsem se vybírat takové obrázky, které neměly příliš společných vlastností zakotvených v sémantice. Také jsem druhou část této úlohy zařadila do Úlohy 2, a to proto, aby žáci přemýšleli o geometrických vztazích bez nápovědy v textu, který byl umístěň na druhé straně papíru.

Nová formulace: *Podívej se na obrázky. Zkus vymyslet, co mají všechny společného.*



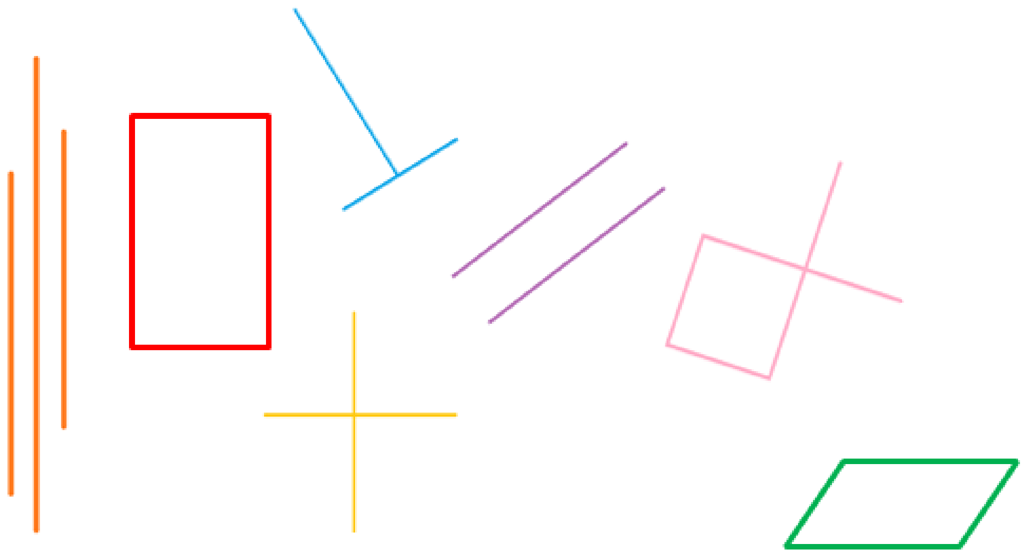
Obrázek 30 *(doplněný obrázek 26) přidané obrázky k zadání úlohy v pracovním listu*[3]

Úloha 2

[3] **Zdroj přidaných obrázků:**
silnice - https://picjumbo.com/red-car-on-the-road-aerial-photo/
potrubí - https://pxhere.com/cs/photo/1150490
žaluzie - https://pixabay.com/photos/red-light-window-dusk-484403/

Tuto úlohu jsem zařadila jako druhou. Důvody pro změnu pořadí jsem popsala výše u Úlohy 1. Změny se týkaly množství obrázků zobrazujících přímky ve vztazích kolmosti nebo rovnoběžnosti. K původním dvěma zobrazením jsem přidala dalších pět. Při před-experimentu u žáků převažovalo aritmetické myšlení nad geometrickým a kolmice s rovnoběžkami popisovali jako znaménka plus a mínus. Tomuto jsem chtěla předejít, a tak jsem přímky a obrazce různě natočila. U některých z přidaných obrazců můžeme najít jak kolmice, tak i rovnoběžky. Zahrnula jsem je do úlohy, abych viděla, jak si s danou situací žáci poradí. Při výběru jsem také volila různé barvy, aby byly žákům usnadněním při jejich popisu.

Nová formulace: *Můžeš něco říct o tom, co vidíš na obrázcích? Dokázal/a bys je roztřídit do dvou skupin?*



Obrázek 31 *k zadání úlohy v pracovním listu, vyroben autorkou v MS Word*

Kira: „Podívejte, ty čáry a linky jsou také rovnoběžné."

Ariana: „Tak já zkusím protáhnout ty fialové přímky z úlohy 2. Budu zkoumat, jak dlouho poběží ty čáry vedle sebe a nebudou se přibližovat."

Zkusíš to také?

Úloha 3

V této úloze jsem neprováděla úpravy ani v zadání, ani v jejím obsahu.

Úloha 4

Tuto úlohu jsem nechala v původním znění, upravila jsem pouze počet podúloh. Z původních tří jsem je zredukovala na dvě. Praktickým důvodem pro tento krok byla úspora času. Dále také možnost zvolit si vlastní úsečku žáci často vnímali jako úlevu a zvolili si úsečku kopírující strany čtverců sítě, což není pro mé sledování příhodné. Také myslím, že pokud žáci dokázali schopnost najít rovnoběžnou úsečku u obou zadání *a,b,* není nutné ověřovat na třetí úsečce.

Nové znění: *Podobně jako v předchozí úloze rýsuj k úsečce další rovnoběžné úsečky: a) A→→↑↑↑B b) C←↓↓↓↓D*

Úlohy 5, 6 a 7 jsem nijak neupravovala.

9.2.Průběh experimentu

V první části (červen 2020) jsem žáky celé 5. třídy informovala o experimentu, důvodu jeho uskutečnění a dobrovolnosti na účasti. Všem, kteří byli ochotni se zúčastnit, jsem rozdala informovaný souhlas k vyplnění zákonnými zástupci a informovala je o datu, kdy měl experiment probíhat. Jelikož se děti ve škole 23. června již moc neučily, pracovala jsem s nimi postupně během dopoledních vyučovacích hodin.

V druhé části (březen 2021) jsem kontaktovala přímo rodiče žáků, nebo žáky osobně s konkrétní prosbou o zapojení se do výzkumu. Nikdo neodmítl, avšak rozhodnutí bylo na rodičích a někteří žáci byli značně neochotní se zapojit.

Samotný experiment probíhal podobně jako před-experiment. S účastníky jsem před vyplňováním pracovního listu mluvila cca 10 minut o kamarádech, společných známých, jejich zájmech, aby trochu ztratili ostych. Při vyplňování jsem jim pokládala doplňující otázky, nebo jsem je požádala, aby si znovu přečetli text zadání, když se ubírali špatným směrem. Při řešení písemných úloh žáci nemluvili tolik jako během před-experimentu, protože jsem nahrávala práci jejich rukou, která většinou nepotřebovala ústní popis. Nakonec jsem s některými žáky, kteří si to přímo vyžádali, prošla jejich řešení a řekla jim, jestli se shoduje s mým. Nejdříve jsem váhala, zda jim tuto možnost dát, ale velké množství žáků se v té době připravovalo na přechod, nebo přijímací zkoušku na gymnázium, a jejich argumenty, proč potřebují vědět výsledky, byly velmi přesvědčivé.

10. Analýza experimentu

10.1. Pozorované jevy

V následujících tabulkách zaznamenávám jevy z protokolů videonahrávek pořízených v průběhu experimentu. U těchto jevů dále uvádím četnost jejich výskytu u každého žáka. Žáci jsou v tabulce označeni náhodně vybranými dvěma písmeny pro zajištění anonymity.

Sledované jevy označuji dvěma znaky. Znak / použiji, když se jev u daného žáka při plnění úlohy objevil. Znak – použiji v případě, že se jev nevyskytl.

Kódy pro pojmenování jevů jsem volila následovně:

- písmeno J značí Jev
- první číslice značí pořadí úlohy, ve které se jev vyskytl
- druhá číslice značí pořadí sledovaného jevu v dané úloze dle četnosti výskytu (od nejvyšší)

Úloha 1

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
J11	žák použil pojmy linky, čáry, lajny (pojmy, které přicházejí ze světa)		-	/	-	/	/	/	/	/	/
J12	žák použije pojem rovnoběžnost/rovnoběžky	žák prokazuje aktivní znalost těchto termínů v propojení s reálnými objekty	-	/	-	-	-	-	-	/	-
J13	žák uvádí jako společný znak všech obrázků výskyt v celém světě, nebo spojení s civilizací	žák hledá společné sémantické rysy	/	-	/	-	-	-	-	-	-
J14	žák popisuje, že linky na obrázcích mají stejný směr	zde ještě chybí explicitní vyjádření geometrickým jazykem	-	-	-	/	-	-	-	-	-

J15	žák popisuje, jakým způsobem se vyvíjely předměty z obrázků v historii	žák neumí popsat, co mají obrázky společného a uspořádává je podle toho, kdy vznikly	-	-	/	-	-	-	-	-	-

Úloha 2

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
1. část úlohy											
J21	žák klasifikuje objekty na 2D geometrické tvary a čáry/přímky	žák klasifikuje skupiny dle toho, zda přímky, či úsečky tvoří nějaký geometrický útvar	/	/	-	/	/	-	/	/	/
J22	žák nachází více možností klasifikace	žák uvádí více kritérií pro třídění	/	/	-	/	-	/	-	/	/
J23	žák pro klasifikaci obrázků do skupin volí vztah kolmosti a rovnoběžnosti	žák je schopen třídit do skupin izolované modely	/	/	-	/	-	/	-	-	/
J24	žák popisuje čtverec s prodlouženými stranami jako rybu	žák používá sémantické ukotvení pro některé útvary	-	/	/	-	-	/	-	-	-
J25	žák neřešil úlohu, ale používá pojmy kolmost a rovnoběžnost (ne jako klasifikační kritérium)	žák neporozuměl zadání	-	-	/	-	-	/	/	-	-
J26	žák popisuje žluté kolmice jako znaménko plus a fialové rovnoběžky jako znaménko rovná se	žák pojmenovává geometrické tvary	-	-	-	-	-	/	/	-	-

		aritmetickými pojmy									
J27	žák pro popis kolmosti použije „pravý úhel”	žák má propojené struktury pojmu kolmost s velikostí úhlů	-	/	-	-	-	-	-	/	-
J28	žák klasifikuje obrazce do skupin podle teploty barev	žák nepoužívá geometrické vlastnosti jako klasifikační kritéritum	-	-	-	-	-	/	-	-	-
		2. část úlohy									
J31	žák tvrdí, že se rovnoběžky nikdy nesetkají/nepřiblíží	žák již nepotřebuje izolované modely pro ověřování	/	/	/	/	/	-	/	/	/
J32	žák argumentuje tím, že přímky běží pořád stejným směrem	zde ještě chybí geometrický jazyk pro argumentaci	/	-	-	/	-	/	-	-	-
J33	žák argumentuje tím, že se rovnoběžky nesetkají, pokud jsou obě nakloněné pod stejným úhlem	žák vnímá stejný úhel naklonění přímek jako záruku dodržení vzdálenosti mezi nimi	-	-	-	-	-	-	-	/	-
J34	žák tvrdí, že vedle sebe rovnoběžky poběží dlouho	žák má částečnou představu o rovnoběžnosti	-	-	-	-	-	/	-	-	-

Úloha 3

Jev	Komentář	Žák								
		MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN

J41	žák narýsoval rovnoběžné úsečky k zadané úsečce	žák porozuměl zadání	/	/	/	-	/	/	/	-	/
J42	žák rýsuje rovnoběžné úsečky s pomocí odpočítávání čtverců v síti	žák si tím argumentuje rovnoběžnost aritmetickým způsobem	/	/	-	-	/	-	-	-	/
J43	žák argumentuje tím, že úsečka běží přes 3 čtverce	žák zde úsečku vnímá jako úhlopříčku obdélníku	-	-	/	-	-	-	-	-	/
J44	žák narýsoval rovnoběžné úsečky v opačném směru	žák nenachází úsečku, která je rovnoběžná se zadanou a narýsuje jinou úsečku „podobnou" (osově souměrnou) a k ní už najde rovnoběžné úsečky	-	-	-	/	-	-	-	-	-
J45	žák rýsuje rovnoběžky tak, že narýsuje kolmici na úsečku a následně kolmici na kolmici	žák využívá znalosti o rovnoběžnosti vzniklé složením dvou kolmostí	-	-	/	-	-	-	-	-	-
J46	žák rýsuje rovnoběžné úsečky ležící v linkách sítě, které však nejsou rovnoběžné k zadané úsečce	žák nenachází úsečku, která je rovnoběžná se zadanou a narýsuje jinou úsečku k ní už najde rovnoběžné úsečky	-	-	-	-	-	-	-	/	-

Úloha 4

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
J51	žák našel krajní body obou úseček, úsečky narýsoval a k nim pak narýsoval úsečky rovnoběžné	žák rozumí zadání úlohy a rovnoběžnosti	-	/	/	-	/	-	/	/	/

J52	žák nachází krajní body úseček odpočítáváním čtverců v síti	žák tím argumentuje tu rovnoběžnost aritmetickým způsobem	-	/	-	-	/	-	-	-	/
J53	žák vnímá součet všech šipek jako délku úsečky, která leží na lince čtvercové sítě	žák neporozuměl šipkovému zápisu pro hledání bodů	-	-	-	/	-	-	-	-	-
J54	žák chápe počet šipek jednoho směru jako počet úseček daného směru, (→→) rýsuje jako rovnoběžky a (↑↑↑) rýsuje jako kolmice	žák nerozumí šipkovému zápisu a tvoří si svůj význam šipek	-	-	-	/	-	-	-	-	-
J55	žák nachází lomené čáry - cesty, jak se dostat z bodu A do bodu B a z bodu C do bodu D(složené ze dvou úseček, ke kterým nachází rovnoběžné úsečky)	žák rozumí rovnoběžnosti v prostředí přímek ležící ve čtvercové síti	/	-	-	-	-	-	-	-	-
J56	žák rýsuje rovnoběžky tak, že narýsuje kolmici na úsečku a dále pak kolmici na kolmici	žák využívá znalosti o rovnoběžnosti vzniklé složením dvou kolmostí	-	-	/	-	-	-	-	-	-

Úloha 5

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
J61	žák doplnil trojúhelník na kosodélník	žák si spojil rovnoběžnost s charakteristikou kosodélníku - rozpozná rovnoběžnost i v útvarech	/	/	-	-	-	-	/	/	/
J62	žák odpočítával čtverce při	žák rozumí	/	/	-	-	-	-	-	/	/

	hledání čtvrtého bodu	rovnoběžnosti i pojmu rovnoběžník a používá stejnou strategii jako při hledání rovnoběžných úseček									
J63	žák hledal další řešení	žák ví, že úloha má více řešení	/	-	-	/	-	/	/	-	-
J64	žák říká, že neví, jak úlohu řešit, znovu si čte zadání, zakrývám rukou doplnění na kosodélník, aby žák lépe viděl původní trojúhelník	žák porozuměl zadání s pomocí	/	/	-	-	-	-	-	/	-
J65	žák hledal doplnění trojúhelníku na kosodélník	žák porozuměl zadání	-	-	-	/	-	/	-	-	-
J66	žák nachází dvě řešení, doplňuje trojúhelník na větší trojúhelník a pak doplňuje trojúhelník na lichoběžník, v každém případě se nejedná o mřížové mnohoúhelníky	žák ví, že má najít nový útvar, ve kterém se nachází uvedený trojúhelník ze zadání, takový útvar nachází, ale nesplňuje podmínku, že se jedná o rovnoběžník	-	-	-	/	-	/	-	-	-
J67	žák překreslil trojúhelník ABC	žák neporozuměl zadání	-	-	-	-	/	-	-	-	-
J68	žák řekl, že vůbec nechápe, jak má úlohu řešit	žák neporozuměl zadání	-	-	/	-	-	-	-	-	-

Úloha 6

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
J71	žák vyjmenoval úsečky na sebe kolmé	žák dokáže identifikovat a pojmenovat vztah kolmosti dvou úseček	/	-	/	-	-	-	-	-	/
J72	žák vypsal všechny tany, jejichž dvě strany jsou na sebe kolmé		-	-	-	-	-	-	-	/	/

J73	žák vypsal, některé tany, jejichž dvě strany jsou na sebe kolmé	žák dokáže identifikovat a zapsat vztah kolmosti dvou úseček	-	-	-	/	/	-	-	-	-
J74	žák vypsal úsečky na sebe kolmé a použil znak kolmosti	žák rozumí kolmosti a umí ji zapsat včetně užití znaku pro kolmost	/	-	-	-	-	-	-	-	/
J75	žák označil kolmost úseček znakem pro pravý úhel do obrázku s tany	žák rozumí kolmosti a umí ji znakem evidovat	-	/	-	-	-	-	-	/	-
J76	žák vytvořil vlastní nové tany neodpovídající tanům z tangramu, jejichž dvě sousední strany jsou na sebe kolmé	žák dokázal aplikovat znalost o kolmosti k vytvoření vlastních tanů s kolmými sousedními stranami	-	-	-	/	/	-	-	-	-
J77	žák vypsal úsečky na sebe kolmé bez použití znaku komosti	žák rozumí kolmosti, ale neumí použít znak pro její zápis	-	-	-	-	-	/	-	-	-
J78	žák neví, jak úlohu řešit	žák neporozuměl zadání	-	-	-	-	-	-	/	-	-

Úloha 7

Jev		Komentář	Žák								
			MA	FE	ŠT	TE	MT	EM	ŠA	ŠI	AN
J81	žák argumentuje tím, že má obdélník všechny vnitřní úhly stejně velké, ale kosodélník ne	žák popisuje rozdíl mezi obdélníkem a kosodélníkem pomocí porovnávání velikosti vnitřních úhlů u těchto útvarů	/	/	-	/	-	-	-	/	/
J82	žák argumentuje tím, že u kosodélníku jsou dvojice protějších stran posunuté (nedostatečná argumentace)	žák poukazuje na porozumění rovnoběžnosti v kosodélníku, ale nestačí pro rozlišení kosodélníku a obdélníku	/	-	/	/	-	-	/	-	-

J83	žák argumentuje tím, že obdélník má všechny vnitřní úhly 90°/všechny úhly pravé	žák si zde uvědomuje kolmost (jako vlastnost dvou sousedních stran obdélníku)a popisuje ji pomocí míry ve stupních	/	/	-	-	-	-	-	/	/
J84	žák argumentuje tím, že obdélník nemůže být nakřivo/šikmo	žák popisuje rozdíl mezi obdélníkem a kosodélníkem jako zkosení stran	-	-	-	-	/	/	-	/	-
J85	žák argumentuje, že jedna z dvojic protějších stran není ani vodorovná, ani svislá	žák neuvádí správný argument pro rozlišení obdélníku a kosodélníku, ale ví, že se tyto útvary od sebe liší	-	-	-	/	-	-	-	-	-
J86	žák argumentuje tím, že rohy kosodélníku tvoří trojúhelník, ale rohy obdélníku kopírují čtverec (nedostatečná argumentace)	žák popisuje velikost úhlu přirovnáním ke geometrickému tvaru	-	-	-	-	/	-	-	-	-

10.2. Analýza jevů na základě dílčích výzkumných otázek

V této kapitole se u každé z dílčích otázek zaměřím na konkrétní jevy, které s ní souvisí. Tyto jevy následně okomentuji, případně zařadím do některých z etapizací zmíněných v teoretické části práce. Nakonec se ještě zaměřím na kombinace jevů u některých žáků, které jsem shledala překvapivými.

Do jaké míry je rozvinut geometrický jazyk pro popis kolmosti a rovnoběžnosti u žáků 4. a 5. ročníku?

U úloh 1, 2 a 7 (a také 6, když žáci zvolili ústní variantu odpovědi) jsou žáci vyzváni, aby řešení řekli ústně, a díky tomu můžeme evidovat, jak je rozvinut jejich geometrický jazyk. Ve třech odstavcích popíši tři stupně rozvinutí geometrického jazyka na základě mnou evidovaných jevů.

Některé jevy ukazují na nedostatečné vyvinutí geometrického jazyka. Často je pak u žáků sledována snaha vyjádřit se jazykem který je pro ně dostupný. Pro pojmenování přímky, či úsečky žáci volí slova jako jsou *linky, čáry a lajny* (J11). Dle etapizace D. Jirotkové (2012) bych tyto pojmy zařadila do *etapy upřesňování metaforického jazyka*. Při charakterizování rovnoběžnosti pak žáci argumentují tak, že popisují stejný směr daných úseček, což může později přispívat k porozumění učivu o vektorech a souhlasných úhlech (J14, J35). V 7. úloze pak žáci popisují rozdíl mezi obdélníkem a kosodélníkem tak, že poukazují na posunutí, či zkosení protějších stran u kosodélníku.

V dalších jevech sledujeme správné užití geometrického jazyka za použití pojmů *kolmost* a *rovnoběžnost*. V některých případech žáci v matematické argumentaci setrvávají, avšak uchylují se k „aritmetickému", nikoli geometrickému jazyku. Konkrétně to vidíme u jevu J26, kdy žák popisuje kolmice jako znaménko plus (v kolmých přímkách vidí znak plus) a obdobně u rovnoběžek, které vnímá jako znak =. U jevu J25 žák užívá geometrických pojmů pro popis objektů, avšak nepropojuje je s jejich klasifikací. To dle Bloomovy taxonomie značí, že žák zvládá úkony na úrovni fáze *Zapamatovat* (dokáže identifikovat), ale ještě není ve fázi *Porozumět* (není schopný klasifikace a příslušné argumentace).

Používáním korektního geometrického jazyka tato charakteristika však nekončí. Mezi žáky se našli i tací, kteří byli schopni argumentovat kolmost pomocí jiného geometrického pojmu, jako je pravý úhel (J27, J83). Tím, že jsou žáci schopni propojit geometrické struktury, můžeme předpokládat, že se podle M. Hejného (1989) nacházejí v *Etapě intuitivně-abstraktních představ*.

Převládá u žáků sémantické, nebo geometrické vnímání kolmosti a rovnoběžnosti?

K této otázce se vztahují jevy sledované v úlohách 1 a 2. Jelikož jsou v nich žáci vybízeni k hledání společných znaků na obrázcích z reálného světa (v 1. úloze) a klasifikaci geometrických objektů (v úloze 2). Jejich argumentace je často opřena o jazyk geometrický, který je popsaný v kapitole výše, ale také o sémantický, vycházející ze životní zkušenosti dítěte.

Sémantické vnímání převažovalo nad tím geometrickým hlavně u žáků, kteří se zúčastnili před-experimentu. Ti v 1. úloze často hledali společný znak obrázků v jejich zbarvení - dva černobílé a dva barevné. Na základě toho jsem pak do samotného experimentu obrázky upravila, viz 9.1. V rámci experimentu pak dva žáci z devíti charakterizovali společné znaky obrázků jako např. výskyt v civilizaci, ve světě (J13).

V úloze 2 pak tři žáci z devíti popsali čtverec s prodlouženými stranami jako rybu (J24), což také naznačuje sémantické ukotvení pro některé útvary. Všichni tito žáci však poté pro další charakteristiku použili geometrický jazyk na různých úrovních. V případě rozšíření výzkumu bych zvážila změnu tohoto obrázku, aby žáky zbytečně neodváděl od geometrického vnímání.

Sledované jevy naznačují, že u žáků převládá geometrické vnímání kolmosti a rovnoběžnosti. V některých případech jsou sémantické charakteristiky těchto pojmů jen doprovodem popisu geometrickým jazykem.

Do jaké míry je u žáků vyvinuto vnímání geometrické?

Tato otázka má v pozorovaných jevech největší zastoupení napříč všemi úlohami. V rámci žákovských řešení se můžeme setkat s několika úrovněmi geometrického vnímání. Pro tuto otázku zde uvedu tři žáky, kteří odpovídají třem různým úrovním geometrického vnímání.

Žák EM

Vnímání tohoto žáka se v prvních úlohách pohybovalo spíše v rovině sémantické. Přestože v 1. úloze použil pojmy *čáry, linky* pro popis obrázků z reálného světa, v další úloze se snaží kromě klasifikace podle geometrických charakteristik, vytvořit skupiny podle kritéria teploty barev.

Ve 2. úloze také používá pojmenování *ryba, plus a minus* pro geometrické útvary. Žák byl schopen sestrojit úsečky rovnoběžné s úsečkou zadanou v úloze 3. Pro argumentaci rozdílu mezi obdélníkem a kosodélníkem užívá slova *nakřivo, šikmo*, která značí porozumění kolmosti a rovnoběžnosti do jisté míry, ne však úplnou schopnost použít geometrický jazyk.

Ukázka z protokolu (řešení úlohy 2.), viz Příloha 6:

EM03: „*Tady ty dvě jsou znaménka.”* (EM ukazuje na žluté kolmice a fialové rovnoběžky)
EM04: „*Tadyto je ryba*.” (EM ukazuje na čtverec s prodlouženými stranami)
EM04: „*To je písmenko*.” (EM ukazuje na modré kolmice)
EM05: „*To je tvar.”* (EM ukazuje na obdélník a kosodélník)

EM06: *„A tady to jsou tři čáry."* (EM ukazuje na oranžové rovnoběžky)
EX02: *„A kdybys je měla rozdělit do dvou skupin?"*
EM07: *„Nevím."*
EX03: *„Zkus, cokoliv tě napadne."*
EM08: *„I když to bude kravina?"*
EX04: *„Ano."*
EM09: *„Modrá a zelená jsou klučičí barvy a ostatní holčičí."*
EX05: *„A kdybych ti řekla, že to má něco společného s geometrií?"*
EM10: *„Tohle nejsou tvary."* (EM ukazuje na oranžové, žluté, fialové a modré úsečky)
EX06: *„Aha, jak to myslíš?"*
EM11: *„No, že prostě tohle jsou tvary a ostatní jsou prostě jenom čárky."* (EM ukazuje na obdélník, kosodélník a čtverec s přesahujícími stranami)

Žák TE

Tento žák od prvních úloh prokazuje, že jeho geometrické vnímání je dobře vyvinuté. Je schopen používat termíny kolmost a rovnoběžnost, dokáže s nimi pracovat v praktické úloze, nejen je identifikovat. Tento žák je také jeden z těch, kteří se u úloh snažili najít více řešení, což svědčí o kvalitě jeho matematické kultury. V úlohách, kde si nevěděl rady se zadáním, přišel s vlastním výkladem, nebo pozměnil zadání, aby mohl v řešení pokračovat (J44, J51, J55, J76). V těchto případech je zjevné, že rovnoběžnosti rozumí, ale nerespektuje zadání. Viz Příloha 4.

Žák ŠI

Další žák prokazoval vysokou úroveň geometrického myšlení správným užíváním geometrického jazyka. V některých aplikačních úlohách si žák zadání přizpůsobuje (J46), v jiných argumentuje vztah kolmosti s pomocí velikosti úhlů. Popis rovnoběžnosti pak zakládá na stejném naklonění obou přímek/úseček, tedy opět obohacuje charakteristiku o vnímání úhlů. Žák také dokáže užívat ikonických zápisů pro označení kolmosti (J75), s čímž se setkáváme v *Etapě nástupu znakového systému.* (Jirotková, 2012)

Ukázka z protokolu (řešení úlohy 3.), viz Příloha 8:

EX13: *„A jak poznáš, že by byly rovnoběžné?"* (doptávám se na způsob hledání rovnoběžných úseček)
ŠI17: *„No, že jdou vedle sebe. A neoddalují se od sebe, ani se nepřibližují."*
EX14: *„Takže ty body jsi odhadl?"*
ŠI18: *„No, kdyby to mělo být přesné, tak musíš vyměřit ten úhel, ve kterém je ta jedna úsečka nakloněná a udělat to stejně u té druhé."*

Co je příčinou chyb vzniklých při řešení úloh? Jak postupovat při reedukaci?

Pro tuto otázku bylo vybráno několik jevů, které popisují chybný postup při řešení úlohy. Dále se zaměřím na postup, který by mohl žáka dovést ke správnému uchopení zadání.

J15 – ukázka z protokolu, viz Příloha 3:

ŠT01: *„Společné věci mají, že se pomaličku vyvíjeli. Jakože první byla kniha, pak z nich bylo víc. Pak byly koleje a pak ostatní věci."*

V tomto jevu se žák snažil hledat společné znaky mezi obrázky v jejich historii. Takto formulované znaky však neodpovídají řešení úlohy. Žák by pravděpodobně potřeboval více impulzů směřujících ke geometrickým kontextům. V tomto případě je také na pováženou, zda by žákovi pomohla změna ilustrací doprovázejících úlohu. Místo obrázků reálně zachycujících objekty ze světa, by mohly být obrázky, které zobrazují pouze siluetu, či obrys daných předmětů. To by mohlo méně odvádět žákovu pozornost od geometrického přemýšlení.

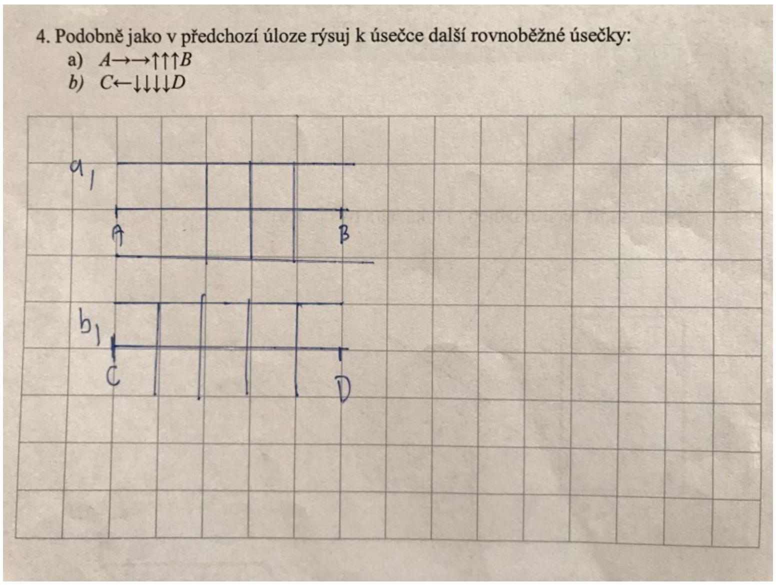
J53, J54, J55

U 4. úlohy chyby žáků nevypovídají o míře porozumění rovnoběžnosti, ale spíše o zkušenosti se šipkovým zápisem pro rýsování ve čtvercové síti. Tyto jevy se vyskytly u dvou žáků, kteří byli vedeni matematikou od nakladatelství Alter. Jeden s těchto žáků rozuměl součtu všech šipek zápisu (5) jako délce dané úsečky, ke které pak rýsoval úsečky kolmé a rovnoběžné. Šipkový zápis si pak vykládal jako jako počet úseček v příslušném směru (→→), tj. dvě úsečky o délce 5 směrem doprava, rovnoběžné k AB, (↑↑↑)- tj. tři úsečky o délce 2 se směrem na sever, kolmé k AB.

Další žák si vyložil šipky podobně jako u úloh v učebnicích nakladatelství SPN – kreslení ve čtvercové síti podle programu s barevnými puntíky, viz 5.2.1, a rýsoval cestu v síti podle daných šipek. Nakreslil cestu ve směru 2 šipky doprava a 3 šipek na sever. Oba žáci byli schopni narýsovat rovnoběžné úsečky s úsečkami jimi vytvořenými, což podobně zvládli i v dalších úlohách. Z toho vyplývá, že oba žáci rovnoběžnosti rozumí.

Ukázka protokolu a řešení (J53 a J54), viz Příloha 4:

TE11: *„No ale kdyby jedna šipka reprezentovala jeden čtvereček, tak to pak nebude úsečka."*
TE12: *„Takže spočítám ty šipky a tam bude bod B. Pak udělám jednu rovnoběžku nahoře a jednu dole. Povedu k tomu tři kolmice."*
EX06: *„A proč kolmice?"*
TE13: *„Protože jsou tady ty tři šipky nahorů. Takže tam mám ty tři kolmice k tomu."*
TE14: *„Pak mám bod C, od toho udělám zase pět doprava do bodu D. K tomu jednu rovnoběžku nad tím a čtyři kolmice směrem dolů."*



Obrázek 32 *ukázka žákovského řešení Úlohy 4.*

J44, J46

V této úloze měli žáci rýsovat úsečku k mřížové úsečce ze zadání. U žáků byly sledovány výše zmíněné jevy. U jevu J44 žák rýsuje úsečku, která je osově souměrná s úsečkou zadanou, a k ní pak rýsuje další rovnoběžné. Jev J46 ukazuje řešení, kdy si žák narýsoval vlastní úsečku kopírující vždy jednu stranu čtverců, které leží vedle sebe a mají společnou jednu stranu, a k ní pak našel další rovnoběžné. V obou těchto případech byli sice žáci schopni narýsovat rovnoběžnou úsečku, avšak jen tehdy, kdy oni sami vytvořili vlastní zadání. Důvodem chyby může být neporozumění zadání. V tomto případě bychom mohli žáka pobídnout k opětovnému pročtení zadání, nebo úlohu přeformulovat. Úloha by mohla být formulovaná např. takto: *Narýsuj rovnoběžné úsečky k úsečce AB.*

J66

V 5. úloze sledujeme u dvou žáků snahu doplnit trojúhelník na jiný geometrický útvar. Vzniklé geometrické útvary však nejsou ani kosodélníky, ani se nejedná o tvary mřížové. Oba dva žáci však vědí, jakým směrem by měli daný trojúhelník doplnit, dokonce naznačují tvar podobný kosodélníku tužkou, ale nedokážou využít vlastností čtvercové sítě pro jeho nalezení. Je možné, že žáci ještě neměli dostatečnou zkušenost s izolovanými modely kosodélníku, aby dokázali vnímat jeho vlastnosti (rovnoběžnost dvou párů protilehlých stran) a následně je využít k jeho vytvoření z jiného obrazce. I když jsou v dalších úlohách tito žáci schopni narýsovat rovnoběžnou úsečku, nemají vztah rovnoběžnosti propojen s jeho výskytem v geometrických obrazcích, což odpovídá tomu, že podle úrovní dle Hieleho se tito žáci nacházejí ještě ve fázi *Analýzy*, nikoliv v *Abstrakci.* (Mason, 1998)

J71, J74, J75, J76

U všech těchto jevů se jedná o jinou, případně neúplnou, interpretaci zadání. U jevů J74 a J75 pozorujeme, že žáci místo vypsání tanů, jejichž dvě strany jsou na sebe kolmé, zapsali dvojice na sebe kolmých úseček. Žáci tedy spíše vnímali kolmost jako vztah mezi úsečkami izolovaně, ne však uvnitř obrazce. Jev J75 popisuje řešení, kdy žák řešení zaznamenal do obrázku tangramu znakem pro pravý úhel. Úsečky, ani tany zvlášť nevypisoval. U jevu J71 se pak žák rozhodl řešení pouze vyjmenovat, přičemž opět nevyjmenoval celé tany, pouze úsečky na sebe kolmé. Ve všech případech se setkáváme s neúplným splněním zadání. Žáci měli vypsat tany, ne úsečky, a úlohu měli řešit písemně, ne ústně. K lepšímu porozumění zadání by mohla sloužit opětovné přečtení zadání, nebo obohacení formulace úlohy o příklad, případně i zkrácení úlohy o druhou část úkolu. Zadání by mohlo být např. *Na obrázku je sedmidílný čínský tangram. Jednotlivé dílky* *tangramu se nazývají tany. Vyber tany, které mají některé dvě strany na sebe kolmé a zapiš. Např. DJI (strany tanu DJ a JI jsou na sebe kolmé).*

P76

Tento jev jsem pozorovala u jednoho žáka v průběhu před-experimentu. Žák při popisování rozdílu mezi obdélníkem a kosodélníkem použil argument kolmosti sousedních stran, avšak ne u obdélníku, ale u kosodélníku. Domnívám se, že se žák spletl spíše ve vlastnosti než v názvu geometrického tvaru. Po tomto tvrzení jsem se totiž žáka opětovně zeptala, o kterém tvaru tvrdí, že má sousední strany na sebe kolmé. Žák znovu tvrdil, že se jedná o kosodélník i po mém odkázání na obrázek z úlohy 6.

Zaznamenané překvapivé kombinace jevů

Žák ŠI – jevy J46 a J51

Tyto jevy se vyskytly u jednoho žáka ve dvou podobných po sobě jdoucích úlohách. U třetí úlohy (J46) žák nenarýsoval rovnoběžky k úsečkám v zadání, ale vytvořil si vlastní dvě rovnoběžky ležící v linkách čtvercové sítě. Ve čtvrté úloze (J51) žák dokázal narýsovat úsečky podle šipkového zápisu a následně k nim najít rovnoběžky. Překvapivé je na této kombinaci právě to, že jednodušší úlohu žák nezvládl, ale úlohu náročnější vyřešil bez problému.

Žák ŠT – J15 a J 44

Zde se setkáváme s kombinací jevů, které naznačují různé úrovně porozumění rovnoběžnosti u jednoho žáka. Přestože se žák v první úloze od geometrického světa úplně odklonil, ve třetí úloze dokazuje schopnost propojovat znalosti o kolmosti a rovnoběžnosti. Jelikož úloha nabízí prostředí čtvercové sítě, je rýsování rovnoběžek s pomocí dvou kolmic, překvapivé. Otázkou je, proč žák nevyužil vlastností čtvercové sítě. Zda měl například možnost poznat dostatek izolovaných modelů rovnoběžek v rámci čtvercové sítě, či nikoliv.

10.3. Shrnutí výsledků výzkumu

V této kapitole se zaměřím na nejčastěji pozorované jevy v každé úloze a dále na stejné jevy, které se vyskytly při řešení různých úloh. U otázek zodpovídaných ústně během před-experimentu počítám pozorovaný jev ve skupině jako jev zaznamenaný u jednotlivce. Do výsledků zahrnu taktéž materiály z před-experimentu. V případě, že je četnost jevů ve všech částech experimentu výrazně odlišná, uvedu jejich zastoupení zvlášť za obě části. V opačném případě, kdy se frekvence výskytu jevů shoduje, předkládám jejich výsledky společně. Celkem se experimentu ve všech fázích účastnilo 17 žáků, jejichž řešení je možné analyzovat. Všechny jevy pozorované u před-experimentu jsou popsané v kapitole 8.3 a jevy sledované v experimentu v kapitole 10.1.

V úloze 1. byl nejčastěji pozorovaným jevem J11, kdy žáci používali pro popis obrázků pojmy linky, čáry, lajny. Tento stejný jev měl u dané úlohy v před-experimentu taktéž největší zastoupení. Celkem jsem tento jev zaznamenala u 12 žáků ze 17, tj. u 70 %.

V první části úlohy 2. se nejčastěji setkáváme s jevem J21, kdy žáci klasifikovali tvary podle toho, zda přímky či úsečky tvoří geometrický útvar, a to u 7 žáků z 9, tj. u 77 %. U před-experimentu je však ve stejné úloze nejčastěji pozorován jev P11 (přirovnání kolmic ke znaménku + a rovnoběžek ke znaménku =), a to u 6 žáků z 8, tj. u 75 %, který má v experimentu jako J26 zastoupení jen u 22 % žáků, tj. 2 žáků z 9. Rozdíl mezi četností výskytu těchto jevů přikládám úpravě úlohy po uskutečnění před-experimentu, kdy jsem úlohu obohatila o více geometrických obrazců, viz 9.1.

V druhé části 2. úlohy byl nejčastěji pozorovaný jev J31 a shodný jev z před-experimentu P26 (žáci jsou přesvědčeni, že se rovnoběžky nikdy nepřiblíží), které jsem zaznamenala u 15 žáků ze 17, tj u 88 % účastníků, což je vůbec nejvíc ze všech sledovaných jevů.

V řešení 3. úlohy jsou nejčetněji pozorovanými jevy J41 a shodný P31 (správné narýsování rovnoběžných úseček k úsečce zadané), které se v experimentu vyskytly u 7 žáků z 9, tj. u 77 %, v před-experimentu se tento jev, stejně jako P32 a P33 objevil pouze u 2 účastníků z 8, tj. u 25 % účastníků. Takový rozdíl v úspěšnosti vypracování úlohy mohl být způsoben různou schopností žáků v různých ročnících, viz komentář níže k úloze 5, nebo také různou formou provedení experimentu. U účastníků experimentu jsem totiž neměla možnost během online setkání nahlédnout do jejich řešení. Při osobním setkání s žáky v experimentu jsem ale mohla reagovat na jejich postupy a doptávat se na konkrétní otázky, které jim mohly v řešení pomoci.

V úloze 4. byl nejčastěji pozorovaným jevem J51 shodný s jevem P41 (narýsování úseček dle zápisu a nalezení úseček k nim rovnoběžných), které jsem pozorovala u 9 žáků ze 17, tj. u 52 %.

U řešení úlohy 5. se setkáváme s úspěšným řešením (J61) u 5 žáků z 9, kteří se účastnili experimentu, tj. u 55 %. Při řešení stejné úlohy v před-experimentu jsem tento jev vůbec nezaznamenala, protože úlohu nikdo nevyřešil správně. Snaha úlohu vyřešit (P51 – naznačování směru, tvaru, zkoušení a gumování) se projevila u 5 žáků z 8, tj. u 62 %. Myslím, že důvodem jsou rozdíly schopností žáků 4. ročníku (před-experiment) a žáků 5. ročníku (experiment).

V úloze 6. jsem zaznamenala jako nejčetnější jev J71 (vyjmenování na sebe kolmých úseček), a to u 3 žáků z 9, tj. u 33 %. V téže úloze jsem v před-experimentu takový jev vůbec nepozorovala, naopak jsem evidovala jev P61, a to u 3 žáků z 8,
tj. u 37 %. Důvodem takové odlišnosti může být opět forma – žáci v před-experimentu nejspíš více spoléhali na zapisování řešení než na komentování svého postupu.

V poslední úloze se nejčastější jevy v experimentu a před-experimentu opět liší. V před-experimentu je pozorován nejvíce jev P71 (argumentace kolmosti velikostí úhlů 90°), a to u 3 účastníků z 8, tj. u 37 %. Shodný jev J82 se pak u experimentu objevil ve 4 řešeních z 9, tj. v 44 %. V samotném experimentu je pak nejčteněji evidovaný jev J81 (argumentace rozdílu obdélníku a kosodélníku shodností všech vnitřních úhlů u obdélníku) zaznamenaný v 5 žákovských řešení z 9, tj. v 55 %. Tyto jevy se však liší pouze udáním konkrétní velikosti vnitřních úhlů.

Dále se také objevoval jev, který jsem pozorovala v žákovských řešení u více úloh, a tím je J42 shodný s jevy P43, J52 a J62. Tento jev popisuje řešitelský postup hledání krajních bodů rovnoběžné úsečky s pomocí odpočítávání čtverců v síti. Celkem jsem tyto jevy zaznamenala 13x napříč třemi úlohami. V experimentu jsem tyto jevy pozorovala ve 3. a 5. úloze u 4 žáků, ve 4. úloze u 3 žáků a v před-experimentu ve 4. úloze u 2 žáků. Tento postup v experimentu střídavě použilo celkem 5 účastníků.

Výsledky ukazují, že porozumění pojmu rovnoběžnost je velmi dobrá, 94 % žáků dokáže argumentovat podstatu rovnoběžnosti. Aplikační schopnosti (zaměření úloh 3,4 a 5) se u různých úloh liší. U před-experimentu bylo 75 % žáků schopno narýsovat rovnoběžné úsečky alespoň v jedné úloze, někteří z nich si však nejdříve uzpůsobili zadání. U experimentu 100 % účastníků dokázalo alespoň v jedné z úloh narýsovat rovnoběžné úsečky. Porozumění rovnoběžnosti uvnitř geometrického útvaru jsem pozorovala u menšího počtu žáků, kdy celkem 29 % ze všech zúčastněných dokázalo úspěšně vytvořit rovnoběžné úsečky k vytvoření kosodélníku.

U kolmosti pak prokázalo 14 žáků z celého výzkumu, tj. 82 %, schopnost vyhledat útvary se dvěma sousedními stranami na sebe kolmými, nebo úsečky, které jsou na sebe kolmé. Hlubší porozumění kolmosti, kdy žáci použili pro argumentaci tohoto vztahu velikost úhlu 90°, nebo označení *pravý úhel,* jsem pozorovala u 7 zúčastněných ze 17, tj. u 41 %. Pro popis některých dvojic úseček v 2. úloze pak použilo 6 ze 17 žáků, tj. 35 %, pojmy *kolmost, kolmice.* Žákům však nebyl před touto úlohou předložen ani jeden z těchto pojmů, proto je úspěšnost tak nízká.

Celkově myslím, že žáci dosahují větší míry porozumění u pojmu rovnoběžnost. Nižší výsledky u porozumění kolmosti mohou mít několik příčin. Jedním z důvodů může být menší zastoupení úloh, které se zabývají kolmostí, v pracovních listech, kde se po žácích sestrojování kolmic nevyžadovalo. Poté i typ těchto úloh, jejich kombinace, či formulace zadání. Dále mohly úspěšnost ovlivnit zkušenosti žáků v tomto tématu. Je možné, že respondenti neměli příliš možností setkat se s kolmostí, nebo neměli dostatek manipulačních příležitostí.

Souhrnné vyhodnocení, které jsem několikrát uváděla za všechny fáze experimentu, bylo často ovlivněno vyšší neúspěšností účastníků před-experimentu. Také z tohoto důvodu jsem se u některých závěrů přiklonila k rozdělení výsledků na před-experiment a experiment.

11. Diskuze

Na základě výsledků výzkumu můžeme říci, že s oběma dvěma pojmy *kolmost* a *rovnoběžnost* jsou děti většinou obeznámeny, avšak liší se hloubka jejich porozumění. Někteří žáci byli schopni pouze identifikovat výše zmíněné vztahy mezi přímkami/úsečkami, jiní dokázali znalost aplikovat a další měli již pojmy propojené s jinými geometrickými strukturami. V porovnání s očekávanými výstupy za 2. vzdělávací období prokázali všichni žáci znalost *rovnoběžnosti*, kterou také dokázali znázornit. U pojmu kolmost jsou výsledky nižší. Možné příčiny takového rozdílu jsou popsány v předchozí kapitole, viz 10.2.

Veliká rozmanitost výsledků experimentu vyvolává určité otázky. Jeden z důvodů rozdílných výsledků přikládám ročníku, který žáci navštěvovali. Často se stávalo, že byla u před-experimentu (žáci 4. ročníku) úspěšnost řešení úloh nižší, než u žáků účastnících se experimentu (žáci 5. ročníku). Tato odlišnost není nijak překvapivá, u žáků nižšího ročníku lze očekávat nižší zkušenost a znalost v tomto tématu.

Dalším možným důvodem je výzkumný vzorek účastníků v daném ročníku. Výběr nebyl realizován na základě předchozích matematických úspěchů, ale na základě ochoty zúčastnit se. Do výzkumu se tedy řadili jak žáci, kteří byli v matematice nadprůměrní, tak i ti, kteří s matematikou často zápasili.

Dalším faktorem, který do výsledků mohl zasáhnout je průprava, kterou žákům poskytl učitel. Volba metod, učebních pomůcek a materiálů, či vztah ke geometrii může žáky v porozumění tomuto tématu rozvíjet, ale také brzdit.

Během experimentu byly u žáků pozorovány obtíže s porozuměním zadání úloh. Přestože v jedné úloze nedokázali narýsovat rovnoběžky, v jiné úloze, která měla odlišné zadání, rovnoběžné úsečky narýsovali bez problémů. Takové zjištění mě utvrzuje v tom, že by žáci měli mít možnosti setkávat se s úlohami použitými v experimentu, které je podněcují k přemýšlení a používání svých poznatků v různých situacích.

Proces sběru dat pro empirickou část s sebou nesl i překážky. Úskalí před-experimentu jsou samostatně popsána v kapitole 8.2, a to proto, že tyto poznatky byly impulsem k provedení změn pro další část výzkumu.

Při samotném experimentu jsem se také setkala s jistými překážkami, které měly vliv na jeho průběh. Jednou z nich byla stydlivost dětí, což pro mě bylo překvapivé, protože jsem všechny účastníky znala (to bylo také jedno z kritérií pro výběr výzkumného vzorku). Někteří účastníci odmítali říct svůj nápad, protože se báli, že bude špatný.

Nedokázala jsem je za krátkou chvíli přesvědčit, že jsme v bezpečném prostředí. Většinou se to ale týkalo žáků, kteří se chystali na přijímací zkoušky na gymnázia. Právě tyto děti se často vyhýbají špatným odpovědím.

V neposlední řadě také zmíním epidemiologickou situaci, která výrazně zasáhla do průběhu zpracování diplomové práce. Jednalo se především o možnost setkat se s žáky, která byla během šíření viru, velmi omezená.

12. Závěr

Cílem této diplomové práce, zabývající se geometrickými pojmy kolmost a rovnoběžnost u žáků 4. a 5. ročníků, bylo zmapovat představy žáků o těchto pojmech a následně popsat hloubku jejich porozumění.

V teoretické části práce je uvedeno vymezení vzájemných vztahů dvou přímek pro uvedení čtenářů do tohoto tématu. Následně jsou charakterizovány různé přístupy popisující proces poznání, kategorie mentálních procesů a pojmotvorný proces v geometrii. V dalších kapitolách se práce zaměřuje na vývoj geometrického jazyka a jeho etapy. Teoretická část také obsahuje kapitolu věnující se výše zmíněným pojmům v rámci kurikulárních dokumentů. Závěrem teoretické části jsou ilustrována a porovnána různá pojetí propedeutiky a představení těchto pojmů na třech vybraných učebnicových řadách. Teoretický základ práce také slouží jako podklad pro šetření v praktické části.

Praktická část byla realizována ve třech částech (před-experiment, první část experimentu a druhá část experimentu). Před-experiment přinesl mnohá zjištění, která umožnila úpravy v experimentu, viz 9.1. Experimenty byly se souhlasem zákonných zástupců nahrávané. Pořízené videozáznamy mi umožnily opětovné shlédnutí experimentů a evidenci jevů. Tyto jevy byly následně komentovány a porovnávány. Dále jsem je sledovala u všech žákovských řešení, a to přispělo k představě o míře porozumění kolmosti a rovnoběžnosti u žáků. Pro zodpovězení vytyčených výzkumných otázek jsem hledala konkrétní jevy a jejich odůvodnění, či příčinu opírající se o poznatky teoretické části. To jsem splnila v kapitole 10.2.

Součástí empirické části bylo také pozorování překvapivých jevů u jednoho účastníka. Toto pozorování mě utvrdilo v různonorodosti vybraných úloh, jelikož i když na některých ze zadaných úloh svou znalost žáci neprokázali, na úlohách jiného typu již ano.

Výsledky výzkumu ukazují, že žáci 4. a 5. ročníků základních škol znají vztah rovnoběžnosti, všichni zúčastnění dokázali své poznatky aplikovat a tento vztah znázornit. Již menší počet žáků byl úspěšný při řešení „nestandardní" úlohy, ve které byla rovnoběžnost součástí útvaru. Geometrický jazyk, který žáci užívají, je často doplňován o metaforické prvky. Výsledky také naznačují, že porozumění kolmosti je nižší, než u prvního pojmu (rovnoběžnost), možné důvody jsou uvedeny v kapitole 10.3. Na základě těchto poznatků bych pro příští zkoumání zvolila větší množství úloh zabývající se kolmostí.

Na základě prostudovaných materiálů, považuji toto učivo za klíčové, smysluplné z hlediska rozvoje geometrického učení žáků. Skrze tyto pojmy totiž poznávají nejen vztahy mezi úsečkami, ale také vztahy mezi stranami různých mnohoúhelníků. Jsem přesvědčena, že pro porozumění těmto pojmům musí mít žáci možnost manipulace a postupně se propracovat přes čtvercovou mříž k pozdějším konstrukcím na čistém papíře.

Seznam použité literatury

ANDERSON, Lorin W. a David R. KRATHWOHL. *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives*. Abridged edition. New York: Longman, 2001. ISBN 0.8013-1903-X.

CSACHOVÁ, Lucia, VORÁČOVÁ, Šárka, ed. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. Atlas (Academia). ISBN 978-80-200-1575-4.

GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-85931-79-6.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.

HEJNÝ, Milan a Kol. H-MAT, o.p.s. *Pilotní materiály pro tvorbu učebnice pro 4. ročník*.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HENDL, Jan. *Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace*. Praha: Portál, 2005. ISBN 80-7367-040-2.

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie: výzkumný záměr Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání*. Vyd. 2. V Praze: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-552-2.

KOUŘIM, Jaroslav. *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

KUŘINA, František. *10 pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární geometrie I*. Vyd. 2., upr. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009. ISBN 978-80-7372-539-6.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-045-4.

PRŮCHA, Jan. *Psychologie učení: teoretické a výzkumné poznatky pro edukační praxi*. Praha: Grada, 2020. Psyché (Grada). ISBN 978-80-271-2853-2.

SVOBODA, Tomáš. *Kapitoly z překladatelské praxe: odborný překlad mezi němčinou a češtinou*. Praha: Univerzita Karlova, Filozofická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7308-407-3.

ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2014. ISBN 978-80-262-0644-6.

VOPĚNKA, Petr. *Příležitostné rozpravy s matematikou*. 2. vyd. Kanina: OPS, 2014. ISBN 978-80-87269-37-4.

Elektronické zdroje

BŘEHOVSKÝ, Jiří. *Induktivní a deduktivní přístupy při výuce matematiky* [online]. Olomouc, 2011 [cit. 2021-06-23]. Dostupné z: https://theses.cz/id/fkz7iw/. Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta.

BYČKOVSKÝ, Petr a Jiří KOŤÁSEK. Nová teorie klasifikování kognitivních cílů ve vzdělávání: Revize Bloomovy taxonomie. *Pedagogika: Časopis pro vědy o vzdělávání a výchově* [online]. 2004, 2004, LIV, 227-242 [cit. 13.06.2021]. ISSN 2336-2189. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=1821&lang=cs

Hejného metoda: Didaktická prostředí [online]. [cit. 13.06.2021]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi

HUDECOVÁ, Dagmar. Revize Bloomovy taxonomie edukačních cílů. *Pedagogika: Časopis pro vědy o vzdělávání a výchově* [online]. 2004, LIV, 274-283 [cit. 13.06.2021]. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=1809&lang=cs

MASON, Marguerite. The van Hiele Levels of Geometric Understanding [online]. 1998 [cit. 13.06.2021]. Dostupné z: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT8990/GEOMETRY/mason,%20marguerite.%20the%20v an%20hiele%20levels%20of%20geometric%20understanding.%202002.pdf

VLKOVÁ, Gabriela. *Pojmotvorný proces ve 2D geometrii u žáků 1. stupně ZŠ*. Praha, 2016. Diplomová práce. Pedagogická fakulta UK. [online]. [cit. 23.06.2021] Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/79488/DPTX_2014_1_11410_0_352102_0_160364.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Učebnice dle nakladatelství
Alter

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vydání druhé. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-304-7. (učebnice)

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 3*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-319-1. (pracovní sešit 1. díl)

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 3*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-320-7. (pracovní sešit 2. díl)

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 4*. Vyd. 3. Všeň: Alter, 2012. ISBN 978-80-7245-268-2. (pracovní sešit 1. díl)

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 4*. Vyd. 3. Všeň: Alter, 2012. ISBN 978-80-7245-269-9. (pracovní sešit 2. díl)

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 3. Všeň: Alter, 2014. ISBN 978-80-7245-305-4. (učebnice)

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika*. Vyd. 10. Ilustroval Zdeněk MILER, ilustroval Kateřina LOVIS-MILER. Všeň: Alter, 2011. ISBN 9788072452606. (pracovní učebnice 6)

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika*. Vyd. 9. Ilustroval Zdeněk MILER, ilustroval Kateřina LOVIS-MILER. Všeň: Alter, 2011. ISBN 9788072452248. (pracovní učebnice 7)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 12. Ilustroval Zdeněk MILER. Všeň: Alter, 2013. ISBN 978-80-7245-280-4. (pracovní učebnice 1)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 11. Ilustroval Marie TICHÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-254-5. (pracovní učebnice 2)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 11. Ilustroval Vlasta ŠVEJDOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-222-4. (pracovní učebnice 3)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 11. Ilustroval Olga PTÁČKOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-225-5. (pracovní učebnice 4 A)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 10. Ilustroval Olga ČECHOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 9788072452576. (pracovní učebnice 5)

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 2. Ilustroval Lenka PROCHÁZKOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-207-1. (pracovní učebnice 4 B)

Fraus

HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7. (učebnice)

HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-941-4. (pracovní sešit 1. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-942-1. (pracovní sešit 2. díl)

H-mat

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-01-2. (pracovní učebnice 1. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-02-9. (pracovní učebnice 2. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-03-6. (pracovní učebnice 3. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-16-6. (pracovní učebnice 1. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-17-3. (pracovní učebnice 2. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-18-0. (pracovní učebnice 3. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-21-0. (učebnice)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-22-7. (pracovní sešit 1. díl)

HEJNÝ, Milan. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-23-4. (pracovní sešit 2. díl)

SPN

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-346-0. (pracovní učebnice 1. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-348-4. (pracovní učebnice 2. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-352-1. (pracovní učebnice 3. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-405-4. (učebnice)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-406-1. (pracovní sešit 1. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-407-8. (pracovní sešit 2. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-370-5. (pracovní učebnice 1. díl)

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-376-7. (pracovní učebnice 2. díl)

EIBLOVÁ, Ladislava, Jan MELICHAR, Miroslava ŠESTÁKOVÁ a Marie AUSBERGEROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-434-4. (učebnice)

EIBLOVÁ, Ladislava, Jan MELICHAR, Miroslava ŠESTÁKOVÁ a Marie AUSBERGEROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-435-1. (pracovní sešit 1. díl)

EIBLOVÁ, Ladislava, Jan MELICHAR, Miroslava ŠESTÁKOVÁ a Marie AUSBERGEROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-442-9. (pracovní sešit 2. díl)

Kurikulární dokumenty

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha, 2017 [cit. 13.06.2021]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/aktualne-platne-zneni-rvp-zv

Interní dokumenty ŠVP vybraných ZŠ

Seznam obrázků