Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Chyby při řešení maturitních úloh s nízkou úspěšností u žáků střední školy

Secondary school pupils' mistakes when solving school leaving examination problems with a low success rate

Eva Myšáková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství VVP pro ZŠ a SŠ – matematika

2021

Odevzdáním této diplomové práce potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.
Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. 7. 2021

Na tomto místě bych ráda srdečně poděkovala prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za její cenné připomínky, nekonečnou trpělivost a ochotu při vedení mé diplomové práce.

ABSTRAKT

V práci jsou zkoumány úlohy z matematického didaktického testu, který představuje zkoušku z matematiky ve společné části maturitní zkoušky. Cílem práce je identifikace úloh, které byly řešeny s nízkou úspěšností, zdůvodnění jejich problematičnosti a návrh doporučení, jejichž implementace do výuky či přípravy žáků by mohla přispět (nejen) k jejich lepší připravenosti na podobné typy úloh v maturitní zkoušce. Je provedena analýza úspěšnosti v řešení úloh didaktických testů na základě dostupných anonymizovaných dat a jsou identifikovány úlohy s nejnižší úspěšností v řešení při jarních termínech maturitní zkoušky v letech 2017–2020. Z nich je vybráno několik úloh ke zkoumání v této práci. Nejprve jsou představeny možné důvody nízké úspěšnosti v jejich řešení na základě didaktické analýzy. Dále je proveden výzkum, v němž je z vybraných úloh sestaven test, ten je předložen k řešení a volitelnému okomentování respondentům z řad gymnaziálních žáků a získaná žákovská řešení jsou dále vyhodnocena a podrobně analyzována a diskutována s ohledem na dříve formulovaná očekávání. V žákovských řešeních se vyskytly chyby menší závažnosti i chyby značící závažnější nedostatky v pochopení učiva. Některé z nich jsou v práci blíže komentovány a jsou představeny pravděpodobné motivace žáků ke zvolení daného postupu. Výsledky provedeného výzkumu jsou reflektovány ve formulovaných doporučeních.

KLÍČOVÁ SLOVA

maturitní zkouška, matematika, didaktický test, nízká úspěšnost, chyby v řešení, CERMAT

ABSTRACT

The thesis focuses on problems from the mathematical didactic test, which represents an exam in mathematics in the common part of the school leaving examination. The aim of the work is to identify problems that were solved with low success, explain possible difficulties and propose recommendations, the implementation of which in teaching or training pupils could contribute to their better readiness for similar types of problems in the leaving exam. An analysis of the success in solving the problems of didactic tests is performed based on available anonymized data and the problems with the lowest success rates in solving the spring terms of the leaving exam in 2017–2020 are identified. Several problems are selected for research in this work. First, based on didactic analysis the possible reasons for low success in solving the selected problems are presented. Furthermore, research is carried out. A test is compiled from selected problems and it is presented for solution and optional commenting to respondents from high school. Their solutions are then evaluated and analyzed in detail and discussed with respect to previously formulated expectations. There were errors of a milder nature in the pupils' solutions, as well as errors indicating serious shortcomings in the understanding. Some of the errors are commented in detail and the probable motivations which lead pupils to their incorrect solutions are presented. The results of the research are then reflected in the proposed recommendations.

KEYWORDS

school leaving examination, mathematics, didactic test, low success rate, mistakes in solution, CERMAT

Obsah

Úvod

Předložená diplomová práce se zabývá úlohami z didaktického testu z matematiky, který představuje zkoušku z matematiky ve společné (často označované také jako státní) části maturitní zkoušky v České republice. Konkrétně jsou v práci analyzovány úlohy, které byly v několika posledních letech řešeny s nízkou úspěšností. Jedná se o úlohy z jarních termínů maturitních zkoušek z let 2017, 2018, 2019 a 2020.

Cílem diplomové práce je identifikace úloh s nízkou úspěšností v řešení, provedení výběru několika z nich pro bližší zkoumání a formulace možných příčin obtíží spojených s jejich řešením na základě didaktické analýzy. Dalším cílem je provedení výzkumu. Ten má několik částí: sestavení testu z vybraných úloh, jeho předložení respondentům z řad středoškolských žáků a analýza získaných žákovských řešení. Její výsledky jsou dále diskutovány s ohledem na očekávání vzešlá z didaktické analýzy. Tam, kde výsledky naznačily příčiny chyb v žákovských řešeních, které lze omezit nebo ovlivnit obsahem či formou výuky, jsou navržena doporučení pro výuku matematiky a pro přípravu žáků k maturitní zkoušce, která by mohla přispět k jejich lepší připravenosti na obdobné typy úloh.

V kapitole 1 je představena současná podoba maturitní zkoušky v České republice, stručně též její vývoj a srovnání s podobou v jiných evropských státech. Podrobněji je popsána zkouška z matematiky v rámci společné (státní) maturitní zkoušky. Jsou zde uvedeny odborné termíny vztahující se k tématu maturit, její podoby, struktury a vyhodnocení didaktického testu. Kapitola 2 podrobně popisuje postup, jakým se autorka snaží dosáhnout stanovených cílů. Je uveden způsob analýzy dostupných dat z proběhlých maturitních zkoušek, způsob, jakým jsou autorkou identifikovány úlohy s nízkou mírou úspěšnosti v řešení při reálných didaktických testech, a výběr konkrétních úloh pro zkoumání v této práci. Vybrané úlohy jsou dále analyzovány z hlediska svého obsahu a jsou představena autorčina očekávání důvodů nízké úspěšnosti v jejich řešení. V kapitole je rovněž popsána příprava, provedení a vyhodnocení výzkumu. Tím je předložení testu složeného z vybraných úloh respondentům z řad především budoucích maturantů, jejichž řešení jsou následně analyzována s ohledem na očekávané problémy v řešení úloh. Kromě žáků třech tříd maturitního ročníku byli mezi respondenty zařazeni též žáci jedné třídy 5. ročníku osmiletého gymnázia (kvinty) za účelem potenciálně zajímavého porovnání jejich úspěšnosti i přístupu k řešení zvolených úloh. Dodatečně byly provedeny též rozhovory se čtyřmi žáky 7. ročníku osmiletého gymnázia (septimy) za účelem získání podrobnějších žákovských komentářů k podobě úloh a jejich řešení. Kapitola 3 přináší výsledky analýz žákovských řešení a jejich diskusi s ohledem na autorčina očekávání. Je zhodnocena úspěšnost respondentů v řešení úloh a podrobně analyzovány jejich chybné postupy. Na základě výsledků výzkumu a interpretací chybných řešení jsou dále formulována doporučení pro výuku matematiky a pro přípravu žáků k maturitní zkoušce. Součástí práce je několik příloh, které ji doplňují o relevantní informace.

1 Teoretická kapitola

1.1 O maturitní zkoušce

Maturitní zkouška v České republice představuje zakončení úplného středního vzdělání, tedy 3. úrovně vzdělání v mezinárodní klasifikaci ISCED vytvořené organizací UNESCO (UNESCO, 2015). Bez úspěšně složené maturitní zkoušky není vzdělání formálně ukončeno, a tedy ani uznáno. Složení maturitní zkoušky je proto nezbytné pro vykonávání činností, jejichž podmínkou je ukončené úplné střední vzdělání, a pro studium na vyšších odborných a vysokých školách. Maturitní zkouškou je zakončeno studium na gymnáziích, lyceích, středních odborných školách, středních odborných učilištích a je jí rovněž zakončeno nástavbové studium technického nebo netechnického směru. Jako doklad o úspěšném složení maturitní zkoušky, a tedy získání středního vzdělání s maturitní zkouškou získává žák *Vysvědčení o maturitní zkoušce*.

Původ slova maturitní či maturita je v latinském *maturitas*, které znamená zralost. Hovorové označení maturitní zkoušky jako *zkoušky dospělosti* je tedy v zásadě doslovným překladem. V minulosti nebylo toto označení pouze hovorovým, nýbrž oficiálním, a i doklad o vykonání zkoušky byl nadepsán *Vysvědčení dospělosti* (Maturitní zpravodaj, 2012a; Maturitní zpravodaj, 2012b).

Za počáteční bod vývoje podoby maturitní zkoušky na našem území lze považovat standardizovanou státní zkoušku zavedenou poprvé roku 1812 v Prusku (Morkes, 2003). Její model se v polovině 19. století v souvislosti s tzv. Exner-Bonitzovou reformou (Svatoš, 2000) středních škol přenesl i do českých zemí. Obtížnost této zkoušky byla vysoká, zkouška se skládala z několika částí a byla zároveň podkladem pro přijetí na vysokou školu. K několika úpravám vedoucím mimo jiné ke snížení obtížnosti maturitní zkoušky došlo však ještě v rámci Rakouska-Uherska. Se vznikem Československa se mezi povinné předměty maturitní zkoušky dostal český jazyk. Období druhé světové války posílilo i v jejím rámci roli německého jazyka, období socialismu zase roli jazyka ruského. V těchto obdobích 20. století se složení zkoušky, potažmo přijetí na vysokou školu nedalo považovat za zcela spravedlivé z hlediska žákova výkonu; v období Protektorátu bylo německou inspekcí nařízeno, že cca pětina maturantů nesmí prospět (Morkes, 2003), v období vlády Komunistické strany pak hrál hlavní roli politický profil žáka, respektive jeho rodiny.

Po roce 1989 došlo v rámci porevolučních změn i k uzákonění podoby maturitní zkoušky, která se tak skládala z povinné zkoušky z českého jazyka a literatury a zvolených dalších maturitních předmětů. Podoba zkoušky a zařazení dalších předmětů kromě českého jazyka mezi povinné se lišila podle odborného zaměření školy. Druhá polovina 90. let 20. století byla v České republice z pohledu maturitní zkoušky ve znamení diskusí nad zavedením a případnou podobou tzv. státních maturit. Ta se po několikerých odkladech a úpravách nakonec poprvé uskutečnila ve školním roce 2010/2011. Od té doby probíhá spolu s druhou částí (tzv. profilovou nebo též školní) každoročně[1]. Diskuse je v posledních letech vedena především nad zavedením zkoušky z matematiky jako povinné v rámci státní (společné) části maturity[2] a nad (ne)zachováním stejné podoby společné části maturitní zkoušky pro všechny typy středních škol zakončených maturitní zkouškou.

Podoba maturitní zkoušky je legislativně ukotvena v zákonu 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (Česká republika, 2004 nebo v komentovaném znění ve Vokáč, 2016) a ve vyhlášce č. 177/2009 Sb., o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou (Česká republika, 2009). Provedení maturitní zkoušky je v každém roce dále určeno opatřeními obecné povahy, jednotným zkušebním schématem či metodikami vydanými Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). Prostřednictvím dokumentů tohoto typu (MŠMT: Státní maturita) je možné upravovat konkrétní podmínky konání maturitní zkoušky i v nenadálých situacích, jako je např. probíhající pandemie onemocnění COVID-19.

Zakončení studia na některých středních školách závěrečnou zkouškou není v rámci evropského regionu českým specifikem. To odpovídá i historickému vývoji, neboť řada dnešních států byla ovlivněna týmiž významnými celky a událostmi. Obdobu maturitní zkoušky tak skládají žáci rovněž např. v Německu, v Rakousku, ve Francii, ve Velké

[1] V prvních letech si žáci mohli volit mezi dvěma úrovněmi obtížnosti. V roce 2011 si 96 % maturantů vybralo variantu jednodušší (IROZHLAS, c1997-2021a), což bylo připisováno především tomu, že vysoké školy nebraly tuto volbu v potaz. Maturanti tak pravděpodobně nebyli motivováni k volbě těžší úrovně. Možnost volby mezi úrovněmi byla poté zrušena a maturanti od jara 2013 skládají zkoušky ve společné části v jedné podobě.

[2] Jako povinná již byla po dlouhých diskusích i schválena zákonodárci a poprvé ji tak měli maturanti na gymnáziích a lyceích skládat ve školním roce 2020/2021 a maturanti i na ostatních středních školách o rok později. V dubnu 2020 však byla vládní novelou školského zákona povinná zkouška z matematiky zrušena. Jedná se ovšem o téma nadále živé, na které jsou mezi nejrůznějšími asociacemi, spolky i veřejností rozdílné názory.

Británii, v Itálii, ve Švýcarsku, v Polsku, na Slovensku, v Maďarsku, v Lichtenštejnsku, na Ukrajině či ve státech balkánského regionu. V některých dalších zemích se naopak žádná závěrečná zkouška neskládá a žáci své střední vzdělání zakončují absolvováním posledního ročníku. Rozdíly můžeme najít samozřejmě i v podobě závěrečné zkoušky, v její náročnosti, v podílu počtu obyvatel, kteří maturitní zkoušku složili, i v jejím významu pro vstup na vysoké školy. V řadě států, v nichž se využívá nějaké formy společné (státní) maturitní zkoušky, je výsledek významně zohledňován vysokými školami při přijímaní uchazečů ke studiu.

1.2 Cíle maturitní zkoušky

Maturitní zkouška v České republice má dle platné legislativy ověřit, do jaké míry žáci dosáhli cílů vzdělávání stanovených v rámcovém vzdělávacím programu (RVP) a školním vzdělávacím programu (ŠVP), především pak ověřit úroveň osvojení klíčových vědomostí a dovedností žáka. Mezi cíle maturitní zkoušky tak patří ověření schopnosti žáka pokračovat ve studiu na vyšší odborné nebo vysoké škole či vykonávat povolání nebo odborné činnosti v návaznosti na středoškolské vzdělání (Česká republika, 2004).

Konkrétnější formulaci cílů, jež by maturitní zkouška měla mít, můžeme nalézt například v materiálu Východiska a cíle maturitní zkoušky Asociace češtinářů (ASČ, 2016). Ta formulovala cíle maturitní zkoušky v několika bodech následovně:

- zajistit objektivní hodnocení žáka;
- vytvořit nástroje, díky nimž by žák mohl posoudit úroveň hodnocení vlastního výkonu a díky nimž by v případě potřeby mohlo být jeho hodnocení objektivně přezkoumáno;
- motivovat žáka k výkonu, který odpovídá jeho nadání a studijnímu úsilí;
- motivovat učitele k tomu, aby žáka vedl ve výuce i při vlastní maturitní zkoušce k výkonu co nejvíce se blížícímu kandidátovu maximu;

– zajistit naplnění minimálního maturitního standardu (vycházejícího z Katalogů požadavků k maturitní zkoušce[3]), který by mj. žákovi zaručoval možnost ucházet se o studium na vyšším vzdělávacím stupni, zejména na vysoké škole;

– poskytnout vyučujícím přímou metodickou a obecně odbornou podporu, a příznivě tak ovlivňovat zkoušku i výchovně-vzdělávací proces;

– včas zachycovat signály týkající se problematických míst maturitní zkoušky, ale i výchovně-vzdělávacího procesu obecně;

– poskytnout budoucím zaměstnavatelům a vysokým školám objektivní a srovnatelnou informaci o předpokládaných a požadovaných dovednostech maturantů.

Cíle formulované Asociací češtinářů jsou obecného charakteru a je možné je vztáhnout na zkoušku z kteréhokoli předmětu. Podobné nebo ještě konkrétnější upřesnění cílů vzešlé od organizací zastřešujících vyučující nebo přátele matematiky autorka nenalezla. Např. na půdě Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF) je však téma (státních) maturit, případně povinné maturitní zkoušky z matematiky rovněž diskutováno. Na podzim 2010 po tzv. maturitní generálce, která měla otestovat především logistickou připravenost společné části maturitní zkoušky, vydala Jednota českých matematiků a fyziků stanovisko (JČMF, 2010), v němž např. krátce hodnotila možné důvody nízké úspěšnosti žáků v tomto pilotním projektu, kladně hodnotila připravenost a obsah testu z matematiky a vyzvala Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy k zařazení zkoušky z matematiky jako povinné pro žáky gymnázií a lyceí. Na jaře roku 2012, tedy necelý rok po prvním reálném proběhnutí společné části maturitní zkoušky a ještě před konáním dalšího ročníku, zorganizovala Jednota mezi svými členy anketu k tématu maturitní zkoušky z matematiky, které se zúčastnilo 464 ze 1 707 oslovených členů. Výsledky ankety (JČMF, 2012) např. vcelku nepřekvapivě ukazují názor větší části respondentů, aby byla na gymnáziích matematika zařazena mezi povinné předměty ve společné části maturitní zkoušky[4]. O rok později, na jaře 2013, se pak Jednota ve svém stanovisku (JČMF, 2013a) důrazně vymezila vůči odstranění požadavků

[3] Je blíže popsán v oddílu 1.4.

[4] S tvrzením „Matematika je nedílnou součástí všeobecného vzdělání, a proto by každý absolvent gymnázia měl jisté minimální znalosti matematiky prokázat, bez ohledu na to, jaký obor bude studovat na vysoké škole." souhlasilo dokonce 95 % respondentů.

vyšší úrovně kladených na žáky při skládání zkoušky z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky. Dle jejího názoru tak bude „maturitní zkouška z matematiky připravována pro žáky 9. ročníku ZŠ a pro žáky učňovského školství“ a snížení požadavků povede i při výuce ke kladení menšího důrazu na látku, která se v maturitní zkoušce neobjeví, ačkoli je to látka důležitá a potřebná i v jiných, především přírodovědných předmětech a především při studiu na vysoké škole. Kritikou nešetřil tehdejší předseda Jednoty Josef Kubát ani na veřejném slyšení v Senátu Parlamentu České republiky v červnu 2013 (JČMF, 2013b). Naopak kladně hodnotila Jednota na podzim roku 2014 (JČMF, 2014) stanovisko Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, aby byla matematika povinným zkušebním předmětem v rámci společné části maturitní zkoušky na některých typech středních škol. Zrušení tohoto plánu pak bylo vcelku pochopitelně na podzim 2019 kritizováno ve společném prohlášení Asociace ředitelů gymnázií (AŘG) a Jednoty (JČMF, 2019a). V neposlední řadě pak zástupci Jednoty formulovali v prosinci 2019 několik bodů (JČMF, 2019b) jako podnět k diskusi nad tématem maturitní zkoušky z matematiky. Z tohoto textu by autorka zdůraznila např. ostré ohrazení vůči (poměrně rozšířenému) názoru, že „(povinná) maturita nepřispívá k rozvoji znalostí a dovedností“. Z pohledu zástupců Jednoty zkouška, a tedy nutnost přípravy na ni žákovi nutně určité upevnění znalostí přinese.

Do jaké míry podoba a obsah maturitní zkoušky v současné podobě naplňuje cíle formulované ať už oficiálními dokumenty nebo různými zainteresovanými stranami jako žádoucí, je často a opakovaně předmětem diskuse i mnohých kontroverzí. V zásadě každoročně se v období maturit objevují diskuse na téma účelnosti plošného nasazení státních maturit s ohledem na jejich finanční a logistickou náročnost a současné ztroskotání původního záměru, aby vysoké školy k výsledkům společné části maturitní zkoušky přihlížely a byla jimi třeba i nahrazena přijímací zkouška. Kritizován bývá i obsah maturitních testů, a to v obou směrech, upozorňuje se na zařazení extrémně jednoduchých otázek i otázek nadměrně obtížných či pro žáky nestandardních. Častým tématem diskusí je jednotná úroveň zkoušek pro všechny typy středních škol zakončených maturitní zkouškou. Pozornost vzbudily také případy, kdy byly otázky formulovány nejasně či nejednoznačně, či byla až dodatečně uznána za správnou odpověď původně neuvedená v klíči správných odpovědí. Kontroverze spojené s maturitními zkouškami však nejsou typické jen pro Českou republiku, podobné problémy a diskuse provázejí především společnou (státní) část i v řadě jiných evropských států. Například na Slovensku se objevily případy prozrazení části správných odpovědí či dokonce rozeslání testů na školy i se správnými odpověďmi a následná nutnost opakování zkoušek (IROZHLAS, c1997-2021b).

1.3 Společná část maturitní zkoušky

V době, kdy je tato práce zpracovávána, má maturitní zkouška dvě části – společnou a profilovou. Je tomu tak od roku 2011, kdy byla tzv. státní maturita (dnes označovaná jako společná část maturitní zkoušky) spuštěna.

Podoba i obsah druhé, profilové (též označované jako školní) části maturitní zkoušky jsou do značné míry závislé na konkrétní střední škole. Profilová část je složena ze 2–3 povinných zkoušek (a případně dalších nepovinných), které mohou mít podobu ústní zkoušky, obhajoby předem vypracované práce, písemné práce nebo praktické zkoušky. Může se jednat též o kombinaci uvedených podob. Termíny, podobu, nabídku předmětů i témata stanovuje ředitel školy v souladu s rámcovým vzdělávacím programem, školním vzdělávacím programem a platnou legislativou, především v souladu s vyhláškou č. 177/2009 Sb., o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou.

Společná část maturitní zkoušky se skládá ze dvou povinných zkoušek (a případně dalších nepovinných): jednou je zkouška z českého jazyka a literatury a druhou je zkouška z cizího jazyka, nebo matematiky. Druhou z povinných zkoušek ve společné části si tedy žáci volí – zkouška z matematiky není zkouškou povinnou. V uplynulých letech si zkoušku z matematiky volil jako povinnou pravidelně menší počet žáků než zkoušku z cizího jazyka[5]. U zkoušek z jazyků jsou za standardních okolností[6] součástí kromě didaktického testu ještě písemná práce a ústní zkouška, u matematiky je zkouška tvořena pouze didaktickým testem. Kromě dvou povinných zkoušek se žák může přihlásit též ke zkouškám nepovinným, a to nejvýše ke dvěma. Vybírat může z cizích jazyků, z matematiky a z matematiky rozšiřující[7].

[5] V jarních termínech v letech 2017–2020 se podíl volby zkoušky z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky pohyboval v rozmezí 19–26 %, v dřívějších letech se však objevil i podíl převyšující 40 % (CERMAT, 2018).

[6] Ve školním roce 2019/2020 a 2020/2021 byly v souvislosti s pandemií onemocnění COVID-19 některé části zrušeny nebo ponechány jako dobrovolné.

[7] Matematika rozšiřující je nepovinnou zkouškou v rámci společné části maturitní zkoušky. Jedná se o „nástupce“ zkoušky Matematika+, kterou mohli žáci skládat v letech 2017–2020. K výsledkům této nepovinné zkoušky přihlíží i řada vysokých škol a dosažení určité úspěšnosti v této zkoušce tak může implikovat např. prominutí přijímací zkoušky či přiznání stipendia (CERMAT, 2020).

Společná část maturitní zkoušky je zajišťována Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT[8]). Jedná se o příspěvkovou organizaci zřizovanou a řízenou Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Společná část maturitní zkoušky se řídí tzv. jednotným zkušebním schématem (JZS), které stanovuje závazný časový rozvrh pro konání didaktických testů ve společné části maturitní zkoušky. Jasně je stanoveno i personální obsazení jednotlivých klíčových pozic při realizaci společné části maturitní zkoušky. Na úrovni jednotlivých škol se jedná o zadavatele a školního maturitní komisaře, na úrovni CERMATu pak o autory testových úloh a ratery (posuzovatele otevřených úloh v didaktických testech). K obsazení těchto pozic je nutná odborná příprava a certifikace. Důsledně je kontrolováno i nakládání se zkušební dokumentací, stejně jako dodržování podmínek pro konání zkoušek v jednotlivých učebnách.

1.4 Podoba didaktického testu z matematiky

Didaktický test, který představuje zkoušku z matematiky ve společné části maturitní zkoušky, je tvořen otevřenými (úzce i široce) a uzavřenými (pod)úlohami. U otevřených (pod)úloh žák sám formuluje odpověď na otázku či řešení dané (pod)úlohy. U úzce otevřených (pod)úloh je hodnocena pouze odpověď, u široce otevřených (pod)úloh je třeba uvést i postup řešení. V případě uzavřených (pod)úloh žák volí z nabízených možností odpovědí/řešení. V didaktickém testu se vyskytují tři druhy uzavřených (pod)úloh – v jednom se vybírá z nabídky 5–6 odpovědí, dalšími jsou svazky dichotomických úloh (vybírá se z nabídky dvou možných dopovědí) a úlohy přiřazovací[9]. V blíže zkoumaných letech (2017–2020) bylo v didaktickém testu vždy 26 úloh, přičemž některé sestávaly z několika podúloh. Otevřených úloh bylo ve zkoumaných ročnících vždy 15, uzavřených 11. Uzavřené úlohy měly ale zpravidla větší počet podúloh. Jednotlivé typy úloh mají svá specifika, a to jak z psychologického hlediska (blíže např. Pelikán, 1998, nebo Jandourek, 2003), tak z hlediska časové náročnosti či možnosti odhadnutí odpovědi. Skladbu

[8] Zkratka CERMAT se původně vztahovala k již neexistující organizaci Centrum pro reformu maturitní zkoušky, je ale nadále používána pro zkrácené označení Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání. Kromě organizace a hodnocení společné části maturitní zkoušky organizuje a hodnotí též přijímací zkoušky na střední školy.

[9] U uzavřených úloh existuje vždy možnost odpověď tipovat. Pravděpodobnost označení správné odpovědi je pak dána počtem možností a rovněž tím, zda se hodnotí označení správné odpovědi na jednu otázku, či zda se jedná o svazek nebo přiřazování, kde je pravděpodobnost náhodného kompletně správného řešení výrazně nižší (Calda, 1999; Chvíla, 2012). To je zohledněno i v hodnocení jednotlivých typů úloh.

didaktického testu z matematiky tvořeného otázkami různého typu lze tedy hodnotit jako vhodnou[10].

Za odpovědi jsou udělovány výhradně celočíselné počty bodů. Kritéria hodnocení didaktického testu jsou stanovena každý rok předem. U matematiky činí hranice pro úspěšné složení[11] této části zkoušky 33 % s tím, že může být i dodatečně snížena. To je případně provedeno formou opatření obecné povahy vydané Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy[12].

Je třeba dbát rovněž na správný záznam odpovědí, k němuž slouží záznamový arch. Žáci jsou při úvodní administraci zkoušky zadavatelem seznámeni se způsobem zaznamenávání odpovědí i s možnostmi jejich oprav. Ty jsou do jisté míry omezené – u otevřených úloh velikostí pole, do nějž je odpověď nutné uvést, u uzavřených úloh není možné znovu označit za správnou tu odpověď, od jejíž volby se žák už jednou v záznamovém archu odklonil (to se provádí zabarvením celého políčka, není tedy možné toto pole znovu označit)[13]. Pravidla nejen pro záznam odpovědí jsou součástí testového sešitu se zadáním úloh, a žáci je tak mají po celou dobu, kdy vypracovávají test, k dispozici.

Z pohledu tematického odpovídá obsah didaktického testu Katalogu požadavků k maturitní zkoušce z matematiky zveřejněného CERMATem (CERMAT, Katalog). Ten má 4 části – v části A je uvedeno pět základních kategorií kompetencí, jejichž osvojení je zásadní pro úspěšné zvládnutí zkoušky z matematiky ve společné části. Jsou jimi: osvojení matematických pojmů a dovedností; matematické modelování; vymezení a řešení problému;

[10] Rovněž ve výše zmiňované anketě Jednoty českých matematiků a fyziků se k zahrnutí otevřených i uzavřených úloh do didaktickém testu z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky přiklání většina respondentů.

[11] Počínaje školním rokem 2020/2021 se didaktické testy hodnotí slovně „prospěl(a)"/„neprospěl(a)", v předchozích letech byl didaktický test hodnocen známkou. Na maturitním vysvědčení je však uvedena i procentuální úspěšnost v didaktickém testu. K vysvědčení o maturitní zkoušce je pak možné vydat i dodatek k osvědčení, jeden z dokumentů Europassu (Europass, c2021), v němž je uveden převod procenta úspěšnosti na známky. V některých situacích je totiž pro maturanta potřebné vědět a prokázat, jaké známce jeho výsledek odpovídá, např. pro možnost prominutí (části) přijímací zkoušky na vysokou školu nebo získání stipendia.

[12] Tato možnost byla využita po jarním termínu společné části maturitních zkoušek ve školním roce 2020/2021, kdy byla opatřením obecné povahy hranice pro úspěšné složení zkoušky z matematiky snížena z 33 % na 27 %. Vydané opatření tak dle svého odůvodnění řešilo důsledky situace, kdy nebyla možná osobní účast žáků na vzdělávání (z důvodu protiepidemických opatření v souvislosti s pandemií onemocnění COVID-19).

[13] Uzavřené úlohy jsou hodnoceny elektronickým systémem dle klíče správných odpovědí.

komunikace; užití pomůcek[14]. Část B Katalogu požadavků představuje tematické okruhy, v části C je uvedena základní specifikace zkoušky a v části D příklady testových úloh. Základní přehled tematických okruhů spolu s jejich orientačním procentuálním zastoupením v didaktickém testu dle Katalogu požadavků je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1: K základní specifikaci zkoušky z matematiky (CERMAT, Katalog).

Tematické okruhy	Procentuální zastoupení v testu
1. Číselné množiny	4–12
2. Algebraické výrazy	8–18
3. Rovnice a nerovnice	12–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	8–18
7. Stereometrie	4–12
8. Analytická geometrie	4–14
9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	4–14

1.5 Příprava na didaktický test z matematiky

Přípravou na didaktický test z matematiky je především standardní výuka matematiky na střední škole. Ta svým rozsahem v případě některých středních škol (především gymnázií a lyceí) výrazně přesahuje tematické okruhy vyjmenované v Katalogu požadavků k maturitní zkoušce z matematiky (CERMAT, Katalog). Na některých školách je v nabídce seminářů, které si volí žáci posledních ročníků, zařazen seminář přímo zaměřený na přípravu ke společné části maturitní zkoušky z matematiky. Kromě nejrůznějších publikací a prezenčních i online kurzů nabízejících přípravu k didaktickému testu mohou žáci využít dostupných zdrojů přímo na stránkách CERMATu (CERMAT, Maturitní zkouška), především pak testů z předchozích let, k nimž jsou k dispozici i klíče správných odpovědí, a představují tak dostupný zdroj k procvičování a rovněž k seznámení s reálnou podobou samotného didaktického testu.

[14] Při skládání zkoušky z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky jsou povolenými pomůckami psací a rýsovací potřeby, kalkulačka bez grafického režimu a matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy (MFCHT) či podobné publikace nepřesahující je svým obsahem.

Především pro učitele jsou pak zdrojem cenných informací, které mohou zohlednit při přípravě své výuky, analýzy různých testování matematických znalostí a dovedností českých žáků. Na úrovni základní školy se jedná např. o analýzy výsledků českých žáků v mezinárodním testování PISA nebo TIMSS (např. Rendl, Vondrová, 2014) či úloh z přijímacích zkoušek na střední školy (např. pro oblast míra v geometrii v Janda, Vondrová, Tůmová, 2020). Na úrovni maturity však, pokud je autorce známo, podrobnější studie zpracována nebyla (výjimkou jsou zřejmě jen izolované úlohy, např. v tématu kombinatorika v knize Vondrová, 2019).

Tato diplomová práce takovou studii přináší, a to s cílem identifikace problémových úloh (respektive úloh s nízkou úspěšností v řešení), jejich analýzy, formulace možných příčin nízké úspěšnosti a zhodnocení na základě podrobné analýzy řešení vybraných úloh respondenty z řad žáků gymnázia. Výsledky a jejich diskuse se pak odráží v doporučeních, která by mohla vést ke zkvalitnění výuky matematiky a k lepší přípravě budoucích maturantů (nejen!) na zvládnutí didaktického testu.

2 Metodologie

2.1 Způsob výběru úloh

2.1.1 Výběr ročníků a termínů

V práci byla zkoumána řešení úloh didaktických testů z let 2017–2020, a to vždy z jarních termínů[15].Zvolení výhradně jarních termínů bylo motivováno snahou o získání výsledků z obvyklých termínů maturitní zkoušky, tj. termínů, ve kterých konají maturitní zkoušku žáci, kteří se s vysokou pravděpodobností neodchýlili od standardní trajektorie studia na střední škole.

2.1.2 Výběr úloh

Pro každý z výše uvedených termínů byla provedena analýza anonymizovaných agregovaných dat výsledků didaktických testů z matematiky. Ukázka ze souboru těchto dat je na obrázku 1. Do této ukázky byly z *xlsx* souboru anonymizovaných dat vybrány řádky odpovídající výsledkům (pod)úloh 1, 4, 14, 16.1, 17, 25.1, které se liší tím, zda jsou otevřené (1, 4, 14), či uzavřené (16.1, 17, 25.1). V těchto dvou skupinách jsou další rozdíly. Otevřené úlohy se liší maximálním počtem bodů udělených za odpověď. Uzavřené úlohy se liší v tom, zda se volila odpověď ANO/NE, případně z kolika možností odpovědí byla volba prováděna.

K analýze byly použity další dostupné dokumenty, a to didaktické testy (jejich zadání) a klíče správných řešení. Ve všech případech byla v první řadě provedena kontrola správnosti přiřazení souborů k jednotlivým termínům maturitní zkoušky[16]. Dále byly v souborech anonymizovaných dat přepočteny podíly voleb jednotlivých odpovědí a označeny správné odpovědi. U uzavřených úloh jsou ve třetím sloupci označeny jednotlivé volby odpovědí, číslem 0 je označena situace, kdy žák žádnou z možností neoznačil. U úloh otevřených jsou ve třetím sloupci uvedena bodová ohodnocení žákovské odpovědi, číslem 9 je označena situace, kdy žák řešení neuvedl.

[15] V současné době lze na Výsledkovém portálu Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT, Portál) vyhledat i výsledky z ročníku 2016, v období sběru dat pro tuto práci však k dispozici nebyly, což bylo autorce v dané době potvrzeno i pracovníkem Referátu vnějších vztahů Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání.

[16] Motivací k tomuto kroku byla autorčina zkušenost z předběžného sběru dat z (Portál s výsledky evaluačních projektů, nedatováno), kdy se setkala s nesprávně označeným souborem, resp. obsah souboru neodpovídal svému označení. Tato chyba byla později opravena, ale obezřetnost v přístupu k jednotlivým souborům v autorce přetrvala.

MATEMATIKA 2019 jaro - DIDAKTICKÝ TEST								
ČÍSLO ÚLOHY	ČÍSLO PODÚLOHY	ALTERNATIVA/ BODY	TYP ÚLOHY	POČET ŽÁKŮ				
				PRVO - MATURANT	ODLOŽENÝ ŘÁDNÝ TERMÍN	OPRAVNÝ TERMÍN	NÁHRADNÍ TERMÍN	NEPOVINNÁ ZKOUŠKA
1	0	0	OÚ	4 205	61	1 148	76	146
1	0	1	OÚ	8 741	46	487	31	228
1	0	9	OÚ	463	15	169	25	42
4	0	0	OÚ	1 543	21	477	39	104
4	0	1	OÚ	476	6	76	7	20
4	0	2	OÚ	10 635	70	1 014	58	216
4	0	9	OÚ	755	25	237	28	76
14	0	0	OÚ	3 587	42	675	41	109
14	0	1	OÚ	99	-	7	-	3
14	0	2	OÚ	341	2	19	4	14
14	0	3	OÚ	5 406	19	140	15	116
14	0	9	OÚ	3 976	59	963	72	174
16	1	A	UÚ	8 048	46	632	50	198
16	1	N	UÚ	5 132	73	1 152	75	209
16	1	0	UÚ	229	3	20	7	9
17	0	A	UÚ	2 052	22	334	20	85
17	0	B	UÚ	760	18	268	29	37
17	0	C	UÚ	887	14	236	9	38
17	0	D	UÚ	7 794	45	599	37	181
17	0	E	UÚ	1 743	21	344	29	64
17	0	0	UÚ	173	2	23	8	11
25	1	A	UÚ	480	7	153	21	22
25	1	B	UÚ	869	16	266	18	40
25	1	C	UÚ	9 867	61	903	54	226
25	1	D	UÚ	503	10	142	12	30
25	1	E	UÚ	1 161	22	263	19	70
25	1	F	UÚ	241	4	53	4	9
25	1	0	UÚ	288	2	24	4	19

Obrázek 1: Ukázka ze souboru anonymizovaných dat výsledků didaktického testu z matematiky (jarní termín 2019).

V úvahu byly brány pouze volby žáků, kteří konali zkoušku v řádném termínu/jako prvomaturanti[17]. Motivací pro tento přístup byla opět snaha o zhodnocení řešení žáků, kteří s vysokou pravděpodobností sledovali standardní trajektorii studia.

[17] V souborech anonymizovaných dat z jarního termínu 2017 a 2018 uveden termín „řádný termín“, v souborech z let 2019 a 2020 uveden termín „prvomaturant“.

V prvním kroku byly označeny (pod)úlohy, u nichž nedosáhl podíl volby správné odpovědi[18] 50 %[19]. Tabulka 2 uvádí počty takových podúloh v jednotlivých termínech. Vzhledem k předem stanovému počtu blíže zkoumaných úloh na 5–10[20], byly mezi těmito (pod)úlohami dále označeny ty s podílem volby správné odpovědi nižším než 30 %. Počty takových úloh uvádí tabulka 2.

Tabulka 2: Počty podúloh (celkové a s úspěšností nižší 50 % a 30 %) ve vybraných termínech.

Termín	Celkový počet podúloh	Počet podúloh s úspěšností nižší než 50 %	Počet podúloh s úspěšností nižší než 30 %
jarní termín 2017	37	15	3
jarní termín 2018	39[21]	13	2
jarní termín 2019	38	7	2
jarní termín 2020	38[22]	8	2

Kromě úloh s nižší než 30% úspěšností byly ze skupiny (pod)úloh s podílem volby správné odpovědi nižším než 50 % označeny také ty, u nichž se vyskytl vysoký podíl volby některé konkrétní nesprávné odpovědi (u uzavřených otázek), nebo byly zajímavé jinak, např. tematicky. Důvodem bylo získání co nejlepšího přehledu o konkrétních úlohách s nízkou úspěšností v řešení, aby mohly být do konečného výběru úloh k analýze v této práci zahrnuty úlohy s ohledem nejen na tvrdě číselně vyjádřenou úspěšnost v řešení, ale i s ohledem na

[18] U uzavřených otázek se jedná doslova o volbu odpovědi (např. A, B, C, D, E, F, nebo A, N), u otevřených otázek je touto volbou myšleno uvedení takové odpovědi v Záznamovém archu, za níž byl udělen určitý počet bodů (např. 0, 1, nebo, 0, 1, 2). V souboru s anonymizovanými daty jsou od roku 2018 (včetně) rozlišeny i případy, kdy žák odpověď neuvedl (v souboru z roku 2017 jsou tyto případy zřejmě obsaženy mezi odpověďmi s ohodnocením 0 body).

[19] V případech otevřených (pod)úloh s větším počtem možností udělení bodů za odpověď byl jako podíl volby správné odpovědi uvažován součet podílů všech odpovědí, za něž byl udělen nenulový počet bodů.

[20] Zvoleno jako přiměřený počet úloh k bližší analýze v rámci diplomové práce a rovněž jako počet přiměřený k zahrnutí do testu pro respondenty z řad žáků gymnázia. U tohoto bylo žádoucí, aby se zadání vešlo na jeden list formátu A4 a aby jej žáci byli schopni vypracovat za dobu jedné vyučovací hodiny.

[21] V souboru s anonymizovanými daty s výsledky jarního termínu 2018 nejsou uvedeny zvlášť výsledky podúloh 15.1 a 15.2, ale jen výsledky celé úlohy 15 jako celku. Úlohu 15 skládající se z podúloh 15.1 a 15.2 řešilo s nenulovým bodovým ziskem 41,5 % žáků v řádném termínu.

[22] V souboru s anonymizovanými daty s výsledky jarního termínu 2020 nejsou uvedeny zvlášť výsledky podúloh 15.1 a 15.2, ale výsledky celé úlohy 15 jako celku. Úlohu 15 skládající se z podúloh 15.1 a 15.2 řešilo s nenulovým bodovým ziskem 79,81 % prvomaturantů.

téma či na specifičnost ve volbě odpovědí. Číselné vyjádření úspěšnosti v řešení bylo tedy hlavním kritériem, doplňkovým však bylo i téma úlohy nebo specifičnost v chybování.

Finálně bylo zvoleno 9 (pod)úloh uvedených v tabulce 3. Dvě z těchto podúloh tvořily v původním didaktickém testu jednu úlohu, dále budou tedy v práci evidovány jako jedna úloha se dvěma otázkami. Zvolenými úlohami jsou až na jednu výjimku (pod)úlohy s nižším než 30% podílem volby správné odpovědi. Pouze úloha 14 z jarního termínu 2017 byla řešena s nenulový ziskem bodů ve více než 30 % případů[23], byla však zařazena místo úlohy 23 z jarního termínu 2020 z důvodu tematické rozmanitosti zvolených úloh. Zvolená úloha 14/2017 se totiž zabývá tématem, které ostatními zvolenými úlohami pokryto není, zatímco úloha 23/2020 se jedné ze zvolených úloh podobá. Znění (pod)úloh zvolených pro zkoumání v této práci je uvedeno v oddílu 2.2.

Tabulka 3: Přehled zvolených (pod)úloh (označení (pod)úloh odpovídá příslušnému didaktickému testu).

Termín	Počet	Identifikace zvolených (pod)úloh
jarní termín 2017	4	úlohy 1, 3, 7, 14
jarní termín 2018	2	podúlohy 3.2, 25.3
jarní termín 2019	2	podúlohy 3.1, 3.2 pozn.: jedná o 2 podúlohy tvořící úlohu 3
jarní termín 2020	1	podúloha 8.2

2.2 Didaktická analýza vybraných úloh

V tomto oddílu je provedena didaktická analýza identifikovaných úloh. Jsou představena autorčina očekávání důvodů nízké úspěšnosti v jejich řešení formulovaná před nahlédnutím do žákovských řešení a autorčino a případně i vzorové[24] řešení. Úlohy jsou označeny svým původním označením z příslušného didaktického testu a doplněny jednoduchým, autorkou zvoleným pojmenováním pro snadnější orientaci v dalších částech této práce.

[23] V 28,59 % případů bylo řešení hodnoceno maximálním počtem bodů, tedy 2 body, v 5,68 % případů bylo řešení hodnoceno 1 bodem.
[24] Vzorové řešení z (CERMAT, Portál) je k dispozici pouze pro úlohy z jarních termínů v letech 2019 a 2020.

2.2.1 Úloha 1 (jarní termín 2017) – „výraz = 0“

Jedná se o otevřenou úlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 28,86 % žáků.

Je dán výraz:

$$\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$$

Určete množinu všech $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$, pro která má výraz hodnotu 0.

Úloha spadá do tématu algebraických výrazů, případně řešení rovnic v podílovém tvaru.

Předpokládané důvody nízké úspěšnosti v řešení této úlohy autorka spatřuje v několika bodech. Jedním je nestandardní označení proměnné písmenem y, což může u některých žáků vést k obtížím. Dále autorka předpokládá problémy spojené s určením definičního oboru, resp. podmínky. Zásadní problém je očekáván v neznalosti odpovědi na otázku „Kdy je zlomek/lomený výraz roven nule?“. Někteří žáci si rovněž mohou komplikovat řešení neodhalením irelevantnosti čísla 4 v čitateli zadaného výrazu, a především neuvědoměním si kladnosti dvojčlenu v první závorce (y^2+1) v čitateli zadaného lomeného výrazu.

Autorčino řešení:

definiční obor výrazu:

$$\begin{aligned} 2y+4 &\neq 0 \\ y &\neq -2 \\ D &= R\setminus\{-2\} \end{aligned}$$

výpočet hodnot proměnné y, pro něž má výraz $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$ hodnotu 0:

$$\begin{aligned} \frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4} &= 0 && /\cdot(2y+4) \ldots \text{nenulové pro } y \neq -2 \\ 4(y^2+1)(2y-3) &= 0 && /:4 \\ (y^2+1)(2y-3) &= 0 && /:(y^2+1) \ldots \text{vždy kladné} \\ 2y-3 &= 0 \\ 2y &= 3 && /:2 \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Respektive, klademe si otázku „Kdy je zlomek roven nule?“ a odpovídáme „Když je čitatel roven 0.“. V čitateli daného lomeného výrazu je součin konstanty, vždy kladného kvadratického dvojčlenu a lineárního dvojčlenu. Položením tohoto lineárního dvojčlenu rovným nule získáme hledané řešení (podmínce vyhovuje).

2.2.2 Úloha 3 (jarní termín 2017) – „tabulka s *m*“

Jedná se o otevřenou úlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 29,95 % žáků.

Do všech prázdných polí tabulky doplňte **stejné** nenulové číslo m tak, aby platilo:
Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku.

10		**4**
	25	

Zapište číslo m.

Úloha spadá do tématu algebraických rovnic. Tu je ale nejprve třeba sestavit ze slovního zadání využívajícího názvů matematických operací a vztahů mezi čísly. Podle Hejného (2014) se v této úloze projeví vyjadřovací a transformační síla jazyka písmen.

Předpokládané důvody nízké úspěšnosti v řešení této úlohy autorka spatřuje v neznalosti pojmů *součin* a především *převrácená hodnota*. Zde je předpokládána častá záměna ve významu s pojmem *opačné číslo*. Dále je mezi možnými problémy předpokládáno řešitelovo očekávání celé (nebo dokonce přirozené) hodnoty čísla m. Méně očekávaným problémem by mohla být snaha o kompletní dořešení vzniklé binomické rovnice v oboru komplexních čísel. Komplexní čísla se sice dle (CERMAT, Katalog) ve společné části maturitní zkoušky objevit nemají, to si ovšem nemusí každý žák uvědomit.

Autorčino řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10\cdot m\cdot 4} &= m\cdot 25\cdot m \\
\frac{1}{40\cdot m} &= 25\cdot m^2 \\
m^3 &= \frac{1}{1000} \\
\boldsymbol{m} &= \boldsymbol{\frac{1}{10}} \qquad \text{při uvažování } m\in R
\end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali $m \in C$, má úloha celkem tři řešení – získaná řešením binomické rovnice:

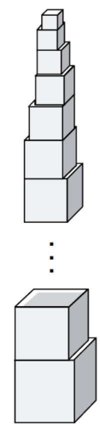
$$\begin{aligned}
m^3 - \frac{1}{1000} &= 0 \\
m_k &= \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2 \\
\boldsymbol{m_0} &= \boldsymbol{\frac{1}{10}} \\
\boldsymbol{m_1} &= \boldsymbol{\frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\
\boldsymbol{m_2} &= \boldsymbol{\frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}
\end{aligned}$$

V klíči správných řešení je uvedeno jen řešení $\frac{1}{10}$, což odpovídá požadavkům uvedeným v (CERMAT, Katalog), kde komplexní čísla nejsou zahrnuta.

2.2.3 Úloha 7 (jarní termín 2017) – „věž z kostek“

Jedná se o otevřenou úlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 17,50 % žáků.

> V Kocourkově postavili televizní věž ze samých krychlí.
>
> Dole je největší krychle s délkou hrany 6 m a každá následující krychle má hranu o 5 cm kratší.
> Hrana nejmenší krychle měří 3,5 m.
>
> Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol.
> Při pohledu shora žádná z krychlí nepřečnívá přes níže položenou krychli.
>
> **Vypočtěte v m² obsah všech <u>nezakrytých vodorovných</u> ploch televizní věže** (včetně horní stěny nejmenší krychle)**.**



Stejné situace se týká i úloha č. 6 v didaktickém testu z jarního termínu v roce 2017, v níž se má spočítat výška televizní věže. Úlohu 6 řešilo s nenulovým bodovým ziskem 46,43 % žáků v řádném termínu.

Zdálo by se, že úloha spadá do tématu posloupností, nicméně patří spíše do tématu stereometrie (resp. prostorové představivosti).

Předpokládaným důvodem nízké úspěšnosti v řešení této úlohy je dle autorky snaha o řešení pomocí posloupnosti (což je ovšem poměrně nepřekvapivé vzhledem k úloze 6, která této předchází a která je tak řešitelná), stačil by přitom „pohled shora", ze kterého je patrná jednoduchost řešení. Úlohu je možné vidět jako příklad na tzv. umění vidět (Kuřina, 1990).

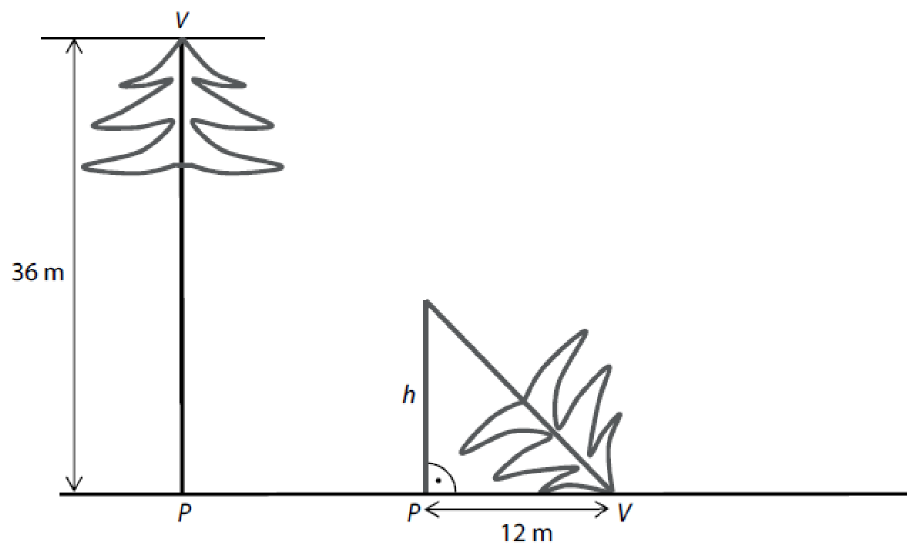
Autorčino řešení:

> Představíme-li si pohled shora na věž z kostek, je zřejmé, že nezakryté vodorovné plochy tvoří čtverec o straně odpovídající hraně největší (spodní) krychle. Obsah nezakrytých vodorovných ploch je tedy roven 6^2 m^2, tedy $\mathbf{36\ m^2}$.

2.2.4 Úloha 14 (jarní termín 2017) – „zlomený strom"

Jedná se o otevřenou úlohu hodnocenou nejvýše 2 body. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 34,27 % žáků.

Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene zanedbáváme.)



Vypočtěte, v jaké výšce nad zemí (h) se strom zlomil.

Úloha spadá do tématu trigonometrie, konkrétně řešení pravoúhlého trojúhelníku.

Důvody nízké úspěšnosti v řešení této úlohy spatřuje autorka v chybách z nepozornosti při čtení a interpretaci zadání (textu i obrázku), v nevhodnosti označení přepony ve vzniklém pravoúhlém trojúhelníku pomocí další neznámé namísto jejího vyjádření pomocí známé výšky stromu a h, v neschopnosti sestavení soustavy (rovnice) aplikací Pythagorovy věty a v obtížích při dořešení soustavy (rovnice) s h, pokud se její sestavení podařilo.

Autorčino řešení:

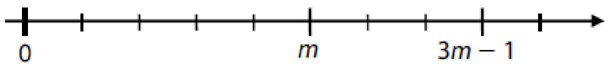
Zlomením stromu vznikl pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $|PV| = 12$ m a h a přeponou délky $36 - h$, kde h je v metrech. Z Pythagorovy věty získáme hledanou délku h:

$$\begin{aligned}(36-h)^2 &= |PV|^2 + h^2\\ (36-h)^2 &= 12^2 + h^2\\ 36^2 - 72h + h^2 &= 12^2 + h^2\\ 72h &= 36^2 - 12^2\\ h &= 18 - 2\\ \boldsymbol{h} &= \mathbf{16}\ [\mathbf{m}]\end{aligned}$$

2.2.5 Úloha 3.2 (jarní termín 2018) – „číselná osa“

Jedná se o otevřenou podúlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 25,64 % žáků.

Na číselné ose jsou obrazy tří čísel: 0, m a $3m - 1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.



Na číselné ose vyznačte (silnou čarou) a popište obraz čísla 1.

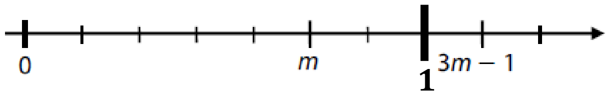
Stejné situace se týká i podúloha 3.1 v didaktickém testu z jarního termínu v roce 2018, v níž se má vyjádřit poměr $m : (3m - 1)$. Podúlohu 3.1 řešilo s nenulovým bodovým ziskem 40,24 % žáků v řádném termínu.

Podúloha spadá do tématu zobrazení čísel na číselné ose, potažmo sestavení a řešení (soustav) rovnic.

Předpokládané důvody nízké úspěšnosti v řešení této úlohy tkví dle autorky v nepochopení, co se po řešiteli chce (neznalost pojmu *obraz čísla*), či v neschopnosti opustit představu, že první svislá čárka vpravo od 0 musí odpovídat číslu 1.

Autorčino řešení:

Vyjádříme si čísla m a $3m - 1$ pomocí počtu dílků – délku jednoho dílku označíme d: $m = 5d$, $3m - 1 = 8d$. Číslo 1 je potom možné vyjádřit jako rozdíl trojnásobku čísla m a čísla $(3m-1)$, tedy $1 = 3 \cdot 5d - 8d = 15d - 8d = 7d$. Obraz čísla 1 je tedy:



2.2.6 Úloha 25.3 (jarní termín 2018) – „logaritmická rovnice“

Jedná se o uzavřenou podúlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 21,94 % žáků.

K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A–E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty;\ -1\rangle$

B) $(-1;\ 1\rangle$

C) $(1;\ 2\rangle$

D) $(2;\ 3\rangle$

E) $(3;\ +\infty)$

F) $\emptyset$

Podúloha je v didaktickém testu z jarního termínu v roce 2018 součástí úlohy se čtyřmi podúlohami, přičemž každá obsahuje jednu rovnici a úkol je u všech stejný. Ostatní podúlohy (rovnice) byly úspěšně řešeny u 46,96 %, 67,59 % a 64,09 % žáků v řádném termínu.

Podúloha spadá do tématu řešení logaritmických rovnic.

Autorka předpokládá důvod nízké úspěšnosti v řešení této úlohy v zanedbání podmínek, resp. v nestanovení definičního oboru.

Autorčino řešení:

Argument logaritmu musí být kladný, platí tedy:

$$\begin{array}{rcl c rcl} x-2 & > & 0 & \wedge & 1-x & > & 0 \\ x & > & 2 & & x & < & 1 \\ x & \in & (0;\infty) & & x & \in & (-\infty;1) \end{array}$$

x tedy musí ležet v průniku intervalů $(0;\infty)$ a $(-\infty;1)$, ten je ovšem prázdný a rovnice nemá řešení.

pozn.: Prostým „odlogaritmováním" rovnice dospějeme k rovnici $x-2=1-x$, která je splněna pro $x=\frac{3}{2}$, toto „řešení" však odporuje podmínce kladnosti argumentu logaritmu.

2.2.7 Úloha 3.1 a 3.2 (jarní termín 2019) – „vlak"

Jedná se o otevřené podúlohy a), b) tvořící dohromady jednu úlohu. Každá podúloha byla hodnocena max. 1 bodem. Nenulového bodového zisku za řešení dosáhlo u podúlohy 3.1 24,63 % a u podúlohy 3.2 14,89 % žáků.

Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení.

Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n.

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok
a) byli ve vlaku;
b) ve vlaku stáli.

Úloha spadá do tématu slovních úloh s úkolem vyjádření hodnoty určité veličiny pomocí proměnné označující hodnotu jiné veličiny, přičemž jsou tyto veličiny svázány slovně formulovanými podmínkami. Jedná se tedy zejména o uchopovací a vyjadřovací sílu jazyka písmen ve smyslu Hejného (2014).

Předpokládanými důvody nízké úspěšnosti v řešení této úlohy může být délka zadání, která může žáky odradit už v průběhu čtení, či fakt, že se vyžaduje vyjádření výsledků v závislosti na n, a ne hledání konkrétního číselného řešení. Dále jsou očekávány obtíže s aplikací údajů v procentech a s dodržením označení, a tedy správností vyjádření hledané veličiny v požadovaném tvaru.

Vzorové řešení (převzato z (CERMAT, Portál)):

3.1) Počet míst k stání v každém vagonu je $n + 20$.

Cestující zaplnili polovinu kapacity vlaku, tj.$\big(3n + 3 \cdot (n + 20)\big) : 3 =$
$= \mathbf{3n + 30}$.

3.2) Počet cestujících ve vlaku byl $3n + 30$.

Počet sedících byl $n + 0{,}75n + n = 2{,}75n$.

Počet stojících byl $3n + 30 - 2{,}75n = \mathbf{0{,}25n + 30}$.

Autorčino řešení:

a) K řešení využijeme informaci, že při odjezdu z Roztok byl vlak naplněn z 1/2 své kapacity:

$$\text{celkový počet přítomných} = \frac{1}{2} \cdot \text{celková kapacita vlaku} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{počet vagónů} \cdot \text{celková kapacita vagónu} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \text{celková kapacita vagónu} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (n + \text{místa k stání}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (n + n + 20) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2n + 20) = \mathbf{3 \cdot n + 30}$$

b) K řešení využijeme vyjádřený počet cestujících přítomných ve vlaku (z předchozí podúlohy), od kterého odečteme počet sedících:

$$\text{počet stojících} = \text{celkový počet přítomných} - \text{počet sedících} =$$

$$= 3n + 30 - \text{sedící v 1. vagónu} - \text{sedící ve 2. vagónu} - \text{sedící ve 3. vagónu} =$$
$$= 3n + 30 - n - 0{,}75 \cdot n - n = 3n + 30 - 2{,}75 \cdot n = \mathbf{0{,}25 \cdot n + 30}$$

pozn.: K řešení podúlohy b) (v zadání společné části maturitní zkoušky podúlohy 3.2) bylo využito řešení podúlohy a) (v zadání společné části maturitní zkoušky podúlohy 3.1). Řešení podúlohy b) „jako takové“ by v zásadě vyřešení první podúlohy obsahovalo (ne nutně přímo, ale např. ve formě zahrnutí do rovnice pro výpočet stojících cestujících): např.:

$$\begin{aligned}
\text{počet stojících} &= \text{celkový počet přítomných} - \text{počet sedících} \\
\text{počet stojících} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (n + n + 20) - n - 0{,}75 \cdot n - n \\
\text{počet stojících} &= 3 \cdot n + 30 - 2{,}75 \cdot n \\
\text{počet stojících} &= \mathbf{0{,}25 \cdot \boldsymbol{n} + 30}
\end{aligned}$$

2.2.8 Úloha 8.2 (jarní termín 2020) – „světelná hesla“

Jedná se o otevřenou podúlohu hodnocenou nejvýše 1 bodem. Nenulového bodového zisku za její řešení dosáhlo 20,43 % žáků.

Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).

Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF.

Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály následující bezprostředně po sobě nebyly stejné.

Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

Vypočtěte, kolik různých **hesel** lze vytvořit.

Stejné situace se týká i podúloha 8.1 v didaktickém testu z jarního termínu roku 2020, v níž se má spočítat, kolik existuje různých signálů. Podúlohu 8.1 řešilo s nenulovým bodovým ziskem 38,13 % prvomaturantů.

Úloha spadá do tématu kombinatoriky.

V souladu s literaturou (např. Vondrová, 2019) lze očekávat, že úloha by mohla odradit žáky už svou tematikou – kombinatorika patří spíše mezi obávaná témata, či by mohla vést ke snaze žáků najít pro ni nějaký kombinatorický vzorec (variace, permutace, kombinace s opakováním, bez opakování…), místo aby se pokusili úlohu řešit úvahou za pomoci známých nástrojů, např. kombinačního čísla či stromového grafu.

Vzorové řešení (převzato z (CERMAT, Portál)) - včetně řešení podúlohy 8.1:

8.1) Signálem je neuspořádaná dvojice vybraná z pěti různých prvků (žárovek).

Počet všech možností, jak vybrat 2 žárovky z pěti, je: $\binom{5}{2} = \mathbf{10}$.

8.2) Heslo je tvořeno třemi signály, u nichž záleží na pořadí.

Signál na první pozici může být libovolný z 10 možných.

Na druhé pozici může být libovolný z 9 signálů různých od signálu užitého na první pozici.

Na třetí pozici lze použít libovolný z 9 signálů různých od signálu na druhé pozici.

Počet všech možností, jak za daných podmínek vytvořit trojici signálů, je: $10 \cdot 9 \cdot 9 = \mathbf{810.}$

Autorčino řešení:

K určení počtu možných různých hesel je zapotřebí spočítat počet možných různých signálů (to bylo v zadání společné části maturitní zkoušky předmětem podúlohy 8.1):

$K(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (počet 2prvkových kombinací bez opakování z 5 prvků)

Nyní již můžeme spočítat počet možných různých hesel:

$$10 \cdot 9 \cdot 9 = \mathbf{810}$$

počet možností
pro 1. signál v hesle
(všech 10 možných)

počet možností
pro 2. signál v hesle
(z 10 možných nesmíme
použít ten použitý v hesle
jako první)

počet možností
pro 3. signál v hesle
(z 10 možných nesmíme
použít ten použitý
v hesle jako druhý)

2.3 Sestavení testu

Výzkum byl proveden prostřednictvím testu sestaveného z osmi vybraných úloh uvedených v oddílu 2.2. Byly vytvořeny tři varianty testu, které se lišily pořadím jednotlivých úloh.

V každé třídě byly mezi žáky náhodně rozdány testy ze všech tří variant. Důvodem k vytvoření několika variant byla autorčina snaha o to, aby se všem úlohám při řešení dostalo přibližně stejné průměrné pozornosti (při předpokladu postupného řešení úloh) a nestalo se například, že úlohu zařazenou jako poslední řada žáků nestihne řešit nebo jí už nebude věnovat dostatek pozornosti. Všechny tři varianty testu jsou uvedeny v příloze 1. Žáci mohli řešení úloh uvést přímo na list se zadáním, v případě potřeby mohli využít i volných listů. Způsob záznamu řešení (umístění na stránce, výběr psacího náčiní atd.) nebyl předmětem zkoumání ani hodnocení úspěšnosti při analýze žákovských řešení.

2.4 Výběr respondentů a průběh výzkumu

Test byl zadán na Gymnáziu v Kolíně třem třídám v maturitním ročníku, a to jedné třídě oktávy (8. ročníku osmiletého gymnázia) a dvěma třídám 4. ročníku čtyřletého gymnázia, a rovněž žákům kvinty (5. ročníku osmiletého gymnázia). Řada úloh z didaktického testu je pro žáky ve věku 15–16 let jistě řešitelná a vyhodnocení jejich přístupu, kdy daná témata ještě přímo neprobírali a vychází při řešení pouze ze svých dosavadních znalostí a zkušeností, bylo pokládáno za potenciálně zajímavé a přínosné. Žáci test vypracovali na konci září 2020, tedy na počátku školního roku, v němž (v případě maturitních ročníků) měli maturovat. Test byl předložen všem přítomným žákům z uvedených tříd; svůj záměr maturovat z matematiky žáci uvedli zaškrtnutím možnosti v záhlaví testu. Na řešení měli žáci jednu vyučovací hodinu, což vzhledem k počtu úloh přibližně odpovídalo času při reálném maturitním didaktickém testu z matematiky. Žáci byli před řešením vyzváni rovněž k volitelnému připojení poznámek ohledně svých dojmů ze zadaných úloh.

S cílem získat podrobnější komentář k jednotlivým úlohám ihned po jejich řešení byl test později předložen ještě čtyřem žákům septimy (tedy 7. ročníku osmiletého gymnázia) v období konce školního roku a nad řešením byl s nimi veden rozhovor. Žáci septimy na konci školního roku byli již vybaveni srovnatelnými znalostmi jako žáci maturitních ročníků v době, kdy test vyplňovali. Jednalo se o částečné nahrazení původního záměru práce provést rozhovory i s původně vybranými respondenty, který nemohl být uskutečněn především z důvodu přerušení prezenční výuky na počátku října 2020. Výběr žáků ze septimy nebyl zcela náhodný, jednalo se o žáky, od kterých byla očekávána dostatečná míra sdílnosti v rozhovorech nad řešením úloh.

Všichni žáci (v případě nezletilých žáků zprostředkovaně i jejich rodiče) byli informováni o záměru předložení testu, s čímž souhlasili, což je zdokumentováno jejich písemnými souhlasy.

Gymnázium v Kolíně (oficiálně Gymnázium, Kolín III, Žižkova 162) je veřejná střední škola zřizovaná Středočeským krajem nabízející studium ve čtyřletém a osmiletém oboru. Úspěšnost žáků kolínského gymnázia ve zkoušce z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky v letech 2018, 2019 a 2020 v porovnání s výsledky na gymnáziích ve Středočeském kraji, středních školách ve Středočeském kraji, gymnáziích v celé České republice a všech středních školách v celé České republice je uvedena v příloze 2. Z těchto výsledků vyplývá mírně nadprůměrná úspěšnost kolínských žáků v předchozích letech, což se při extrapolaci těchto výsledků může odrazit i ve výsledcích výzkumu[25]. Na druhou stranu, je pravděpodobně iluzorní představa, že by žáci věnovali vypracování testu v rámci výzkumu pro tuto práci stejné úsilí jako při řešení reálného maturitního didaktického testu. Tomu navíc zpravidla předchází i náležitá příprava. Určitou představu o úrovni znalostí a schopností žáků dané školy však je možné i takto získat.

2.5 Analýza dat

Všechna žákovská řešení byla vyhodnocena a zpracována. V první fázi byla zaznamenána úspěšnost v řešení jednotlivých úloh, tedy u každé úlohy bylo označeno, zda žák dospěl ke správnému výsledku, či nikoli. Způsob záznamu odpovědi nebyl hodnocen, jako úspěšně řešená úloha byla tedy označena ta, u které se v řešení vyskytl zřetelně označený správný výsledek.

Dále byla u žáků maturitních ročníků podrobně zkoumána chybná řešení nebo řešení nevedoucí k výsledku. Byly identifikovány chyby, kterých se žáci dopustili, a v některých případech byla formulována pravděpodobná motivace žáka ke zvolenému chybnému postupu.

[25] Provedení výzkumu i na jiné střední škole s průměrně nižší úspěšností bylo zvažováno, nicméně především z důvodu protiepidemických opatření a dalších komplikací spojených s probíhající pandemií onemocnění COVID-19 k němu nebylo přistoupeno.

V žákovských řešeních žáků maturitních ročníků byly rovněž vyhledány slovní komentáře k úlohám. Komentáře získané v rozhovorech s žáky septimy bezprostředně po řešení testu byly rovněž zpracovány.

Řešení žáků kvinty byla blíže analyzována především u úloh, v nichž dosáhli průměrně lepších nebo srovnatelných výsledků s žáky maturitních ročníků nebo v nichž dosáhli naopak pro autorku překvapivě nízké úspěšnosti.

Výsledky získané analýzou žákovských řešení jsou uvedeny a diskutovány v kapitole 3, která obsahuje též snímky zajímavých a diskutovaných pasáží z žákovských řešení.

3 Výsledky a diskuse

Všechna žákovská řešení byla podrobně analyzována. Výsledky a jejich diskuse jsou uvedeny v této kapitole. Informace o počtech žáků z jednotlivých tříd zapojených do výzkumu a jejich úspěšnost v řešení předloženého testu jsou uvedeny v oddílu 3.1. Oddíl 3.2 přináší podrobnou analýzu žákovských řešení jednotlivých úloh a jejich diskusi s ohledem na autorčina předem formulovaná očekávání a dále na identifikované chyby, se kterými počítáno předem nebylo. V oddílu 3.3 jsou představena didaktická doporučení pro výuku matematiky a přípravu žáků k maturitní zkoušce formulována na základě výsledků výzkumu a jejich diskuse.

3.1 Úspěšnost jednotlivých tříd v řešení úloh testu

Úspěšnost v řešení jednotlivých úloh je uvedena zvlášť pro každou ze tříd, kde byly úlohy zadány. Výsledky jsou uvedeny ve formě tabulek. Pro každou úlohu je uveden počet žáků, kteří ji neřešili, počet žáků, kteří ji řešili chybně nebo ji nedořešili, počet žáků, kteří ji vyřešili úspěšně, procentuální vyjádření úspěšnosti a v případě maturitních ročníků i procentuální vyjádření úspěšnosti jen u žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky.

Test vypracovalo 18 žáků oktávy, z nichž 13 vyjádřilo úmysl maturovat z matematiky (u 2 z nich s poznámkou „možná“). Průměrná úspěšnost přítomných žáků oktávy dosáhla 39 %, u žáků deklarujících úmysl maturovat z matematiky to bylo 46 % (tabulka 4).

Tabulka 4: Výsledky žáků oktávy (maturitní ročník).

	výraz=0	tabulka s m	věž z kostek	zlomený strom	číselná osa	log. rovnice	vlak a)	vlak b)	světelná hesla
neřešeno	2	3	6	7	5	6	3	7	8
řešeno chybně	8	6	7	5	3	6	6	6	5
řešeno správně	8	9	5	6	10	6	9	5	5
podíl správně řešených	44 %	50 %	28 %	33 %	56 %	33 %	50 %	28 %	28 %
podíl správně řešených u žáků s úmyslem maturovat z matematiky	54 %	69 %	38 %	38 %	62 %	38 %	54 %	23 %	38 %

Test vypracovalo 28 žáků třídy 4.A, z nichž 6 vyjádřilo úmysl maturovat z matematiky. Průměrná úspěšnost přítomných žáků 4.A dosáhla 12 %, u žáků deklarujících úmysl maturovat z matematiky to bylo 15 % (tabulka 5).

Tabulka 5: Výsledky žáků 4.A (maturitní ročník).

	výraz=0	tabulka s m	věž z kostek	zlomený strom	číselná osa	log. rovnice	vlak a)	vlak b)	světelná hesla
neřešeno	7	13	18	15	13	12	12	16	15
řešeno chybně	12	11	9	10	9	10	14	12	13
řešeno správně	9	4	1	3	6	6	2	0	0
podíl správně řešených	32 %	14 %	4 %	11 %	21 %	21 %	7 %	0 %	0 %
podíl správně řešených u žáků s úmyslem maturovat z matematiky	83 %	0 %	0 %	17 %	17 %	0 %	17 %	0 %	0 %

Test vypracovalo 26 žáků třídy 4.B, z nichž 10 vyjádřilo úmysl maturovat z matematiky. Průměrná úspěšnost přítomných žáků 4.B dosáhla 24 %, u žáků deklarujících úmysl maturovat z matematiky to bylo 28 % (tabulka 6).

Tabulka 6: Výsledky žáků 4.B (maturitní ročník).

	výraz=0	tabulka s m	věž z kostek	zlomený strom	číselná osa	log. rovnice	vlak a)	vlak b)	světelná hesla
neřešeno	3	9	17	3	10	4	12	16	10
řešeno chybně	19	11	9	10	7	7	8	8	15
řešeno správně	4	6	0	13	9	15	6	2	1
podíl správně řešených	15 %	23 %	0 %	50 %	35 %	58 %	23 %	8 %	4 %
podíl správně řešených u žáků s úmyslem maturovat z matematiky	20 %	40 %	0 %	70 %	50 %	50 %	20 %	0 %	0 %

Test vypracovalo 28 žáků kvinty, z nichž 15 vyjádřilo předběžný úmysl maturovat z matematiky. Průměrná úspěšnost přítomných žáků kvinty dosáhla 12 %, respektive 14 %, pokud neuvažujeme úlohu s logaritmickou rovnicí[26] (tabulka 7).

Tabulka 7: Výsledky žáků kvinty.

	výraz=0	tabulka s m	věž z kostek	zlomený strom	číselná osa	log. rovnice	vlak a)	vlak b)	světelná hesla
neřešeno	3	9	5	8	13		3	8	11
řešeno chybně	23	17	17	16	8		16	19	17
řešeno správně	2	2	6	4	7		9	1	0
podíl správně řešených	7 %	7 %	21 %	14 %	25 %		32 %	4 %	0 %

Test vypracovali 4 žáci septimy, z nichž 1 vyjádřil úmysl maturovat z matematiky. Průměrná úspěšnost vybraných žáků septimy dosáhla 28 % (tabulka 8). Výsledky žáků septimy jsou ve formě tabulky uvedeny z důvodu konzistence ve vyhodnocení všech řešení, není však vhodné je porovnávat s výsledky z ostatních tříd, kde se řešení účastnil výrazně vyšší počet žáků.

Tabulka 8: Výsledky žáků septimy.

	výraz=0	tabulka s m	věž z kostek	zlomený strom	číselná osa	log. rovnice	vlak a)	vlak b)	světelná hesla
neřešeno	1	1	1	0	1	2	0	0	1
řešeno chybně	1	2	3	4	0	0	3	3	3
řešeno správně	2	1	0	0	3	2	1	1	0
podíl správně řešených	50 %	25 %	0 %	0 %	75 %	50 %	25 %	25 %	0 %

Nejlepších výsledků v řešení dosáhli 3 žáci oktávy, první vyřešil správně všechny úlohy kromě „věže z kostek“, druhý vyřešil správně všechny s výjimkou „log. rovnice“ a podúlohy „vlak b)“ a třetí si poradil se všemi úlohami kromě „číselné osy“ a obou částí úlohy „vlak“. Další tři nejúspěšnější respondenti pocházejí po jednom ze tříd 4.A, 4.B a kvinty, každý s úspěšně vyřešenými pěti celými úlohami a správně vyřešenou podúlohou „vlak a)“.

[26] Žáci kvinty se s logaritmy ještě nesetkali a nejedná se o úlohu, kterou by mohli intuitivně vyřešit.

Bylo zvažováno též vyhodnocení vlivu řešené varianty testu, ale z důvodu relativně vysokého počtu žáky neřešených úloh, a tudíž pravděpodobné nízké vypovídací hodnotě takového zhodnocení bylo od tohoto záměru upuštěno.

Všechna řešení žáků maturitních ročníků byla podrobně prozkoumána a z řešení chybných či nevedoucích ke správnému výsledku byly vypsány nesprávné postupy či výsledky. Jejich přehled je uveden v příloze 3. V oddílu 3.2 jsou jejich výskyt a příčiny dále diskutovány a porovnány s očekáváními uvedenými v oddílu 2.2.

3.2 Analýza žákovských řešení jednotlivých úloh

Jednotlivé úlohy jsou dále diskutovány s ohledem na úspěšnost v jejich řešení při reálném didaktickém testu, na jejich řešení zvolenými respondenty, především tedy na chyby v těchto řešeních, jsou porovnána autorkou formulovaná očekávání důvodů nízké úspěšnosti v řešení s výsledky výzkumu a zahrnuty žákovské komentáře k úlohám.

Analýza žákovských řešení naznačila poněkud „ležérní“ přístup některých respondentů k řešení zadaných úloh. To je ovšem hodnoceno jako vcelku pochopitelné i očekávatelné vzhledem k tomu, že byli do výzkumu zapojeni i žáci, kteří neměli v úmyslu z matematiky maturovat, dále i vzhledem k období, kdy byl výzkum proveden. Tím byl konec září, kdy bylo na jednu stranu ještě poměrně brzy po prázdninách, na druhou stranu „do maturity stále daleko“. Vládla nejistota ohledně samotné organizace maturity, kdy žáci neměli k dispozici konečné informace o podobě maturitní zkoušky (žáci se nakonec pravidla dozvěděli v bezprecedentně pozdním termínu, v řadě případů pak prováděli závaznou volbu předmětů „na poslední chvíli“) a v neposlední řadě docházelo k rapidnímu zhoršování epidemické situace v souvislosti s onemocněním COVID-19[27], které z hlediska výuky na středních školách vyvrcholilo o několik dní později přerušením její prezenční formy.

U každé úlohy je proto vždy uveden počet žáků, kteří se jejímu řešení věnovali, počet žáků, kteří ji vyřešili úspěšně, a to, jak mezi všemi respondenty z maturitních ročníků, tak mezi těmi z nich, kteří vyjádřili úmysl z matematiky maturovat. Ti se dle výsledků věnovali řešení předloženého testu obecně intenzivněji.

[27] To vedlo zároveň i autorku ke snaze o co nejvčasnější provedení výzkumu s respondenty.

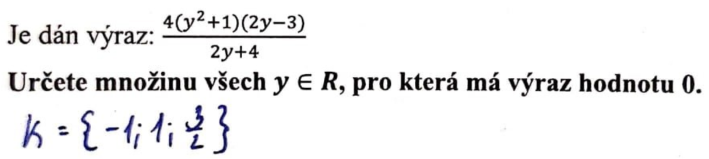
Nepotvrdily se částečné obavy plynoucí pravděpodobně z autorčiných dosud skromných zkušeností z výuky na střední škole a vysokých očekávání, že by respondenti z gymnázia vyřešili všechny úlohy bez problémů a nebylo tedy chyb, které by bylo možné zkoumat.

Úloha 1 (jarní termín 2017) – „výraz = 0“

Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 60 žáků, 21 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 27 žáků, úspěšně 14 z nich.

Mezi chybnými řešeními se objevovalo řešení $y = -2$ plynoucí pravděpodobně z přesvědčení, že zlomek je roven 0, je-li nulový jeho jmenovatel, případně ze záměny otázky na nulovost výrazu s otázkou na nedefinovanost výrazu.

Dále se objevovala řešení, v nichž bylo zastoupeno jak správné řešení $y = \frac{3}{2}$, tak i nesprávná řešení, např. $y = -2,\ y = 1,\ y = -1$. Žák pravděpodobně položil dvojčlen $2y + 4$ ve jmenovateli rovný nule či se snažil získat reálné kořeny položením dvojčlenu $y^2 + 1$ v čitateli rovným nule (obrázek 2).


Je dán výraz: $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$

Určete množinu všech $y \in R$, pro která má výraz hodnotu 0.

$K = \{-1; 1; \frac{3}{2}\}$

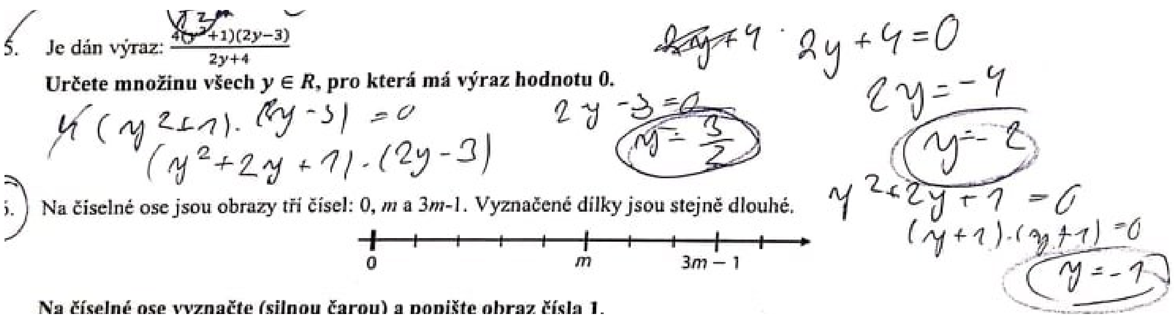
Obrázek 2: Ukázka z chybného řešení úlohy „výraz = 0“. Řešitelem byl žák[28] 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Na obrázku 3 pak můžeme vidět více chyb v řešení, kdy žák určil jako jedno z řešení nesprávně hodnotu $y = -2$ vyplývající z položení dvojčlenu ve jmenovateli zadaného lomeného výrazu rovným nule, dále pracuje s mnohočleny z čitatele, kde se dopouští další chyby, kdy si výraz $y^2 + 1$ pravděpodobně zaměnil s výrazem $(y + 1)^2$.

Objevilo se též řešení $y = 0$ plynoucí pravděpodobně z přesvědčení, že výraz s y vyjde roven 0, pokud je samo y rovno 0[29].

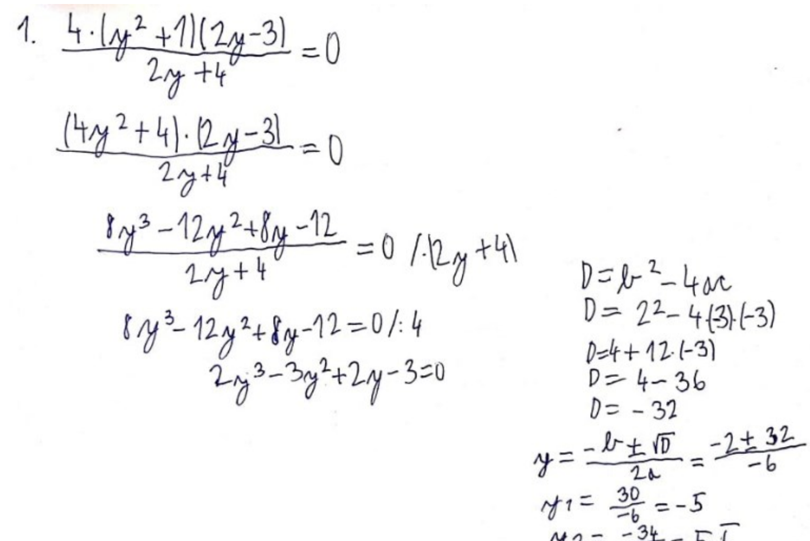
[28] Není rozlišeno, jakého pohlaví byl řešitel (dotazník byl v tomto smyslu anonymní). Ve všech případech je zvoleno označení „žák“.

[29] S „utkvělou představou“ podobného typu se autorka pravidelně setkává, když mají žáci určit definiční obor lomeného výrazu. V tom případě někteří automaticky vyřazují z hodnot, kterých může proměnná nabývat, číslo 0, aniž by k tomu byl v daném výrazu důvod (ve jmenovateli je např. $x - 2$).



Obrázek 3: Ukázka z chybného řešení úlohy „výraz = 0". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

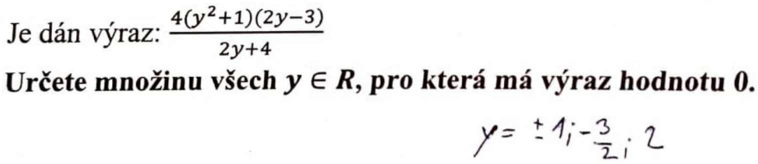
Přístupem, který nevedl ke správnému řešení, ale objevil se poměrně často (v osmnácti případech), bylo roznásobení mnohočlenů v čitateli lomeného výrazu a jeho další (někdy chybné) úpravy vedoucí však ke složitější a neúspěšně řešené rovnici. Na obrázku 4 je uveden postup řešení úlohy vedoucí na kubickou rovnici, která je následně nesprávně řešena pomocí vzorce pro kořeny kvadratické rovnice (kubický člen je ignorován).



Obrázek 4: Ukázka z chybného řešení úlohy „výraz = 0". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Objevila se i řada chybných výsledků bez uvedení postupu či uvedení pouze podmínky. Mezi chybnými řešeními byla i ta zapsaná ve formě intervalu, což může značit neznalost či záměnu označení jednotlivých typů množin (v méně závažném případě) či nepochopení nebo ignorování rozdílu mezi rovnicí a nerovnicí (v závažnějším případě).

Na obrázku 5 je uvedeno chybné řešení žáka, který pravděpodobně nerozlišoval mezi členy v čitateli a ve jmenovateli, navíc z obou lineárních dvojčlenů určil kořen s opačným znaménkem ($-\frac{3}{2}$ místo $\frac{3}{2}$ a 2 místo -2). Dále uvedené hodnoty ± 1 značí, že pravděpodobně „rozložil“ nad R ireducibilní kvadratický dvojčlen $y^2 + 1$.


Je dán výraz: $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$

Určete množinu všech $y \in R$, pro která má výraz hodnotu 0.

$y = \pm 1; -\frac{3}{2}; 2$

Obrázek 5: Ukázka z chybného řešení úlohy „výraz = 0“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Celkově se tedy do značné míry potvrdila autorčina očekávání, že někteří žáci neznají odpověď na otázku „Kdy je lomený výraz roven nule?“, případně nevědí, kdy je vhodné si ji klást. Mnozí nerozlišují členy v čitateli a ve jmenovateli lomeného výrazu ve vztahu k jeho nulovosti či vyčíslitelnosti. Naopak se nepotvrdilo očekávání problémů spojených s označením proměnné písmenem y (resp. v řešeních nebylo nalezeno nic, co by tomu nasvědčovalo).

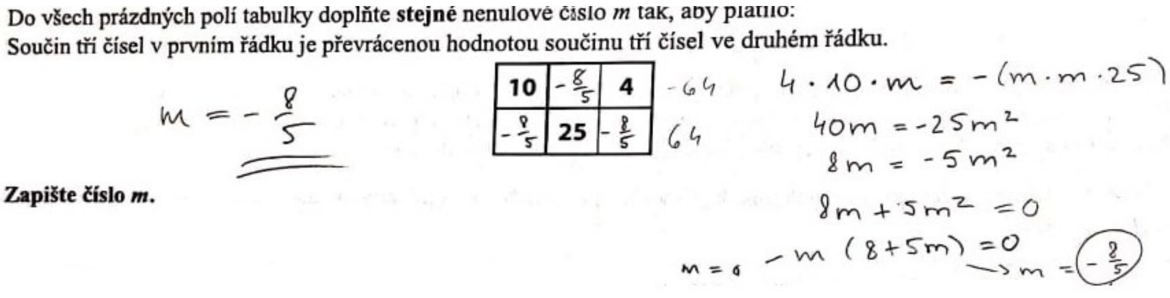
Chyby vyskytnuvší se v žákovských řešeních jsou více druhů, co do závažnosti je autorka hodnotí jako srovnatelné. Ať už se jedná o neznalost toho, za jakých okolností je lomený výraz roven nule, o chyby v dopočtu hodnoty kořenů z lineární rovnice či o chybný rozklad nerozložitelného výrazu. Ve všech případech se jedná o závažné chyby v základním učivu, jehož nedostatečné zvládnutí je problémem, který se projeví i v dalších kapitolách matematiky, kde již představuje jen nástroj k dořešení komplexnějších úloh.

V žákovských komentářích k testu se objevilo, že zadání úlohy „může působit poněkud matoucím dojmem“. Žák septimy v rozhovoru po řešení testu popsal, že si až průběhu řešení uvědomil, na čem nulovost lomeného výrazu záleží.

Úloha 3 (jarní termín 2017) – „tabulka s m“

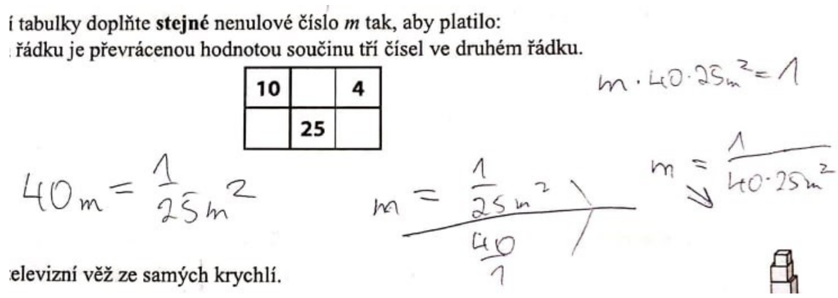
Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 47 žáků, 19 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 24 žáků, úspěšně 13 z nich.

Nejčastější chybné řešení (v osmi případech) bylo ve tvaru $m = -1{,}6$ nebo $m = -\frac{8}{5}$, což odpovídá řešení rovnice vzniklé při záměně významu pojmu *převrácená hodnota* a *opačné číslo*. Tento postup je ilustrován např. obrázkem 6. To tedy odpovídá autorčinu očekávání.



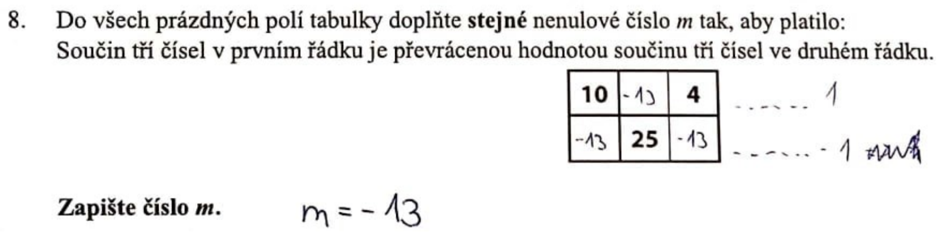
Obrázek 6: Ukázka z chybného řešení úlohy „tabulka s m“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Objevila se též řešení, v nichž byla správně sestavena rovnice $40m = \frac{1}{25m^2}$, ale žák ji nebyl schopen vyřešit (ve třech případech). Jedno z těchto žákovských řešení je uvedeno na obrázku 7. Je patrné, že se žák snažil o různé úpravy rovnice, ale nepodařilo se mu osamostatnit a dopočítat neznámou m.



Obrázek 7: Ukázka z chybného řešení úlohy „tabulka s m“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Mezi chybnými výsledky pak figurovaly též $m = 1{,}6$ nebo $m = \frac{8}{5}$ odpovídající rovnosti součinů čísel v prvním a druhém řádku (ve třech případech). Objevilo se i několik jiných nesprávných výsledků bez uvedení bližšího postupu. Obrázek 8 ilustruje chybné řešení žáka, který za výsledek označil $m = -13$, což by odpovídalo zadání „Součet tří čísel v prvním řádku je opačnou hodnotou součtu tří čísel ve druhém řádku“. Zde tedy pravděpodobně došlo k záměně jak pojmu *součin* (za *součet*), tak pojmu *převrácená hodnota* (za *opačné číslo*).



8. Do všech prázdných polí tabulky doplňte **stejné** nenulové číslo m tak, aby platilo:
Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku.

10	-13	**4**	 1
-13	**25**	-13	 1

Zapište číslo m. $m = -13$

Obrázek 8: Ukázka z chybného řešení úlohy „tabulka s m“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Výsledky celkově naznačují, že pojem *převrácená hodnota* je pro mnohé žáky neznámý nebo jej zaměňují s pojmem *opačné číslo*, a i u pojmu *součin* se v několika analyzovaných řešeních objevily jeho chybné interpretace.

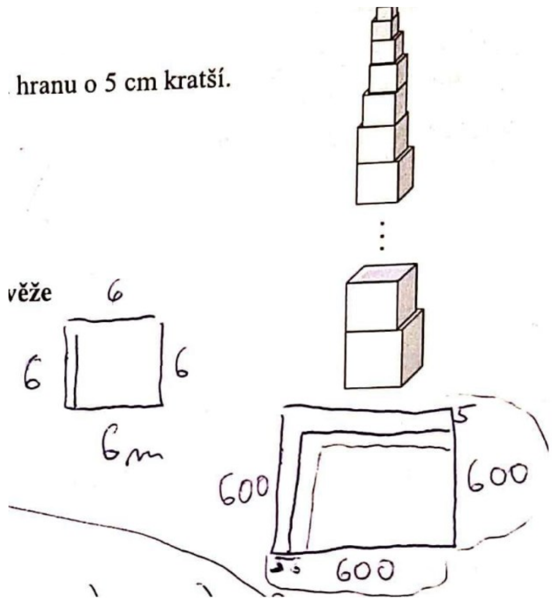
Neúspěšná řešení úlohy měla tedy v zásadě dvě příčiny, jednou bylo nedořešení správně sestavené rovnice, což je chyba závažná, neboť na úrovni maturitního ročníku by se mělo jednat o rutinní záležitost, a druhou bylo chybné sestavení rovnice v důsledku chybné interpretace pojmů *převrácená hodnota* či *součin*. To je chyba jiného charakteru, z matematického hlediska v zásadě nepodstatná, nicméně v každém oboru, v němž se žák (později student či odborný pracovník) pohybuje, je základním předpokladem a potřebou ovládnutí příslušného názvosloví a obvyklého značení.

Z žákovských komentářů a rozhovorů s žáky stojí za pozornost přiznání nejistoty ve významu pojmu *převrácená hodnota* a rovněž popis řešení formou tipování čísel (což ovšem nebylo úspěšné vzhledem k žákovu očekávání, že hledané číslo m je celé).

Úloha 7 (jarní termín 2017) – „věž z kostek“

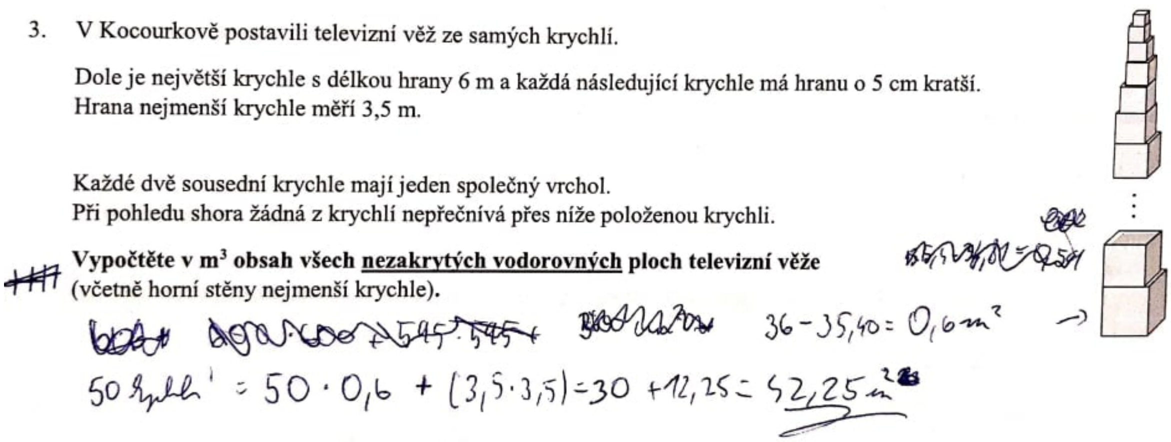
Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 31 žáků, 6 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 19 žáků, úspěšně 5 z nich.

U této úlohy se vyskytla celá řada rozdílných chybných výsledků, některé podložené výpočtem, jiné bez postupu. Poměrně malý počet žáků si nakreslil relevantní obrázek (pohled shora). Ve třech případech ovšem ani zakreslení v zásadě názorného obrázku nevedlo ke správnému řešení, jak je ilustrováno na obrázku 9.



Obrázek 9: Ukázka z chybného řešení úlohy „věž z kostek“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Některá řešení vzbuzují dojem, že žák nepochopil, co přesně má spočítat. Objevil se též výsledek se správnými platnými číslicemi, ovšem lišící se v řádu – pravděpodobně tedy plynoucí z převádění jednotek. V sedmi případech bylo řešení poměrně složité a nevedlo ke správnému výsledku. Některá z těchto řešení obsahovala chybně spočtený počet krychlí, které věž tvoří, některá rovněž pracovala s chybným předpokladem, že rozdíl v obsahu stěn dvou na sobě stojících krychlí zůstává konstantní (tento postup je uveden na obrázku 10).



3. V Kocourkově postavili televizní věž ze samých krychlí.

Dole je největší krychle s délkou hrany 6 m a každá následující krychle má hranu o 5 cm kratší.
Hrana nejmenší krychle měří 3,5 m.

Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol.
Při pohledu shora žádná z krychlí nepřečnívá přes níže položenou krychli.

Vypočtěte v m³ obsah všech nezakrytých vodorovných ploch televizní věže (včetně horní stěny nejmenší krychle).

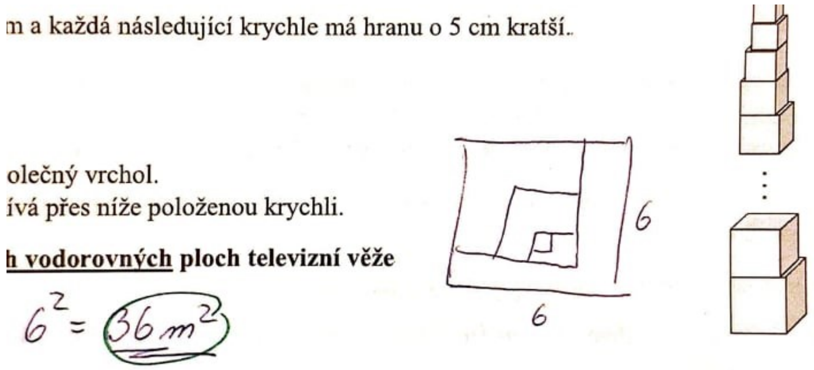
36 - 35,40 = 0,6 m²

50 krychlí = 50 · 0,6 + (3,5 · 3,5) = 30 + 12,25 = 42,25 m²

Obrázek 10: Ukázka z chybného řešení úlohy „věž z kostek“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Jedno z řešení též naznačuje pochopení formulace „Vypočtěte v m^2 obsah všech…“ tak, že mělo být vše zaokrouhlováno na celé jednotky m^2. Žák totiž obsah stěny nejmenší z krychlí zapsal jako 12 m^2, čemuž se ovšem obsah čtverce o straně 3,5 m nerovná.

Mezi správnými řešeními nebylo žádné, které by bylo výsledkem složitého výpočtu, ve všech šesti případech se jednalo o řešení stručné, vyplývající ze správné představy, že odpovědí je obsah čtverce se stranou odpovídající délce hrany spodní krychle (obrázek 11).



Obrázek 11: Ukázka správného řešení úlohy „věž z kostek“ žákem 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Autorčino očekávání se potvrdilo částečně – žáci v nízké míře přišli na správné řešení. Chybná složitá řešení však nevykazovala přímo znaky použití posloupností, spíše se jednalo o pro autorku ne zcela srozumitelné výpočty, ve kterých se vyskytovaly nesprávné předpoklady, a nevedly tak ke správnému výsledku.

V reálném didaktickém testu z jarního termínu roku 2017 předcházela této úloze (č. 7) úloha č. 6 dotazující se na výšku televizní věže. Ta měla podíl volby správné odpovědi 46,43 %. Úloha zahrnutá do této práce a dotazující se na obsah nezakrytých vodorovných ploch byla v reálném didaktickém testu řešena s nenulovým ziskem bodů v 17,50 % případech. Analýza neagregovaných dat rovněž dostupných na (CERMAT, Portál), která uvádí volby odpovědí na jednotlivé otázky každého řešitele[30], ukazuje, že z řešitelů, kteří při reálném didaktickém testu správně vyřešili úlohu 7 (zde zkoumanou), bylo více než 30 % těch, kteří za řešení úlohy předcházející a dotazující se na výšku televizní věže obdrželi

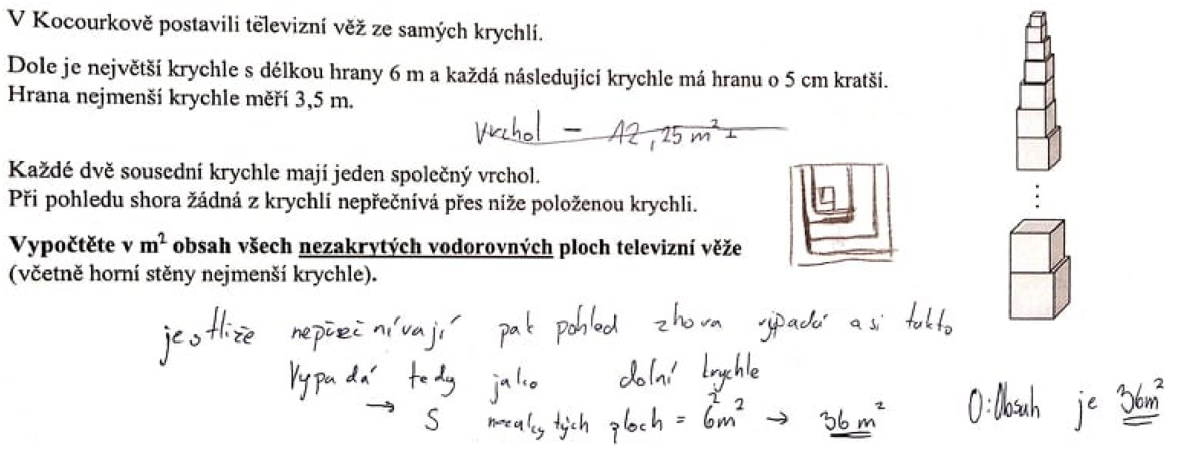
[30] Nikoli konkrétní odpovědi, to pouze u uzavřených otázek, u otevřených otázek se jedná o stejným způsobem zaznamenané údaje jako v datech agregovaných, jejichž ukázka je na obrázku 1. U otevřených otázek je tedy v dané tabulce uvedeno, jakým počtem bodů byla žákova odpověď ohodnocena, případně, že na otázku neodpověděl.

0 bodů nebo ji neřešili vůbec[31]. Autorce se jeví jako poměrně zajímavé, že při tak velkém rozdílu v úspěšnosti se úspěšní řešitelé úlohy 7 nerekrutovali výhradně z řad úspěšných řešitelů úlohy 6. Někteří žáci tedy patrně při reálném maturitním testu nahlédli jednoduchost úlohy 7, ačkoli si neporadili úspěšně s úlohou 6, případně lze též tento výsledek interpretovat tak, že k úlohám přistupovali odděleně, ačkoli se týkali stejné situace. V této práci nebylo možné tuto situaci napodobit a zhodnotit, neboť úloha 6 zde pro svou relativně vysokou úspěšnost v řešení nebyla zahrnuta.

Mezi žákovskými komentáři k textu se objevilo konstatování, že „úloha vypadá od pohledu zdlouhavě“, jiný žák v rozhovoru popisoval svůj plán na výpočet využívající výpočtu počtu krychlí ve věži, poměru délek jejich hran, poměru obsahů jejich stěn atd. – tento žák úlohu zdárně nevyřešil.

Úlohu řešil úspěšně relativně vysoký počet žáků kvinty – konkrétně 21 % (pro srovnání s žáky maturitních ročníků: v oktávě to bylo 28 %, ve 4.A 4 % a ve 4.B 0 %). Ukázku jednoho ze správných řešení ukazuje obrázek 12. Zde žák kvinty i slovně formuluje úvahu, která ho ke správnému řešení přivedla. Důvody relativně vysoké úspěšnosti mladších žáků v řešení této úlohy si autorka neumí přesně vysvětlit. Je však možné, že menší množství matematických znalostí, které mladší žáci oproti starším pravděpodobně mají, jim paradoxně umožnila najít vhled a vyřešit úlohu jednoduše. Starší žáci s osvojeným širším matematickým aparátem pravděpodobně automaticky přistoupili k výpočtům a možná ani nepředpokládali, že by úloha v maturitním testu byla snadno řešitelná z obrázku. I v literatuře se můžeme setkat s popisem případů, kdy žáci přistupují k neadekvátně složitým postupům, např. v (Kuřina, 2011) jsou dokumentovány žákovské postupy při vyjádření obsahu pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice o daném poloměru. To lze provést poměrně jednoduše, ale mnozí žáci přistoupili ke komplikovaným řešením, v čemž autor spatřuje „nízkou úroveň umění vidět souvislosti a řešit úlohu jednoduše adekvátními matematickými prostředky“.

[31] V souborech s výsledky jarního termínu 2017 není rozlišeno, zda žák obdržel za řešení 0 bodů, či danou otázku nezodpověděl.



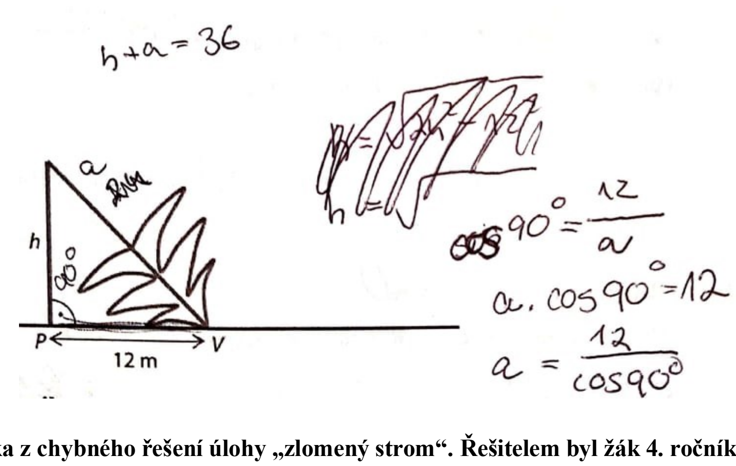
Obrázek 12: Ukázka správného řešení úlohy „věž z kostek“ žákem 5. ročníku osmiletého gymnázia.

Úloha 14 (jarní termín 2017) – „zlomený strom“

Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 47 žáků, 22 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 21 žáků, úspěšně 13 z nich.

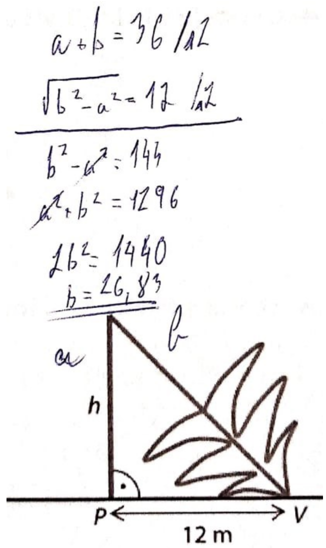
V chybných postupech byl identifikován mylný předpoklad rovnoramennosti vzniklého pravoúhlého trojúhelníku (nejméně ve čtyřech případech) vyplývající pravděpodobně z ilustračního obrázku. Lze tedy usoudit, že se tito žáci pohybovali v *prostoru reprezentací*, namísto uchopení obrázku pouze jako ilustračního a práce v *prostoru teoretickém* (Laborde, 2005).

Vyskytlo se též (ve třech případech) nesprávné použití goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku, jak je ilustrováno na obrázku 13.



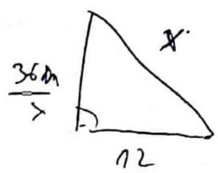
Obrázek 13: Ukázka z chybného řešení úlohy „zlomený strom“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Mezi další chyby, které se v řešeních vyskytly, patřilo nesprávné umocnění dvojčlenu (obrázek 14) či chyby v práci s odmocninami.



Obrázek 14: Ukázka z chybného řešení úlohy „zlomený strom“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Dvě nesprávná řešení vykazovala znaky snahy o tipování výsledku. To by bylo v této úloze jistě možné, neboť pravoúhlý trojúhelník vzniklý zlomením stromu je podobný pravděpodobně nejznámějšímu z Pythagorejských trojúhelníků (se stranami délek 3, 4 a 5 jednotek)[32]. V šesti případech byl uveden pouze chybný výsledek bez výpočtu. Vyskytlo se též řešení, v němž byl vztah mezi výškou stojící části zlomeného stromu (h), délkou ulomené části stromu (x) a původní délkou stromu (36 m) popsán jako $h = \frac{36\text{ m}}{x}$ namísto $h = 36\text{ m} - x$ (obrázek 15). Příčinu této chyby si autorka neumí vysvětlit a nebyla pro ni očekávaná. Zacházení s délkami považuje za intuitivní, neboť se jedná o jednu z prvních fyzikálních veličin, se kterou přichází již malé dítě do styku.



Obrázek 15: Ukázka z chybného řešení úlohy „zlomený strom“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

[32] Zde je ovšem na místě podotknout, že v reálném didaktickém testu byla tato úloha z kategorie široce otevřených a řešitel měl tedy v záznamovém archu uvést celý postup řešení.

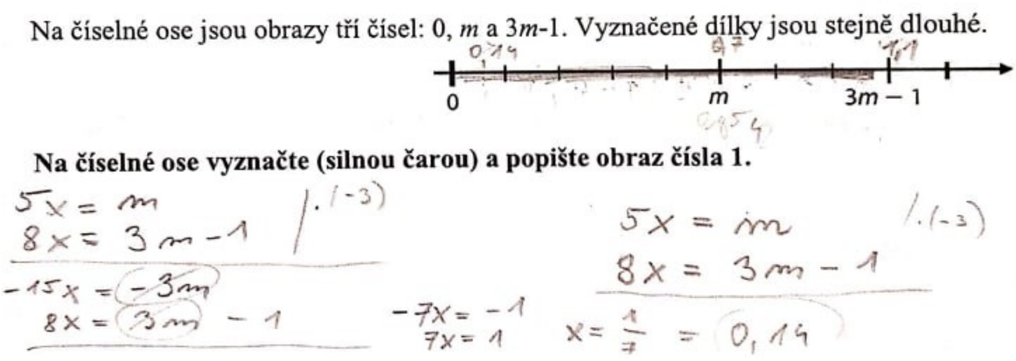
Očekávání autorky se do jisté míry naplnila, vyskytly se však i další chyby. Vzhledem k tomu, že šlo o v zásadě základní úlohu na aplikaci Pythagorovy věty, což je látka přelomu základní a střední školy, její nevyřešení lze hodnotit jako závažný nedostatek. Totéž platí pro konkrétní vyskytnuvší se chyby jako nesprávné umocnění dvojčlenu nebo nesprávné zacházení s goniometrickými funkcemi v pravoúhlém trojúhelníku.

V rozhovorech se septimány po řešení testu se objevil např. žákův popis postupu konstatující délku obvodu vzniklého trojúhelníku, žák však nevěděl, jak dále postupovat; o Pythagorově větě se vůbec nezmínil. Jiný žák uvedl, že „aby mohl dosadit Pythagorovu větu, ještě mu chyběl jeden údaj“ a ten si tedy „nějak povyjadřoval“; jeho řešení dospělo až k rovnici s jedinou neznámou h sestavené aplikací Pythagorovy věty, nebyl však schopen ji dořešit. Další žák v rozhovoru popisoval svůj postup, kdy si stojící část ulomeného stromu označil jako $36 - x$ a přeponu (ulomenou část stromu) jako y. Ani při komentování svého postupu, kdy dále pracoval s oběma neznámými x a y nedospěl k jejich ztotožnění ani uvědomění, že součet délek stojící části a ulomené části představuje původní délku/výšku stromu.

Úloha 3.2 (jarní termín 2018) – „číselná osa“

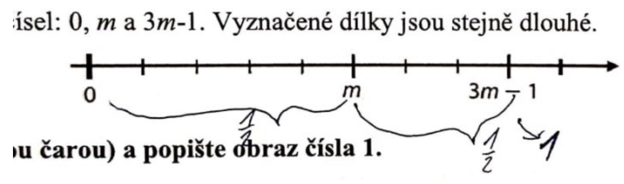
Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 44 žáků, 25 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 19 žáků, úspěšně 14 z nich.

Kromě nesprávných řešení obsahujících pouze chybné zakreslení obrazu čísla 1 bez dalšího zdůvodnění (ve čtyřech případech) se vyskytla nesprávná řešení tkvící v různých chybách. Objevilo se nesprávné „odpočítání“ dílků, směšování jednotek a dílků, nesprávně sestavené rovnice nebo označení prvního dílku vpravo od 0 jako 1. Obrázek 16 dokumentuje postup žáka, který správně vypočetl délku jednoho dílku, ale nebyl schopen interpretace tohoto výsledku v podobě zakreslení obrazu čísla 1. To je možné hodnotit jako velice zajímavou a z didaktického hlediska i přínosnou chybu. Žák zadání správně „přeložil“ do soustavy rovnic, v nichž si zavedl pro délku jednoho dílku na ose označení x. Tuto délku následně správně vypočetl jako $\frac{1}{7}$. Ve svém řešení má i správně konstatováno, že $7x = 1$. Přesto nebyl schopen správně zakreslit obraz čísla 1.



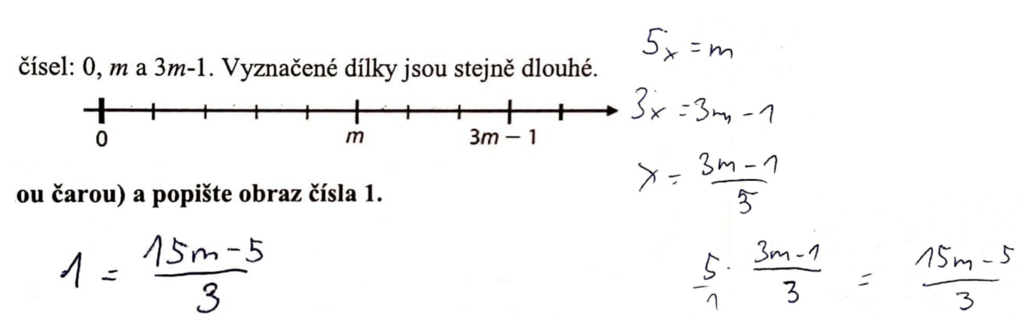
Obrázek 16: Ukázka z chybného řešení úlohy „číselná osa". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Obrázek 17 ilustruje nesprávný postup žáka, který označil dva zjevně nestejně dlouhé úseky stejnou délkou.

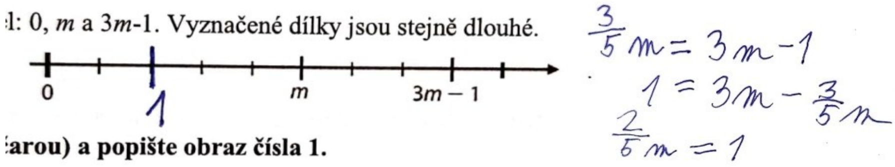


Obrázek 17: Ukázka z chybného řešení úlohy „číselná osa". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

Vyskytla se rovněž dvě řešení, v nichž byla pravděpodobně uvažována vzdálenost mezi obrazy čísel m a $3m - 1$; ovšem chybně, neboť třem dílkům na jedné straně rovnice, resp. $\frac{3}{5}m$ na jedné straně rovnice, nebyl na pravé straně rovnice přisouzen rozdíl $3m - 1 - m$, nýbrž pouze výraz $3m - 1$ (obrázek 18, resp. 19). V řešení znázorněném na obrázku 18 je pak navíc další chyba, když žák vyjádřil délku x jednoho dílku, tu pak násobil pěti a výsledek položil rovný jedné. Z jeho rovnic by však tento výsledek měl odpovídat m, nikoli 1. Tento postup tedy značí i problémy s řešením soustavy rovnic.



Obrázek 18: Ukázka z chybného řešení úlohy „číselná osa". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.



Obrázek 19: Ukázka z chybného řešení úlohy „číselná osa“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

V reálném didaktickém testu z jarního termínu roku 2018 předcházela této podúloze (3.2) podúloha (3.1) dotazující se na poměr m: $(3m - 1)$. Ta měla podíl volby správné odpovědi 40,24 %. Do této práce byla zahrnuta až podúloha, jejímž cílem bylo zakreslení obrazu čísla 1 a která byla v reálném didaktickém testu řešena s nenulovým ziskem bodů v 25,64 % případech. Neagregovaná data ukazují, že ani u této úlohy neplatí, že by úspěšnými řešiteli druhé úlohy byly výhradně úspěšní řešitelé té první. Zde je z neagregovaných dat možné zjistit, že téměř 15 % řešitelů, kteří správně zakreslili obraz čísla 1, vyjádřili nesprávně poměr čísel m a $(3m - 1)$.

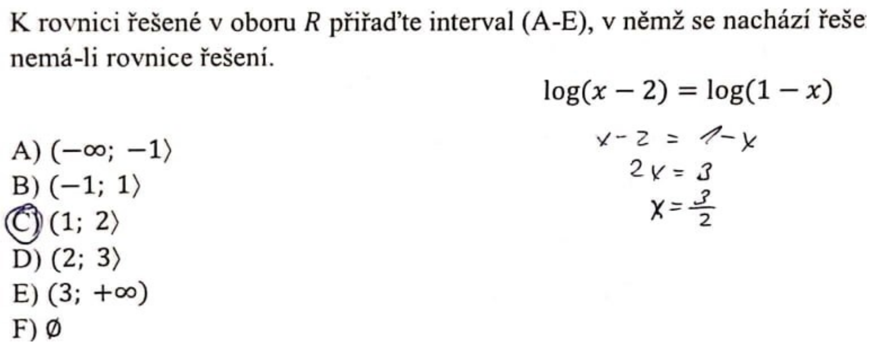
V žákovských komentářích se vyskytl názor, že je pro daného žáka „obraz čísla netradiční termín“ a celá úloha „vyžaduje více přemýšlení než ostatní, protože se s ní osobně nesetkal“.

Správné zakreslení obrazu čísla 1 se vyskytlo i u relativně vysokého počtu žáků kvinty – konkrétně u 25 % (pro srovnání s žáky maturitních ročníků: v oktávě to bylo 56 %, ve 4.A 21 % a ve 4.B 35 %). Ve třech ze šesti případů bylo uvedeno i zdůvodnění. Tato tři řešení byla navzájem odlišná, jedno vedlo na vyjádření hodnoty čísla $m = \frac{5}{7}$, druhé na vyjádření délky jednoho dílku $x = \frac{1}{7}$ a třetí na vyjádření přímo čísla 1 pomocí počtu dílků. Nezdá se tedy, že by pro žáky kvinty byl tento typ úlohy běžný, v takovém případě by autorka očekávala jednotný přístup k řešení, v individuálních případech si s ní však i tito, mladší žáci poradili.

Úloha 25.3 (jarní termín 2018) – „logaritmická rovnice“

Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 50 žáků, 27 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 21 žáků, úspěšně 10 z nich.

V šesti případech se vyskytl výpočet vedoucí k řešení $x = \frac{3}{2}$, v šesti případech byl pouze (bez uvedení postupu) označen interval, do kterého hodnota $\frac{3}{2}$ patří, jako odpověď. To odpovídá řešení dané rovnice bez zvážení podmínek, resp. definičních oborů jednotlivých logaritmických funkcí (obrázek 20). Tuto, byť očekávanou chybu je ale nutné zároveň hodnotit jako závažnou, neboť žák v tu chvíli pracuje s logaritmem pouze jako „s nějakou skupinkou písmen, kterých se při řešení snaží zbavit“ a význam logaritmu nebere v úvahu nebo jej nezná.


K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řeše
nemá-li rovnice řešení.

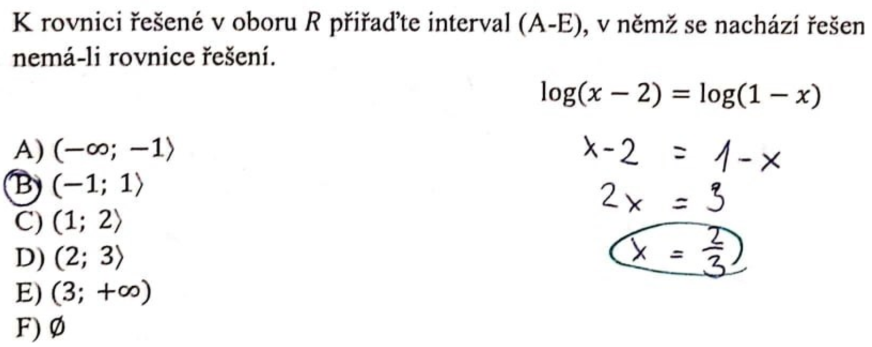
$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-1; 1\rangle$
C) $(1; 2\rangle$
D) $(2; 3\rangle$
E) $(3; +\infty)$
F) $\emptyset$

$x - 2 = 1 - x$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$

Obrázek 20: Ukázka z chybného řešení úlohy „logaritmická rovnice“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

V dalších dvou případech bylo uvedeno řešení vedoucí k výsledku $x = \frac{3}{2}$, ale následně byla tato hodnota ještě chybně zařazena do intervalu. V jiných dvou případech bylo rovněž provedeno „odlogaritmování“ rovnice, ale v dopočtu hodnoty x z rovnice $x - 2 = 1 - x$ se žáci dopustili chyby a vyšla jim hodnota $x = \frac{2}{3}$ (obrázek 21). To by samo o sobě nepředstavovalo chybu tak závažnou, ovšem opět chybělo zvážení podmínek pro argument logaritmu.


K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešen
nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-1; 1\rangle$
C) $(1; 2\rangle$
D) $(2; 3\rangle$
E) $(3; +\infty)$
F) $\emptyset$

$x - 2 = 1 - x$
$2x = 3$
$x = \frac{2}{3}$

Obrázek 21: Ukázka z chybného řešení úlohy „logaritmická rovnice“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Vyskytlo se i chybné zacházení s logaritmy, jak je dokumentováno na obrázku 22. Žák nahradil rozdíl dvou členů v argumentu každého z logaritmů podílem těchto dvou členů. Důvodem pravděpodobně bylo, že si vybavil existenci vztahu pro počítaní s logaritmy, kdy se nahrazuje rozdíl podílem, ovšem tento vztah hovoří o rovnosti rozdílu logaritmů o stejném základu a logaritmu podílu jejich argumentů ($\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$), žákova úprava tak byla nesprávná a opět značí neuvážení či nepochopení významu logaritmu.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

$$\log \frac{x}{2} = \log \frac{1}{x}$$

Obrázek 22: Ukázka z chybného řešení úlohy „logaritmická rovnice". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Vyskytlo se též řešení, v němž definiční obor jednotlivých logaritmických funkcí uvažován byl, ovšem nesprávně (obrázek 23). Žák si tedy pravděpodobně vzpomněl, že nějaké podmínky pro argument logaritmu existují, ovšem spíše si asi tipl, než by uvažoval logaritmickou funkci jako inverzní k exponenciální a odtud definiční obor určil. Toto konkrétní řešení je však ve statistice úspěšnosti řešení vedeno jako úspěšné, neboť žák označil správnou odpověď (F), ačkoli ho k tomu přivedl nesprávný postup (dokonce trojitě nesprávný, neboť uvažoval chybně definiční obory jednotlivých logaritmických funkcí, následně provedl sjednocení místo průniku intervalů, které vzešly z podmínek, a svůj výsledek, kterým bylo $x \in R$, zařadil do možnosti (F), která však byla dle zadání určena pro řešení $x \in \emptyset$.

K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-1; 1\rangle$
C) $(1; 2\rangle$
D) $(2; 3\rangle$
E) $(3; +\infty)$
F) $\emptyset$

$x - 2 \leq 0 \qquad 1 - x \leq 0$

$x \leq 2 \qquad x \geq 1$

$x \in R$

Obrázek 23: Ukázka z chybného řešení úlohy „logaritmická rovnice". Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

U této úlohy se tedy plně potvrdilo autorčino očekávání označení intervalu, do kterého patří číslo $\frac{3}{2}$, jako výsledku (tedy bez uvážení podmínek plynoucích z definičních oborů výrazů v rovnici). To koresponduje i s výsledky z reálného maturitního didaktického testu, kdy tuto konkrétní nesprávnou volbu provedlo 52,07 % řešitelů.

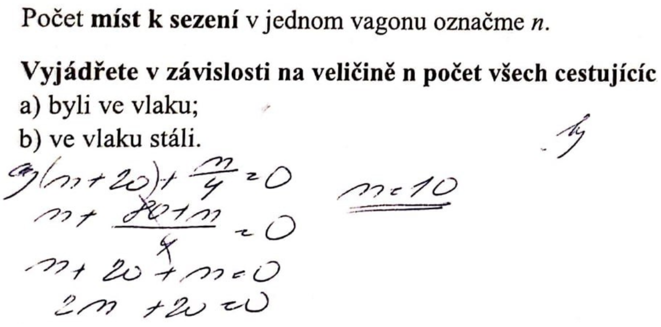
Žákovský komentář v testu „asi by to byla i jednoduchá úloha, kdybych si pamatoval práci s logaritmy (výsledek je spíš tip)" je hodnocen jako poměrně výstižný. Žákova tipovaná odpověď byla však chybná (nejednalo se ovšem v tomto případě o obvykle volený interval zahrnující číslo $\frac{3}{2}$). Další žák popsal svůj postup vedoucí k označení správné odpovědi tak, že zkoušel dosazovat hodnoty z uvedených intervalů a jelikož mu vycházely záporné argumenty logaritmu, rozhodl se pro volbu (F) (rovnice nemá řešení). Další žák uvedl, že úlohu vůbec neřešil, neboť „zapomněl podmínky a pravidla pro logaritmy".

Úloha 3.1 a 3.2 (jarní termín 2019) – „vlak"

Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo úlohu „vlak a)" 45 žáků, 17 z nich úspěšně, úlohu „vlak b)" řešilo 33 žáků, 7 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu „vlak a)" 24 žáků, 10 z nich úspěšně, úlohu „vlak b)" řešilo 19 žáků, 3 z nich úspěšně.

V neúspěšných řešeních se často vyskytovalo zavedení dalších proměnných namísto snahy o vyjádření pomocí n, k čemuž mělo být dle zadání směřováno. Dále se vyskytlo nedodržení označení n pro počet míst k sezení v jednom vagónu, chybné vyjádření míst ke stání v jednom vagónu jako 20 namísto $n + 20$, resp. chybné vyjádření celkového počtu míst v jednom vagónu jako $n + 20$ namísto $n + n + 20$. Údaje v procentech byly v některých případech vztahovány k celkové obsazenosti vagónů, nikoli jen k místům k sezení. To jsou chyby v zásadě očekávatelné, plynoucí pravděpodobně spíše z nepozornosti.

V chybných řešeních se objevil též výpočet konkrétní hodnoty n, jak vidíme na obrázku 24. Toto řešení naznačuje naprosté nepochopení zadání úlohy. Autorce se nepodařilo přijít na to, co měl svým řešením žák na mysli, především pak, čemu měla odpovídat nula na pravé straně rovnice. Zde se nabízí snad jen vysvětlení, že se v matematice poměrně často řeší rovnice s nulovou pravou stranou (resp. se rovnice na tento tvar upravují), a žák tak „$= 0$" zapsal ze zvyku. Chyba je navíc i v dopočtu lineární rovnice, jejíž řešení by nebylo $n = 10$, ale $n = -10$. Otázkou zůstává, zda by takový výsledek (který má vyjadřovat počet osob) žák rovněž podtrhl.

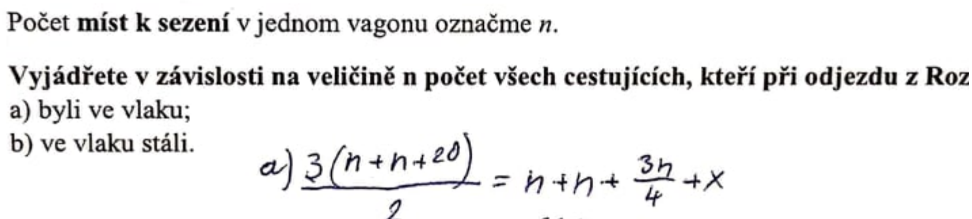

Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme *n*.

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujícíc
a) byli ve vlaku;
b) ve vlaku stáli.

$$a)\ (n+20)+\frac{n}{4}=0 \qquad n=10$$
$$n+\frac{80+n}{4}=0$$
$$n+20+n=0$$
$$2n+20=0$$

Obrázek 24: Ukázka z chybného řešení úlohy „vlak“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl, že z matematiky maturovat nehodlá.

I v řešeních této úlohy se vyskytly chyby v algebraických úpravách výrazů (odečítání lomených výrazů) či v úpravách rovnic (nevydělení všech členů rovnice). V některých případech bylo řešení v podstatě v pořádku, ale nebylo jasně označeno, co je odpovědí, co značí další zvolená proměnná nebo kde už je přechod k řešení otázky „b)“. Takovou situaci ukazuje obrázek 25. Obě strany první rovnice vyjadřují celkový počet cestujících ve vlaku při odjezdu z Roztok (levá vyjadřuje symbolický zápis informace o poloviční zaplněnosti vlaku, pravá vyjadřuje zaplněnost vlaku pomocí počtů přítomných sedících a stojících cestujících), odpověď na otázku a) je tedy obsažena v levé straně první rovnice. Proměnná x zřejmě značí počet stojících ve vlaku. Tu by tedy stačilo z druhé, upravené rovnice vyjádřit, což by představovalo odpověď na otázku b). Ve statistice žákovských řešení je však toto řešení vedeno samozřejmě jako nesprávné, neboť žák sám ve svém řešení neoznačil, co by mělo být považováno za jeho odpovědi, a i v reálném didaktickém testu se jednalo o úlohu úzce otevřenou, kde je hodnocen pouze zapsaný výsledek, nikoli postup.


Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme *n*.

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roz
a) byli ve vlaku;
b) ve vlaku stáli.

$$a)\ \frac{3(n+n+20)}{2}=n+n+\frac{3n}{4}+x$$
$$n+30=\frac{11n}{4}+x$$

Obrázek 25: Ukázka z řešení úlohy „vlak“. Řešitelem byl žák 8. ročníku osmiletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Očekávání autorky byla žákovskými řešeními do značné míry potvrzena. Úloha řadu žáků zřejmě odradila již délkou zadání. Bylo pro ně obtížné se v zadání orientovat a správně zaznamenat uvedené skutečnosti. V reálném didaktickém testu nezodpovědělo úlohu „vlak a)" 41,48 % prvomaturantů a úlohu „vlak b)" 41,49 % prvomaturantů, což jsou nejvyšší hodnoty udávající podíl neuvedení odpovědi ze všech (pod)úloh ze zkoumaných didaktických testů.

Z analýzy neagregovaných dat pro tuto dvojici podúloh dále vyplývá, že úspěšnými řešiteli úlohy „vlak b)" byli při reálném maturitním didaktickém testu téměř výhradně úspěšní řešitelé úlohy „vlak a)". Pouze 3 % z těch žáků, kteří správně vyjádřili počet stojících cestujících, nevyjádřila správně i počet přítomných cestujících. V žákovských řešeních v rámci výzkumu v této práci taková situace nenastala.

V rozhovoru po řešení testu popsal jeden z žáků septimy, že si nejprve automaticky označil počet míst k sezení ve vagónu jako x a až po dočtení zadání do konce si veličiny přeznačil, aby zvýšil šanci na správné vyjádření. Jiný žák popsal úvodní dezorientaci ze zadání úlohy, ale uvedl, že po pozorném opětovném přečtení se zorientoval a obě otázky i správně zodpověděl. Jiný žák úlohu charakterizoval jako „takový to zadání, co je potřeba si přečíst víckrát".

První část úlohy („vlak a") řešil úspěšně i relativně vysoký počet žáků kvinty – konkrétně 32 % (pro srovnání s žáky maturitních ročníků: v oktávě to bylo 50 %, ve 4.A 7 % a ve 4.B 23 %). To autorka připisuje důrazu, který je na řešení slovních úloh na konci základní školy (a i na přelomu nižšího a vyššího gymnázia) zpravidla kladen.

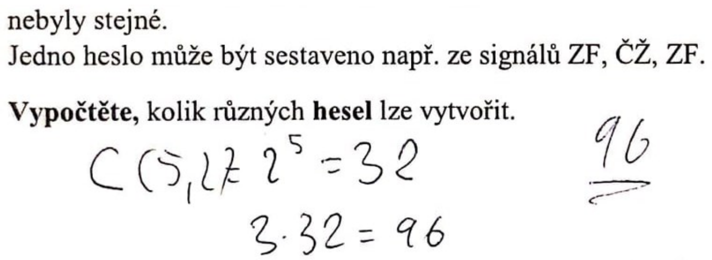
Úloha 8.2 (jarní termín 2020) – „světelná hesla"

Ze 72 žáků maturitních ročníků, kteří se zúčastnili výzkumu, řešilo tuto úlohu 39 žáků, 6 z nich úspěšně. Z přítomných žáků, kteří vyjádřili úmysl maturovat z matematiky a kterých bylo celkem 29, řešilo úlohu 17 žáků, úspěšně 5 z nich.

Chybné odpovědi byly mnoha podob, vyskytovaly se pouze symbolické zápisy jako $V(3;10)$, $K(5;2)$, $C(5;2)$, $V(2;5)$, $V(5;3)$ nebo odpovědi ve formě faktoriálů jako 5!, 4! nebo 6! či rozličné číselné výrazy obsahující v některých případech i faktoriály či kombinační čísla. Mezi chybnými odpověďmi byla i jedna, ve které byl postup zcela správně, ale žák se dopustil numerické chyby v závěrečném dopočtu počtu možných hesel $10 \cdot 9 \cdot 9 = 180$.

U některých chybných řešení lze odhadnout, co k němu žáka vedlo, např. zápis $C(5;2)$ nebo $K(5;2)$ pravděpodobně značí počet 2členných kombinací z 5 prvků, což by po odpovídalo počtu možných signálů, v úloze bylo ovšem třeba určit počet možných hesel.

Na druhou stranu, vyskytlo se i řešení zobrazené na obrázku 26. Zde tedy zápis jevící se jako označení počtu 2členných kombinací z 5 prvků pokračuje výpočtem odpovídajícím počtu 5členných variací s opakováním ze 2 prvků (pokud by to měl být výpočet počtu možných signálů, odpovídalo by to situaci, kdy by byl signál dán současným rozsvícením libovolného počtu žárovek včetně varianty, kdy se nerozsvítí žádná). Následně je výsledek 32 ještě vynásoben třemi, tím chtěl pravděpodobně žák spočítat počet možných hesel, které je dáno třemi po sobě jdoucími signály. Zde by ovšem, přistoupíme-li na počet signálů rovný 32 a zanedbáme-li podmínku rozdílnosti po sobě jdoucích signálů, bylo na místě číslo 32 na třetí umocnit, nikoli jej třemi násobit.


nebyly stejné.
Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

Vypočtěte, kolik různých **hesel** lze vytvořit.

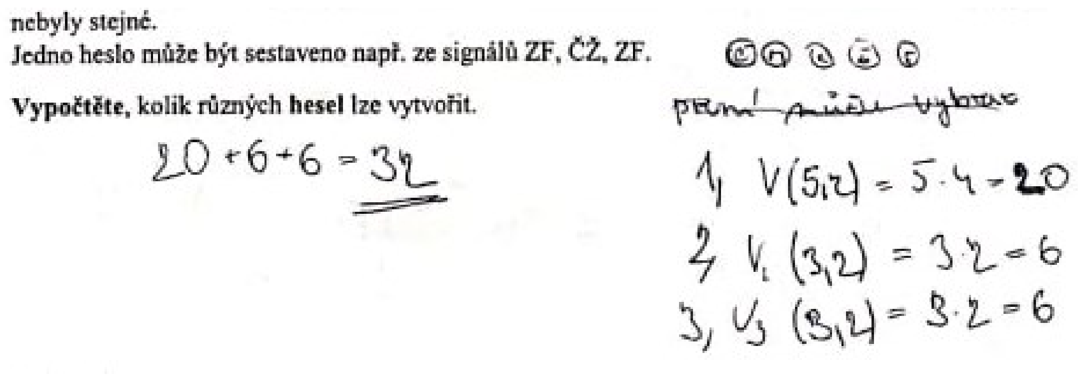
$C(5,2)\ 2^5 = 32$ $\underline{96}$

$3 \cdot 32 = 96$

Obrázek 26: Ukázka z chybného řešení úlohy „světelná hesla“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

Příklad dalšího komplexně chybného řešení je uveden na obrázku 27. Z autorčina pohledu se jedná o poměrně názornou ukázku chybného přístupu, kdy jsou zaměněny variace a kombinace, zaměněno kombinatorické pravidlo součinu a součtu a nedostatečně pojat rozdíl mezi signálem a heslem v dané úloze.

Autorčina očekávání důvodů nízké úspěšnosti v řešení této úlohy se do značné míry naplnila – jednalo se o úlohu s jedním z nejnižších počtů žákovských řešení v rámci výzkumu, řada žáků se tedy do kombinatorické úlohy vůbec nepustila. Rovněž variabilita chybných řešení naznačuje obtížnost kombinatorické úlohy pro žáky, kdy si pravděpodobně nejsou schopni úlohu správně analyzovat a za použití vhodných prostředků dospět ke správnému řešení. V mnoha chybných řešeních se neobjevila snaha o rozdělení řešení na dvě části – výpočet počtu možných signálů a následně výpočet počtu možných hesel – často z řešení vyplývá snaha o nalezení výsledku jedním výpočtem. U některých chybných postupů je autorka schopna do určité míry odhadnout, co měl asi žák na mysli, u některých má autorka pocit, že žák spíše jen něco tipl. Analýza žákovských řešení této kombinatorické úlohy také do značné míry odpovídá jevu známému z literatury (např. Vondrová, 2019), kdy žáci předpokládají, že každá kombinatorická úloha je řešitelná nějakým kombinatorickým vzorcem.



Obrázek 27: Ukázka z chybného řešení úlohy „světelná hesla“. Řešitelem byl žák 4. ročníku čtyřletého gymnázia, který v dotazníku uvedl záměr maturovat z matematiky.

V reálném didaktickém testu z jarního termínu roku 2020 předcházela této podúloze (8.2) podúloha (8.1) dotazující se pouze na počet různých signálů. Ta měla podíl volby správné odpovědi 38,13 %. Do této práce byla zahrnuta až podúloha dotazující se na počet různých hesel, která byla v reálném didaktickém testu řešena s nenulovým ziskem bodů v 20,43 % případech. Neagregovaná data dokazují, že na podúlohu dotazující se na počet možných hesel odpověděli správně i maturanti, kteří odpověděli chybně na otázku, jaký je počet možných signálů. To si autorka neumí vysvětlit[33], v žákovských řešeních v rámci výzkumu se takový případ neobjevil. Zároveň tedy platí, že z prvomaturantů, kteří při reálném didaktickém testu správně určili počet možných signálů, určilo následně správně i počet možných hesel jen něco přes třetinu (konkrétně 37,6 %).

[33] Z klíče správných odpovědí ani ze vzorového řešení nevyplývá, že by měla být jako správná odpověď uznávána i ta, kdy žák spočítá „jakoby správně“ počet možných hesel, ovšem pomocí chybně spočteného počtu možných signálů.

Mezi žákovskými komentáři v testu se vyskytl i následující: „Nemám tušení, jestli se tu mají použít kombinační čísla.“ V rozhovoru po řešení testu jeden z žáků septimy podrobně popsal svůj postup řešení, v němž by správně spočítal počty hesel, nesprávně ovšem určil počet možných signálů. Jiný žák septimy naopak popsal svůj správný postup určení počtu možných signálů, ale chyboval ve výpočtu počtu hesel, kdy nezohlednil podmínku rozdílnosti dvou po sobě jdoucích signálů. Ani jeden z žáků si svou chybu (ve výpočtu počtu možných signálů u prvního, resp. ve výpočtu počtu možných hesel u druhého) neuvědomil ani při popisu svého řešení v průběhu rozhovoru.

Pro autorku poměrně překvapivým výsledkem je nulová úspěšnost řešení této úlohy v kvintě. Autorka se domnívala, že neznalost pojmů z kombinatoriky by mohla být pro žáky při řešení dokonce určitou výhodou, neboť by neměli snahu některý ze vzorců na úlohu „napasovat“. V řešeních žáků kvinty se neobjevilo ani správné určení počtu signálů. To autorku překvapilo, neboť jednotlivé možné dvojice žárovek je možné si rychle vypsat (možných dvojic bylo 10) a tento přístup obzvláště u žáků mladšího věku očekávala.

3.3 Shrnutí výsledků a didaktická doporučení

Jak bylo uvedeno výše, chyby v řešeních úloh byly ve značné míře očekávané. Objevily se však i další, které autorka předem neformulovala. Chyby očekávané i ty zjištěné až při výzkumu lze rozdělit na chyby závažného konceptuálního charakteru a na chyby méně závažné, možná i náhodného charakteru, způsobené v některých případech pravděpodobným přehlédnutím v číselném dopočtu.

Na základě dosažených výsledků a jejich zhodnocení formuluje autorka volně několik didaktických doporučení (po řadě odpovídají úlohám řešených v této práci) k zohlednění ve výuce matematiky a při přípravě k maturitnímu didaktickému testu.

Na základě analýzy výsledků úlohy „výraz = 0“ je možné doporučit průběžné procvičování práce s výrazy, stanovování definičních oborů výrazů či funkcí a rovněž řešení rovnic v součinovém a podílovém tvaru. Rovněž je zřejmě vhodné neustále upozorňovat na rozdílnost výrazů jako $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $(x + 1)^2$ či $(x - 1)^2$ a možnosti jejich dalších úprav. Vše jmenované se může vyskytnout v dopočtu úlohy v rámci prakticky kterékoli kapitoly matematiky, a je proto nutné tyto úkony ovládat, což, jak se ukázalo i v rámci tohoto výzkumu, pro všechny žáky neplatí.

Analýza úlohy „tabulka s m“, úspěšnosti v jejím řešení při reálném didaktickém testu a žákovských řešení v rámci výzkumu naznačila vážné nedostatky v oblasti znalosti některých matematických pojmů, konkrétně označení pro matematické operace či jejich vstupní hodnoty. V úloze se jednalo především o pojem *převrácená hodnota*, který žáci ve velkém počtu zaměňovali s pojmem *opačné číslo,* a vyskytla se i záměna významu pojmů *součin* a *součet*. Doporučením plynoucím z potvrzení převážně očekávaných důvodů nízké úspěšnosti v řešení této úlohy je důsledné pojmenovávání jednotlivých matematických operací a jejich „účastníků“. Z autorčina pohledu je vhodné s tímto začít hned na 1. stupni základní školy, kdy se žáci s prvními matematickými operacemi setkávají a kdy je kromě praktického zvládnutí z hlediska samotného výpočtu vhodné, aby si spolehlivě osvojili i související názvosloví[34]. Samozřejmým doporučením je pravidelné zařazování úloh, ve kterých je nutné ze slovního zadání využívajícího právě označení nejrůznějších matematických operací či jejich vstupních hodnot vytvořit symbolický zápis, se kterým se případně dále pracuje. Autorčinou zkušeností je, že někteří žáci považují takové úlohy v rámci výuky za poněkud samoúčelné a důsledné pojmenovávání za zbytečné, svým způsobem tedy vítá, že jsou v maturitních didaktických testech zařazeny úlohy, pro které je znalost názvosloví a schopnost vytvoření symbolického zápisu ze slovního zadání zásadní, neboť pro některé žáky je (bohužel) až toto platným argumentem a motivací.

Nízká úspěšnost v řešení úlohy „věž z kostek“ a analýza žákovských řešení přivádí autorku k doporučení motivovat žáky k tvorbě náčrtků, kdykoli je to možné. Podobně jako je bezesporu pravdivé okřídlené rčení „je lepší jednou vidět než desetkrát slyšet“, tak i v řešení nejrůznějších typů (nejen) matematických úloh může být cesta ke správnému řešení jistě zjednodušena zhotovením vhodného náčrtku. Dalšími doporučeními plynoucími z analýzy této úlohy je zařazování méně tradičních úloh využívajících při řešení prostorovou představivost či práce s manipulativy i na úrovni střední školy. Vhodným nástrojem jsou

[34] Dle Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy (RVP ZV, 2021) je provádění jednoduchých početních operací s přirozenými čísly (zpaměti) očekávaným výstupem 1. období 1. stupně ZŠ, konkrétněji se pak hovoří o zavádění terminologie a symboliky v souvislosti s jednoduchými matematickými operacemi v 1. období 1. stupně ZŠ např. v materiálu Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání (Nováková, Vondrová, 2015).

v této oblasti jistě i vybrané počítačové programy jako např. *GeoGebra* (GeoGebra, c2021) poskytující i trojrozměrný režim či možnost přechodu mezi 2D a 3D zobrazením, což lze při řešení či rozboru úlohy podobného typu, jako je zde analyzovaná a diskutovaná „věž z kostek", s výhodou využít. Dalším doporučením je používání úloh s delším slovním zadáním a motivace žáků k jejich trpělivé a samostatné analýze. Z žákovských řešení úlohy „věž z kostek" je patrné, že někteří žáci pravděpodobně neinterpretovali správně, co mají spočítat, což mohlo souviset i s poměrně dlouhým textovým zadáním, na jaké nemusí být někteří z nich z běžné výuky zvyklí (např. z čistě prozaických důvodů, jako je časová náročnost psaní nebo diktování dlouhého zadání, nedostatečná vybavenost bránící možnosti takové zadání promítnout pomocí projektoru apod.).

Autorčiných doporučení plynoucích z analýzy úlohy „zlomený strom" a jejích žákovských řešení je více. Prvním z nich je zařazování úloh se (záměrně) zavádějícími ilustračními obrázky. Takovou úlohou může být např. trigonometrická úloha týkající se obecného trojúhelníku doprovozená ovšem ilustračním obrázkem trojúhelníku jevícím se jako pravoúhlý, rovnostranný, rovnoramenný apod. Alespoň občasné zařazení takovýchto úloh by mělo být prevencí práce žáka v *prostoru reprezentací*, namísto práce v *prostoru teoretickém* dle klasifikace uvedené v (Laborde, 2005). Dalším doporučením plynoucím z výsledků a diskuse úlohy „zlomený strom" je zařazování úloh využívajících v řešení aplikaci Pythagorovy věty. Ta je jistě jednou z nejznámějších a nejpoužívanějších matematických vět, o to překvapivější pro autorku je nízká úspěšnost v řešení dané úlohy, kdy nevyužití Pythagorovy věty bylo jednou z jejích hlavních příčin. Doporučením je též neustálé zdůrazňování platnosti Pythagorovy věty pouze v pravoúhlém trojúhelníku a zároveň tedy možnost využití Pythagorovy věty pro posouzení ne/pravoúhlosti zadaného trojúhelníku. Některými žáky je, z autorčiných zkušeností, zařazení např. úlohy s obecným trojúhelníkem mezi procvičování úloh na řešení pravoúhlého trojúhelníku vnímáno nelibě jako určitý „chyták". Pokud však i ona emoce spojená s řešením a rozborem přispěje k tomu, že si žáci dají v budoucnosti lepší pozor a pojmou potřebu kontroly pravoúhlosti za svou, lze tento přístup považovat za didakticky účelný.

Analýza úlohy „číselná osa" přináší doporučení k důslednému používání pojmu *obraz čísla* při znázorňování čísel na číselné ose (či v Gaussově rovině při znázorňování čísel komplexních). Dalším doporučením je samotné využívání číselné osy ke znázorňování čísel či k porovnávání jejich velikosti, případně k identifikaci hodnoty čísla znázorněného na číselné ose spolu s obrazy dalších čísel. Navzdory tomu, že číselná osa bývá pravděpodobně častěji využívána ke znázornění celých čísel, je doporučeno pomocí ní znázorňovat častěji též zlomky, což může vést k jejich lepší konceptuální znalosti (Vondrová et al., 2015). Úlohy podobného typu, jako je ta zde analyzovaná, nejsou pro žáky pravděpodobně zcela běžné, a je tedy vhodné takové (minimálně v rámci přípravy k didaktickému testu z matematiky, ale lépe i v rámci výuky obecně) zařadit. A to nejen z toho důvodu, aby takovou úlohou nebyli žáci případně překvapeni v maturitním testu, ale především proto, že se jedná o úlohu kombinující algebraické výrazy s nutností grafické interpretace, což je situace blízká reálným problémům, které řada žáků ve svém dalším studiu jistě bude řešit.

Doporučením plynoucím z výsledků a diskuse chybných řešení úlohy „logaritmická rovnice" je pochopitelně pravidelné zařazování logaritmických rovnic, výrazů s logaritmy a jejich definičního oboru. Především je však ale nutné přesvědčovat se pravidelně a důsledně o žákovském pochopení významu logaritmu, a to i v případech, kdy s nimi pracují procedurálně správně. Osobně se autorka na základě svých dosavadních zkušeností domnívá, že by mohli být žáci seznámeni s pojmem a významem logaritmu dříve než v druhé části druhého ročníku střední školy, což by mohlo přispět k jeho lepšímu přijetí už jen proto, že by se s ním žáci setkávali delší dobu[35].

Nízká úspěšnost v řešení úlohy „vlak" koresponduje s obecným faktem obávanosti slovních úloh u značné části žáků napříč v zásadě všemi stupni vzdělávání. Tato konkrétní úloha byla navíc svým způsobem specifická tím, že jejím cílem nebylo nalezení konkrétní číselné hodnoty, nýbrž vyjádření závislosti hodnoty určité veličiny na hodnotě jiné. Úloha tedy testovala jednak schopnost pochopit slovní zadání a správně jej převést do řeči matematiky, ale rovněž pochopení závislosti jedné veličiny na jiné a schopnost tuto závislost vyjádřit. Takové slovní úlohy je tedy bezesporu vhodné zařazovat do výuky, a to nejen z důvodu přípravy k didaktickému testu v rámci maturitní zkoušky. Obecně je u slovních úloh zpravidla ponechávána volnost v označení jednotlivých veličin, např. tato úloha ovšem

[35] Autorčina zkušenost ze Stavební fakulty Českého vysokého učení technického v Praze je taková, že zacházet s logaritmem uměl v prvním ročníku z cca 20 studentů v kruhu zpravidla jeden, maximálně dva.

ukazuje, že je žádoucí, aby byli žáci trénováni též ve schopnosti dodržet označení, které je v zadání požadováno, a byli tak schopni formulovat výsledek v požadovaném tvaru. V souvislosti i s touto úlohou je navíc opět na místě doporučit zařazování úloh s relativně dlouhým zadáním, což s sebou sice nese určité praktické obtíže, je nicméně nutné, aby měli žáci s úlohami s delším textovým zadáním zkušenost.

Autorčiným doporučením plynoucím z analýzy chybných řešení úlohy „světelná hesla" je při procvičování zadávání kombinatorických úloh bez předchozí deklarace, o jaký typ by se mělo jednat. V rámci řešení je třeba předvést jejich důkladnou a co nejnázornější analýzu, zdůrazňovat nutnost zamyšlení se, co je v dané úloze zásadní (tedy zda záleží, či nezáleží na pořadí prvků, zda se prvky mohou, či nemohou opakovat, zda je máme, či nemusíme využít všechny apod.) a jak se to promítne do výpočtu. Zároveň je vhodné zadávat úlohy, které ani nelze vyřešit prostým dosazením do některého z kombinatorických vzorců, a to právě pro demonstraci faktu, že to vždy nejde a že je třeba úlohu řešit s porozuměním. Používání slovních označení pro *variace*, *permutace* či *kombinace* a tradičního značení (např. $K(3,10)$ nebo $V'(2,3)$) je samozřejmě rovněž na místě. Kromě toho, aby s nimi žáci uměli pracovat v rámci kombinatoriky a byly pro ně srozumitelné zápisy v nejrůznější literatuře, se tak i zvýší pravděpodobnost, že budou tato slova správně používána i v kontextu nematematickém, kde tomu tak často není.

V chybných řešeních v zásadě všech úloh se vyskytly i chyby, které nesouvisely přímo s tématem, do kterého úloha primárně spadala, a které se mohou vyskytnout v dopočtu úlohy pravděpodobně v jakékoli kapitole matematiky nebo jiné (nejen) přírodní vědy. Doporučení pravidelného procvičování úprav výrazů, práce s procenty, numerických výpočtů, řešení rovnic a podobně je tedy v zásadě banální, autorka se však domnívá, že je rovněž nutné jej na tomto místě uvést. Je navíc vhodné toto zdůrazňovat i žákům. I proto, že jsou situace, kdy je hodnocen pouze výsledek a nemůže tak být zhodnoceno (a případně tedy ani ohodnoceno), zda žákova chyba tkvěla v neschopnosti řešení dané úlohy jako celku, či zda se jednalo o chybu až v zásadě rutinním dopočtu. Nemluvě o reálné praxi a řešení skutečných problémů, k nimž žádný klíč správných odpovědí neexistuje.

Závěr

Tématem práce byla analýza vybraných matematických úloh ze společné části maturitní zkoušky, tedy úloh vybraných z maturitních didaktických testů z matematiky.

Sama společná část maturitní zkoušky, často též nazývaná jako státní maturita, je předmětem mnohých diskusí mezi odbornou i laickou veřejností. Je zpochybňován její význam vzhledem k tomu, že se v zásadě nezměnila role maturitní zkoušky jen jako zkoušky zakončující střední vzdělání s maturitou, byť má nyní dvě části. Mezi původními cíli zavedení společné části maturitní zkoušky však bylo též její zohledňování vysokými školami při přijímání uchazečů. To však obecně neplatí a pouze některé vysoké školy přihlížejí k výsledkům u zkoušek společné části, nejvíce se to pak pravděpodobně týká zkoušky matematika rozšiřující, která je ovšem zkouškou nepovinnou, a žák ji tedy skládá dobrovolně „navíc“. V lepším případě (pokud se hlásí na více vysokých škol, které k výsledku této zkoušky přihlížejí) tak může úspěšným složením této jedné zkoušky nahradit více přijímacích zkoušek na různých školách. Úlohy ve společné části maturitní zkoušky bývají též kritizovány po obsahové stránce, což nutně souvisí s její jednotností pro všechny typy středních škol a nástavbových studií zakončených maturitou. Rozdělení a rozlišení společné části maturitní zkoušky s ohledem na typ střední školy je tak jedním z možných scénářů v dalším vývoji podoby maturitní zkoušky. S vysokou pravděpodobností se v budoucnosti rovněž opět objeví debata nad zařazením zkoušky z matematiky mezi zkoušky povinné, minimálně pak na gymnáziích.

Právě matematickými úlohami z didaktických testů, které představují zkoušku z matematiky ve společné části maturitní zkoušky, se zabývala tato práce. Byly identifikovány úlohy, které byly v několika posledních letech řešeny s nízkou mírou úspěšnosti, a několik z nich bylo vybráno k podrobné analýze jak z hlediska úlohy samotné, tedy jejího tématu a konkrétního zadání, tak především s ohledem na výsledky, které přinesl výzkum v podobě sestavení testu z vybraných úloh, jeho předložení respondentům a následného vyhodnocení.

Cílem práce bylo zdůvodnění problematičnosti identifikovaných úloh a návrh doporučení pro obsah a způsob výuky matematiky, případně přímo přípravy k maturitní zkoušce, jejichž implementace by mohla přispět nejen k lepšímu zvládnutí podobného typu úloh v maturitním didaktickém testu, ale i v rámci jiných zkoušek, a především k lepšímu pochopení a účelnějšímu procvičení daných partií matematiky.

Autorka se domnívá, že cíle stanovené pro práci byly splněny. U všech vybraných úloh byly představeny očekávané důvody nízké úspěšnosti v jejich řešení. Některé z nich se potvrdily i v rámci provedeného výzkumu. V žákovských řešeních se objevily i jiné chyby. U řady z nich byla provedena analýza pravděpodobné příčiny, u některých si autorka konkrétní žákův postup vysvětlit nedokázala. V řešeních všech úloh se vyskytly i chyby v základním učivu. Proto bylo i jedním z doporučení vzešlých z diskuse výsledků výzkumu neustálé procvičování např. úprav výrazů či řešení rovnic, neboť chyby v těchto rutinních dopočtech můžou a často i skutečně zhatí principiálně správné řešení komplexní úlohy. Další doporučení se pak týkala konkrétních kapitol středoškolské matematiky.

Úlohy z matematiky, které byly ve zkoumaných ročnících společné části maturitní zkoušky řešeny s nejnižší úspěšností a byly předmětem zkoumání v této práci, nebyly z autorčina pohledu nadměrně obtížné. Některé z nich lze klasifikovat jako ne zcela standardní, ale to lze hodnotit spíše kladně, neboť maturant by měl být schopen prokázat, že dokáže aplikovat své znalosti a dovednosti při řešení úlohy, s níž je ještě nesetkal, a že se orientuje rovněž v názvosloví předmětu, z něhož se rozhodl skládat maturitní zkoušku. Minimálně by to mělo platit pro gymnazisty.

Tuto práci je možné považovat pouze za izolovanou studii zahrnující výzkum s početně i „místně“ omezenou skupinou respondentů. Nakolik by se lišily výsledky výzkumu provedeného v rámci této práce, tedy s respondenty z řad žáků kolínského gymnázia, a výsledky výzkumu s respondenty z jiných gymnázií nebo dokonce jiných typů středních škol, je otázkou a může být maximálně předmětem spekulace. Pokud by měla autorka v tomto smyslu vyjádřit svá očekávání, jsou taková, že by se výsledky, respektive charakter chyb v žákovských řešeních příliš nelišily. I v žákovských řešeních kolínských gymnazistů se objevilo množství chyb, které by se, použitím tenisové terminologie, daly označit za „nevynucené“, tedy takové, že přímo nesouvisely s tematickým zařazením řešené úlohy. Rozdíly by pak napříč školami mohly být právě v poměru důvodů neúspěšných řešení, tedy nakolik se jedná o neuchopení či neschopnost řešení úlohy jako celku a nakolik o chybování v zásadě rutinních dopočtech.

Použitá literatura

ASČ: Východiska a cíle maturitní zkoušky. *Asociace češtinářů* [online]. 15. 05. 2016 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://www.ascestinaru.cz/vychodiska-a-cile-maturitni-zkousky/2/

CALDA, Emil a Václav DUPAČ, 1999. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4. upr. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-147-7.

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ, 2018. *Výsledky maturitní zkoušky v roce 2017 a její vývoj od roku 2011*. Dostupné také z: https://data.cermat.cz/files/files/MZ2017_ZZ.pdf

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ, 2020. *Seznam vysokých škol akceptujících nepovinnou maturitní zkoušku z matematiky rozšiřující*. Dostupné také z: https://maturita.cermat.cz/files/files/MR/Seznam-VS/seznam_VS_MR_2021_5_3-12-2020.pdf

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. *Portál s výsledky evaluačních projektů* [online]. [cit. 2021-7-5]. Dostupné také z: https://vysledky.cermat.cz/

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ, 2014. *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky: platný od školního roku 2015/2016: Matematika*. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. MSMT-6858/2014-CERMAT. Dostupné také z: https://maturita.cermat.cz/menu/katalogy-pozadavku

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. *Maturitní zkouška* [online]. [cit. 2021-7-5]. Dostupné také z: https://maturita.cermat.cz/

ČESKÁ REPUBLIKA, 2004. Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In: *Sbírka zákonů*. Dostupné také z: http://aplikace.mvcr.cz/sbirka-zakonu/ViewFile.aspx?type=c&id=4494

ČESKÁ REPUBLIKA, 2009. Vyhláška č. 177/2009 Sb., o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou. In: *Sbírka zákonů*. Dostupné také z: http://aplikace.mvcr.cz/sbirka-zakonu/ViewFile.aspx?type=c&id=5498

Europass [online], c2021. [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: https://europass.cz/

GeoGebra [online], c2021. [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/

HEJNÝ, Milan, 2014. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-776-2.

CHVÍLA, Martin, 2012. *Diskrétní pravděpodobnost a náhodné odpovědi v testech*. Brno. Dostupné také z: https://theses.cz/id/1dotsn/. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce doc. Mgr. Ondřej Klíma, Ph.D.

IROZHLAS: Státní maturity budou mít jen jednu úroveň, zlevnit mají o desítky milionů, c1997-2021. *IROZHLAS* [online]. 17. 07. 2012 [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: https://www.irozhlas.cz/zpravy-domov/statni-maturity-budou-mit-jen-jednu-uroven-zlevnit-maji-o-desitky-milionu_201207171925_mkaspar

IROZHLAS: Tisíce slovenských maturantů si zopakují testy z matematiky, c1997-2021. *IROZHLAS* [online]. 26. 04. 2005 [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: https://www.irozhlas.cz/zpravy-svet/tisice-slovenskych-maturantu-si-zopakuji-testy-z-matematiky_200504260743_mhromadka

JANDA, David, Naďa VONDROVÁ a Veronika TŮMOVÁ, 2020. *Pojmotvorný proces v oblasti míry v geometrii*. Praha: PedF UK. ISBN 978-80-7603-141-8.

JANDOUREK, Jan, 2003. *Úvod do sociologie*. Praha: Portál. ISBN 80-7178-749-3.

JČMF: Stanovisko Jednoty českých matematiků a fyziků k nové maturitě a k výsledkům maturitní generálky MAG10. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 09. 11. 2010 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://jcmf.cz/?q=cz/node/34

JČMF: Výsledky ankety JČMF k maturitní zkoušce z matematiky. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 19. 05. 2012 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://www.jcmf.cz/?q=cz/node/370

JČMF: Stanovisko Jednoty českých matematiků a fyziků k nové maturitní zkoušce a ke Katalogu požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky s platností od škol. roku 2014/2015. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 27. 03. 2013 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://jcmf.cz/?q=cz/node/504

JČMF: Vystoupení předsedy JČMF RNDr. Josefa Kubáta na veřejném slyšení v Senátu Parlamentu ČR. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 11. 06. 2013 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: http://www.jcmf.cz/?q=cz/node/540

JČMF: Stanovisko JČMF k povinné matematice u maturit od roku 2019. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 01. 11. 2014 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://jcmf.cz/?q=cz/node/851

JČMF: Společné prohlášení Asociace ředitelů gymnázií a JČMF - 5. listopadu 2019. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 08. 11. 2019 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://jcmf.cz/?q=cz/node/1900

JČMF: Pár bodů k maturitě z matematiky, na kterých bychom se mohli v JČMF shodnout. *Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. 21. 12. 2019 [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://www.jcmf.cz/?q=en/node/1922

KUŘINA, František, 1990. *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3.

KUŘINA, František, 2011. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-307-3.

LABORDE, Colette, 2005. The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry. In: KILPATRICK, Jeremy, Celia HOYLES a Ole SKOVSMOSE, ed. *Meaning in Mathematics Education*. Springer, New York, NY, s. 159–179. ISBN 978-0-387-24039-8. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_11

Maturitní zpravodaj, 2012. CERMAT. ISSN 1803-9928. Dostupné také z: https://maturita.cermat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni_zpravodaj_13_12.pdf

Maturitní zpravodaj, 2012. CERMAT. ISSN 1803-9928. Dostupné také z: https://maturita.cermat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni_zpravodaj_14_12.pdf

MORKES, František, 2003. *Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání – Divize nakladatelství TAURIS. ISBN 80-211-0438-4.

MŠMT: Státní maturita. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. [cit. 2021-7-5]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/statni-maturita

NOVÁKOVÁ, Eva a Naďa VONDROVÁ, 2015. *Číslo a početní operace, Číslo a proměnná*. Praha: Národní ústav pro vzdělávání. s. 8–41. ISBN 978-80-7481-140-1. Dostupné také z: https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/20617/matematika.pdf

PELIKÁN, Jiří, 1998. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů*. Praha: Karolinum. ISBN 978-80-7184-569-0.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2021. 164 s. [cit. 2021-07-10]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4983_1_1/

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ, 2014. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*. 24(1), 22–57. Dostupné z: http://dx.doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22

SVATOŠ, Martin, 2000. Exner-Bonitzovy školské reformy a jejich důsledky pro gymnaziální školství v habsburské monarchii v 19. století. In: NAVRÁTIL, Ivo. *Minulost, současnost a budoucnost gymnazijního vzdělávání: sborník referátů z konference konané ve dnech 24.–25. června 1999 v Jičíně*. Semily: Státní okresní archiv. Z Českého ráje a Podkrkonoší, s. 42–48. ISBN 80-86254-02-X.

UNESCO Institute for Statistics, 2015. *International Standard Classification of Education: Fields of education and training 2013 (ISCED-F 2013) – Detailed field descriptions*. Montreal, Canada. ISBN 978-92-9189-179-5. Dostupné z: http://dx.doi.org/10.15220/978-92-9189-179-5-en

VOKÁČ, Petr, 2016. *Školský zákon: zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání*. 6., přepracované vydání. Třinec: Resk, spol. s r.o. ISBN 978-80-87675-13-7.

VONDROVÁ, Naďa, Miroslav RENDL, Radka HAVLÍČKOVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Anna PÁCHOVÁ a Jana ŽALSKÁ, 2015. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-246-3234-6.

VONDROVÁ, Naďa, 2019. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7603-109-8.

Příloha 1 – Testy předložené žákům v rámci výzkumu

Varianta 1:

Příjmení nebo jiný identifikátor	(slouží výhradně pro možnost kontaktování řešitele testu v případě doplňujících dotazů ke způsobu řešení; jméno řešitele nebude ve výstupu nikde uvedeno)

z MATEMATIKY: ☐ nemám v úmyslu maturovat ☐ mám v úmyslu maturovat, a to:

☐ jen „státně“

☐ jen „profilově“

☐ pokud by to bylo možné, tak „státně“ i „profilově“

pokud si musím vybrat, tak: ☐ „státně“

☐ „profilově“

1. Je dán výraz: $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$

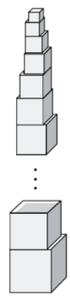
   Určete množinu všech $y \in R$, pro která má výraz hodnotu 0.

2. Do všech prázdných polí tabulky doplňte **stejné** nenulové číslo m tak, aby platilo:
   Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku.

10		**4**
	25	

   Zapište číslo m.

3. V Kocourkově postavili televizní věž ze samých krychlí.

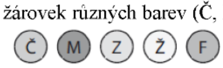


   Dole je největší krychle s délkou hrany 6 m a každá následující krychle má hranu o 5 cm kratší.
   Hrana nejmenší krychle měří 3,5 m.

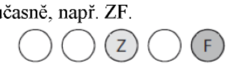
   Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol.
   Při pohledu shora žádná z krychlí nepřečnívá přes níže položenou krychli.

   Vypočtěte v m² obsah všech <u>nezakrytých vodorovných</u> ploch televizní věže
   (včetně horní stěny nejmenší krychle**).**

4. Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).



   Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF.



   Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály následující bezprostředně po sobě nebyly stejné.
   Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

   Vypočtěte, kolik různých **hesel** lze vytvořit.

5. K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-1; 1\rangle$
C) $(1; 2\rangle$
D) $(2; 3\rangle$
E) $(3; +\infty)$
F) $\emptyset$

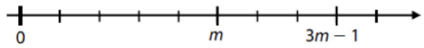
6. Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení. Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n.

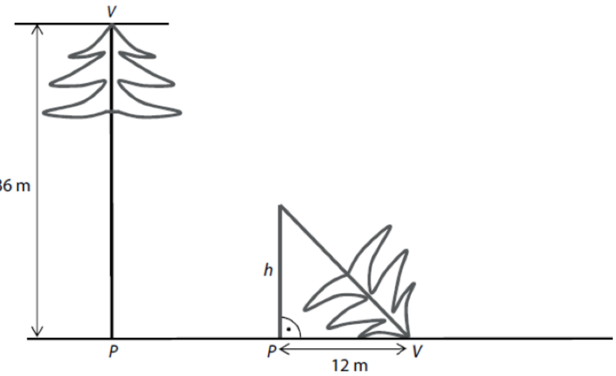
Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok
a) byli ve vlaku;
b) ve vlaku stáli.

7. Na číselné ose jsou obrazy tří čísel: 0, m a $3m-1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.



Na číselné ose vyznačte (silnou čarou) a popište obraz čísla 1.

8. Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene zanedbáváme.)



Vypočtěte, v jaké výšce nad zemí (h) se strom zlomil.

Varianta 2:

Příjmení nebo jiný identifikátor	(slouží výhradně pro možnost kontaktování řešitele testu v případě doplňujících dotazů ke způsobu řešení; jméno řešitele nebude ve výstupu nikde uvedeno)
z MATEMATIKY: ☐ nemám v úmyslu maturovat	☐ mám v úmyslu maturovat, a to: ☐ jen „státně“ ☐ jen „profilově“ ☐ pokud by to bylo možné, tak „státně“ i „profilově“ pokud si musím vybrat, tak: ☐ „státně“ ☐ „profilově“

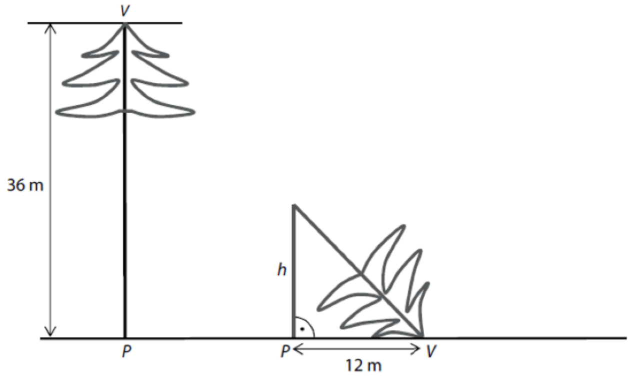
1. Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení. Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

   (Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

   Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n.

   Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok
   a) byli ve vlaku;
   b) ve vlaku stáli.

2. Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene zanedbáváme.)



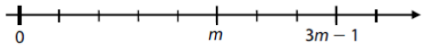
   Vypočtěte, v jaké výšce nad zemí (h) se strom zlomil.

3. K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

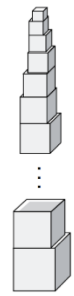
   A) $(-\infty;\ -1\rangle$
   B) $(-1;\ 1\rangle$
   C) $(1;\ 2\rangle$
   D) $(2;\ 3\rangle$
   E) $(3;\ +\infty)$
   F) $\emptyset$

4. Na číselné ose jsou obrazy tří čísel: 0, m a $3m-1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.



Na číselné ose vyznačte (silnou čarou) a popište obraz čísla 1.

5. V Kocourkově postavili televizní věž ze samých krychlí.



Dole je největší krychle s délkou hrany 6 m a každá následující krychle má hranu o 5 cm kratší.
Hrana nejmenší krychle měří 3,5 m.

Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol.
Při pohledu shora žádná z krychlí nepřečnívá přes níže položenou krychli.

Vypočtěte v m^2 obsah všech <u>nezakrytých vodorovných</u> ploch televizní věže (včetně horní stěny nejmenší krychle**).**

6. Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).

Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF.

Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály následující bezprostředně po sobě nebyly stejné.
Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

Vypočtěte, kolik různých **hesel** lze vytvořit.

7. Je dán výraz: $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$
Určete množinu všech $y \in R$, pro která má výraz hodnotu 0.

8. Do všech prázdných polí tabulky doplňte **stejné** nenulové číslo m tak, aby platilo:
Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku.

10		4
	25	

Zapište číslo m.

Varianta 3:

Příjmení nebo jiný identifikátor	(slouží výhradně pro možnost kontaktování řešitele testu v případě doplňujících dotazů ke způsobu řešení; jméno řešitele nebude ve výstupu nikde uvedeno)

z MATEMATIKY: ☐ nemám v úmyslu maturovat ☐ mám v úmyslu maturovat, a to:

☐ jen „státně“

☐ jen „profilově“

☐ pokud by to bylo možné, tak „státně“ i „profilově“

pokud si musím vybrat, tak: ☐ „státně“

☐ „profilově“

1. Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).

Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF.

Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály následující bezprostředně po sobě nebyly stejné.
Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

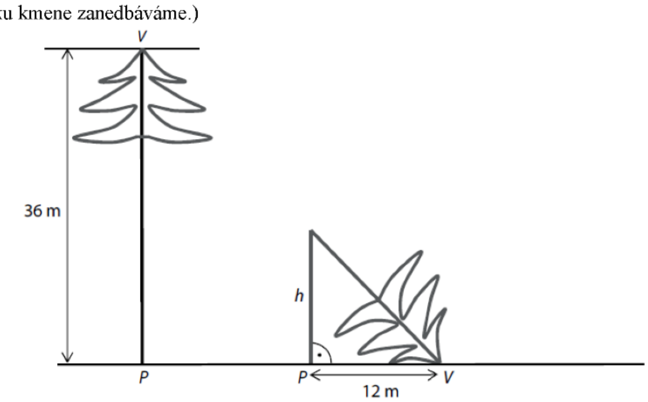
Vypočtěte, kolik různých **hesel** lze vytvořit.

2. Do všech prázdných polí tabulky doplňte **stejné** nenulové číslo m tak, aby platilo:
Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku.

10		**4**
	25	

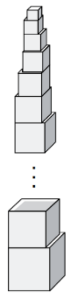
Zapište číslo m.

3. Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene zanedbáváme.)



Vypočtěte, v jaké výšce nad zemí (h) se strom zlomil.

4. V Kocourkově postavili televizní věž ze samých krychlí.



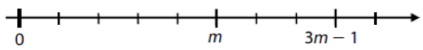
Dole je největší krychle s délkou hrany 6 m a každá následující krychle má hranu o 5 cm kratší.
Hrana nejmenší krychle měří 3,5 m.

Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol.
Při pohledu shora žádná z krychlí nepřečnívá přes níže položenou krychli.

Vypočtěte v m^2 obsah všech <u>nezakrytých vodorovných</u> ploch televizní věže
(včetně horní stěny nejmenší krychle).

5. Je dán výraz: $\frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4}$
Určete množinu všech $y \in R$, pro která má výraz hodnotu 0.

6. Na číselné ose jsou obrazy tří čísel: 0, m a $3m-1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.



Na číselné ose vyznačte (silnou čarou) a popište obraz čísla 1.

7. Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení.
Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n.

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok
a) byli ve vlaku;
b) ve vlaku stáli.

8. K rovnici řešené v oboru R přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení.

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-1; 1\rangle$
C) $(1; 2\rangle$
D) $(2; 3\rangle$
E) $(3; +\infty)$
F) $\emptyset$

Příloha 2 – Úspěšnost žáků kolínského gymnázia v didaktickém testu z matematiky v letech 2018, 2019, 2020

V tabulce níže je uveden přehled úspěšnosti maturantů kolínského gymnázia (G., Kolín) ve zkoušce z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky v porovnání se středočeskými maturanty na gymnáziích (g. ve Stř. kraji), středočeskými maturanty obecně (Stř. kraj), maturanty z gymnázií v celé České republice (g. v ČR) a maturanty v České republice obecně (ČR) v letech 2018, 2019 a 2020. Zdrojem dat je (CERMAT, Portál).

Z výsledků je patrné, že podíl volby předmětu matematika mezi maturanty na kolínském gymnáziu téměř kopíruje průměrnou hodnotu na gymnáziích v celé České republice. Co se týče úspěšnosti, její průměrná hodnota byla u kolínských gymnazistů v letech 2018–2020 vždy o několik procentních bodů vyšší, než činil průměr na gymnáziích v ČR.

	Entita	Průměrná úspěšnost	Medián	Směrodatná odchylka	Počet přihlášených ke zkoušce z MAT	Počet konajících zkoušku z MAT	Podíl přihlášených ke zkoušce z MAT jako druhé povinné zkoušce
2018	G., Kolín	70,14	71,00	14,5595	28	28	32,56 %
	g. ve Stř. kraji	66,61	68,00	18,2321	550	546	29,09 %
	Stř. kraj	50,23	50,00	23,7917	1311	1183	21,23 %
	g. v ČR	66,92	68,00	18,1267	6761	6637	32,30 %
	ČR	52,89	54,00	23,0483	16152	14759	23,42 %
2019	G., Kolín	76,87	78,00	14,1154	23	23	34,33 %
	g. ve Stř. kraji	71,88	74,00	17,1737	532	526	27,38 %
	Stř. kraj	55,87	56,00	23,7017	1217	1106	19,66 %
	g. v ČR	71,21	72,00	18,1875	6562	6475	30,64 %
	ČR	58,83	60,00	23,0888	14754	13694	21,26 %
2020	G., Kolín	74,85	82,00	20,6299	26	26	30,23 %
	g. ve Stř. kraji	70,30	72,00	19,1970	554	552	26,36 %
	Stř. kraj	55,49	58,00	25,8116	1115	1090	17,79 %
	g. v ČR	71,13	74,00	18,9270	6449	6420	30,01 %
	ČR	58,04	60,00	24,4015	13665	13423	19,77 %

Příloha 3 – Chyby v řešení jednotlivých úloh žáky maturitních ročníků

Dále jsou pro jednotlivé úlohy uvedena chybná řešení či chybné postupy z žákovských řešení z maturitních ročníků. V závorce jsou uvedena pořadová čísla řešení, ve kterých se daný jev vyskytl spolu s označením, z jaké třídy dané řešení pocházelo (8.A8…oktáva, 4.A4, 4.B4…třídy 4. ročníku čtyřletého studia).

Úloha 1 (jarní termín 2017) – „výraz = 0“

Uvedení $y = -2$ jako výsledku. (8.A8: 11, 12, 4.B4: 1, 4, 5, 18)

Uvedení více hodnot y jako řešení (kromě správné hodnoty $\frac{3}{2}$ i hodnota 1 či -1 nebo hodnota -2 nebo hodnota 0). (8.A8: 2, 4.A4: 2, 10, 24, 4.B4: 15, 22, 25)

Uvedení více hodnot, a to chybných $y = \pm 1, -\frac{3}{2}, 2$. (4.A4: 18)

Uvedení $y = \left\langle -2; \frac{3}{2} \right\rangle$ jako výsledku. (4.A4: 1)

Kromě správné hodnoty uvedení $y = \frac{3}{8}$ jako výsledku. (4.A4: 9)

Uvedení $y = 1$ jako výsledku. (8.A8: 3)

Roznásobení výrazu v čitateli lomeného výrazu vedoucí ke složitému výrazu a neúspěšnému řešení úlohy. (8.A8: 5, 7, 12, 4.A4: 3, 25, 26, 4.B4: 3, 7, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 20, 21, 24)

„Čarování“ s výrazem. (8.A8: 10, 4.A4: 16)

Uvedení jen podmínky. (4.A4: 12)

Uvedení $K = \left\langle 2; \frac{6}{2} \right)$ jako výsledku. (4.A4: 21)

Uvedení $y_1 = -5$, $y_2 = 5,\overline{6}$ jako výsledků – vychází z nesprávného řešení kubické rovnice po roznásobení čitatele. (4.B4: 26)

Úloha 3 (jarní termín 2017) – „tabulka s m“

Sepsání $40m = \frac{1}{25m^2}$, ale neschopnost dořešení. (8.A8: 12, 4.B4: 15, 18)

Sestavení a řešení rovnice $-40m = 25m^2$ s výsledkem $m = -1{,}6$ nebo $m = -\frac{8}{5}$. (8.A8: 14, 4.B4: 11)

Uvedení $m = -\frac{8}{5}$ nebo $m = -1{,}6$ jako výsledku. (4.A4: 1, 7, 9, 10, 4.B4: 1, 8)

Uvedení $m = -13$ jako výsledku. (4.A4: 11, 12)

Uvedení $m = \frac{8}{5}$ nebo $m = 1{,}6$ jako výsledku. (4.A4: 24, 4.B4: 21, 26)

Uvedení $m \doteq \frac{1}{7}$ jako výsledku. (4.B4: 5)

Uvedení $m = \frac{1}{1000}$ jako výsledku. (4.B4: 20)

Úloha 7 (jarní termín 2017) – „věž z kostek"

Názorný obrázek (shora), ale neuvedení správné odpovědi nebo složitý výpočet nevedoucí ke správnému výsledku. (8.A8: 1, 4.A4: 17, 19)

Nejasný výpočet nevedoucí ke správné odpovědi. (8.A8: 7, 4.A4: 5, 11, 4.B4: 15)

Uvedení výsledku v jiných jednotkách a k tomu s chybným převodem. (8.A8: 8)

Chyba v řádu. (4.B4: 17)

Neuvažování obsahu i stěny horní krychle. (4.B4: 18)

Výpočet obsahu stěny prostřední/průměrné krychle (s hranou délky 475 cm) a dále násobení tohoto obsahu. (8.A8: 14)

Výpočet rozdílu v obsahu stěny největší a druhé největší krychle, vynásobení padesáti a přičtení obsahu stěny nejmenší krychle. (8.A8: 15)

Složitý výpočet s výsledkem úplně jiného řádu. (8.A8: 17)

Odpověď $584\mathrm{m}^2$. (4.A4: 1)

Odpověď $12{,}2675\mathrm{m}^2$. (4.A4: 6)

Odpověď $\frac{464}{5}\mathrm{m}^2$. (4.A4: 21)

Odpověď $23{,}5\mathrm{m}^2$. (4.A4: 22)

Uvedení „12m^2(horní stěna) $+$“. (4.A4: 12)

Výpočet rozdílu $600 - 350 = 250$, následně uvedení výsledku jako $250^2 = 62500\ \text{m}^2 + 350^2\ \longrightarrow 18{,}5\text{m}^2$. (4.B4: 9)

Chybný výpočet počtu kostek. (4.B4: 22)

Úloha 14 (jarní termín 2017) – „zlomený strom“

Označení přepony pomocí dalšího písmene, správný vztah mezi délkami, ale potom chybně sestavená Pythagorova věta. (8.A8: 1)

Předpoklad rovnoramennosti vzniklého prav. trojúhelníku. (8.A8: 5, 4.A4: 8, 4.B4: 13, 26)

Složitý výpočet se dvěma neznámými (dokonce ve 4. mocnině) nevedoucí ke správnému výsledku. (8.A8: 7)

Označení přepony $36 - h$, ale dál nic. (8.A8: 10)

Chyba v algebraických operacích (umocnění dvojčlenu, práce s (od)mocninami). (8.A8: 16, 4.A4: 2)

Jen uvedení chybného výsledku. (4.A4: 9, 10, 13, 21, 24, 4.B4: 19)

Uvedení $\sin\alpha = \frac{12}{36} = 19{,}47$ m. (4.A4: 16)

Chybné tipování. (4.B4: 3, 6)

Vyjádření h jako $\frac{36}{x}$ místo $36 - x$, kde x je označení přepony. (4.B4: 8)

Chybné použití gon. funkcí v prav. trojúhelníku. (4.B4: 12, 23, 24)

Úloha 3.2 (jarní termín 2018) – „číselná osa“

Chybné „odpočítání‘“ dílků. (8.A8: 11)

Smíchání „jednotek“ a „dílků“. (8.A8:18)

Jen označení nesprávné polohy obrazu čísla 1. (4.A4: 1, 4, 21, 4.B4: 17)

Uvedení $5m = 8(3m - 1)$. (4.A4: 23)

Označení stejnou délkou dva zjevně nestejně dlouhé úseky. (4.A4: 24)

Uvedení $1 = \frac{15m-5}{3}$. (4.B4:8)

Označena 1 jako první dílek vpravo od 0, ale zároveň výpočet vedoucí k $m = \frac{1}{2}$. (4.B4: 13)

Správné vypočtení délky dílku, ale neschopnost interpretace. (4.B4: 18)

Uvedení $\frac{3}{5}m = 3m - 1$ a dopočet z tohoto. (4.B4: 26)

Úloha 25.3 (jarní termín 2018) – „logaritmická rovnice“

Pouhé „odlogaritmování“ a dopočet $x = \frac{3}{2}$. (4.A4: 25, 4.B4: 2, 7, 22, 26)

Úprava logaritmu vedoucí k řešení $x = \frac{3}{2}$. (4.B4: 18)

Jen označení intervalu, do kterého hodnota $\frac{3}{2}$ spadá. (4.A4: 1, 2, 6, 11, 15, 4.B4: 21)

Pouhé „odlogaritmování“ a dopočet $x = \frac{3}{2}$ a k tomu chybné zařazení této hodnoty do nabízených intervalů. (8.A8: 3, 4.A4: 26)

Pouhé „odlogaritmování“ a k tomu chybný dopočet $x = \frac{2}{3}$. (8.A8: 13, 4.B4: 3)

Chybné zacházení s logaritmy. (4.A4: 7)

Chybné podmínky. (4.B4: 11)

Úloha 3.1 a 3.2 (jarní termín 2019) – „vlak“

Odpověď na b) $\frac{7}{4}n - 30$ (bez podkladu). (8.A8: 3)

Zavedení další proměnné. (8.A8: 6, 4.A4: 9)

Zavedení většího počtu proměnných, nejasné výpočty nevedoucí k cíli. (8.A8: 9, 4.A4: 19, 4.B4: 8)

Chyby v úpravách (nevydělení všech členů rovnice, odečítání zlomků). (8.A8: 10, 13)

Vyjádření počtu míst k sezení jako 20 místo $n + 20$. (8.A8: 18)

Vyjádření počtu míst ve vagónu jen jako $n + 20$ místo $n + n + 20$. (4.A4: 2, 6, 7)

Vztahování procent k celkové obsazenosti vagónů, nikoli jen k místům k sezení. (4.A4: 3)

Výpočet hodnoty n. (4.A4: 16, 4.B4: 15)

Odpověď na a) 0,5 n. (4.B4: 2)

Uvažování jen jednoho vagonu v a). (4.B4: 16)

V a) uvedena jako výsledek celková kapacita vlaku, nikoli její polovina. (4.B4: 24)

Úloha 8.2 (jarní termín 2020) – „světelná hesla"

Uvedení $\frac{5!}{3}$. (8.A8: 9)

Chyba v numerických počtech ($10 \cdot 9 \cdot 9 = 180$). (8.A8: 10)

Uvedení $2 \cdot 5! \cdot 3$. (8.A8: 11)

Uvedení $5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 32$ jako počet signálů. (8.A8:15)

Uvedení $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2} = 90$. (8.A8: 16)

Uvedení $V(3; 10)$. (4.A4: 1)

Uvedení $K(5; 2)$. (4.A4: 3, 4)

Úvaha, že heslo je vlastně tvořeno 6 žárovkami, ovšem nerozpracovaná do správné odpovědi. (4.A4: 9)

Uvedení $5! = 120$. (4.A4: 10)

Uvedení $4! = 24$. (4.A4: 12)

Uvedení 6!. (4.A4: 21)

Uvedení $\binom{20}{3} + 400$. (4.A4: 11)

Uvedení 75 možností. (4.A4: 15)

Uvedení $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 26 \cdot 3 = 78$ možností. (4.A4: 19)

Uvedení 720 možností. (4.A4: 17, 4.B4: 26)

Uvedení jakési tabulky a odpovědi 1024 možností. (4.A4: 16)

Uvedení $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 : 2 = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40$. (4.B4: 1)

Uvedení $C(5,2) = 2^5 = 32$, $3 \cdot 32 = 96$. (4.B4: 2, 7)

Uvedení 10. (4.B4: 8)

Uvedení $V(2; 5) = \frac{5!}{3!} = 20$, $V_{op}.(3; 20) = 20^3 = 8000$. (4.B4: 9)

Uvedení nejasného výpočtu s výsledkem 1440. (4.B4: 15)

Uvedení $V(5; 3) = \frac{5!}{3!} = 20$. (4.B4: 16)

Uvedení 20. (4.B4: 19)

Uvedení $C = (2, 5)$. (4.B4: 21)

Záměna variací a kombinací, sčítání a násobení… (4.B4: 22, 25)

Uvedení $\binom{5}{2} \cdot 5 = 50$. (4.B4: 23)