

Univerzita Karlova v Praze  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Prostředí Autobus ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ

The mathematical environment Bus in primary school

David Pártl

Vedoucí práce: PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Prostředí Autobus ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 03. 12. 2016

.....

podpis

Rád bych vyjádřil poděkování vedoucí diplomové práce PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za vstřícnost, připomínky, cenné rady, trpělivost a věnovaný čas.

Také bych rád poděkoval své rodině a přátelům, kteří byli mou velkou oporou.

## ABSTRAKT

Tato práce se zabývá didaktickým matematickým prostředím Autobus realizovaným prostřednictvím úloh v učebnicích Hejný a kolektiv. Problematika je zaměřena na žáky čtvrtého ročníku ZŠ. Nejstěžejnějším bodem v teoretické části je studium postupné gradace úloh v prostředí Autobus od prvního do pátého ročníku ZŠ. Bylo zjištěno, že frekvence úloh v učebnici pro čtvrtý ročník je narušena a na základě tohoto zjištění byl připraven experiment, který doplňoval úlohy v prostředí Autobus tak, aby frekvence byla pravidelná. Praktická část obsahuje přípravu experimentu, ve kterém byly formulovány vlastní navržené úlohy. Ty byly provázány s učivem čtvrtého ročníku ZŠ. Provedením dvou experimentů bylo získáno 262 žákovských řešení, v nichž byly evidovány a následně analyzovány žákovské chyby. To umožnilo formulovat jevy, které mohly být způsobeny narušenou frekvencí úloh v prostředí Autobus v učebnicích Hejný a kolektiv.

## KLÍČOVÁ SLOVA

gradované úlohy, experiment, Hejného vyučovací metoda, didaktické matematické prostředí Autobus, slovní úloha, práce s tabulkou, chyba, aditivní operace

## ABSTRACT

The diploma thesis deals with the topic of the mathematical environment Bus realized through mathematical tasks in textbooks Hejný et al. The issue is aimed at pupils of the fourth grade of primary school. The main point of the theoretical part is study of gradual gradation of tasks in environment Bus from 1st to 5th grade of primary school. It was found that the frequency of the tasks in the textbook for the fourth grade is impaired and on the basis has been prepared experiment that complement the tasks so that the frequency has been unimpaired. The practical part includes the preparation of an experiment in which custom-designed tasks were formulated. They were linked with fourth-year primary school curriculum. By performing two experiments was obtained 262 pupil's solutions of tasks, in which were recorded and analyzed pupil's mistakes. This enabled to formulate phenomenons that could be caused by impaired frequency of tasks in environment Bus in textbooks Hejný et al.

## KEYWORDS

graduaded problems, experiment, Hejný's teaching method, mathematical environment Bus, word problems, work with table

# Obsah

Úvod.....	9
I. Teoretická část.....	11
1 Schéma .....	11
2 Didaktická matematická prostředí.....	13
3 Aditivní operace .....	15
4 Prostředí Autobus.....	25
4.1 Význam prostředí .....	25
4.1.1 Cvičení krátkodobé procesuální paměti.....	25
4.1.2 Hledání nástroje zaznamenání procesu.....	25
4.1.3 Schopnost modelovat reálné situace .....	26
4.1.4 Schopnost matematizace reálné situace.....	26
4.1.5 Rozvíjení schopnosti v aditivních operacích.....	26
4.1.6 Číslo zde vystupuje jako operátor změny.....	27
4.1.7 Práce a orientace s tabulkou .....	27
4.1.8 Práce s podmínkou.....	27
4.1.9 Harmonogram.....	27
4.1.10 Vztah čtyř čísel .....	27
4.1.11 Vztah rovnosti a nerovnice.....	28
4.2 Etapizace prostředí Autobus.....	28
4.2.1 Nultá etapa .....	29
4.1.2 První etapa .....	30
4.1.3 Druhá etapa.....	31
4.1.4 Třetí etapa .....	33
4.1.5 Čtvrtá etapa.....	34

4.1.6 Pátá etapa .....	35
4.1.7 Šestá etapa .....	36
4.2 Současný stav Hejného učebnic .....	38
4.2.1 První etapa realizovaná v učebnici .....	38
4.2.2 Druhá etapa realizovaná v učebnici.....	39
4.2.3 Třetí etapa realizovaná v učebnici .....	43
4.2.4 Čtvrtá etapa realizovaná v učebnici.....	44
4.2.5 Pátá etapa realizovaná v učebnici .....	46
4.2.6 Šestá etapa realizovaná v učebnici .....	50
5 Závěr teoretické části .....	52
II. Praktická část .....	53
6 Předexperiment .....	53
6.1 Vlastní gradované úlohy.....	59
6.1.1 Úloha 1 .....	59
6.1.2 Úloha 2.....	60
6.1.3 Úloha 3 .....	61
6.1.4 Úloha 4.....	62
6.1.5. Úloha 5.....	62
6.1.6 Úloha 6.....	64
6.1.7 Úloha 7.....	65
6.1.8 Úloha 8.....	66
6.1.9 Úloha 9.....	66
6.1.10 Úloha 10.....	67
6.1.11 Úloha 11.....	68

6.2 Gradační parametry .....	70
7 Experiment .....	72
7.1 Analýza řešení .....	73
7.2.1 Úloha 1 .....	73
7.2.2 Úloha 2 .....	80
7.2.3 Úloha 3 .....	83
7.2.4 Úloha 4 .....	86
7.2.5 Úloha 5 .....	90
7.2.6 Úloha 6 .....	95
7.2.7 Úloha 7 .....	98
7.2.8 Úloha 8 .....	102
7.2.9 Úloha 9 .....	105
7.2.10 Úloha 10 .....	109
7.2.11 Úloha 11 .....	114
7.2 Závěr analýzy .....	118
Závěr diplomové práce .....	120
Seznam použitých informačních zdrojů .....	122

## Úvod

Psát diplomovou práci na katedře Matematiky a didaktiky matematiky jsem se rozhodl proto, že matematiku jsem měl vždy rád. Dalším důvodem bylo to, že v metodě profesora Hejného vidím veliký potenciál, metoda je nejen pro žáky velmi atraktivní a zábavná, ale především rozvíjí matematické dovednosti a logické myšlení u žáků.

Téma své diplomové práce, Prostředí Autobus ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ, jsem si vybral, protože matematické prostředí Autobus je mé nejoblíbenější. Toto prostředí bylo pro mne první prostředí, do kterého jsem se mohl hlouběji ponořit. Stalo se tak, když mi v druhém semestru mého studia na Pedagogické fakultě doktorka Slezáková zadala výzvu jako domácí úkol. Úloha byla velmi náročná, strávil jsem s ním takřka celý jeden víkend. Byl to také první impulz mého prozření, že metoda Hejného, je něco víc. Dalším důvodem, proč jsem si vybral prostředí Autobus, byl, že toto prostředí je propedeutika „trojčlenky“. Pokud něco používám z matematiky v každodenním životě, vyjma běžného počítání, tak je to právě „trojčlenka“. Je zajímavá pro vztahy, vazby čísel. I proto vidím prostředí jako velmi důležitý prvek pro přípravu žáků do běžného života.

Také během praxe, kdy jsme jeden semestr navštěvovali každý týden jednu a tu samou třídu, jsem v této třídě prostředí Autobus zaváděl. Žáci do té doby toto prostředí neznali. Hned první odučenou hodinou si prostředí oblíbili. Mohl jsem tak získat cennou zkušenost při zavádění nového prostředí – ne ho pouze procvičovat nebo rozvíjet.

V této diplomové práci jsou stanovené následující cíle:

- Prostudování matematického prostředí Autobus v Hejného učebnicích pro první až pátý ročník ZŠ.
- Nalezení hlubšího smyslu a cílů prostředí Autobus.
- Nalezení stejných cílů v jiných prostředích a jak jsou tyto cíle plněny v tradiční matematice.
- Popsání gradace a typů úloh v prostředí Autobus.

- Objevení případných nedostatků v gradaci v úlohách v prostředí Autobus v učebnicích Hejného pro první až pátý ročník ZŠ.
- Navržení úloh a tím doplnění výše uvedených nedostatků.
- Aplikace a zjištění funkčnosti navržených úloh.

## I. Teoretická část

V teoretické části bych se rád zabýval vybranými klíčovými pojmy, které se váží k prostředí Autobus. Budu se zabývat pojmem schéma, didaktické matematické prostředí a rozdílem mezi matematickým prostředím. Dále bych se rád zaměřil na didaktický potenciál prostředí Autobus, a to především na aditivní operace.

Hlavní náplní teoretické práce bude hlubší prostudování prostředí Autobus z hlediska etap myšlenkových operací žáka a seznámení se s úlohami na prostředí Autobus v současném vydání Hejného učebnic pro první stupeň a hledání případných nedostatků v maxi gradaci úloh.

### 1 Schéma

Můžeme mít různá schémata. Například okolí domova, byt, dítě si vybuduje schéma pro školku. Schémata se budují tak, že v prostředí žijeme a nabíráme víc a víc informací a tak se vytvářejí shluky a vzájemné vazby.

*Matematické schéma je tvořeno souborem izolovaných a generických modelů a jejich vzájemného propojení. Izolované modely se shlukují do klastrů<sup>5</sup>, které tvoří základ pro dané schéma. Až s objevem generického modelu může vzniknout schéma. (Hejný 2007, s. 83) Vzniklé schéma vystupuje jako dynamická organizace různorodých prvků. Slovo organizace poukazuje na skutečnost, že se nejedná pouze o jednu množinu prvků, ale také o procesy, vztahy, situace a vazby mezi prvky. Adjektivum dynamická znamená, že schéma může mít charakter dlouhodobější anebo krátkodobější proměnlivosti. Některá schémata mají rys stálosti, jiná flexibilitu. (Hejný 2014, s. 86 - 87)*

*Žák si při řešení úlohy vybírá ze schématu takový generický model, který se pro danou úlohu hodí. Ale v případě, že žák takový generický model ve svém schématu nemá, úloha se stává pro něho problémem. Kvalitu schématu stanovuje především bohatost a pestrost žakových*

*generických modelů. Pokud žák shledá, že daná úloha je nesnadná, poukazuje to na nedostatek vybudovaných generických modelů. (Hejný 2007, s. 86)*

V matematice si můžeme vybudovat schéma pro zlomky, procenta nebo také sčítání, i když sčítání je proces. Každý může mít o čísle jiné schéma.

## 2 Didaktická matematická prostředí

Důležitým smyslem didaktických matematických prostředí je, že umožňují žákům objevovat důležité matematické postupy, zákonitosti a pojmy. Wittmann v roce 2001 definoval tento termín jako vztahy, pojmy a procesy, které pomocí správně vytvořených úloh, žáky dovádí k hlubokým myšlenkám matematiky. Například hra šachy nebo Sudoku u žáků rozvíjí logické myšlení, ale nenastává žádný hluboký matematický objev, který je klíčový v didaktickém matematickém prostředí.

Teorii hluboké matematické myšlenky zavádí Zbigniew Semadeni (2002). Zformuloval nejen hluboké myšlenky, ale také vnější formy a formální modely matematiky. Vnější formou se myslí reprezentant pojmu nebo objektu, který žák může vidět (vizuální), slyšet (akustický), nebo ohmatat (taktilní). *Formálním modelem je přesný popis objektu s využitím stanovené teorie.* (Semadeni 2002, s. 44-45)

*Může se stávat, že žák dokáže odříkat určitou matematickou definici, tudíž se zdá, že jevu rozumí. Ale v praxi v tomto jevu dělá chyby. Jedná se pouze o povrchový přístup k učení, který se opírá především o pamětné učení. Často tak žáci rozšiřují své poznatky bez nějaké snahy pochopit smysl. Žáci tak mohou znát mnoho detailů, ale ty brzy zapomínají, protože nevidí souvislosti.* (Hejný, Kuřina 2001, s. 119) Příčinou může být to, když učitel, například z časových důvodů, prozrazuje žákům návody, jak řešit jednotlivé úlohy v prostředích. Tímto se vnější forma odpojuje od hluboké myšlenky a žák jde pouze po povrchu daného prostředí. K žádnému matematickému objevu ani myšlence tak nedochází.

*Úlohy v jednotlivých matematických prostředích by měly tvořit soubor, ve kterém jsou vzájemně propojené pojmy, vztahy, procesy a situace. Matematická prostředí by měly umožňovat tvořit úlohy, které dovolují žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky, měly by být silně motivační, zásada přiměřenosti by měla také platit a obtížnost úloh by měla být nastavitelná.* (Hejný 2014, s. 13)

Je důležité rozlišovat pojem didaktická matematická prostředí a matematická prostředí. Didaktická matematická prostředí mohou být sémantická (vycházející z žakovy předešlé

zkušenosti, například prostředí Autobus, Děda Lesoň) nebo strukturální (nevycházející z žákovy předešlé zkušenosti, například Hadi, Součtové trojúhelníky). V matematických prostředích je velmi často vytyčen klíčový pojem, který se v daném prostředí rozvíjí. Například to mohou být zlomky, procenta. Jsou to často průřezová témata, která v matematice chápeme, jako matematický prvek, který se objevuje napříč různých matematických oblastí, didaktických prostředích. Například zlomky, které se objevují v Dědovi Lesoňovi, ve slovních úlohách, v Autobusu atp. Tradiční matematika na rozdíl od toho čemu zde říkáme prostředí má tematické celky, například sčítání do 100. Na pomezí stojí slovní úlohy. Slovní úlohy jsou vyjádřené slovy, slovně můžu vyjádřit cokoli a často vycházejí z žákovy zkušenosti (například: „vezmi tři krychle a postav je...“ tato úloha z žákovy zkušenosti vychází. „Myslím si číslo“, naopak z žákovy zkušenosti nevyhází). Se slovními úlohami se pracuje jak v Hejného metodě, tak i v tradičním pojetí matematiky.




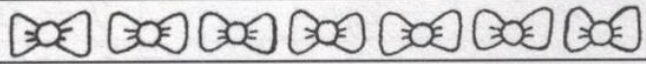




### 3 Aditivní operace

Prostředí Autobus je postaveno na práci s aditivními operacemi. To znamená, že se žáci učí a upevňují proces sčítání a odčítání čísel. Žáci se významně učí řešit aditivní operace také v těchto klíčových prostředí Krokování, Schody, Hadi, Součtové trojúhelníky, Barevné trojice, Pavučiny, Cik cak čtverce, Biland.

V tradiční matematice se žáci denně setkávají s aditivními operacemi formou sloupečků. Žáci jsou mnohdy drilováni k rychlému, bezchybnému a pamětnému počítání.

Jak a kdy se s řetěžením aditivních operací začíná v tradičním pojetí a v Hejného metodě? Vybral jsem náhodně dvě řady učebnic z tradičního pojetí a sledoval jsem první kroky seznámení se s řetěžením aditivních operací. V řadě učebnic nakladatelství Alter se žáci poprvé setkají s řetěžením aditivních operací v učebnici pro druhý ročník, str. 6., cv. 6. Žáci mají znázornit vybarvením obrázků počet, který je uveden vedle na stejném řádku, poté mají danou úlohu vypočítat. Bystrý žák by si mohl všimnout, že počítat nemusí, protože vždy je výsledek 7 – všude je stejný počet obrázků.

**6** Znázorni a vypočítej.

	$3 + 2 + 2 =$
	$1 + 5 + 1 =$
	$2 + 4 + 1 =$
	$6 + 1 + 0 =$
	$4 + 1 + 2 =$
	$5 + 1 + 1 =$
	$2 + 3 + 2 =$
	$4 + 2 + 1 =$

Obrázek 1

Další úloha na řetězení aditivních operací je na straně 12. Zde se jedná už o klasický sloupeček.

**5** Vypočítej.

$7 + 1 = \underline{\quad}$	$2 + 2 = \underline{\quad}$	$2 + 3 = \underline{\quad}$	$1 + 2 + 3 = \underline{\quad}$
$6 + 2 = \underline{\quad}$	$1 + 3 = \underline{\quad}$	$0 + 8 = \underline{\quad}$	$4 + 1 + 2 = \underline{\quad}$
$3 + 3 = \underline{\quad}$	$8 + 0 = \underline{\quad}$	$0 + 7 = \underline{\quad}$	$1 + 3 + 1 = \underline{\quad}$
$4 + 4 = \underline{\quad}$	$2 + 6 = \underline{\quad}$	$1 + 7 = \underline{\quad}$	$2 + 1 + 5 = \underline{\quad}$
$5 + 3 = \underline{\quad}$	$3 + 5 = \underline{\quad}$	$4 + 1 = \underline{\quad}$	$2 + 2 + 2 = \underline{\quad}$
$3 + 4 = \underline{\quad}$	$4 + 3 = \underline{\quad}$	$2 + 3 = \underline{\quad}$	$1 + 5 + 2 = \underline{\quad}$

Obrázek 2

Na straně 15 je mnoho úloh na tuto problematiku s tím, že se už i objevuje odčítání.

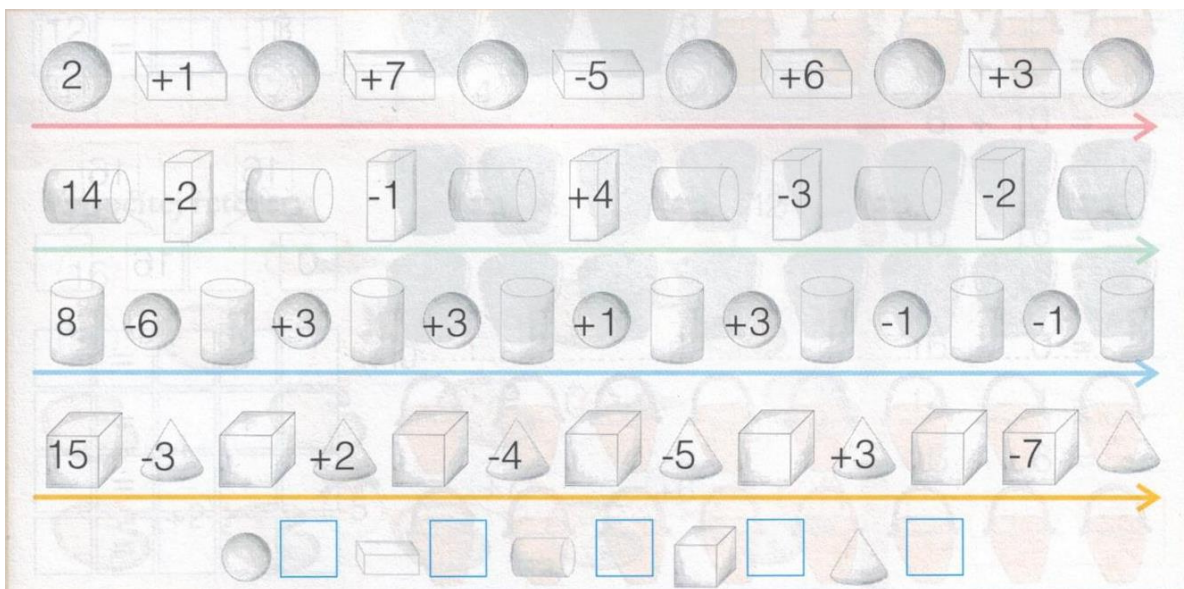
**6** Vypočítej.

$8 - 3 - 4$	$5 - 3 - 1$
$6 - 2 - 1$	$6 - 1 - 4$
$4 - 1 - 2$	$7 - 2 - 2$
$7 - 2 - 3$	$8 - 3 - 1$
$8 - 5 - 3$	$6 - 4 - 1$
$5 - 2 - 1$	$7 - 3 - 2$
$7 - 3 - 1$	$8 - 4 - 1$

Obrázek 3

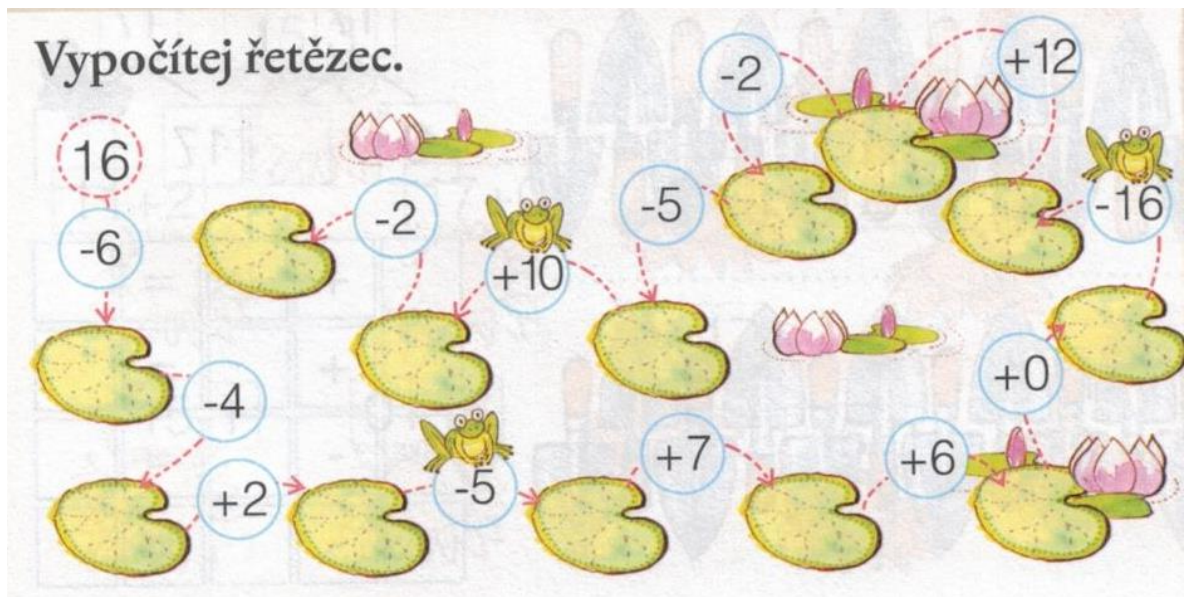
V učebnici pro první ročník jsem si nevšiml žádné úlohy, která by připravovala žáky na řetězení aditivních operací. Žáci v této řadě učebnic jsou rovnou seznámeni s řetězením formou sloupečků.

Druhou řadu učebnic z tradičního pojetí matematiky jsem vybral nakladatelství Prodos. První úlohu na řetězení aditivních operací jsem našel v učebnici pro první ročník, 3. díl, str. 29. Žáci mají vždy přičíst nebo odečíst uvedený počet v řetězcích, které nejsou klasickým sloupečkem, ale je to rozpracované do symbolů geometrických těles.



Obrázek 4

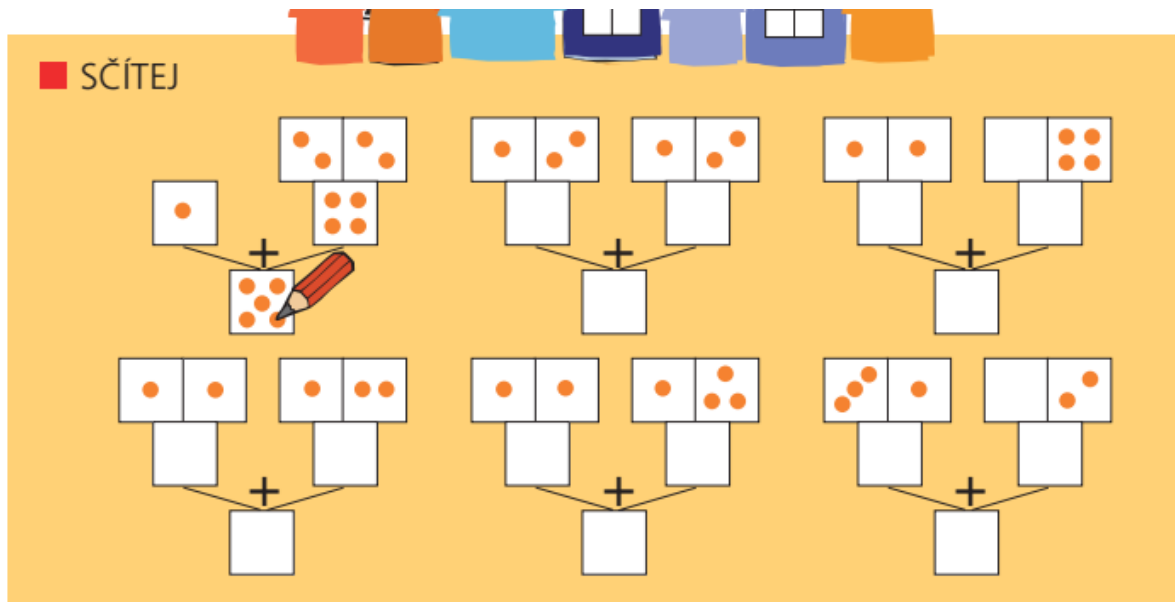
Na straně 31 je další úloha na řetězení, formou cesty, kudy skákala žába.



Obrázek 5

V tomto nádechu se žáci setkávají s řetězením aditivních operací až do konce této učebnice, jednou postupují podle šipek, jindy jdou po obrázcích například zeleniny. V této řadě se už žáci setkávají s řetězením aditivních operací v poslední třetině prvního ročníku. Žáci nejsou seznámeni s řetězením rovnou klasickými sloupečky, jako to bylo u Alteru.

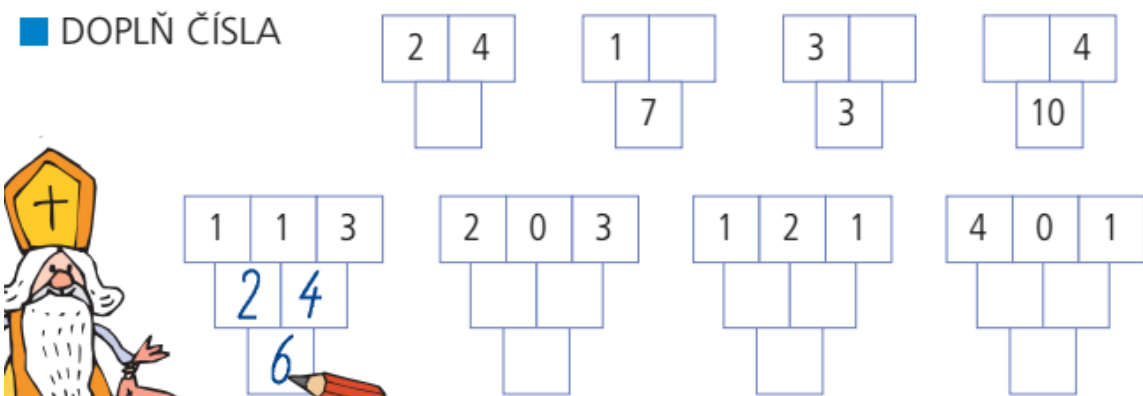
V Hejného učebnicích se první úloha na řetězení objevuje v učebnici pro první ročník, první díl, na straně 27. Žáci nejprve mají vypočítat dva součtové trojúhelníky, a pak je sečíst dohromady.



Obrázek 6

Na straně 28 a 29 jsou dvě typově stejné úlohy, jako je výše zmíněná úloha na straně 27.

Další úlohou na řetězení je na straně 51. Žáci se s řetězením setkávají v prostředí Součtových trojúhelníků, kde byl trojúhelník rozšířen o třetí úroveň. Tudíž žáci pracují se čtyřmi čísly.



Obrázek 7

S těmito součtovými trojúhelníky pracují do konce prvního dílu. Na začátku druhého dílu se objevují dvě nová prostředí s řetěžením aditivních operací – prostředí Autobus a Hadi.




Obrázek 8

**■ Vyřeš hady**

$3 \rightarrow \square$ (5)	$7 \rightarrow \square \rightarrow \square$ (3, 1)	$4 \rightarrow 7$ ( )
$10 \leftarrow \square$ (4)	$9 \leftarrow \square \rightarrow \square$ (3, 5)	$11 \leftarrow 9$ ( )
$11 \rightarrow \square$ (2)	$3 \rightarrow 8 \leftarrow \square$ ( ) (2)	$5 \rightarrow 8 \rightarrow \square$ ( ) (5)

Obrázek 9

Na straně 23, první ročník, druhý díl, se řetězení dostává i do prostředí Krokování. Žáci již dostávají více povelů ke krokům.

**■ Vyřeš a krokej** 

5	→→→→	→→	
9	→→	←←←←	
11	←←←←	→→	

1	→→→	←←	→→	
15	←←←←	→→	←	
4	→→→	→→	←←	

Obrázek 10

Na straně 26 je úloha s penězi. Žáci zde pracují i se čtyřmi čísli.

**■ Jak jsem nakupoval**   

Koupil jsem	Kterými mincemi jsem platil				Zaplatil jsem Kč
	1 Kč	2 Kč	5 Kč	10 Kč	
	//				$1+1+10=12$ 
		//			
		////			

Obrázek 11

Na straně 27, první ročník, druhý díl, je úloha v prostředí Barevné trojce. Žáci mají spojit 3 čísla tak, aby součet dával 11.

**4** Spoj 3 čísla a vytvoř 11

11 =  +  +     11 =  +  +

11 =  +  +     11 =  +  +

Obrázek 12

Na straně 32, první ročník, druhý díl, se poprvé s řetězením aditivních operací pracuje formou klasického sloupečku, kde je úloha se třemi sčítanci.

**4** Vypočítej

$$1 + 1 + 1 = \underline{\quad}$$

$$1 + 1 + 2 = \underline{\quad}$$

$$1 + 2 + 2 = \underline{\quad}$$

$$2 + 2 + 2 = \underline{\quad}$$

Obrázek 13

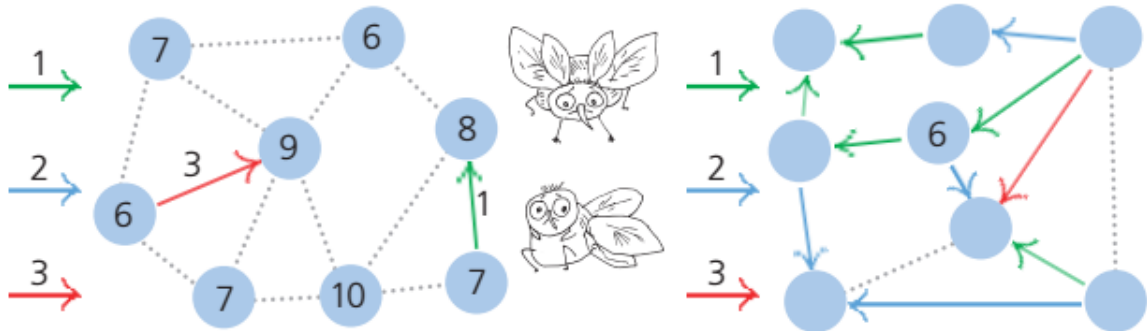
Na straně 44, první ročník, druhý díl, se žáci setkávají s řetězením aditivních operací i ve slovní úloze.

Koupil jsem si zmrzlinu za 7 Kč. Prodavači jsem dal 10 Kč. Prodavač mi vrátil dvě mince. Byly to \_\_\_\_\_

Obrázek 14

Na straně 46, první ročník, druhý díl, se začíná počítat s dalším prostředím, ve kterém se řetěží aditivní operace. Jedná se o prostředí Pavučiny.

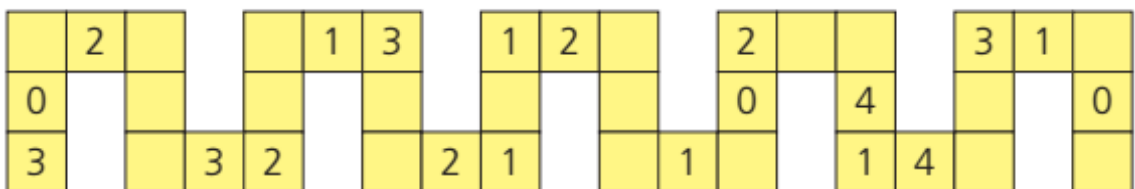
**1** Doplň chybějící čísla. Doplň šipky a vybarvi je.



Obrázek 15

Na straně 55, první ročník, druhý díl, další nové prostředí pracuje s řetěžením aditivních operací – prostředí Sousedé. Žáci pracují se třemi čísly.

**3** Doplň, aby byl součet tří sousedních čísel 6



Obrázek 16

Ve zmíněných prostředích se řetězení aditivních operací postupně nabaluje. V Součtových trojúhelnících přibývá další, již čtvrtá úroveň, v Autobusu přibývají zastávky, v Hadech a Pavučinách přibývají šipky a políčka.

Je více typů úloh, ve kterých jsou aditivní operace a řetězení aditivních operací. „Úlohy typu  $S_1 \pm S_2 = S_3$ , kde všechna tři čísla jsou stavy, a typu  $S_1 \pm O = S_2$ , kde jedno číslo je operátor, se vyskytují v našich běžných učebnicích nejčastěji. Úlohy typu  $O_1 \pm O_2 = O_3$ , kde všechna tři čísla jsou operátory, jsou zanedbávány nejčastěji. Důsledkem toho bývají značné potíže žáků ve vyšších ročnících při řešení úloh, kde hraje roli čas, a úloh o pohybu. Právě tyto

*úlohy a úlohy typu  $A_1 \pm O = A_2$  jsou podstatou prostředí Krokování a Schody.*<sup>1</sup> S je stav, A je adresa, O operátor.

Stejně tak tomu je v prostředí Autobus. Například  $O_1 - O_2 + O_3 = O_4$ , kde „O“ je operátor změny ( $O_1$  – počet cestujících, kolik do zastávky přijelo,  $O_2$  – kolik cestujících vystoupilo,  $O_3$  – kolik cestujících nastoupilo,  $O_4$  – kolik cestujících ze zastávky odjelo). Žáci se s tímto typem úloh v prostředí Autobus setkávají již od prvního ročníku, což je významný rozdíl oproti tradičnímu pojetí vyučování matematice. Dá se říci, že Autobus je čistě operátorová situace.

---

<sup>1</sup> [http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat\\_Prostredi\\_krokovani\\_a\\_schody.pdf](http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat_Prostredi_krokovani_a_schody.pdf)

## **4 Prostředí Autobus**

S prostředím Autobus se žáci poprvé setkávají v 1. ročníku v druhém pololetí. Prostředí Autobus řadíme mezi sémantická prostředí. To znamená, že prostředí vychází ze životní zkušenosti žáka. V tomto případě ze zkušenosti žáka jízdou dopravním prostředkem.

### **4.1 Význam prostředí**

V čem jsou žáci rozvíjeni, když počítají úlohy v prostředí Autobus? Při hlubším seznámením se s úlohami jsem našel tyto jevy a také jsem se nechal inspirovat nepublikovaným materiálem Hejný, Jirotková.

#### **4.1.1 Cvičení krátkodobé procesuální paměti**

Žáci při řešení úloh Autobusu rozvíjí svou krátkodobou procesuální paměť. Tento jev se děje především zpočátku, kdy žáci ještě nepracují s tabulkou. Při dramatizaci se musí spoléhat pouze na svou paměť. Aby dokázali zodpovědět učitelovy otázky a vypočítat, kolik cestujících ze zastávky odjelo, musí si pamatovat počet cestujících, který do zastávky přijel, kolik cestujících vystoupilo a kolik nastoupilo.

#### **4.1.2 Hledání nástroje zaznamenání procesu**

V průběhu řešení úloh u žáků vzniká potřeba zaznamenání procesu jízdy autobusu. Žáci hledají své způsoby záznamu – sami nalézají tabulku. Zaznamenáním procesu do tabulky se z procesu stává koncept. A naopak pomocí konceptu žáci mohou vyčíst a vytvořit proces jízdy. *„Adjektivum procesuální označuje dynamické obsahy vědomí, tedy ty, v nichž*

*rozhodující roli hraje plynutí času. Slovo konceptuální označuje statické, nadčasové obsahy, či stavy našeho vědomí. “ (Hejný, 2014, s. 32)*

#### **4.1.3 Schopnost modelovat reálné situace**

Žák dokáže reálnou situaci nasimulovat pomocí určitých modelů. Tuto dovednost pak může využít v reálném životě. Zadaný problém si namodeluje a vyřeší.

<b>reálná situace</b>	<b>model</b>
autobus	krabice
reálie třídy	zastávky
cestující	Víčka od pet lahví

*Tabulka 1*

#### **4.1.4 Schopnost matematizace reálné situace**

Žák pomocí matematizace vyřeší daný problém a dokáže ho převést do reálné situace. Také dokáže matematický problém okomentovat jako děj reálné situace.

#### **4.1.5 Rozvíjení schopnosti v aditivních operacích**

Žák rozvíjí dovednost sčítat a odčítat. V procesu jízdy autobusu musí cestující buď sčítat, nebo odčítat, záleží, jestli vystupují nebo nastupují. Významným prvkem tohoto prostředí je řetězení aditivních operací. Celá jízda autobusu z výchozí do konečné zastávky by se dala zapsat pomocí jednoho několikačlenného matematického zápisu s využitím sčítání a odčítání.

#### **4.1.6 Číslo zde vystupuje jako operátor změny**

Úlohy v prostředí Autobus společně s prostředím Krokování významně pracují s operátory změny.

#### **4.1.7 Práce a orientace s tabulkou**

Dítě se učí dlouhodobě a systematicky řešit problém tabulkou. Tuto dovednost může používat i v jiných situacích. Nejen, že se učí orientovat a pracovat s tabulkou, ale také tabulku vytvořit, což vyžaduje vyšší kognitivní cíl. Tabulku tvoří podle zadaných podmínek.

#### **4.1.8 Práce s podmínkou**

Žák rozvíjí své schopnosti v práci s podmínkou. Z podmínky musí vyčíst informace, pochopit podmínku, dodržet ji.

#### **4.1.9 Harmonogram**

Žák se učí pracovat s časem a intervaly. Žák dokáže proces jízdy zaznamenat do harmonogramu jízdy. Jednotlivé cestující zanést do harmonogramu podle doby strávené v dopravním prostředku. Také dokáže z harmonogramu jako konceptu vyčíst proces jízdy.

#### **4.1.10 Vztah čtyř čísel**

Důležitým charakterem prostředí Autobus je, že v tomto prostředí se žáci setkávají se situacemi, ve kterých řeší vztah čtyř čísel.

*„Žák se na prvním stupni setkává pouze se situacemi, v nichž má ze dvou daných čísel najít číslo třetí. Sčítání, odčítání, násobení a dělení mají tento charakter. U trojčlenky v šestém nebo sedmém ročníku se žák poprvé setká se situací, ve které jsou provázána vzájemně čtyři čísla. Tato skutečnost je možnou příčinou potíží, které žáci s trojčlenkou mají. Na tuto situaci připravujeme žáka pomocí úloh z prostředí Autobusu; jedná se o úlohy, v nichž jsou provázána čtyři čísla. Jsou to 4 čísla spojená s kteroukoliv z průběžných zastávek ... Tedy daná čtyři čísla jsou vázána vztahem  $V - N = P - O$ . Když kterákoliv tři z těchto čísel jsou dána, čtvrté se dá zjistit.“ (Hejný 2014, s. 21)*

#### **4.1.11 Vztah rovnosti a nerovnice**

Prostředí Autobus by také mohlo žáky připravovat na pozdější počítání s rovnicemi. Žáci tak poznávají vztahy rovností a nerovností v sémantických situacích. Žáci se se setkají s rovností počtu, tzn. rovnost počtu cestujících, který vystoupil a nastoupil. Také řeší nerovnice.

*„... reálná omezení typu „z autobusu nemůže vystoupit více cestujících než v něm je“ a „do autobusu nemůže nastoupit více cestujících než je počet těch, kteří se v něm pak povevou“ mění na nerovnice typu  $3 \geq c \geq 1$ . Přitom žáci v této etapě nerovnosti nezapisují jako nerovnosti, ale dochází k nim zvažováním možných a nemožných případů zkoumané situace.“<sup>2</sup>*

## **4.2 Etapizace prostředí Autobus**

Níže jsou popsány etapy prostředí Autobus z hlediska myšlenkových operací žáka (jak by to mělo v jistých etapách být předkládáno) a dále následuje část, kde jsou jednotlivé etapy popsány z hlediska vývoje typů úloh v učebnicích Hejného pro první až pátý ročník ZŠ.

---

<sup>2</sup> [http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-\\_hejny\\_jiroutkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-_hejny_jiroutkova.pdf)

Inspiroval jsem se nepublikovaným materiálem o prostředí Autobus od Hejného a Jirotkové.  
[http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-\\_hejny\\_jiroutkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-_hejny_jiroutkova.pdf)

Etapy považuji za postupný vývoj prostředí, jak by se žák s ním měl krok za krokem seznamovat. V etapách by se přeskakovat nemělo, protože na sebe logicky navazují. Žák v nové etapě staví na tom, co se naučil v etapě předešlé.

Typ úlohy je vázán na etapy. V každé etapě se mohou objevovat všechny typy úloh z dané a předešlých etap. Ale zavedení nového typu úlohy se musí dodržet v rámci dané etapy. Typem úlohy může být například úloha se zadanými podmínkami, úloha s rozlišením cestujících podle pohlaví na muže a ženy, úloha, ve které žáci doplňují chybějící slova v odpovědích atp.

#### **4.2.1 Nultá etapa**

Tato nultá etapa se v nepublikovaném materiálu neobjevuje, avšak ji vidím jako důležitý motivační krok. Učitel může se žáky mluvit o jízdě autobusem, jakou s tímto druhem dopravního prostředku mají zkušenost. Jestli autobus jezdí nahodile nebo má nějaký řád – jede z jedné zastávky do druhé. Silnou motivací by mohla být reálná společná jízda autobusem.

V Hejného učebnici se začíná s prostředím Autobus úlohami, kde lepenková krabice představuje dopravní prostředek, autobus, a cestujícími jsou pet lahve. Žáci sice úlohu dramatizují jako představení, ale nejsou aktéry role cestujících, ale vystupují zde spíše jako figuríny, které manipulují s „cestujícími“ – s pet lahvemi.

Navrhuji, aby se první jízda odehrávala jako scénka, kdy se samotní žáci dostanou do role cestujících. Myslím si, že je to silnější motivace a zážitek, který je důležitý pro podchycení žákova zájmu o prostředí. S tímto stylem zavádění prostředí mám vlastní úspěšnou zkušenost.

Na praxi ve druhé třídě mne třídní učitelka nabídla, jestli nechci zkusit zavést prostředí Autobus. Sama s metodou profesora Hejného teprve začínala. Žáci neměli s prostředím Autobus žádnou zkušenost. Na začátku hodiny jsem žáky namotivoval tak, že jsem jim ukázal karty se symboly zastávek a žáci měli hádat, co to je. Poznali, že to jsou zastávky. S jejich pomocí jsem rozmístil zastávky na příslušná místa (zastávku U Umyvadla k reálnému umyvadlu atp.). Chvíli jsme si povídali o autobusu jako o dopravním prostředku. Poté jsem vybral dobrovolníky, kteří se stali cestujícími, já byl řidič i výpravčí. Jízdu autobusu jsme zdramatizovali. Tuto třídu jsem navštěvoval každý týden po dobu jednoho semestru. Postupně přes dramatizaci jsme se dostali k tabulce. Žáci udělali v tomto prostředí velký pokrok a můžu říct, že já také. Nabral jsem cenné zkušenosti se zaváděním prostředí. Také jsem tak mohl získat informace, které jsem mohl více využít v této práci, ale bohužel jsem v té době ještě neměl zvolené téma diplomové práce.

#### **4.1.2 První etapa**

V první etapě se žáci seznamují s hrou. Ve studijním materiálu o prostředí Autobus je tato etapa popsána takto:

*„Hra simuluje cestování autobusem na pravidelné lince spojující několik zastávek. Autobus je lepenková krabice a cestující jsou plastické lahve. Zastávky jsou jistá místa ve třídě, například stolek učitele, umyvadlo, mapa, tabule, skříň, klavír, ... Autobus jede z výchozí zastávky na konečnou a na každé zastávce může někdo vystoupit a někdo nastoupit. Vystupování a nastupování na každé zastávce řídí výpravčí. Žáci vidí, jak cestující nastupují i vystupují, ale do autobusu (krabice) nevidí. Úkolem žáků je zapamatovat si celý proces jízdy, případně jej nějak zaznamenat. Po představení klade učitel otázky týkající se právě předvedeného cestování a žáci odpovídají.“ [http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-\\_hejny\\_jiroutkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-_hejny_jiroutkova.pdf)*

Učitel v této etapě má jedinou klíčovou otázku, a to kolik cestujících vystoupilo na konečné zastávce.

Velmi důležitým prvkem dramatizace je, že žáci při výstupu a nástupu musí zvedat cestující (pet lahve) zřetelně nad hlavu s dostatečně dlouhým časovým intervalem. Učitel na tomto prvku musí lpět při každém výstupu a nástupu. Žák, výpravčí, také komentuje, co dělá. Ovšem nepočítá cestující. Používá jazyk procesu „na zastávce U okna vystoupil jeden cestující, další, další a další.“ Tímto se podporuje zapojení paměti a tvorby záznamu jízdy u žáka. Žák si tak počty cestujících nespojuje hned s číslicemi, ale ukazuje si na prstech, čárkuje si je.

#### 4.1.3 Druhá etapa

V této etapě se žáci snaží tvořit tabulkový záznam představení. Učitel nechává žáky, aby si sami svým způsobem zaznamenávali proces jízdy autobusem. Aby vůbec žáci potřebu záznamu jízdy autobusem dostali, učitel je musí pomocí vhodných otázek k této potřebě nasměřovat. Podle Jirotkové a Hejného jsou dva běžné prvotní směry způsobu záznamu jízdy:

*„Žáci, kteří začínají hledat vhodný způsob, jak představení zaznamenat, jdou obvykle dvěma směry: buď se snaží zapsat vše pomocí písmen, číslic, čárek, šipek, obrázků představujících autobus, nebo zapisují pouze aktuální stav cestujících v autobusu psaním čárek a jejich škrtnutím. První strategie končí v chaosu, protože žák nestihne zaznamenat vše, co si původně usmyslil. Druhá strategie vede poměrně dobře k nalezení odpovědi na otázku, kolik cestujících došlo na konečnou, ale informace o průběhu cesty neuchovává.“*  
[http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-\\_hejny\\_jiroutkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-_hejny_jiroutkova.pdf)

Žák by měl dostat dostatek prostoru a příležitostí, aby mohl přijít na způsob zápisu, který mu vyhovuje. Anebo naopak, aby mohl zjistit, že jeho způsob zápisu je nedostačující.

Učitel stále klade otázku na počet cestujících, který vystoupil na konečné zastávce. Už ale začíná přidávat další otázky, které se týkají jednotlivých zastávek. Například: „Kolik cestujících vystoupilo na zastávce U Dveří?“, „Kolik cestujících nastoupilo na zastávce U

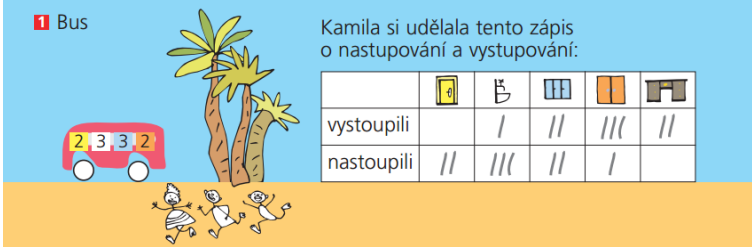
Skříně?“ , „Na které zastávce vystoupilo nejvíce cestujících?“ , „Kolik cestujících nastoupilo na všech zastávkách dohromady?“ , atp. Tyto otázky učitel klade proto, aby si žák uvědomil, že paměť mu už nestačí, protože by si musel pamatovat mnoho informací. Tudiž si začne jízdu autobusu zaznamenávat, aby mohl odpovědi na všechny otázky vyčíst.

Někteří žáci mají podobné tabulky, které se blíží té z učebnice, někteří mají úplně jinou tabulku. Někteří žáci nemají žádnou tabulku, ale přišli si na jiný způsob záznamu jízdy. Všechny myšlenky žáků musíme sjednotit a sjednotit také jejich záznamy jízdy.

Učitel nakonec žákům navrhne tabulku od hypotetické žákyně Kamily.






*„Podle našich zkušeností převezme postupně většina dětí tabulky „od Kamily“. Žák, který bude ještě nějaký čas používat vlastní zápis, lišící se od námi navrhovaného zápisu, vykazuje vyšší intelektuální autonomii. ... Důležité je uvědomit si, že jazyk tabulky nebyl zaveden „shůry“. Dospělo se k němu přirozeným objevitelským procesem.“* (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová 2007, s. 105)

Navrhovaná tabulka od hypotetické žákyně Kamily:



**1 Bus**

Kamila si udělala tento zápis o nastupování a vystupování:

					
vystoupili		/	//	///	///
nastoupili	//	///	//	/	

Obrázek 17 – Hejný a spol., Učebnice pro 1. ročník ZŠ, 2. díl, str. 31

Kdyby učitel představil tabulku autobusu dříve, žáci by nemuseli tabulce rozumět. Je důležité, že žáci se sami snaží nalézt vhodný způsob záznamu procesu jízdy.

Tuto etapu bych rozdělil na dvě podetapy. V první podetapě učitel vyvolává potřebu záznamu jízdy a žáci se snaží nějak jízdu zaznamenat. Druhá podetapa by byla ve znamení vylepšování žákových pokusů o záznam, ze kterých postupně vznikne tabulka.


#### 4.1.4 Třetí etapa






Ve třetí etapě dochází k formalizaci (zde je myšlena pozitivní formalizace, kdy se formuje jistý řád přes porozumění žáka). Žáci pracují s tabulkou, ve které jsou stanovené symboly (výstup, nástup, jelo, označení zastávek). Žáci už nezapisují počet cestujících pomocí čárek, ale pomocí číslic.






Tuto etapu bych ještě rozdělil navíc do podetap:

##### První podetapa

Počet cestujících se ze zaznamenávání čárkami mění na záznam pomocí číslic. Označení zastávek a slova „vystoupili“ a „nastoupili“ zůstává stejné.

**2** Bus 


					
vystoupili		2	1	2	
nastoupili	4	1	3	1	






 →  →  →  → 

Obrázek 18 - Hejný a spol., Učebnice pro 1. ročník ZŠ, 2. díl, str. 43


##### Druhá podetapa

By mohla být tak, že označení zastávek by se zaznamenávalo již písmeny, anebo slova „vystoupili“ a „nastoupili“ písmeny „V“ a „N“. Takovou úlohu jsem v učebnicích nenašel. Jediná úloha, která by se dala zahrnout do této podetapy by mohla být úloha níže uvedená. Jsou zvýrazněná první písmena. Takže žáky vizuálně připravuje na označení pouze písmeny.

**1** Dopln tabulku. 

					
Vystoupili		2	1	4	
Nastoupili	3	3	4	1	
Jeli					

Nejvíce lidí jelo v autobusu ze zastávky \_\_\_\_\_ na zastávku \_\_\_\_\_.


Na zastávce  přibyli / ubyli v autobusu \_\_\_\_\_ lidé.

Obrázek 19 - Hejný a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 1. díl, str. 8

### Třetí podetapa

Třetí podetapa je už závěrečná fáze formalizace. Tabulka již má výsledný vzhled. Počet cestujících je zanesen číslicemi, zastávky jsou označeny pomocí písmen a i řádek pro nástup, výstup a jeli je označen písmeny.

**2** Dopln tabulku.



	A	B	C	D	E
V		1	2	3	3
N					0
J	2	4	5		

Na zastávce **B** přibyli v autobusu  
\_\_\_\_\_ lidé.

Na zastávce **D** ubyli v autobusu  
\_\_\_\_\_ lidé.

V autobusu se vezlo celkem  
\_\_\_\_\_ lidí.

Obrázek 20 - Hejný a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 1. díl, str. 9

### 4.1.5 Čtvrtá etapa

Ve čtvrté etapě se žáci začínají setkávat s úlohami, které jsou zadané slovně formulovanými podmínkami. Mohou být dva typy těchto úloh. A to stanovené slovní podmínky s tabulkou anebo bez tabulky. Činnost, kdy žák má za úkol vytvořit tabulku podle stanovených podmínek, vyžaduje vyšší kognitivní cíle.

Zadané podmínky jsou různé. Žák musí zapojovat své čtenářské, logické a matematické dovednosti.

Úloha zadaná pouze slovně formulovanou podmínkou:

- 5** Na zastávce ŠKOLA vystoupili z autobusu 2 cestující a nastoupili 3 cestující. Autobusem pak jelo 6 cestujících. Když autobus přijížděl k zastávce ŠKOLA, bylo v něm \_\_\_\_\_ cestujících.

Obrázek 21 - Hejný a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 1. díl, str. 14

Úloha zadaná jak podmínkou, tak i tabulkou:

**1** Doplň tabulku.

	A	B	C	D	E
V			4		10
N	9	8		3	0
J					

Na zastávce B přibyli do autobusu 3 cestující a na zastávce D z něj ubyli 2 cestující.

Obrázek 22 - Hejný a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 1. díl, str. 46

#### 4.1.6 Pátá etapa

Pátá etapa se vyznačuje počátkem rozlišování cestujících podle pohlaví – na muže a ženy.

„V zápisech do tabulky to můžeme udělat tak, že každé okénko tabulky rozdělíme na dvě – na muže a ženy, nebo ponecháme jedno okénko a muže i ženy budeme rozlišovat pomocí ikon. Ted’ volíme druhou z těchto možností: ikonka pro muže bude □, ikonka pro ženu bude Δ.“  
[http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-\\_hejny\\_jiroutkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus-_hejny_jiroutkova.pdf) str.11

Varianta, ve které se okénko tabulky rozděluje na dvě, kvůli rozlišení pohlaví, se v učebnicích Hejného nepoužívá. Myslím si, že jeden z důvodů, proč se tato varianta nepoužívá je, že je pro žáky méně přehledná, než varianta druhá.

„Cestující dělíme na muže (□) a ženy (Δ), resp. táty a mámy, anebo pány a dámy.“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2008, s. 85) Z mého pohledu bych žákům


navrhl pouze jedno pojmenování – muži a ženy. Pokud jednou použijeme muže, poté pány a pak zase táty, někteří žáci by mohli být zmateni.

V případě dramatizace se používají odlišné velikosti nebo barvy pet lahví nebo zátek. Žákovi se už nestačí soustředit pouze na počty cestujících, ale už musí dávat pozor také na druh cestujících.

V každé takové úloze je zdvojnásobený počet matematických operací. Žák může řešit úlohy více strategiemi. Jednou je rozdělení úlohy na dvě. Nejprve pracuje s počtem mužů, pak s počtem žen. „Dodejme, že je tato metoda rozkladu úlohy na dvě nebo více složek přítomna v různých částech matematiky a má značný význam pro rozličné řešitelské strategie.“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2008, s. 85) Nebo počítá s oběma pohlavími najednou. Tyto dvě strategie také může v průběhu řešení kombinovat. Žák má v tomto ohledu „volné ruce“, počítá, jak mu to vyhovuje. Také mnohdy musí volit strategii, která je vhodnější pro daný typ úlohy.

Ilustrace úlohy na rozlišení cestujících podle pohlaví:

**1** Doplň tabulku.



	A	B	C	D	E
V	0	■	▲	▲	■ ■ ■ ▲ ▲
N	■ ■	▲ ▲	■ ▲		0
J	■ ■				

Na zastávce E vystoupili z autobusu \_\_\_\_\_ muži (■) a \_\_\_\_\_ ženy (▲).

Obrázek 23 - Hejný a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 2. díl, str. 10

#### 4.1.7 Šestá etapa

V poslední etapě žáci rozlišují cestující podle délky jejich jízdy. Tvoří tak harmonogram jízdy autobusu. *Rozpis procesu nebo činnosti do jednotlivých etap nazýváme harmonogramem.*“ (Hejný, Jirotková, Michnová, Bomerová 2010, s. 120)

**1** Zapiš:



- a) harmonogramem jízdu autobusem, která je popsána ve cvičení 85/5;
- b) tabulkou jízdu autobusem, která je popsána harmonogramem výše.

*Obrázek 24 - Hejný a spol., Učebnice pro 4. ročník ZŠ, str. 93*

Žáci tak pracují s časem, s intervaly. Jsou úlohy, ve kterých je jasné, kdo a jak dlouho v autobusu jel. Ale jsou i úlohy, ve kterých je více možností.

## 4.2 Současný stav Hejného učebnic

V této části se jedná o srovnání toho, jak ty etapy jsou realizovány konkrétně v učebnici.

### 4.2.1 První etapa realizovaná v učebnici

První úloha na prostředí Autobus je v učebnici nakladatelství Fraus pro 1. ročník, druhý díl. Úloha je postavená na základě obrázku vesnice, kterou autobus projíždí. Žáci si nejprve povídají o obrázku, procvičují si pravolevou orientaci, orientaci v obrázku a povídají si o zastávkách. Jízdu autobusu si následně zdramatizují.



Obrázek 25

Následují úlohy s jednoduchým zápisem zadání. Žáci stále drammatizují úlohy. Využívají autobusu vyrobeného z krabice. *Hra se doporučuje zopakovat s otevřeným autobusem, což znamená, že žák stále vidí do krabice. Žák tak stále vidí počet cestujících a může vidět, v jakém momentě případně udělal chybu.* (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová 2007, str. 82) Myslím si, že by se s otevřeným autobusem mělo počítat pouze výjimečně, protože žák, který vidí do krabice, tak si nemusí nic pamatovat, zapisovat a nemusel by ani počítat.

Do strany 12 (učebnice pro první ročník, druhý díl) se učitel ptal na počet cestujících, kteří vystoupili na konečné zastávce. Následující úlohou se otevírá další etapa.

#### 4.2.2 Druhá etapa realizovaná v učebnici

Úloha na straně 14 (učebnice pro první ročník, druhý díl) otevírá druhou etapu. V zadání úlohy je otázka „Kolik lidí nastoupilo na druhé zastávce?“. V příručce pro učitele jsou ještě doporučovány další otázky k úloze „Kolik cestujících nastoupilo do autobusu na zastávce C?“, „Kolik cestujících vystoupilo na zastávce B?“, „Kolik cestujících jelo v autobusu mezi zastávkami B a C?“.



Obrázek 26

Následující úlohou se přidává další zastávka, tedy žáci počítají již čtyři zastávky.

V úloze na straně 20 (učebnice pro první ročník, druhý díl) se objevuje nový typ otázky – „Na které zastávce nastoupilo nejvíce lidí?“. Tato otázka je náročnější, než byly dotazy na počet nastupujících / vystupujících na konkrétní zastávce. Ted' již nestačí sledovat jednu zastávku, musejí se evidovat všechny. (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová 2007, s. 94)








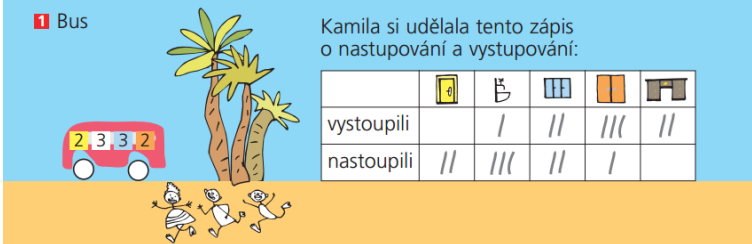
Obrázek 27

Do této doby žáci objevují svůj vlastní zápis procesu jízdy autobusu. Stranou 31 (učebnice pro první ročník, druhý díl) přichází sjednocení zápisu jízdy autobusu navrženou tabulkou hypotetické žákyně Kamily.

**1** Bus

Kamila si udělala tento zápis o nastupování a vystupování:

					
vystoupili		/	//	///	///
nastoupili	//	///	//	/	



Obrázek 28

V tabulce jsou zastávky vyznačeny pomocí ikon názvů zastávek, využívající reálie třídy. Například zastávka „U Umyvadla“ je vyznačena obrázkem umyvadla. Řádky pro výstup a nástup cestujících jsou pojmenovány slovně. Zatím se nepoužívají symboly. Počet cestujících je zanesen pomocí čárek, nepoužívají se čísla.


Další dvě úlohy jsou úlohy bez zadané tabulky, tudíž žáci mohou, ale nemusí používat tabulku „od Kamily“. V příručce pro učitele je doporučeno, aby učitel tabulku zakreslil na tabuli.






Dalším mezníkem je úloha na straně 38 (učebnice pro první ročník, druhý díl). Žáci mají určit, kolik cestujících jelo mezi jednotlivými zastávkami. Tato úloha žáky připravuje na pozdější přidání další části tabulky a to řádku „jelo“. V zadání jsou stále ikony názvů zastávek.








Obrázek 29

V následující úloze na straně 43 (učebnice pro první ročník, druhý díl) počet cestujících není zadán pomocí čárek, nýbrž využitím čísel. Také je pod tabulkou přidán řádek z předchozí úlohy, kdy žáci určují počet cestujících, který jel mezi jednotlivými zastávkami. Ale tento řádek ještě není součástí tabulky. Tedy v této úloze žáci počítají počet cestujících, který vystoupil na konečné zastávce a počet cestujících, který jel mezi zastávkami.

**2 Bus** 


					
vystoupili		2	1	2	
nastoupili	4	1	3	1	





 →  →  →  → 





Obrázek 30

Následují čtyři úlohy (str. 44, 48, 51, 54, učebnice pro první ročník, druhý díl), ve kterých se střídá forma zápisu počtu cestujících v zadání – čárkami nebo čísly.






Na straně 58 (učebnice pro první ročník, druhý díl) se poprvé objevuje situace, kdy žáci mají doplnit některé vnitřní pole tabulky.






**2 Bus** 

				
vystoupili		/		////
nastoupili	///	/	//	

 →  →  → 

---


					
vystoupili		2		1	4
nastoupili	5	3	1		






 →  →  →  → 


Obrázek 31

Následuje úloha, kde v zadání jsou tři věty, do kterých mají žáci vyplnit počty cestujících, které zjistí z tabulky. První dvě věty jsou klasické, na které jsou žáci zvyklí. Třetí obsahuje nový pojem – přibyli. Žák tedy musí porovnat dvě pole – kolik cestujících do zastávky přijelo a kolik odjelo.






V úloze na straně 62 (učebnice pro první ročník, druhý díl) jsou dvě věty. V první se mají z tabulky zjistit, mezi kterými zastávkami jelo nejvíce cestujících. V druhé mají žáci určit, jestli na určité zastávce přibyli nebo ubyli cestující a jejich počet.

**2** Bus 

					
vystoupili		2		2	
nastoupili	3	1	3	1	

Nejvíce lidí jelo v autobusu ze zastávky \_\_\_ na zastávku \_\_\_\_.  
Na zastávce  v autobusu přibyli / ubyli \_\_\_ lidé.


5






 →  →  →  → 


Obrázek 32

Tato úloha je poslední úlohou na prostředí Autobus v učebnici pro první ročník.

Poslední úlohou této etapy je první úloha v učebnici pro druhý ročník. Tato úloha je stejný typ jako úloha předchozí. Ale významným krokem je, že řádek „jelo“ se stává součástí tabulky. Tabulka je stále popsána slovně a pomocí ikon zastávek. U slov, vystoupili, nastoupili, jeli, jsou tučně zvýrazněná první písmena, což připravuje vizuálně žáky na další krok, a to na označení těchto řádků pouze symboly / písmeny – etapa 3.

**1** Dopln tabulku. 

					
Vystoupili		2	1	4	
Nastoupili	3	3	4	1	
Jeli					


Nejvíce lidí jelo v autobusu ze zastávky \_\_\_\_\_ na zastávku \_\_\_\_\_.  
Na zastávce  přibyli / ubyli \_\_\_\_\_ lidí.

Obrázek 33

### 4.2.3 Třetí etapa realizovaná v učebnici

Tato etapa začíná druhou úlohou v učebnici pro druhý ročník ZŠ. Tabulka má již výsledný formát. V úloze je nový typ věty na doplnění, a to kolik se celkem v autobuse vezlo lidí. Také v této úloze žáci poprvé vyplňují více jak dvě vnitřní pole tabulky. Posledním novým prvkem tabulky je, že je žlutě podbarveno pole výstupu na zastávce A.

**2** Doplně tabulku.



	A	B	C	D	E
V		1	2	3	3
N					0
J		2	4	5	

Na zastávce **B** přibyli v autobusu \_\_\_\_\_ lidí.


Na zastávce **D** ubyli v autobusu \_\_\_\_\_ lidí.

V autobusu se vezlo celkem \_\_\_\_\_ lidí.

Obrázek 34

V úloze na straně 12 (učebnice pro druhý ročník, první díl) jsou věty na doplnění, kde je vyplněn počet cestujících, a žáci mají najít v tabulce, na které zastávce tento počet cestujících vystoupil nebo nastoupil.

**2** Doplně tabulku.



	A	B	C	D	E
V			4		3
N		3		1	0
J		5	7	5	

Na zastávce \_\_\_\_ nastoupili 2 lidé.

Na zastávce \_\_\_\_\_ vystoupili 3 lidé.

© Horní polovinu vybarví červeně, dolní polovinu modře.

Obrázek 35

Na straně 20 (učebnice pro druhý ročník, první díl) se objevuje nový prvek ve větě, kterou žáci mají doplnit. Jedná se o zlomek – polovinu. Věta zní „Na zastávce \_\_\_\_\_ vystoupila z autobusu polovina cestujících.“ Žáci musí tabulky nejprve vypočítat. Poté si uvědomit, ve kterých dvou polích musí hledat, jestli platí dělitelnost dvěma.

V úloze na straně 28 (učebnice pro druhý ročník, první díl) je prvek násobků. Žáci mají za úkol zjistit a doplnit do věty, na které zastávce nastoupilo do autobusu 2 krát více lidí, než z něj vystoupilo. A v druhé větě určit, kolikrát více cestujících nastoupilo, než vystoupilo na zadané zastávce. Prvek násobků se do prostředí Autobus zařazuje z důvodu probírání násobilky. Propojování prostředí a zařazování mnoha početních operací a jevů je důležitým bodem. Žák musí vidět, že vztahy v matematice i matematika jako taková jsou provázané.

#### 4.2.4 Čtvrtá etapa realizovaná v učebnici

Úloha na straně 34 (učebnice pro druhý ročník, první díl) otevírá další etapu. Zadání úlohy není dané pouze tabulkou, ale nově se objevují i písemné podmínky. V podmínce jsou obsaženy dva výroky, které žáci musí dodržet.

**1** Dopln tabulku.

	A	B	C	D	E
V		3	4	9	
N					0
J					

Na zastávce A nastoupilo do autobusu 5 lidí a na každé další zastávce vždy o 1 člověka více než na předešlé.  
Na zastávce E však nenastoupil nikdo.

Obrázek 36

Další úloha je taktéž zadána tabulkou i podmínkami (učebnice pro druhý ročník, první díl, str. 38). V podmínce se objevuje násobení dvěma. V podmínce je jeden výrok, který se uplatňuje na dvou zastávkách.

**1** Doplň tabulku.

	A	B	C	D	E
V		2	4		13
N				6	0
J	7				

Na zastávce B nastoupilo do autobusu 2× více lidí, než z něj vystoupilo. Totéž i na zastávce D.

Obrázek 37

V následující úloze je velmi zajímavá podmínka, která říká, že na všech zastávkách nastoupil stejný počet cestujících. Z tabulky víme, kolik dohromady cestujících vystoupilo. Žák má dvě možnosti řešení – vhladem nebo metodou pokus - omyl. „Z první řádky vidíme, že z autobusu vystoupilo celkem  $4 + 0 + 11 + 13 = 28$  lidí. Stejný počet musel do autobusu nastoupit. Protože na každé zastávce nastoupil stejný počet lidí, musí to být 7. Tato úvaha je pro žáka 2. ročníku velice náročná.“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2008, s. 66) Pokud některý žák vyřeší úlohu tímto způsobem, vykazuje vysoké logické uvažování a vhlad do prostředí Autobus.

**1** Doplň tabulku.


	A	B	C	D	E
V		4	0	11	13
N					0
J					

Na zastávkách A, B, C, D nastoupil do autobusu vždy stejný počet lidí.

Obrázek 38

Další úlohou, která se zařazuje do této etapy, je úloha na straně 46 (učebnice pro druhý ročník, první díl). V podmínce se objevují pojmy *přibyli* a *ubyli*. S těmito pojmy se žáci již setkali v předchozích úlohách. Teď jsou tyto pojmy použity do podmínek. Podmínka je zadána dvěma výroky.

**1** Doplň tabulku.



	A	B	C	D	E
V			4		10
N	9	8		3	0
J					


Na zastávce B přibyli do autobusu 3 cestující a na zastávce D z něj ubyli 2 cestující.

Obrázek 39

#### 4.2.5 Pátá etapa realizovaná v učebnici

V první úloze na prostředí *Autobus* v učebnici pro druhý ročník, druhý díl, se začínají rozdělovat cestující na muže a ženy. V tabulce jsou symboly, ve větě, kterou mají žáci vyplnit na základě vypočítané tabulky je vysvětleno, co symboly znamenají. Úloha se doporučuje řešit dramatizací pomocí krabice a dvou druhů pet lahví nebo víček.

**1** Doplň tabulku.



	A	B	C	D	E
V	0	■	▲	▲	■ ■ ■ ▲ ▲
N	■ ■	▲ ▲	■ ▲		0
J	■ ■				

Na zastávce E vystoupili z autobusu \_\_\_\_ muži (■) a \_\_\_\_ ženy (▲).

Obrázek 40 - Hejny a spol., Učebnice pro 2. ročník ZŠ, 2. díl, str. 10

Další úloha je stejně zadaná jako předchozí, tzn. tabulkou, plus věta, kterou mají doplnit. Počet mužů i žen se mírně zvýšil oproti předchozí úloze. Žáci také mají doplnit stejný počet prázdných polí.

Úloha na straně 14 (učebnice pro druhý ročník, druhý díl) je první úlohou, která je zadaná pouze slovy – bez tabulky. Úloha sice nemá u sebe index autobusu, která označuje, že se jedná o prostředí Autobus, ale já bych tuto úlohu do tohoto prostředí zařadil. Slovní úloha se zaměřuje pouze na jednu zastávku. V příručce pro učitele jsou nabízeny čtyři strategie řešení. Rovnicí, metodou pokus – omyl, úvahou a metodou „od konce“.

**5** Na zastávce ŠKOLA vystoupili z autobusu 2 cestující a nastoupili 3 cestující. Autobusem pak jelo 6 cestujících. Když autobus přijížděl k zastávce ŠKOLA, bylo v něm \_\_\_\_\_ cestujících.

*Obrázek 41*

Následuje šest úloh na prostředí Autobus. Jedna z nich je zadaná formou slovní úlohy, stejným stylem, jako úloha popsaná výše. Zbytek úloh jsou úlohy stupňující se svou náročností – zvyšuje se počet cestujících, žáci musí vyplnit více volných polí v tabulce. Vždy nakonec doplňují věty pod tabulkou.

K úloze na straně 39 (učebnice pro druhý ročník, druhý díl) jsou doporučovány v příručce pro učitele dvě doplňující otázky. „Na které zastávce nastoupilo do autobusu o jednu ženu více, než nastoupilo mužů?“, „Na které zastávce nastoupil do autobusu stejný počet mužů i žen?“. O druhé otázce se v příručce píše následující: „... *se najde žák, který řekne, že to bylo na zastávce D, kde nepřibyl žádný muž, ani žádná žena nenastoupila. Taková úvaha svědčí o značné kultuře abstraktního myšlení.*“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2008, s. 118) Nenašel jsem důvod, proč tyto otázky by měly být pouze u této úlohy. Doplňující otázky by mohly být u každé takové úlohy. Učitel může pokládat doplňující otázky, které rozvíjejí abstraktní myšlení častěji.

Tato úloha je předposlední úlohou na prostředí Autobus v učebnici pro druhý ročník, druhý díl. Následující úlohy do konce třetího ročníku jsou zadané obdobně – tabulkou, větami na doplnění pod tabulkou. Úroveň náročnosti úloh se cyklicky střídá.

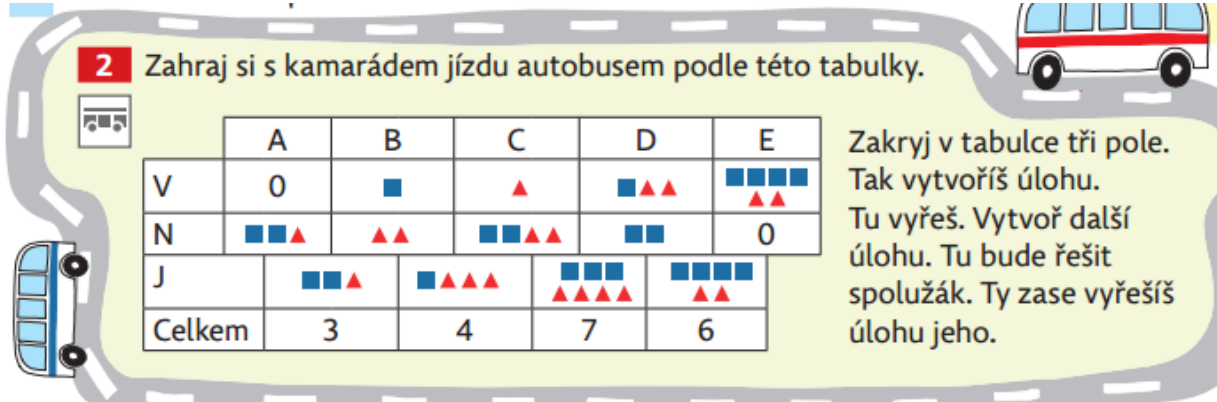
V učebnici pro třetí ročník se tabulka autobusu rozšiřuje o další řádek. Jedná se o řádek celkové počtu cestujících, kolik jelo mezi jednotlivými zastávkami, bez rozlišení na pohlaví.

Novým typem úlohy je úloha, ve které je v zadání tabulka jízdy autobusu kompletně vyplněna. Úkolem žáků je zakrýt libovolná pole, a tím vytvořit úlohu pro své spolužáky. „Když zakryjí málo oken, vytvoří lehkou úlohu, když naopak zakryjí mnoho oken, úloha bude mít více řešení. Dobrá úloha vznikne například tak, že zakryjeme všech pět oken řádky „nastoupili“, poslední okno řádky „jeli“ a všechna pole řádky „celkem“. Řešitel musí zdůvodnit, jak objevil, co do zakrytého pole dopsat. Tvorbou úloh žáci nabývají lepší vhled do prostředí autobusu.“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2009, s. 85) Když žáci tvoří své vlastní úlohy, nebo alespoň mají pocit, že je tvoří, je to pro ně větší motivace k řešení úloh. Žák tak získává pocit, že je součástí dění, tvorby, prostředí. Při své praxi jsem hojně využíval úloh, které vymysleli žáci. Žáci tak získávali větší vhled do prostředí. Byli motivováni k práci, protože chtěli spolužákům vymyslet, co nejzáludnější úlohu, ale také byli zvědaví, co ostatní vymysleli.

**2** Zahraj si s kamarádem jízdu autobusem podle této tabulky.

	A	B	C	D	E
V	0	■	▲	■▲▲	■▲▲▲
N	■▲	▲▲	■▲▲	■	0
J	■▲	■▲▲	■▲▲▲	■▲▲	■▲▲
Celkem	3	4	7	6	

Zakryj v tabulce tři pole. Tak vytvoříš úlohu. Tu vyřeš. Vytvoř další úlohu. Tu bude řešit spolužák. Ty zase vyřešíš úlohu jeho.



Obrázek 42 - Hejný a spol., Učebnice pro 3. ročník ZŠ, str. 70

Další úlohy ve třetím ročníku jsou cyklicky gradované. K dalšímu vývojovému posunu v etapě nedochází.

Na začátku čtvrtého ročníku se objevuje poprvé úloha s více možnými řešeními. Úloha má celkem čtyři řešení. V podmínce je dáno, kolik lidí nastoupilo. Tudiž žáci musí zkusit všechny možné kombinace počtu mužů a žen.

- c) Vytvoř tabulku jízdy autobusem, když víš, že:  
Na zastávce A nastoupilo do autobusu 6 lidí.  
Na zastávkách B, C a D vždy jeden muž vystoupil a dvě ženy nastoupily.  
Na konečné zastávce E vystoupilo 9 lidí.

Obrázek 43 - Hejný a spol., Učebnice pro 4. ročník ZŠ, str. 1

V následujících dvou úlohách (strana 12, učebnice pro čtvrtý ročník) se objevuje poprvé antisignál<sup>3</sup>. V úloze je napsán údaj, kolik cestujících vystoupilo, ale na základě otázky, žáci musí počítat s údajem, jako kdyby nastoupili. V druhé úloze je to obdobné. V těchto úlohách využívají metodu „od konce“, se kterou se již setkali v předchozím ročníku.

**23** Vyřeš slovní úlohy.



- a) Z autobusu vystoupilo 17 cestujících a 31 jich v něm zůstalo.  
Kolik cestujících bylo v autobusu původně?
- b) Když do vlaku přistoupilo 21 cestujících, bylo v něm  
58 cestujících. Kolik cestujících bylo ve vlaku původně?

Obrázek 44

<sup>3</sup> “Antisignálem označujeme to slovo nebo to slovní spojení slovní úlohy, které poukazuje na operaci sčítání, nebo odčítání (později i násobení a dělení), ale k řešení úlohy nutno použít operaci právě opačnou.” (Hejný, Jirotková & Slezáková, 2007b)

Další úloha na prostředí Autobus je na straně 85 (učebnice pro čtvrtý ročník). Úloha je obtížná, řeší se pomocí sestavení rovnice. Žáci při řešení pojmenují cestující písmeny, které podle stanovených podmínek vypisují do tabulky. Tato úloha je také přípravou pro tvorbu harmonogramu jízdy.

**5** Napiš tabulku jízdy autobusem na trati z A do E. Víme, že celkově jelo 5 lidí, z nich jeden jel jen jednu zastávku, jeden 3 zastávky a zbylí tři jeli 2 zastávky každý. V úseku z A do B byli v autobuse 2 cestující. Stejně i v úseku z D do E. V úsecích z B do C i z C do D jeli v autobuse 3 cestující. Na zastávce C vystoupil jen jeden cestující.



	A	B	C	D	E
V					
N					
J					

Obrázek 45

#### 4.2.6 Šestá etapa realizovaná v učebnici

Tato etapa se vyznačuje harmonogramem jízdy autobusu. V kapitole *Práce s daty, statistika* (učebnice pro čtvrtý ročník, strana 93) se začíná s úlohami na prostředí Autobus. První úloha je vysvětlující, jak harmonogram jízdy autobusu funguje. Žáci vidí vyplněný harmonogram a u toho mají harmonogram slovy popsán. Myslím si, že je to vhodný způsob, jak jednoduše žáky s novým prvkem seznámit. Žádné vysvětlování definicemi, ale rovnou vidí příklad.

**Podívej se na harmonogram jízdy autobusu. Jelo 5 lidí:**


	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

Pan Modrý nastoupil na zastávce A a na zastávce B vystoupil.  
 Paní Žlutá nastoupila na A a vystoupila na C.  
 Paní Zelená jela z B do D.  
 Pan Fialka z C do D  
 a pan Okr jel z C do E.

Rozpis procesu nebo činnosti do jednotlivých etap nazýváme harmonogramem.

Obrázek 46

Následující úloha je rozdělena na dvě části, v první části vycházejí z tabulky jízdy autobusu a mají ji zachytit harmonogramem. V druhé části mají z harmonogramu vytvořit tabulku jízdy. Je dobré, že si hned zkouší oba směry, protože jim tak může jedna cesta pomoci v pochopení té druhé. A tímto pochopit celý harmonogram.

- 1** Zapiš:
-  a) harmonogramem jízdy autobusem, která je popsána ve cvičení 85/5;  
b) tabulkou jízdy autobusem, která je popsána harmonogramem výše.

Obrázek 47 - Hejný a spol., Učebnice pro 4. ročník ZŠ, str. 93


Další úlohu si žáci vymýšlejí sami. Záleží tedy na nich nebo na učiteli, jak úloha bude náročná a zajímavá. Mají vytvořit jízdu autobusem, kterou zdramatizují a zanesou tabulkou i harmonogramem.

- 2** Zahrajte si na autobus a jízdu zapiš tabulkou i harmonogramem.



Obrázek 48 - Hejný a spol., Učebnice pro 4. ročník ZŠ, str. 93

Poslední úlohou této kapitoly je úloha, která je zadaná podmínkami, podle kterých žáci mají vytvořit harmonogram jízdy, který jim následně pomůže vytvořit i tabulku.

- 3** Napiš harmonogram i tabulku jízdy autobusem, když víš následující informace:  
 Autobusem se vezlo celkem 5 lidí. Z nich 3 nastoupili na zastávce A a 2 na zastávce C, jeden se vezl pouze jednu stanicí, 3 jeli 2 stanice a jeden se vezl 4 stanice. V autobuse byli stále přítomni alespoň 2 lidé.

Obrázek 49 - Hejný a spol., Učebnice pro 4. ročník ZŠ, str. 93

## **5 Závěr teoretické části**

Při seznámení se s úlohami na prostředí Autobus v současném vydání Hejného učebnic jsem zjistil, že v učebnici pro čtvrtý ročník je dlouhá pomlka v úlohách na Autobus. Předpokládám, že tato časová prodleva bude mít dopad na žáky. Myslím si, že navázání bude pro žáky náročné. Proto v praktické části diplomové práce navrhnu úlohy, kterými bych zmiňovanou pomlku v učebnici vyplnil. Navržené úlohy aplikuji na žácích čtvrtého ročníku.

## II. Praktická část

### 6 Předexperiment

Předexperiment předcházel samotnému experimentu. Mým cílem předexperimentu bylo, abych zjistil, jestli zadání navrhovaných úloh je pro žáka srozumitelné, jestli jsem odhadl jejich přiměřenou náročnost. Dále jsem chtěl zjistit, zda úlohy budou pro žáky zajímavé.

Úlohy jsem aplikoval na žácích čtvrtého ročníku ve čtyřech základních školách v Praze a blízkém okolí – ZŠ Hanspaulka, FZŠ Otokara Chlupa, ZŠ Neratovice a ScioŠkola.

Návštěva třídy v předexperimentu probíhala vždy následovně. Žákům jsem vysvětlil důvod mé návštěvy, především jsem zdůraznil, že nejsou testováni. Poté jsem všem rozdál úlohy vytištěné na papíře viz níže. Žáci počítali samostatně, někdy si v lavicích pomáhali. Když většina žáků měla vypočítáno, úlohu dobrovolník vypočítal na tabuli s komentářem, jak postupoval. Žáci si mohli psát a upravovat svá řešení. Poté jsem se ptal celé třídy na několik otázek typu:

„Jak těžká se vám úloha zdála?“

„Nastal okamžik, kde jste měli nějaký problém při řešení úlohy?“

„Změnili byste něco na úloze?“

„Přišla vám úloha zábavná, něčím zajímavá?“

V rámci předexperimentů jsem navštívil sedm vyučovacích hodin ve čtvrtých třídách základních škol. Předexperiment vznikl mou nevědomostí. Původně předexperiment měl být už samotný experiment. Ale nechal jsem žáky, aby při ukazování správného řešení na tabuli svá řešení upravovali. Tudíž jsem nemohl získat čistá data. I když na první pohled nevydařený pokus, získal jsem mnoho poznatků od žáků, dokonce v jedné úloze přišli na chybu v zadání (viz. níže). Také jsem mohl zjistit, jestli při vytváření úloh jdu z pohledu žáků správným směrem.

První předexperimenty probíhaly s těmito čtyřmi úlohami:

### Úloha 1

Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V				3	
N	9			3	
J		12			

Obrázek 50

Komentář:

Tato úloha se většině žáků zdála jednoduchá, až na jednu třídu. Žáci v této třídě říkali, že úplně jednoduchá nebyla, protože dlouho nepočítali úlohy na prostředí Autobus, takže si nejprve museli vzpomenout, jak se s prostředím pracuje. Jeden žák prohlásil, že tato úloha je vhodná na rozjezd. Největší frekvence chyb byla v nedodržení jedné z podmínek. Zaujal mě jeden postup žáka, jak vypočítat políčko „jelo ze zastávky D“. Žák řekl: „Kolik cestujících odjelo ze zastávky D, počítat nemusím, jen opíšu, kolik do zastávky přijelo, protože vystoupili i nastoupili tři cestující.“ Myslím si, že tato skutečnost ukazuje, že žák už získal jistý vhled do prostředí Autobus. Žáci by na této úloze nic neměnili.

## Úloha 2

Na zastávce C nastoupilo 3x více žen než mužů a vystoupilo 2x méně mužů než žen.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		□ △		□ △△	□□□ 5x△
N	□□ △	□□ 9x△		□	
J	□□ △	3x□ 9x△	3x□ 7x△	□□□ 5x△	

Obrázek 51

## Úloha 3

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

	A	B	C	D	E
V					
N					
J	3	7	12	10	

Obrázek 52

#### Úloha 4

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobkách třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V		□□ 4x△		□□ 4x△	10x□ 8x△
N					
J		7x□ 5x△		6x□ 6x△	

Obrázek 53

Komentář:

Úlohy 1, 3 a 4 zůstaly dále nezměněné, ale Úloha 2 prošla dále jistým vývojem. Při návštěvě ScioŠkoly žáci objevili chybu v zadání v Úloze 2. Zjistili, že úloha s takto stanovenou podmínkou nemá řešení, což nebylo mým plánem. Došlo k prohození násobků počtu žen a mužů. Také se jim zdálo matoucí, že v zadání se mluví nejprve o nástupu a pak o výstupu, i když je to v tabulce naopak. Proto jsem zadanou podmínku upravil.

*Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.*

S takto upravenou podmínkou se již úloha vyřešit dala. Náročnost této úlohy je vyšší. Při předexperimentech tuto úlohu většinou vypočítala zhruba čtvrtina třídy, po delším časovém

úseku úlohu vypočítala druhá čtvrtina třídy. Proto jsem se rozhodl při řešení úlohy dát žákům nápovědu. Avšak jen dobrovolnou – jen kdo chtěl, mohl nápovědy využít. Na pár sekund jsem doplnil na tabuli, kolik žen vystoupilo na zastávce C. Kdo chtěl, tak se podíval, kdo chtěl řešit bez nápovědy, tak se nepodíval. S touto nápovědou už většina žáků úlohu vypočítat dokázala. Proto jsem se rozhodl zařadit takto vzniklou úlohu do svých navrhovaných úloh jako úlohu, která předchází původní úloze.

Úloha s nápovědou:

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		□ △	6x △ _____	□ △△	□□□ 5x △
N	□□ △	□□ 9x △	_____	□	
J	□□ △	3x □ 9x △	3x □ 7x △	□□□ 5x △	

Obrázek 54

Takto vznikly dvě úlohy, které mají stejná řešení. Jen v lehčí variantě je již vyplněn jeden údaj, který žákům pomůže v řešení. V náročnější variantě žáci musí na tento údaj přijít sami. Kdybych dal žákům tyto varianty postupně k vyřešení, bystrý žák by náročnější variantu nemusel počítat, ale stačilo by opsat řešení z lehčí varianty. Proto jsem v úloze bez nápovědy (náročnější varianta) změnil čísla v zadání.

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		△		□□□ △△	□□□ 7x△
N	□□ △	□□□ 11x△		□	
J	□□ △	5x□ 11x△	5x□ 9x△	□□□ 7x△	

Obrázek 55

Následně jsem navrhnul další nové úlohy (viz kapitoly 6.1.5 – 6.1.11). Tyto úlohy jsem už gradoval přímo při vymýšlení úloh. Další předexperimenty probíhaly s předchozími úlohami a také s těmi novými. Při těchto úlohách jsem více promýšlel gradaci úloh.

## 6.1 Vlastní gradované úlohy

Vytvořil jsem celkem jedenáct úloh. Do všech úloh jsem použil násobky dvou nebo třech jako průřezové téma, protože ve čtvrtém ročníku základní školy jsou násobky velkým tématem.

Také jsem se snažil, aby úlohy byly pro žáky přínosné a zajímavé.

Některé úlohy jsou gradované, tzn. stupňující se náročnost. Úloha 2, 3 tvoří jednu gradační kaskádu, úlohy 4, 5 tvoří další, další gradační kaskádou jsou úlohy 6, 7, 8 a poslední kaskádou jsou úlohy 9, 10.

Níže jsou jednotlivé úlohy. Pod každou úlohou je komentář k úloze, ve kterém je popsána úloha a její potenciál.

### 6.1.1 Úloha 1

Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V				3	
N	9			3	
J		12			

Obrázek 56

### Komentář k úloze

Tuto úlohu jsem navrhl tak, aby žáci museli sledovat nejen jednotlivé údaje v tabulce průběhu jízdy autobusu, ale také stanovené podmínky. Stanovil jsem tři podmínky. Pomocí prvních dvou podmínek žáci musí dopočítat počet cestujících. V těchto dvou podmínkách je multiplikativní jev dvou a třech. Třetí podmínka pouze oznamuje počet cestujících, kteří jeli mezi cestujícími, žáci vyhledají příslušné políčko a doplní číslo. Tato podmínka je na orientaci v tabulce. Otázka na konci úlohy pobízí žáka, aby se vrátil ke všem údajům tabulky a zapřemýšlel nad všemi čísly. Odpověď se týká násobků tří. V této úloze žáci nerozlišují cestující na ženy a muže, na rozdíl od následující úlohy.

### 6.1.2 Úloha 2

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		□ △	6x △ _____	□ △△	□□□ 5x △
N	□□ △	□□ 9x △	_____	□	
J	□□ △	3x □ 9x △	3x □ 7x △	□□□ 5x △	

Obrázek 57

### Komentář k úloze

Tato úloha je degradací na úlohu popsanou níže. Do zadání byla přidána jedna informace navíc – počet žen, který vystoupil na zastávce C. Tímto se úloha zjednoduší, ale stále obsahuje antisignál. Tento krok jsem použil jako nápovědu, když jsem úlohu zkoušel se žáky

řešit. Většina třídy si nevěděla rady, tak jsem jim poradil tento údaj navíc. I ti slabší žáci s touto nápovědou dokázali úlohu vyřešit. Proto jsem se rozhodl tuto změnu použít jako jednodušší variaci na původní úlohu. Linkou v polích je naznačeno, že žáci v jednom případě i dopisují do pole, kde je již jeden údaj vyplněný.

### 6.1.3 Úloha 3

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		△		□□□ △△	□□□ 7x△
N	□□ △	□□□ 11x△		□	
J	□□ △	5x□ 11x△	5x□ 9x△	□□□ 7x△	

Obrázek 58

#### Komentář k úloze

Úloha je zaměřena pouze na zastávku C. V tabulce je zadán počet cestujících, který na zastávku přijíždí a počet cestujících, kolik ze zastávky odjíždí. Dále jsou stanoveny dvě podmínky, které žáci musí dodržet. Cestující jsou rozlišeni na ženy a muže. Tato úloha je poměrně náročná. Úlohu bych spíše zařadil jako úlohu navíc, ne mezi běžné úlohy.

Pro žáka implicitní úloha – skrytá – řeší pokus omyl. Já používám soustavu rovnic.

#### 6.1.4 Úloha 4

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

	A	B	C	D	E
V					
N					
J	3	7	12	10	

Obrázek 59

#### Komentář k úloze

V této úloze je implementován prvek násobků dvou a třech v podobě dvou podmínek, které žáci musí dodržet. V zadání tabulky jsou stanovené počty cestujících, které mezi jednotlivými zastávkami jely. Tyto údaje spolu s podmínkami zajišťují celkový počet řešení úlohy – dvě možná řešení.

#### 6.1.5. Úloha 5

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobkách třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V		□□ 4x△		□□ 4x△	10x□ 8x△
N					
J			7x□ 5x△	6x□ 6x△	

Obrázek 60

### Komentář k úloze

Tato úloha je gradací na úlohu 4, která je výše popsána. Úloha má tři podmínky. První dvě zůstaly stejné z původní úlohy, třetí je nová. Nová podmínka zajišťuje, že se nepočítá s nulou. Dále se oproti původní úloze přidalo rozlišení cestujících podle pohlaví. Úloha má dvě možná řešení.

Gradace v parametru rozlišení na muže a ženy. Zjednodušit v číselném oboru, aby tak v něm nebyla nula. Zajistil jsem tak omezení pouze na dvě možná řešení, jinak by měla úloha mnoho řešení.

### 6.1.6 Úloha 6

Doplň tabulku autobusu za předpokladu, že na každé zastávce vystoupilo i nastoupilo 3x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		□ _____	_____	□□□ _____	5x□ _____
N	□□ _____	_____	□□□□ _____	_____	_____
J	_____	_____	□□□□ _____	6x□ _____	_____

Obrázek 61

#### Komentář k úloze

Žáci v této úloze pracují s podmínkou a zadanou tabulkou. V podmínce se objevuje prvek poměru – třikrát více žen než mužů. Žáci si tak musí uvědomit, že budou vždy násobit muže třemi, aby získali počet žen. V této úloze není obsažen antisignál. V tabulce jsou v polích linky, které určují, že se dopisuje do zadání.

### 6.1.7 Úloha 7

Doplň tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V			△△	△△△△ △△	△△△△
N	△△△△ △△	△△△△	△△△△ △△		
J			△△△△		

Obrázek 62

#### Komentář k úloze

Tato úloha je gradací na úlohu 6. V této úloze je obsažen antisignál. V předchozí úloze žáci pouze násobili počet mužů, aby získali počet žen. V této variantě žáci musí naopak dělit počet žen, aby získali počet mužů.

### 6.1.8 Úloha 8

Doplň tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		□ _____	△△△ △ _____	_____	_____
N	□□□ _____	□□ _____	_____	△△△ △ _____	_____
J	_____	_____	□□□ □□ _____	△△△△ △△△△ _____	_____

Obrázek 63

#### Komentář k úloze

Tato úloha je gradací na úlohy 6 a 7. V úloze je obsažen antisignál. Když budou znát ženy, budou muset dělit, aby zjistili počet mužů. Protože zároveň vždy nastoupilo nebo vystoupilo dvakrát méně mužů než žen. Tudiž zde využijí to, co se naučili v úloze 6 a 7. V této úloze žáci dopisují do již zadaných polí. Tato skutečnost je naznačena linkou v jednotlivých polích.

### 6.1.9 Úloha 9

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel
- ze zastávky odjel vždy sudý počet cestujících

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V					
N	2				
J					

Obrázek 64

#### Komentář k úloze

Úloha je zadaná třemi podmínkami. Z tabulky je vyplněn pouze jeden údaj - počet cestujících, který nastoupil na počáteční zastávce. Úloha se řeší metodou pokus omyl. Při řešení této úlohy může žák využít poznatku, že pokud odečte od sudého čísla číslo liché, nemůže mu nikdy vyjít číslo sudé. Když si tyto vazby uvědomí, mají usnadněnou práci, protože nemusí zkoušet, jestli mohli na jednotlivých zastávkách vystoupit tři cestující. Tato úloha přispívá do oblasti teorie čísel – hlubší porozumění vztahu sudosti a lichosti. Úloha má jedno řešení. Třetí podmínka právě zaručuje tento počet řešení, bez této podmínky by úloha měla šest řešení.

#### **6.1.10 Úloha 10**

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V					
N	2				
	J				

Obrázek 65

#### Komentář k úloze

Tato úloha je gradací k úloze 9. Zadání je téměř totožné, byla odebrána poslední podmínka, která říkala, že ze zastávky vždy odjel sudý počet cestujících. Podmínka omezovala počet řešení. Původní úloha měla jedno řešení. Touto úpravou tak v úloze řešení přibyly. Úloha má nyní šest řešení. Odebráním podmínky by se zdánlivě úloha měla zjednodušit, ale z hlediska počtu řešení se úloha stává náročnější. Úloha se řeší systematicky metodou pokus omyl.

#### **6.1.11 Úloha 11**

Sestav tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupilo 2x méně cestujících, než na té samé nastoupilo.
- Vždy nastupuje o 4 cestující více než na předchozí zastávce.

Kolik nejméně cestujících mohlo na zastávce A nastoupit, aby úloha měla řešení?

	A	B	C	D	E
V					
N					
J					

Obrázek 66

#### Komentář k úloze

Tato úloha je postavená na metodě pokus omyl. Zadání je stanoveno třemi podmínkami. Tabulku přikládat k této úloze nutné není, protože v ní není nic zadáno. Úloha má mnoho řešení, ale otázka žáky odkazuje pouze na jedno určité. Díky podmínkám žáci dopočítávají podle pravidel prostředí Autobus pouze počty cestujících, které z jednotlivých zastávek jely. Pole výstupu a nástupu určují pomocí stanovených podmínek.

## 6.2 Gradační parametry

Gradační parametry jsou užitečným prostředkem pro gradování úloh. Učitel si tak může usnadnit práci a především lépe a promyšleněji gradovat úlohy. Nebo také může odhadnout obtížnost již připravené úlohy například v učebnici.

Díky vymyšlení úloh jsem získal do prostředí Autobus větší vhléd. Naučil jsem se na vztahy mezi čísly v tabulce koukat i z jiných úhlů. Snažil jsem se objevit a aplikovat do úloh jiné vztahy než ty základní z tohoto prostředí. Především implikaci, protože je to velké téma ve čtvrtém ročníku prvního stupně základních škol, nebo například vztah sudosti a lichosti. Také jsem se zaměřil na podmínky v zadání. Myslím si, že žák by měl být rozvíjen a připravován na to, aby dokázal dekodovat a aplikovat informaci. Také v reálném životě bude muset dodržovat určité podmínky nebo zásady a věřím, že tím to je to také učíme.

Na základě úloh jsem přišel na níže uvedené gradační parametry.

### Gradační parametr v oboru čísel

Obtížnost úlohy se zvyšuje s rostoucím rozpětí čísel – od jedné do pěti, od jedené do deseti, od jedné do dvaceti, s přechodem přes desítku atp.

### Gradační parametr v rozlišení cestujících na pohlaví

Úlohy s rozlišením na pohlaví cestujících jsou pro žáky obtížnější, než když je nerozlišují. V úloze se zdvojnásobí počet matematických operací. Také se žák musí soustředit, aby při řešení neprohodil počtu mužů a žen.

### Gradační parametr v počtu podmínek

Čím více zadaných podmínek, tím si toho žák musí více hlídat. Žák nejprve musí dekodovat zprávu a poté ji aplikovat nebo dodržovat při svém řešení. Avšak ne vždy platí, že více podmínek, znamená náročnější úloha. Záleží na obsahu a formulaci podmínky. Pomocí podmínek se také dá omezit počet řešení.

### Gradační parametr v počtu řešení

Pokud má úloha více řešení, žák si musí udělat určitý systém, aby objevil všechna možná řešení. V některých úlohách může využít kombinatoriky. Když úloha nemá žádné řešení, tak rozvíjí argumentaci u žáka. Žáci často neakceptují, že úloha nemá řešení – častou překážkou pro řešitele je říct, že nemá řešení, protože pro žáka je toto za obzorem – je přivyklé, že úloha vždy řešení má.

### Gradační parametr v přítomnosti antisignálu

Přítomnost antisignálu v úloze zvyšuje náročnost úlohy.

### Gradační parametr existence nuly

Pro některé žáky je stále počítání s nulou velmi abstraktní záležitost. Nulu nemusí považovat za číslo, anebo na ni zapominají jako jednu z možností.

### Gradační parametr v míře vyplnění tabulky

Čím více je tabulka vyplněná, tím je jednodušší. Úplně prázdná tabulka je nejtěžší pro vyřešení. Avšak tato skutečnost ne vždy platí. Jako je vidět například v úloze 3. Žáci mají vyplnit pouze dvě pole, ale v kombinaci se zadanými podmínkami je úloha velmi náročná.

### Gradační parametr v počtu řešení

Pokud má úloha více řešení, žák si musí udělat určitý systém, aby objevil všechna možná řešení. V některých úlohách může využít kombinatoriky. Když úloha nemá žádné řešení, tak rozvíjí argumentaci u žáka. Žáci často neakceptují, že úloha nemá řešení – častou překážkou pro řešitele říct, že nemá řešení, protože pro žáka je toto za obzorem – je přivyklé že úloha vždy řešení má.

### Gradační parametr v počtu zastávek

Přibývajícím počtem zastávek se náročnost úlohy zvyšuje, protože se zvyšuje počet matematických operací.

### Gradační parametr v počtu řádků v tabulce

Tabulka se postupně rozšiřuje a s tím přibývá více údajů, které žáci musí zaznamenávat.

## 7 Experiment

V rámci experimentu jsem navštívil dvě čtvrté třídy základních škol FZŠ Táborská v Praze a ZŠ Mills Větrník v Čelákovících. Celkem se zúčastnilo 28 žáků. Experiment probíhal s výše popsanými úlohami. Experiment jsem v každé třídě rozdělil do dvou dnů, protože jedenáct úloh v jeden den by pro žáky bylo příliš vysilující a mohlo by to negativně ovlivnit řešení.

Podobně jako v předexperimentu jsem žákům vysvětlil, pro jaký účel budou úlohy řešit. Každý žák dostal úlohy vytištěné na papíře. Žáci nemohli vzájemně spolupracovat. Také jsem zakázal používání gumovacích propisek, pokud psali obyčejnou tužkou, nesměli gumovat. Poprosil jsem žáky, aby případné opravování chyb škrty tak, aby byly čitelné, abych mohl vidět jejich postup řešení. Při experimentu nedocházelo k hromadné kontrole jako při předexperimentu, tudíž žáci neměli možnost svá řešení upravit podle správného řešení na tabuli.

## 7.1 Analýza řešení

Řešení, které jsem od žáků při experimentu vybral, jsem analyzoval. Zaměřil jsem se na chybná řešení. Nejprve jsem objevil chyby v řešení a posléze jsem se snažil rozluštit, proč a jak k chybě mohlo dojít. Díval jsem se na chybu z více stran a u některých řešení mám více domněnek o chybě.

Nepopisuji všechna chybná řešení, nýbrž pouze všechny typy, které se objevily. Tudíž níže jsou popsány zástupci chybných řešení.

### 7.2.1 Úloha 1

Správně s odpovědí: 8

Správně bez odpovědi: 9

Špatně: 11

Úlohu 1 správně vyřešilo i odpovědělo na zadanou otázku osm žáků. Devět žáků vyřešilo úlohu správně, ale už neopověděli na zadanou otázku. Celkem jedenáct žáků vypočítalo úlohu chybně. Nejčastější chyba byla v políčku Bv. Tato chyba často souvisela s chybou v poli Bn. Žákům tak početně počty cestujících sedí, ale z pohledu dodržení podmínek jejich řešení není správné. Tudíž nejčastější chybou této úlohy bylo nedodržení zadaných podmínek. Často jedna chyba měla vliv na druhou.

## Řešení 1

Tento žák udělal chybu hned v první podmínce. Správně vynásobil dvěma číslo tři, ale doplnil výsledek do špatného pole. Počet šest doplnil do pole Bv místo do Bn. Od tohoto se pak odvíjela celá tabulka, která je početně správně. Tudíž v tomto řešení je jedna chyba, od

- 1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného? násobky 3

	A	B	C	D	E
V	0	6	6	3	9
N	9	9	3	3	0
J	9	12	9	9	

Obrázek 67

keré se odvíjí celé další řešení. Jev špatné orientace v tabulce.

## Řešení 2

Žák začátek úlohy zachytil, pak byl zřejmě řetězením početních úkonů energeticky vyčerpán a pak už nevěděl. Jev ztráty motivace / energie.

- 1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

- 3 Na zastávce C žen než mužů.

Kolik má úloha

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

VŠECHNA ČÍSLA

JSOU NÁSOBKY 3

	A	B	C	D	E
V	0	<del>3</del>	0	3	9
N	9	<del>6</del>	0	3	0
J	9	12	9	9	

V
N

Obrázek 68

### Řešení 3

Tento žák nemá vhléd do prostředí Autobus. Neví, jak se ve hře Autobus počítá. V číslech nevidím žádné souvislosti, ale on je alespoň trochu vidět musel, protože jednou škrtnal. Tudiž nad řešením přemýšlel a zjistil si ve svém řešení chybu. Podmínky v zadání ignoroval. Jev nedodržení podmínky a jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

- 1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V	6	53	3	3	
N	9	5	3	3	
J	21	12	9		

Obrázek 69

#### Řešení 4

Žák zřejmě nevidí do vztahu trojčlenky nebo nevidí celkově do hry Autobus. Vidí však do dílčích vztahů, které vyplývají z podmínek – dvakrát více, třikrát méně. Celkově se ztrácí v celé tabulce. Konec jako kdyby vzdal, proškrtal poslední tři pole tabulky. Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V	-	-	<del>3</del>	3	X
N	9	6	-	3	X
J		9	12	3	X

Obrázek 70

#### Řešení 5

Jediná chyba je v poli Cn. Žák nejprve doplnil, že šest cestujících nastoupilo, poté škrtnl a změnil na dvanáct. Domnívám se, že u této zastávky zaváhal a zapomněl brát v potaz počet cestujících, který do zastávky přijel. Pokud počítal s číslem šest, tak tři plus šest je devět. Poté si zřejmě uvědomil, že tři cestující vystoupili, tudíž musí nastoupit dvanáct, aby jich devět ze zastávky odjelo. Jev numerické chyby.

1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného? NĚ

	A	B	C	D	E
V	0	3	3	3	9
N	9	6	<del>3</del> <sup>12</sup>	3	0
J	9	12	9	<del>9</del>	

Obrázek 71

### Řešení 6

Žák ignoruje nebo zapomněl na podmínky. Úloha je vypočítána správně, pokud nebereme v úvahu podmínky v zadání. Pokud podmínky záměrně ignoroval, vykazuje to jistou autonomii žáka. Žáka můžeme navést k všimnutí podmínek pomocí diskuzí, kdy spolužáci budou mluvit o tom, jak počítali, jak používali podmínky. Tento žák by si tak měl všimnout, že s podmínkami počítat musí. Jev nedodržení podmínky.

1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících. 3

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného? ANO VŠE

	A	B	C	D	E
V	0	6	3	3	9
N	9	9	0	3	0
J	9	12	9	9	

JSOU JEJICHY

Obrázek 72

### Řešení 7

Jediná chyba v tomto řešení je v poli Cn. Žák buď nebral v úvahu počet cestujících, který do zastávky přijel a pole Cv a Cn sečetl dohromady, i když je to proti hře Autobus. Anebo také mohl vidět jistou symetrii – 9, 6, 3 / 3, 6, 9. Jev numerické chyby.

- 1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V	0	3	3	3	9
N	9	6	6	3	0
J	9	12	9	9	

Obrázek 73

### Řešení 8

Tento žák vyřešil tabulku nejprve bez podmínek. Pak si zřejmě podmínek všiml a úlohu přepočítal. Anebo je možné, že nejprve si úlohu vypočítal, seznámil se tak s úlohou. Poté se

- 1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V	—	<del>3</del> *	<del>3</del>	3	<del>3</del> <sup>9</sup>
N	9	<del>6</del> *	<del>0</del>	3	—
J	9	12	<del>3</del> <sup>9</sup>	<del>9</del> <sup>9</sup>	

Obrázek 74

podíval na podmínky a zkontroloval, přepočítal. Může se jednat o typ řešitelské strategie. Škrtní předchozího řešení je velmi pečlivé a klidné, proto by se mohlo právě jednat o počítání s chybou jako druh žákovy strategie.

### Řešení 9

Žák to, co je zřejmé a evidentní, si asi nepíše, proto je v tabulce tolik nevyplněných polí. Nebo je možné, že použil jen podmínky a dále neřešil, protože v textu není napsáno, aby vyřešil i zbylá pole. To by vykazovalo o autonomii žáka. Nebo také bylo pro žáka klíčové vypočítat počet cestujících, který vystoupil na konečné zastávce. Když na to přijde, je pro něj úloha vyřešená. Tímto řešením jsem si uvědomil, že úloha může být správně vyřešena třemi způsoby – kompletně vyplněná tabulka, doplněná pole pouze podle podmínek, anebo pokud žák přijde na počet cestujících na konečné výstupní zastávce.

1 Na zastávce B nastoupilo 2x více cestujících, než vystoupilo na zastávce D. Na zastávce C vystoupilo 3x méně cestujících, než nastoupilo na zastávce A. Mezi zastávkami C a D jelo 9 cestujících.

Mají čísla, která jsi doplnil/a, něco společného?

	A	B	C	D	E
V		<del>6</del>	3	3	9
N	9	6		3	
			12	9	9

Obrázek 75

## 7.2.2 Úloha 2

Správně: 11

Špatně: 14

Nepočítalo: 3

Úlohu 2 správně vyřešilo jedenáct žáků. Čtrnáct žáků úlohu vyřešilo s chybou a tři žáci úlohu neřešili vůbec. Z pohledu chybovosti zhruba polovina žáků udělala chybu v dodržení podmínek, početně by jim úloha vycházela. Druhá polovina žáků nejenže nedodržela podmínky, ale také početně jim to nevychází. Ale většina žáků si uvědomila, že počet vystupujících a nastupujících mužů musí být totožný, protože stejně mužů do zastávky přijelo a odjelo. Myslím si, že alespoň v tomto ohledu úloha splnila svůj účel.

### Řešení 1

Žák v tomto případě řešil úlohu tak, že ignoroval podmínky v zadání. Také mohl na podmínky zapomenout, anebo si jich nevšimnout. Kdyby úloha neměla podmínky, tak by žák úlohu vyřešil správně. Jev nedodržení podmínky.

2

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V	—	□ △	6x △ <del>3x △</del>	□ △△	□□□ 5x △
N	□□ △	□□ 9x △	4x △ <del>3x △</del>	□	—
J	□□ △	3x □ 9x △	3x □ 7x △	□□□	5x △

Obrázek 76

## Řešení 2

V tomto případě se domnívám, že žáká zmátla podmínka. Chybu má v poli Cv v počtu mužů. V podmínce se říká, že vystoupilo 3x méně mužů, tak napsal  $3x\Box$ . Protože v poli Cn napsal  $2x\Box$  a v podmínce je, že nastoupilo 2x více mužů. Anebo také mohl udělat pouze početní chybu. Jev nedostatku pozornosti, anebo jev numerické chyby.

2

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V	—	$\Box$ $\Delta$	$6x\Delta$ <u><math>3x\Box</math></u>	$\Box$ $\Delta\Delta$	$\Box\Box\Box$ $5x\Delta$
N	$\Box\Box$ $\Delta$	$\Box\Box$ $9x\Delta$	<u><math>2x\Box</math></u> <u><math>4x\Delta</math></u>	$\Box$	—
J	$\Box\Box$ $\Delta$	$3x\Box$ $9x\Delta$	$3x\Box$ $7x\Delta$	$\Box\Box\Box$ $5x\Delta$	

Obrázek 77

### Řešení 3

Žák při řešení byl na dobré cestě. To, co doplnil, je správně. Zbývá poslední údaj. Přijde mi, jako kdyby mu došly síly, ztratil trpělivost nebo to vzdal. Dvojitě škrtnutí naznačuje, že nad řešením přemýšlel delší dobu. Jev ztráty motivace / energie.

2

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V		□ △	6x △ <del>2x1</del>	□ △△	□□□ 5x △
N	□□ △	□□ 9x △	<del>4x1</del>	□	
J		□□ △	3x □ 9x △	3x □ 7x △	□□□ 5x △

Obrázek 78

## Řešení 4

Žák je úplně ztracený. Podmínky nedodržel a ani mu to nevychází početně. Nevěděl vůbec, jak na tuto úlohu. Jev nedodržení podmínky.

2

Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

	A	B	C	D	E
V	$\square$ $\triangle$ $0x$	$\square$ $\triangle$	$6x \triangle$ $7x \square$	$\square$ $\triangle \triangle$	$\square \square \square$ $5x \triangle$
N	$\square \square$ $\triangle$	$\square \square$ $9x \triangle$	$2x \square$ $7x \triangle$	$\square$	$\square$ $\triangle$ $\circ$
J	$\square \square$ $\triangle$	$3x \square$ $9x \triangle$	$3x \square$ $7x \triangle$	$\square \square \square$	$5x \triangle$

Obrázek 79

### 7.2.3 Úloha 3

Správně: 8

Špatně: 14

Nepočítalo: 6

Úlohu 3 vypočítalo správně osm žáků. Čtrnáct žáků úlohu vyřešilo chybně a šest žáků úlohu nepočítalo. Přesně polovina žáků, kteří počítali chybně, úlohu vypočítala početně správně, ale z hlediska dodržení zadaných podmínek jejich řešení není správné. Druhá polovina žáků nedodržela podmínky, ale ani početně jim řešení nevychází. V této úloze žáci velmi škrtali, přepisovali svá řešení. To je důkaz, že úlohu řešili metodou pokus – omyl. U této úlohy jsem čekal méně správných řešení.

## Řešení 1

Tento žák řešil úlohu bez zadaných podmínek. Bez podmínek by jeho řešení bylo správné. Nevím, zda podmínky úmyslně vypustil, anebo si jich nevšiml. Pokud si jich nevšiml, tak není zvyklý číst zadání a rovnou řeší úlohy. Pokud podmínky ignoroval úmyslně, vykazuje to jistou žákovu osobnost. Jev nedodržení podmínky.

3 Na zastávce C vystoupilo 3x méně mužů než žen a nastoupilo 2x více žen než mužů.

Kolik má úloha řešení?

#1

	A	B	C	D	E
V	0x□ 0x△	△	2x△ 0x□	□□□ △△	□□□ 7x△
N	□□ △	□□□ 11x△	0x□ 0x△	□	0x□ 0x△
J	□□ △	5x□ 11x△	5x□ 9x△	□□□ 7x△	

Obrázek 80



můstek. Kdyby zkusil snížit počet mužů o jednoho, tak by se dopočítal správnému výsledku. Postup řešení měl správný a vypadá to, že se spokojil s téměř správným řešením. Jev numerické chyby.

#### 7.2.4 Úloha 4

Správně: 10

Špatně: 14

Nedopočítalo: 4

Úlohu 4 správně vypočítalo deset žáků. Čtrnáct žáků úlohu vypočítalo chybně a čtyři žáci se úlohu pokoušeli počítat, ale vyřešili pouze několik polí a pak úlohu vzdali. Všichni žáci, až na dva, dodrželi podmínky – výstup v násobkách dvou a nástup v násobkách třech. Nejčastější chybou v této úloze bylo, že žáci udělali početní chybu. Žádný žák nevypočítal obě možná řešení, což ale úkolem nebylo, protože to v zadání úlohy uvedeno není.

##### Řešení 1

Tento žák počítal zpočátku správně. Když se dostal do pole C<sub>v</sub> začal zmatkovat. Domnívám se, že nejprve doplnil číslo čtyři, nevím z jakého důvodu, ale škrtl ho a doplnil číslo dvě a až jako poslední číslo šest, protože je vměstnané uprostřed. Nedokážu určit, proč doplnil do pole C<sub>n</sub> číslo dvanáct. Ani s jedním řešením v poli C<sub>v</sub> nevychází, aby ze zastávky odjelo dvanáct cestujících. Z nějakého neznámého důvodu žák začal v tomto kroku zmatkovat. Mohl se v polovině řešení úlohy unavit, anebo ho mohl někdo vyrušit a ztratil pozornost nebo myšlenkový postup. Jev numerické chyby.

4 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

1

	A	B	C	D	E
V		2	<del>4</del> 2	2	2
N	3	6	12	0	
J	3	7	12	10	

Obrázek 83

### Řešení 2

Tento žák nedodržel podmínky. Myslím si, že v polovině řešení na podmínky zapomněl. Protože do zastávky B podmínky v hlavě udržel. Od zastávky C počítal bez podmínek, jen tak, aby mu to vycházelo. Zastávky D a E určil správně i podle podmínek. Ale domnívám se, že i v této části podmínky v potaz nebral. Protože na zastávce D je toto řešení nejnižším

4 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

2

	A	B	C	D	E
V	—	2	1	2	10
N	3	6	6	—	—
J	3	7	12	10	

Obrázek 84

možným, jestliže postupoval systematicky. V tomto případě bych žákovi doporučoval, aby se i v průběhu řešení úlohy vrátil k přečtení zadání. Jev nedodržení podmínky.

### Řešení 3

Řešení nasvědčuje tomu, že žák neví, jak se v prostředí Autobus počítá. Stále mu není jasné, že pole Av a En musí být vždy rovno nule. Ani jednu zastávku nevypočítal správně, ať už s dodržáním zadaných podmínek, anebo bez dodržení podmínek tak, aby mu to alespoň početně vycházelo. Tomu, že prostředí Autobus neovládá, napovídá skutečnost, že nevidí problém v tom, že na zastávce vystupuje více lidí, než počet lidí, který do zastávky přijel. Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

4 Doplně tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobcích dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobcích třech.

	A	B	C	D	E
V	2	4	6	8	10
N	3	6	9	12	15
J	3	7	12	10	

Obrázek 85

### Řešení 4

Tento žák zápasil se zastávkou D. Nejprve doplnil do pole Dv číslo šest. Pomocí tohoto počtu cestujících dopočítal pole Dn. Ale zde si zřejmě uvědomil, že v poli Dn musí být číslo, které je násobkem třech. Proto se vrátil k poli Dv. Zkusil číslo čtyři, zřejmě v hlavě si vypočítal, že by v poli Dn muselo být číslo dvě, které také není násobkem třech. Nevím, proč zkusil číslo čtyři znovu, protože je doplněné a škrtnuté dvakrát. Nakonec zkusil číslo osm, které už je správně. Ale neopravil pole Dn. Myslím si, že důvodem bylo to, že ho zapomněl upravit,

i když v hlavě si pole dopočítal správně. Byl s řešením spokojený a odcházel od úlohy s tím, že ji nakonec vyřešil správně.

4 Doplni tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

	A	B	C	D	E
V	0	2	4	<del>8</del> 4	10
N	3	6	9	4	0
J	3	7	12	10	

Obrázek 86

### Řešení 5

Žák udělal chybu v poli Bn. Mohlo by se jednat o početní chybu. Jinou možností by mohlo být, že žák od sebe odečetl pole Bn a Bv, aby mu vyšlo pole jelo ze zastávky B. Se zastávkou

4 Doplni tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

	A	B	C	D	E
V	0	2	<del>4</del> 2	2	10
N	3	9	<del>9</del> 0	0	0
J	3	7	12	10	

Obrázek 87

C zjevně zápasil. Čísla, která poškrtil, mi nedávají smysl – žádná z kombinací početně nevyhází. Ale tento proces mu nejspíše pomohl ke správnému řešení, které nakonec našel.

### Řešení 6

V tomto řešení je chyba v zastávce C. Zde žák podmínky dodržel, ale početně mu to nevyhází. Zřejmě špatně vypočítal, že sedm plus šest je dvanáct. Chyba by byla v nepozornosti. Další možností by mohlo být to, že na jiné řešení nepřišel, podmínky dodržel a ten jeden cestující, o kterého to nevyhází, se někde „ztratí“. Jev numerické chyby.

4 Doplni tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili cestující v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili cestující v násobkách třech.

		A	B	C	D	E
6	V	-	2	0	2	70
	N	3	6	6	0	-
	J	3	7	12	10	

Obrázek 88

### 7.2.5 Úloha 5

Správně se všemi řešeními: 0

Správně jedno řešení: 6

Špatně: 15

Nepočítalo: 7

Úlohu 5 vyřešilo šest žáků s alespoň jedním správným řešením. Nikdo se nepokusil vypočítat více řešení. Patnáct žáků řešilo chybně a sedm žáků nepočítalo úlohu vůbec.

### Řešení 1

Žák na zastávkách A i B udělal chybu v počtu žen. Nevšiml si, že na zastávce B vystupuje více žen, než do zastávky přijelo. Kdybychom mohli jít do záporného počtu cestujících, tak by mu to početně vycházelo. Zastávka C je vypočítána správně. Počet mužů a žen, který jel ze zastávky D, je určen správně, protože to se musí rovnat poli Ev. Pořadí zápisu pohlaví v poli prohodil, nejprve napsal počet žen a pod to počet mužů. Domnívám se, že to vedlo ke špatnému určení pole Dn. Protože se podíval a zjistil, že když sečte „horní čísla“, tedy počet mužů, který do zastávky přijel a počet žen, který na zastávce vystoupil, dostane počet žen, který ze zastávky odjel a naopak. Jedná se o jev z nedostatku pozornosti a nedodržení pravidel prostředí Autobus.

5 Dopln tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobkách třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	—	□□ 4x△	2x△ 4x□	□□ 4x△	10x□ 8x△
N	3x△ 3x□	6x△ 6x□	3x△ 3x□	—	—
J	3x△ 3x□	7x□ 5x△	6x□ 6x△	8x△ 10x□	

Obrázek 89

## Řešení 2

Při určení počtu mužů na zastávce B došlo k částečnému nedodržení podmínky. Početně by to jinak vycházelo správně. To je i jediná chyba, kterou žák udělal. Není to tedy chyba ve třech polích, ale pouze jedna, a to v dodržení, respektive nedodržení části z podmínek. Žák řeší úlohu odpředu metodou pokus omyl, doplnil číslo 4, ale nevycházelo mu to, tak opravuje číslo 4 na číslo 6 (další nejbližší násobek dvou). Číslo 5 škrtnl, protože se spletl v antisignálu -> sedm minus dvě a proto pět, i když to měl sčítat, hned udělá kontrolu a zvýšil počet na devět. Bylo toho tolik a byl uspokojen, že mu to vychází, ale nesplnil část podmínky (tu poslední). Nezvládl to, protože je po něm požadováno udržet v hlavě více podmínek. Jedná se o jev nedodržení podmínky.

5 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobcích dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobcích třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	⊖	□□ 4x△	4x□ 2x△	□□ 4x△	10x□ 8x△
N	9x□ 6x△	3x△	3x□ 3x△	6x△ 6x□	0
J	9x□ 6x△	7x□ 5x△	6x□ 6x△	10x□ 8x△	

Obrázek 90

### Řešení 3

Tento žák své řešení rozběhl správně. Zastávky A a B vyplnil správně. Automaticky vyplnil pole Av a En a počet kolik cestujících odjelo ze zastávky D. Je otázkou, jestli pak už ztratil sílu nebo motivaci úlohu dokončit. Mohl mu také dojít čas. Nebo ho mohl někdo nebo něco vyrušit, tím přerušit myšlenkový tok a už se v řešení nenašel, kde skončil. Strategie vyplnit nuly a konec tabulky (to je žák zvyklý dělat), a pak od začátku postupoval metodou pokus omyl. Začátek žáka vyčerpal natolik, že to vzdal. Jev nedokončení řešení úlohy – ukončení práce v půlce řešení úlohy. Tady se domnívám, že došlo k vyčerpání metodou pokusu a omyl. Jev ztráty motivace / energie.

5 Dopln tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobcích dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobcích třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	0	□□ 4x△		□□ 4x△	10x□ 8x△
N	3x□ 6x△	6x□ 3x△			0
J		3x□ 5x△	7x□ 5x△	6x□ 6x△	10x□ 8x△

6

Obrázek 91

### Řešení 4

Toto řešení bych zařadil spíše mezi správná řešení. Jediné chybné pole je počet mužů a žen, který odjel ze zastávky D. Myslím si, že spíše došlo k chybě z nepozornosti. Toto pole se vždy rovná poli En. Žák ale opsal pole Dn a nebo pole příjezdějího počtu mužů a žen do zastávky D. Jev přenosu zkušenosti z předešlých úloh. Když je vyplněno pole Ev, tak se pole počtu odjíždějích cestujících ze zastávky D opisuje. Došlo ale ke špatné orientaci a opsal špatné pole. Žák by měl po sobě kontrolovat své řešení. Jev nedostatku pozornosti.

5 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobkách třech.
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	—	□□ 4x▲	□△△ □□	□□ 4x▲	10x□ 8x▲
N	□□□ △X	6X △△△	△△△ □□	6X□ 6X▲	—
J	□□□ △X	7x□ 5x▲	6x□ 6x▲	6XM 6X▲	

Obrázek 92

### Řešení 5

První chyba je v poli Bn. V počtu žen došlo buď k početní chybě, anebo také se žák mohl zmást prohozením pořadí zápisu pohlaví. Počítal „spodní“ čísla, takže zaměnil počet mužů a žen a to by početně vycházelo. Při řešení zastávky C došlo k opomenutí zadaných podmínek – početně by to vycházelo. Zbytek tabulky už je vyřešený bezchybně. Jev z nedostatku pozornosti.

5 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupili muži i ženy v násobkách dvou.
- Na každé zastávce nastoupili muži i ženy v násobkách třech
- Vždy vystoupil i nastoupil alespoň jeden muž i jedna žena.

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	—	□□ 4x△	1□	□□ 4x△	10x□ 8x△
N	<del>5x△</del>	1x△ 3x□	1△	6x△ 6x□	—
J	<del>6x△</del>	<del>6x△</del> 6x□	7x□ 5x△	6x□ 6x△	10x□ 8x△

Obrázek 93

### 7.2.6 Úloha 6

Správně: 9

Špatně: 14

Nepočítalo: 5

Úlohu 6 vypočítalo správně devět žáků, špatně čtrnáct žáků a úlohu jich nepočítalo pět. Nejčastější chybou v této úloze bylo v přepočítání se v aditivních operacích. Nejvíce problémovou zastávkou byla zastávka D. V této zastávce udělalo nejvíce žáků chybu v počtech. Žádný výrazný problém v logickém postupu řešení nenastal.

## Řešení 1

Tento žák začal počítat úlohu bez dodržení podmínky. Ale i přesto v počtu mužů mu to nevychází – ze zastávky B podle něho odjíždějí tři muži, i když v zadání je, že musejí odjet čtyři. Mohl se přehlédnout nebo přepočítat. V poli Cv vynuloval počet žen a do konce jízdy autobusu udržel ženy na nule. Dopočítával pouze počty mužů, v poli Dn udělal chybu. Myslím si, že jen opsal počet mužů, který ze zastávky odjel. Zdá se, že konec řešení spíše vypustil s vidinou rychlého postupu v počítání. Jev nedodržení podmínky.

6 Doplni tabulku autobusu za předpokladu, že na každé zastávce vystoupilo i nastoupilo 3x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	0	□ △△△	△ □	□□□ △x	5x□ △△△ △x
N	□□ △△△	□□ △△	□□□□ △△	□□ □□	0
J	□□ △△△	□□□□ △	6x□ △	5x□	

Obrázek 94

## Řešení 2

Řešení je téměř správné. První chyba je v počtu žen v poli Dn. Vypadá to, že se žák už ani nepokoušel dopočítat zbylá dvě pole pro počet žen. Mohl ztratit motivaci nebo už energii k dopočítání. Na předchozí zastávce dost zápasil s počty, kolik cestujících vystoupilo. Tento krok mohl žáka tak vysílit, že se ještě pokusil dopočítat, ale zbyla energie pouze na několik výpočtů a pak odpadl. Nebo také se mohl sám zmást tím, že do pole, kolik cestujících odjelo

ze zastávky D, vepsal počet mužů velkými znaky, tudíž vizuálně je pole plné a neměl potřebu doplnit počet žen. Jev ztráty motivace / energie.

6 Doplně tabulku autobusu za předpokladu, že na každé zastávce vystoupilo i nastoupilo 3x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	-	□ 3xΔ	<del>4x□</del> <del>3xΔ</del>	□□□ 4x9	5x□
N	□□ 6xΔ	3x□ 9xΔ	□□□□ 12xΔ	2x□ 4x9	-
J		2x□ 6xΔ	□□□□ 12xΔ	6x□ 18xΔ	5x□

Handwritten notes on the left:  
 \* 2  
 4x□  
 3xΔ  
 6  
 3xΔ  
 1x□

Obrázek 95

### Řešení 3

Kvůli chybě v nepozorném dopočítání počtu žen, který ze zastávky B odjel, se nabalují další chyby. Respektive dále počítal správně, ale počet žen má posunutý o tři, o které se na začátku omylem přepočítal. Tudíž na první pohled je v úloze mnoho chyb, ale jedná se pouze o tu jednu, která se řetězí. Jev numerické chyby.

6 Doplně tabulku autobusu za předpokladu, že na každé zastávce vystoupilo i nastoupilo 3x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	○	□ ΔΔΔ	□□ 6xΔ	□□□ 9xΔ	5x□ <del>15xΔ</del>
N	□□Δ ΔΔΔΔ	□□□ 9xΔ	□□□□ 12xΔ	□□ 6xΔ	○
J		□□ 6xΔ	□□□□ 15xΔ	6x□ 27xΔ	18

Handwritten note on the right: 15xΔ

Obrázek 96

## Řešení 4

Jediná chyba je v počtu žen v poli Dn. Myslím si, že došlo pouze k chybě v nepozornosti nebo špatnému dopočítání. Žák musel odčítat s přechodem přes desítku, tak je možné, že s tímto jevem není stále dokonale ztotožněn a občas ještě chybuje. Jev numerické chyby.

6 Doplni tabulku autobusu za předpokladu, že na každé zastávce vystoupilo i nastoupilo 3x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	—	□ 3xΔ	6xΔ 2x□	□□□ 4xΔ	5x□ 15xΔ
N	□□ 6xΔ	2xΔ 4xΔ	□□□□ 12xΔ	2x□ 3xΔ	—
J		2x□ 6xΔ	□□□□ 12xΔ	6x□ 18xΔ	5x□ 15xΔ

Obrázek 97

## 7.2.7 Úloha 7

Správně: 10

Špatně: 12

Nepočítalo: 6

Úlohu 7 vyřešilo deset žáků správně, dvanáct chybně a šest žáků úlohu nepočítalo. V této úloze dělalo žákům problém dodržet zadané podmínky a dělali často chyby v aditivních operacích. Také se někteří žáci občas ztráceli v rozlišování pohlaví – zaměňovali počty mužů a žen.

### Řešení 1

Tento žák při řešení úlohy zapomněl nebo ignoroval zadanou podmínku. Bez zadaných podmínek mu jízda autobusem vychází, až na jednu početní chybu na zastávce D. Žák tedy udělal dvě chyby, jednu početní a druhou počítám, jako nedodržení stanovené podmínky. Jev numerické chyby a nedodržení podmínky.

7 Dopln tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		$\Delta\Delta$ 0	$\Delta\Delta$ 0	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ $\Delta\Delta$ 4x 2x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ 2x
N	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ $\Delta\Delta$ 3x 2x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ 2x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ $\Delta\Delta$ 2x	$\Delta\Delta$ 0	
J	$\Delta\Delta$ 3x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ 2x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ 8x 4x	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ 2x	

Obrázek 98

### Řešení 2

Řešení této úlohy je částečně správné. Žák v jediném poli Dv nedodržel podmínku, ve zbylých ano. Žák udělal početní chybu v počtu mužů, který ze zastávky B odjel. Toto je zajímavá situace, protože ze zastávky správně měli odjet dva muži. Ale žák vyplnil pole Bv jinak než měl, tudíž podle jeho řešení měli ze zastávky B odjet tři muži. Tento fakt nasvědčuje tomu, že žák nejprve vzal podmínku a aplikoval ji všude, kde mohl (v poli Dv udělal početní chybu). Poté se vrátil na začátek tabulky a doplnil chybějící pole, kde podmínku nemohl uplatnit. V poli Cn udělal další početní chybu. Taktéž zastávku D dopočítal chybně. Žák zřejmě dokáže dekodovat a aplikovat podmínku, ale s aditivními operacemi, které se řetězí, má problém. Jev numerické chyby.

7 Doplň tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		6xΔ □□	△△ □□	△△△△ △△ □□□	△△△△ □□
N	△△△△ △△ □□□	△△△△ □□	△△△△ △△ □□□	4xΔ □□	
J	6xΔ 3x□	△△△△ 3x□	8xΔ 5x□	4444 □□	

Obrázek 99

### Řešení 3

Tento žák všude vyplnil dva muže. Muži takto početně vycházejí. Myslím si, že mohlo dojít k tomu postupu, kvůli špatně přečtené nebo chybně dekodované podmínce. V hlavě žákovi uvízly dvě informace, které si přečetl – „dvakrát“ a „muži“. Ženy má dopočítané chybně. Početně nevycházejí, i kdyby nebyly zadané podmínky. Jev chybně aplikované podmínky.

7 Doplň tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		4xΔ 2x□	△△ 2x□	△△△△ △△ □□x2	△△△△ □□x2
N	△△△△ △△ □□x2	△△△△ □□x2	△△△△ △△ □□x2	△△△△ □□x2	
J	6xΔ □□x2	△△△△ □□x2	8xΔ □□x2	6xΔ □□x2	

Obrázek 100

### Řešení 4

V tomto řešení došlo k početní chybě na zastávce C. Žák chybně dopočítal počty mužů i žen odjíždějících ze zastávky C. I přes tuto chybu dokázal dodržet zadanou podmínku a pak už mu to i početně sedělo. Tudíž udělal pouze jednu chybu, předpokládám, že pouze z nepozornosti. Jev nedostatku pozornosti.


7 Doplni tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.



















	A	B	C	D	E
V	-	6xΔ 3x□	ΔΔ 1x□	ΔΔΔΔ ΔΔ 5x□ 2x□	ΔΔΔΔ
N	ΔΔΔΔ ΔΔ 3x□	ΔΔΔΔ 2x□	ΔΔΔΔ ΔΔ 3x□	4xΔ 2x□	-
J	6xΔ 3x□	ΔΔΔΔ 2x□	6xΔ 3x□	4xΔ 2x□	

Obrázek 101

### Řešení 5

Domnívám se, že v tomto řešení žák prohazuje počty mužů a žen. Do zastávky B přijelo šest žen, dvě vystoupily, čtyři nastoupily a zapsal to, jakože ze zastávky odjelo osm mužů. Na další zastávce podobně – žák počítal s počty mužů, ale výsledný počet zapsal jako ženy. Mimo jiné také žák udělal mnoho početních chyb. Jev nedostatku pozornosti a numerické chyby.

 Doplně tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		 2xΔ	 	  3x□	  
N	  3x□	 4xΔ	  3x□	4xΔ 2x□	
J	 6xΔ	 8x□	5x□ 7xΔ	 2x□	

Obrázek 102

### 7.2.8 Úloha 8

Správně: 12

Špatně: 12

Nepočítalo: 4

Úlohu 8 vyřešilo správně dvanáct žáků, dvanáct žáků s chybou a úlohu nepočítali čtyři žáci. Tato úloha byla v pořadí třetí úlohou v gradační sérii. I přesto, že úloha byla z těchto třech

úloh nejnáročnější, dosahovala nejlepších výsledků. To vypovídá o tom, že žáci to, co se naučili v předchozích úlohách, uplatnili v této úloze.

### Řešení 1

První chybu žák udělal v počtu odjíždějících žen ze zastávky B. Pravděpodobně došlo k chybě z nepozornosti. Ovšem tato chyba ovlivnila další postup. V tomto kroku se ještě snažil dodržovat zadanou podmínku. Později od podmínky upustil. Domnívám se, že to bylo z důvodů dopočítání se do konečné zastávky. Žák se zřejmě nechtěl vrátit, objevit chybu a přepočítat úlohu. Spokojil se s tím, že vypustil podmínku a hlavně že se dopočítal nějakého výsledku. Jev numerické chyby a nedodržení podmínky.

8 Doplně tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V		□ 2xΔ	△△△ △ 2x□	5xΔ 2x□	8xΔ 5x□
N	□□□ 6xΔ	□□ 4xΔ	3x□ 9xΔ	△△△ △ 2x□	
J	3x□ 6xΔ	4x□ 4xΔ	□□□ □□ 9xΔ	△△△△ △△△△ 5x□	

Obrázek 103

## Řešení 2

Tento žák udělal jedinou chybu, a to v poli Dv. Předpokládám, že to je chyba z nepozornosti a přepočítání se. Není tam náznak toho, že by například prohodil počty mužů a žen. Jev numerické chyby.

8 Doplni tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	○	□ △△	△△△ △□□	△△△ □□□	△△△△ △△△△ □□□□
N	□□□ △△△ △△△	□□ △△	△△△ △△△ □□□	△△△ △□□	○
J		△△△ □□□	△△△ △△△ □□□	□□□ □□□ △△△ △△△	△△△△ △△△△ △△△△ □□□□

Obrázek 104

## Řešení 3

První chyba nastala v poli Cn. Žák nejspíš chvilkově změnil zadání podmínky a ve dvou polích (Cn a Dv) znásobil muže třemi a ne dvěma, aby dostal počet žen. V následujících krocích se znovu vrátil k původnímu znění podmínky. Pod tabulkou je vidět, že pod dvěma

8 Doplni tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	○	□ 2x△	△△△ △□□	9x△ □□□	8x△ 4x□
N	□□□ 6x△	□□ 4x△	□□□ 9x△	△△△ △□□	○
J		6x△ 3x□	4x□ 8x△	□□□ □□□ 13x△	△△△△ 4x□

Obrázek 105

poli si vypisoval různé kombinace počtu cestujících. To nasvědčuje o tom, že žák postupuje v řešení úlohy systematicky. Jev nedodržení podmínky.

#### Řešení 4

Tento žák postupoval správně. Po zastávce C řešení končí. Žákovy mohly dojít síly, i když nevypadá, že by s řešením úlohy zápasil. Písmo je úhledné, žádné škrtnání, styl vyplněné tabulky napovídá o jistotě v řešení žáka. Proto mi není jasné, co se stalo, že žák nedořešil zadání až do konce. Jev ztráty motivace / energie.

8 Doplně tabulku autobusu za předpokladu, že vždy vystoupilo i nastoupilo 2x více žen než mužů.

	A	B	C	D	E
V	0	□ 2x0	△△△ △□□	—	—
N	□□□ 6x△	□□ 4x△	3x□ 6x△	△△△ △	○
J		3x□ 6x△	4x□ 8x△	□□□ □□	△△△△ △△△△

Obrázek 106

### 7.2.9 Úloha 9

Správně: 11

Špatně: 12

Nepočítalo: 5

Úlohu 9 vypočítalo správně jedenáct žáků, dvanáct řešilo chybně a pět žáků úlohu nepočítalo. V této úloze se chybovalo především v nedodržení podmínek, anebo v početních chybách z nepozornosti.

## Řešení 1

Tento žák do zastávky C postupoval správně. Poté nejspíš už zapomněl na dvě podmínky (o dvojnásobku a sudosti). Tedy došlo k nedodržení podmínek v polích C<sub>n</sub>, D<sub>n</sub> a v počtu cestujících odjíždějících ze zastávek C a D. Také žák udělal početní chybu v počtu cestujících, který odjíždí ze zastávky D. Žákovi bych doporučil, aby se i v průběhu řešení vracel ke čtení zadání úlohy. Jev nedodržení podmínky.

9

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel
- ze zastávky odjel vždy sudý počet cestujících

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	<del>X</del>	2	3	3	<del>9</del>
N	2	4	6	6	<del>X</del>
J		2	4	<del>7</del>	9

Obrázek 107

## Řešení 2

V tomto řešení došlo pouze k chybě z nepozornosti. Žák se přepočítal v počtu cestujících, který odjel ze zastávky C. Tato chyba se řetězí až do konce řešení. Žák tedy udělal pouze jednu chybu. Přeškrtnání celého tabulky naznačuje, že žák poznal, že jeho řešení je nesprávné. Předpokládám, že po vyřešení úlohy se vrátil k podmínkám a zkontroloval si, jestli se mu řešení shoduje s podmínkami. Zjistil, že neshoduje, ale nesnažil se chybu objevit – vzdal to. Jev numerické chyby.

9

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel
- ze zastávky odjel vždy sudý počet cestujících

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	<del>X</del>	2	3	2	<del>24</del>
N	2	<del>4</del>	8	<del>8</del>	<del>X</del>
J	2	<del>4</del>	9	<del>24</del>	

Obrázek 108

### Řešení 3

Tento žák pravděpodobně vzal pouze podmínky a podle nich vyplnil tabulku, aniž by dopočítával počty cestujících. Tedy podmínky jsou dodrženy, ale takto by jízda autobusem proběhnout nemohla. Ale oceňuji logickou úvahu, která musela předcházet vyplnění tabulky. Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

9

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel
- ze zastávky odjel vždy sudý počet cestujících

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V		<del>2</del>	<del>2</del>	<del>2</del>	2
N	2	<del>2</del>	<del>2</del>	<del>2</del>	
J	2	<del>2</del>	<del>2</del>	<del>2</del>	<del>2</del>

Obrázek 109

#### Řešení 4

Žák při řešení této úlohy zapomněl na podmínku, že vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel. Zbylé podmínky dodržel a početně to také vychází. Tudíž žák udělal pouze jednu chybu, i když by se mohlo zdát, že celé řešení je špatně. Jev nedodržení podmínky.

9 Doplně tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel
- ze zastávky odjel vždy sudý počet cestujících

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	0	2	2	2	8
N	2	4	4	4	0
J	2	4	6	8	

Obrázek 110

#### 7.2.10 Úloha 10

Správně (všechna řešení): 0

Správně (více než jedno řešení): 0

Správně (alespoň jedno řešení): 11

Špatně: 14

Nepočítalo: 3

Úlohu 10 vypočítalo jedenáct žáků s alespoň jedním řešením. Nikdo se nesnažil najít více řešení. Čtrnáct žáků vyřešilo úlohu chybně a tři žáci ji neřešili vůbec. V této úloze žáci chybovali v aditivních operacích, v nedodržení podmínek, anebo nerespektovali zásady prostředí Autobusu.

### Řešení 1

Myslím si, že žák vzal pouze podmínky a ty aplikoval do tabulky. Šel nejjednodušší cestou, ani nezkusil jiné možné řešení, a to dosadit druhou možnost z podmínky. Nezabýval se problematikou prostředí Autobus – nedopočítával cestující. Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

10 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V		2	2	2	2
N	2	4	4	4	
J		2	2	2	2

Obrázek 111

### Řešení 2

Žák do poloviny tabulky postupoval správně. Udělal početní chybu v dopočítání počtu cestujících, který odjel ze zastávky C. Počet cestujících, který odjel ze zastávky D, už ani nedopočítával, jen opsal údaj z pole Dn. Také vypustil zadané podmínky. Nevím, proč v druhé polovině tabulky žák začal takto zmatkovat. Možná vidina rychle vypočítané úlohy

ho mohla unáhlit v řešení. Nasvědčuje tomu to, že v tabulce nejsou škrtnance a písmo není úhledné a spíše psané švihem. Jev numerické chyby a jev přenosu zkušenosti z předešlých úloh.

10 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	0	2	3	2	10
N	2	4	8	10	2
J		2	4	8	10

Obrázek 112

### Řešení 3

Tento žák udělal chybu hned v poli Bv. Neuvědomil si, že nemůže vystoupit více cestujících, než do zastávky přijelo. Tato chyba se pak řetězí do zbytku řešení. Co bych ale ocenil je, že žák dále počítá správně, dodržuje podmínky a hlavně dokáže počítat se záporným číslem (zastávka B). Žák tudíž udělal pouze jednu chybu. Jev numerické chyby.

10

Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení

	A	B	C	D	E
V	-	3	3	2	16
N	2	4	6	12	-
J		2	3	6	16

Obrázek 113

#### Řešení 4

V polovině tabulky žák vypustil jednu z podmínek. Početně mu to vychází, ale neplatí, že vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel. Je možné, že žák na tuto podmínku v průběhu řešení zapomněl. Tento fakt také vypovídá o tom, že žák si vyřešenou úlohu nekontroluje, znovu nečte zadání. Dělá pak zbytečné chyby z nepozornosti. Jev nedodržení podmínky.

10 Doplň tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení.

	A	B	C	D	E
V	0	2	2	2	8
N	2	4	4	4	0
J	2	4	6	8	

Obrázek 114

## Řešení 5

Tento žák zřejmě špatně dečkoval podmínku. Místo dvojnásobku jen přičítal dvě. Úlohu ale nedokončil. Pouze aplikoval nesprávně jednu z podmínek. Jev nedodržení podmínky.

10 Doplni tabulku autobusu, když víš, že:

- na zastávce B, C, D vždy vystoupili dva nebo tři cestující
- vždy nastoupil dvojnásobek počtu cestujících, který do té samé zastávky přijel

Najdi všechna možná řešení

	A	B	C	D	E
V					
N	2	4	6	8	10
J	2	4	6	8	

Obrázek 115

### 7.2.11 Úloha 11

Správně: 8

Špatně: 17

Nepočítalo: 3

Úlohu 11 vypočítalo správně osm žáků, špatně sedmnáct žáků a tři ji nepočítali. V této úloze žáci nejvíce chybovali v poli Bv. Uváděli vyšší počet cestujících, který na zastávce B vystoupil, než počet, který do zastávky přijel. Od této chyby se pak odvíjelo celé řešení. Žáci také hodně chybovali v aditivních operacích. Často docházelo k nedodržení jedné z podmínek.

## Řešení 1

V tomto řešení není dodržena druhá podmínka. Bez této podmínky úloha jinak vychází správně, první podmínka je dodržena. Tudíž žák udělal chybu v nedodržení jedné ze dvou podmínek. Jev nedodržení podmínky.

11 Sestav tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupilo 2x méně cestujících, než na té samé nastoupilo.
- Vždy nastupuje o 4 cestující více než na předchozí zastávce.

Kolik nejméně cestujících mohlo na zastávce A nastoupit, aby úloha měla řešení?

	A	B	C	D	E
V	0	3	5	10	21
N	4	8	10	20	0
J	4	7	12	22	

*(Handwritten scribbles and a checkmark are visible on the right side of the image.)*

Obrázek 116

## Řešení 2

Žák v tomto řešení nenašel nejmenší možný počet cestujících, který nastoupil na zastávce A. Žák si nejspíš nevšiml, že nemůže vystoupit více cestujících, než do zastávky přijelo. Ani početně žákovo řešení nevychází. Musel počítat se záporným číslem, v tomto jevu ale udělal početní chybu. Dále už dopočítával správně. Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus.

— Sestav tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupilo 2x méně cestujících, než na té samé nastoupilo.
- Vždy nastupuje o 4 cestující více než na předchozí zastávce.

Kolik nejméně cestujících mohlo na zastávce A nastoupit, aby úloha měla řešení?

	A	B	C	D	E
V	0	3	5	7	17
N	2	6	10	14	0
J	2	6	11	17	

Obrázek 117

## Řešení 3

Žák dodržel obě podmínky, objevil nejmenší možný počet cestujících, který nastoupí na zastávce A. V řešení je mnoho početních chyb. Podle škrtnání je zjevné, že žák s úlohou velmi zápasil. Zkoušel několik možností. Bohužel správné řešení neobjevil, ale usiloval o to. Na zastávce B udělal početní chybu, které si nejspíš nevšiml – žádné škrtnání. Tudiž zbytek tabulky už je také špatný. Domnívám se, že kdyby neudělal chybu hned na začátku, tak by

správné řešení našel. Doporučil bych žákovi, aby se vždy vrátil k předchozímu kroku, když se v určité části úlohy zasekne a nevychází mu. Jev numerické chyby.

11 Sestav tabulku autobusu, když víš, že:

- Na každé zastávce vystoupilo 2x méně cestujících, než na té samé nastoupilo.
- Vždy nastupuje o 4 cestující více než na předchozí zastávce.

Kolik nejméně cestujících mohlo na zastávce A nastoupit, aby úloha měla řešení?

	A	B	C	D	E
V		2	86	<del>168</del>	8
N	<del>4</del>	8	1612	3216	<del>64</del>
J		4	6	86	<del>168</del>

Obrázek 118

## 7.2 Závěr analýzy

Analýzou<sup>4</sup> řešení žáků jsem zjistil, že největší chybovosti se dopouštěli v řetězení aditivních operací, dále v nedodržení podmínek a také pravidel, podle kterých se řeší úlohy v prostředí Autobus.

V tabulce níže je vidět škála jevů chybovosti. V prvním sloupečku je název jevu a ve druhém celkový počet řešení, ve kterých žáci udělali chybu způsobenou daným jevem. Celkem jsem získal 262 řešení, z toho 113 bylo správných a 149 s chybou. V některých řešeních se mohl vyskytovat více jak jeden jev chybovosti.

Název jevu	Počet
Jev numerické chyby	35
Jev nedodržení podmínky	35
Jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus	29
Jev ztráty motivace / energie	17
Jev nedostatku pozornosti	17
Jev přenosu zkušenosti z předešlých úloh	9
Jev chybně aplikované podmínky	7
Jev špatné orientace v tabulce	7

Tabulka 2

V celkem třiceti pěti řešení žáci udělali chybu v jevu numerické chyby. Žák v řešení udělal buď pouze jednu chybu. Tato chyba se mohla přenášet, ale stále se jednalo o jednu chybu. Nebo bylo v řešení více chyb tohoto druhu, a to ukazuje, že žáci stále nemají upevněné aditivní operace. Sečíst nebo odečíst dvě čísla jim nemusí dělat problém, ale jakmile mají pracovat se třemi a více čísly (tzn. řetězení aditivních operací), začínají se ztrácet.

---

<sup>4</sup> zde myšleno jako zaevidování žákovské chyby a hledání nejpravděpodobnějšího zdůvodnění chyby

Žáci ve třiceti pěti případech nedodrželi podmínky. Buď je úplně vypustili (*Úloha 1, Řešení 3*), nebo použili pouze některou z více zadaných podmínek (*Úloha 5, Řešení 2*). Také se stalo, že v průběhu řešení na podmínky zapoměli (*Úloha 4, Řešení 2*), a nebo sice podmínky používali, ale chybně, docházelo tak ke špatnému dekódování podmínky (*Úloha 7, Řešení 3*). Také se mohlo stát, že žák podmínce nerozuměl, ale touha vyřešit úlohu je tak velká, že podmínku vypustí a počítá jen tabulku. I délka textu podmínky může ovlivnit řešení žáka. Pokud je text podmínky dlouhý, je v ní více informací, tak hrozí, že si ji žák nezapamatuje. Dodržení podmínky vyžaduje synchronizaci více činností. Po žákovi je požadováno, aby sčítal, odčítal, orientoval se v tabulce, dodržel specifická pravidla pro prostředí Autobus a k tomu dodržel určitou podmínku (například, že nesmí nastoupit více jak tři muži). Těch činností je na žáka moc.

Žáci také nedodržovali pravidla specifická pro řešení úloh v prostředí Autobus, a to ve dvaceti devíti případech. Často vystoupilo více cestujících, než jich do dané zastávky přijelo (*Úloha 11, Řešení 2*). Při této chybě jeden žák dokázal počítat se zápornými čísly (*Úloha 10, Řešení 3*). Což značí to, že žák umí rozšířit kladná celá čísla o záporná, ale v prostředí Autobusu nemůže vystoupit záporný počet cestujících.

Setkal jsem se s řešením, kde vyplněná pole nedávala smysl. Chaoticky vyplněná čísla mohou znamenat, že žák pravděpodobně nerozumí pravidlům jízdy v prostředí Autobus. Jednou příčinou chaoticky vyplněných čísel by mohlo také být to, že na žáka byla úloha obtížná, ale nechtěl odevzdat „čistý papír“ z důvodu obavy posměchu spolužáků, tak nahodile bez počítání vyplnil tabulku. Tento fakt by mohl vypovídat o klimatu ve třídě, ve kterém se žák necítí bezpečně (*Úloha 4, Řešení 3*).

## Závěr diplomové práce

Když se zpětně podívám na své studium, tak jako kdyby mi v prvním ročníku Pedagogické fakulty bylo předurčeno, že v průběhu studia se budu nejvíce zaměřovat na prostředí Autobus a i celé studium završím prací na toto téma.

Při psaní teoretické části jsem se snažil vyhledat co nejvíce odborné literatury, která by se týkala prostředí Autobus. Takové to odborné literatury není mnoho. Snažil jsem se jít více zeširoka, dívat se na problematiku z větší perspektivy, ale aby se informace opravdu týkaly daného tématu, jsem zas tak daleko jít nemohl. Největším problémem bylo, nalézt zahraniční zdroje.

Teoretická část mi pomohla utřídit myšlenky a nabrané znalosti k prostředí Autobus. Také jsem získal nové znalosti, především o významu prostředí. Otevřely se mi nové obzory, neuvědomoval jsem si, že toto prostředí rozvíjí žáky v tolika směrech. Například mě nenapadlo zabývat se řetězením aditivních operací. Nejspíš to pro mne bylo až tak zřejmé, že jsem tento matematický jev nebral jako jeden z hlavních významů prostředí Autobus. Měl jsem šanci prostudovat řetězení aditivních operací v jiných prostředích Hejného metody, obzvláště v prostředí Krokování a Schody. Také jsem zjišťoval, jak se žáci učí řetězení aditivních operací v klasickém pojetí matematiky, a to v řadě učebnic Prodos a Alter.

V teoretické části jsem se detailně seznámil se všemi úlohami na prostředí Autobus v současném vydání Hejného učebnicích pro první stupeň ZŠ. Sledoval jsem vývoj úloh a sledoval, jak je dodržovaná etapizace zavádění tohoto prostředí v Hejného učebnicích. Při tomto studiu jsem zjistil, že ve čtvrtém ročníku je velká časová mezera v úlohách na prostředí Autobus. A tím vzniklo téma pro praktickou část této diplomové práce.

Předpokládal jsem, že kvůli této časové mezeře by žáci čtvrté třídy mohli mít problémy s úlohami na Autobus. Jestliže žáci počítají úlohy na začátku čtvrtého ročníku a pak se téměř celý školní rok nesetkají v učebnici s úlohou na prostředí Autobus, mohlo by jim opětovné setkání s prostředím dělat problém. Tomuto problému se dá předcházet tím, že by žáci žili v prostředí Autobus v průběhu celého školního roku. Proto jsem postupně navrhl jedenáct

vlastních úloh, kterými bych vyplnil mezeru v učebnici. Ve všech úlohách je obsažen prvek násobků. Ve čtvrtém ročníku je velké téma násobků čísel, proto jsem násobky zvolil jako průřezové téma.

Nejprve proběhly předexperimenty, které vznikly mojí nevědomostí, protože jsem původně myslel, že to bude hlavní experiment. Důvodem vzniku předexperimentu bylo to, že jsem nezískal čistá data, protože žáci mohli své výsledné řešení opravit podle tabule. Nejprve jsem myslel, že celý tento pokus byl zbytečný. Naopak, získal jsem mnoho dat, postřehů od žáků a dokonce žáci objevili chyby v zadání. Uvědomil jsem si, co je to experiment v matematice, před tím jsem nevěděl, vyjasnilo se mi to.

Experimenty už probíhaly s finální verzí úloh. Řešení žáků jsem analyzoval a zaměřil jsem se na chyby. Snažil jsem se vždy objevit důvod chyby, díval jsem se na chybu z více pohledů. Chyby jsem pojmenoval a zařadil do jevů. Analýza ukázala, že žáci nejčastěji chybovali ve třech jevech – jev numerické chyby, jev nedodržení podmínky a jev nedodržení pravidel řešení úloh v prostředí Autobus. Tyto výsledky jsem již rozebíral v kapitole závěru analýzy řešení žáků. Ale rád bych ještě jednou zmínil, že tyto oblasti chybovosti nasvědčují mému předpokladu, že kvůli dlouhé mezeře v Hejného učebnici pro čtvrtý ročník ZŠ by žáci mohli mít potíže v řešení úloh na prostředí Autobus.

Touto diplomovou prací jsem získal mnohem větší vhled do prostředí Autobus. Při vymýšlení úloh jsem přišel na důležitost gradačních parametrů a také, že gradační parametry jsou. Podvědomě jsem o gradačních parametrech věděl, používal jsem je, ale neuměl jsem je pojmenovat. Věřím, že tuto získanou dovednost v budoucnu hojně využiji, jelikož rád vymýšlím žákům úlohy navíc.

## Seznam použitých informačních zdrojů

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-628-4.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-771-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka Michnová. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-827-1.

HEJNÝ, Milan, Darina Jirotková, Eva Bomerová a Jitka Michnová. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-943-8.

HEJNÝ, Milan, Darina Jirotková, Eva Bomerová a Jitka Michnová. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-969-8.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy, první díl*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-626-0.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy, druhý díl*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-627-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy, první díl*.

Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy, druhý díl*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy, 3 díl*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-982-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan, Darina Jirotková, Eva BomeroVá a Jitka Michnová. *Matematika: učebnice pro 5. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7.

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika 2*. Vyd. 11. Ilustroval Marie TICHÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-254-5.

MIKULENKOVÁ, Hana a Josef MOLNÁR. *Matematika a její aplikace: pro I. ročník*. Ilustroval Jana KUDLIČKOVÁ. Olomouc: Prodos, 2006. Modrá řada (Prodos). ISBN 80-7230-158-6.

SEMADENI, Z. Trojaka natura matematiky: idee glebokie, formy powierzchniowe, modele formalne. *Dydaktyka matematyki*. No. 24, 2002, s. 44-45.

Wittmann, E. Developing mathematics education in a systemic process. Educational Studies in Mathematics Education. No.48, 2001.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-581-4.

Elektronické zdroje:

HOŠPESOVÁ, Alena, Naďa VONDROVÁ a Marie TICHÁ (eds.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* [online]. 2007 [vid. 2016 – 11 - 30]. Dostupné z: <http://class.pedf.cuni.cz/jirotkova/VZ/KROKOVANISlezakova.pdf>

HEJNÝ, Milan a Darina Jirotková. *Didaktické prostředí Autobus* [online]. 2014 [vid. 2016 – 11- 30] Dostupné z: [http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus\\_hejny\\_jirotkova.pdf](http://www.ucmeradi.sk/wp-content/uploads/2014/05/autobus_hejny_jirotkova.pdf)

Krokování a schody [online]. [vid. 2016 – 11- 30] Dostupné z: [http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat\\_Prostredi\\_krokovani\\_a\\_schody.pdf](http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat_Prostredi_krokovani_a_schody.pdf)

**Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta**

**M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1**

**Evidenční list žadatelů o nahlédnutí do listinné podoby práce**

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.

Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohu pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.

Poř. č.	Datum	Jméno a příjmení	Adresa trvalého bydliště	Podpis
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				