Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dělitelnost v 6. a 7. ročníku – učebnice a znalosti žáků

Divisibility in 6th and 7th grade – textbooks and knowledge of pupils

Zora Mašatová

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Dělitelnost v 6. a 7. ročníku – učebnice a znalosti žáků* vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 9. prosince 2016

…………………………………………

Zora Mašatová

Na tomto místě bych ráda poděkovala všem, kteří mi pomohli s vypracováním předkládané diplomové práce. Zvláště Mgr. Derku Pilousovi, Ph.D. za konzultace a odborné vedení diplomové práce.

ABSTRAKT

Ve své diplomové práci *Dělitelnosti v 6. a 7. ročníku – učebnice a znalosti žáků* se zabývám různými aspekty výuky tohoto tématu na základních školách. Tato práce je rozdělena do tří kapitol. Zatímco první kapitola se věnuje teorii, obsahem dalších dvou kapitol jsou dva různé výzkumy, které jsem provedla v rámci tématu dělitelnost.

V první kapitole čtenář najde teoretická východiska společná pro obě dvě výzkumné části. Mezi témata, která jsou obsažena v této části, patří například rozdíl mezi formálním a neformálním poznatkem, konstruktivistický a transmisivní edukační styl nebo postup při řešení slovních úloh.

Stěžejním bodem mého prvního výzkumu je mapování učebnic pro základní školu, které se zabývají výukou tématu dělitelnost na základní škole. Kromě části, která se zabývá rešeršemi všech učebnic schválených MŠMT, v nichž je zahrnuta výuka dělitelnosti, tato kapitola ještě obsahuje část věnovanou propedeutice dělitelnosti ve vybraných učebnicích pro základní školu a rozhovory s učiteli, v nichž se snažím postihnout nejdůležitější momenty výuky dělitelnosti z hlediska učitelů.

Druhá část výzkumu se zabývá prověřováním znalostí žáků z dělitelnosti se zvláštním ohledem na formálnost. K tomuto záměru jsem využila test, který byl zadán 428 respondentům. Žáci byli rozděleni do tří skupin podle typu školy nebo podle výukového stylu, jakým jsou vyučováni. Výsledky obsahují úspěšnost v testu celku i jednotlivých skupin z hlediska kvantitativního a kvalitativního. Součástí výsledků je i reflexe výzkumného nástroje.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dělitelnost, druhý stupeň ZŠ, rešerše učebnic, kritéria dělitelnosti, formální a neformální znalosti, konstruktivismus, transmisivní styl výuky

ABSTRACT

My theses called *Divisibility at second grade – textbooks and knowledge of the pupils* is devoted to different aspects of schooling of this topic at elementary schools. This work is divided into three chapters. Whilst the first chapter is dedicated to the theory, the subject of two other chapters are two different researches conducted under the divisibility theme.

Theoretical resources common to both parts of the research can be found in the first chapter. Among the topics mentioned in this chapter are for example the differences between formal and informal knowledge, constructivist and transmissive way of teaching or the process of solving word problems.

The essence of my first research are the textbooks for elementary school concerned with the divisibility theme. Except the part devoted to a textbooks search (all the textbooks approved by the Ministry of Education, Youth and Sports which deal with divisibility), this chapter also contains the propaedeutics of divisibility and interviews with teachers, in which I have tried to cover the most important moments in the schooling of divisibility.

Second part of my research is focused on checking of the pupils´ knowledge of divisibility with a special emphasis on formal and informal knowledge. I have used the test to this purpose, which was administrated to 428 pupils. The pupils were divided into three groups according to the type of school and the type of educational style they have been taught. The results display the success of pupils in the test as a whole group and also the success of each of the three groups in terms of quantity and quality. Within the results is also included the reflexion of the research tool.

KEYWORDS

Divisibility, lower secondary level of education, textbooks search, formal and informal knowledge, constructivism, transmissive educational style

Obsah

Úvod **8**

1 Teoretická východiska **10**

1.1 Formální a neformální poznatky 10
1.2 Konstruktivismus, konstruktivistický edukační styl 11
1.3 Mechanismus poznávacího procesu podle Hejného 13
1.4 Transmisivní edukační styl 14
1.5 Diagnostika formálního poznatku 16
1.6 Řešení slovních úloh 17

2 Rešerše učebnic **19**

2.1 Propedeutika dělitelnosti v tradičních učebnicích 21
2.1.1 Učebnice pro 1. ročník ZŠ 22
2.1.2 Učebnice pro 2. ročník ZŠ 22
2.1.3 Učebnice pro 3. ročník ZŠ 22
2.1.4 Učebnice pro 4. ročník ZŠ 23
2.1.5 Učebnice pro 5. ročník ZŠ 23
2.2 Propedeutika dělitelnosti a výuka dělitelnosti v učebnicích Hejného metody 24
2.2.1 Učebnice Hejného metody pro 1. třídu 26
2.2.2 Učebnice Hejného metody pro 2. třídu 26
2.2.3 Učebnice Hejného metody pro 3. třídu 27
2.2.4 Učebnice Hejného metody pro 4. třídu 29
2.2.5 Učebnice Hejného metody pro 5. třídu 31
2.2.6 Učebnice Hejného metody pro 6. třídu 31
2.3 Srovnání učebnic z hlediska propedeutiky dělitelnosti 33
2.4 Výuka dělitelnosti 33
2.5 Rešerše tradičních učebnic 38
2.5.1 Cihlář J., Zelenka M.: Matematika 6 38
2.5.2 Coufalová J. a kol.: Matematika 6 pro 6. ročník základní školy 40
2.5.3 Binterová H., Fuchs E., Tlustý P.: Matematika 6 učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika 43
2.5.4 Rosecká Z., Čuvajová V.: Aritmetika učebnice pro 6. ročník 46
2.5.5 Jedličková M., Krupka P., Nechvátalová J.: Matematika: Dělitelnost 49
2.5.6 Molnár J. a kol.: Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele 52
2.5.7 Herman J., Chrápavá V., Jančovičová E., Šimša, J.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Dělitelnost 55
2.5.8 Šarounová A. a kol.: Matematika 7, 1. díl 59
2.5.9 Odvárko O., Kadleček J.: Matematika pro 6. ročník ZŠ, 2. díl: Desetinná čísla, dělitelnost 61
2.5.10 Půlpán Z., Čihák M.: Matematika pro ZŠ: Aritmetika 64
2.6 Rešerše učebnic pro výuku Hejného metodou 66
2.6.1 Hejný a kol.: Matematika učebnice pro 4. ročník základní školy 67
2.6.2 Hejný a kol.: Matematika učebnice pro 5. ročník základní školy 69
2.6.3 Hejný M. a kol.: Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia 69

2.7 Srovnání učebnic z hlediska výuky dělitelnosti ... 72
2.8 Rozhovory s učiteli ... 76

3 Znalosti a dovednosti žáků 6. a 7. tříd z dělitelnosti se zřetelem na formálnost ... 81

3.1 Cíl výzkumu ... 81
3.2 Hypotéza ... 82
3.3 Metodologie ... 83
3.4 Výzkumný nástroj – test ... 84
3.5 Testové otázky – metodologie vyhodnocení testu ... 86
3.6 Konzistence skupiny vyučované Hejného metodou ... 93
3.7 Statistické výsledky ... 96
3.7.1 Celková úspěšnost ... 96
3.7.2 Úspěšnost po úlohách ... 103
3.7.2.1 Popis výsledků jednotlivých úloh ... 103
3.7.2.2 Srovnání výsledků skupin ... 133
3.8 Výskyt významných jevů ... 145
3.8.1 Model ... 148
3.9 Vlastnosti testu a jeho reflexe ... 153
3.9.1 Konzistence testu ... 153
3.9.2 Souvislost úspěšnosti v testu s výsledky v matematice ... 154
3.9.3 Reflexe provedení testu a znění úloh ... 157
3.10 Diskuse ... 160

Závěr ... 163

Seznam použité literatury ... 165

Přílohy ... 168

Úvod

Problém formálních a neformálních znalostí v tématu dělitelnost ve výuce v 6. a 7 ročníku na ZŠ jsem si jako téma pro svou diplomovou práci vybrala hned z několika důvodů. Téma dělitelnost mě zaujalo proto, že na rozdíl od jiných témat není v odborné literatuře zpracováno příliš často a není na něj ve výuce kladen příliš velký důraz. Také jsem měla možnost celou tuto kapitolu vyučovat v 6. ročníku základní školy při své krátké praxi učitele matematiky, a mohla jsem proto čerpat i ze svých zkušeností. Otázka formálnosti a neformálnosti znalostí mi připadá velice důležitá, protože právě toto kritérium nerozlišuje pouze mezi objemem znalostí, ale bere v úvahu i kvalitu osvojených poznatků.

Chtěla jsem se věnovat zjišťování znalostí žáků z tématu dělitelnost a způsobu, jakým se toto téma na základní škole vyučuje. Pro účely mé diplomové práce jsem však musela tento záměr omezit na jasně ohraničené a v rámci tématu relativně nezávislé cíle.

Zjišťování znalostí žáků jsem omezila na testování žáků 6. a 7. tříd (před a po výuce dělitelnosti) s důrazem na formálnost a neformálnost poznatků. Jelikož v současné době probíhá výuka na 2. stupni ZŠ i jedním z alternativních způsobů výuky, metodou profesora Hejného, zaměřila jsem se na zjišťování rozdílů mezi znalostmi žáků vyučovanými tradičním způsobem a žáků vyučovaných Hejného metodou. Edukační styl, který je uplatňován při výuce Hejného metodou, se totiž významně liší od tradičního způsobu výuky a zdůrazňuje důležitost vzniku neformálního poznání u žáků. Sledované skupiny jsem rozšířila ještě o žáky osmiletého gymnázia, což je výběrová škola a pojetím výuky se též zásadně liší od výuky na běžných základních školách.

Zkoumání toho, jak se dělitelnost na základních školách vyučuje jsem nakonec zúžila na rešerši učebnic, a to jak z hlediska výuky dělitelnosti (v učebnicích pro 6. a 7. ročníky) tak z hlediska propedeutiky (učebnice pro 1. stupeň). Komplexní obraz o výuce dělitelnosti lze získat pravděpodobně jen přímým pozorováním výuky, což ale nebylo v mých možnostech, proto jsem se rozhodla důkladně prozkoumat učebnice, v kterých je obsažen výklad tohoto tématu. Mapováním učebnic jsem se zabývala podrobněji, než bylo mým původním záměrem, takže se z výzkumu učebnic stal druhý cíl mé práce. Moje práce má proto dva výzkumné cíle, a sice zmapování učebnic z hlediska dělitelnosti a testování znalostí žáků z dělitelnosti s důrazem na formálnost.

Práce je rozdělena na teoretickou část a výzkumnou část. Teoretická část obsažená v první kapitole je společná pro oba výzkumné cíle a je soustředěná kolem pojmu konstruktivismus a formální poznatek. Výzkumná část má dvě kapitoly, které korespondují s mými dvěma partikulárními cíli.

V druhé kapitole se zabývám průzkumem všech učebnic schválených Ministerstvem školství a tělovýchovy (dále jen MŠMT) z hlediska propedeutiky a výuky dělitelnosti. Učebnice pro výuku Hejného metodou se zásadně liší od všech ostatních učebnic, které se běžně vyskytují na základních školách či víceletých gymnáziích. Z toho důvodu jsem při průzkumu učebnic rozdělila učebnice do dvou skupin, na učebnice Hejného metody a ostatní učebnice, které označuji jako tradiční pro jejich dlouhodobý a frekventovaný výskyt na školách. Tato kapitola tedy obsahuje metodologii a výsledky vztahující se k průzkumu učebnic z hlediska výuky dělitelnosti.

Třetí kapitola se věnuje testování znalostí žáků z dělitelnosti. Tato kapitola obsahuje výzkumné cíle, stanovení hypotéz, výzkumný nástroj – test – popis jeho vzniku, metodologii vyhodnocení testu, výsledky výzkumu a diskuzi. Výsledky jsou rozděleny do tří podkapitol podle svého charakteru, na výsledky kvantitativní, kvalitativní a reflexi testu. Diskuze shrnuje nejpodstatnější závěry této výzkumné části.

Souhrnné výstupy z obou výzkumných částí jsou pak zahrnuty v přílohách, kde čtenář nalezne přehlednou tabulku srovnávající učebnice pro 2. stupeň z hlediska výuky dělitelnosti a tabulky zachycující všechny sledované údaje o výsledcích v testu z dělitelnosti po jednotlivých skupinách a celku.

Na závěr úvodu jedna technická poznámka. Práce obsahuje řadu reprodukcí učebnic a žákovských řešení. Zvláště u druhých z nich se mi nepodařilo v programu MS Word vyřešit problém kvalitního tisku. Čtenáře, který by některé reprodukce shledal málo čitelnými, odkazuji na elektronickou verzi práce.

.

1 Teoretická východiska

1.1 Formální a neformální poznatky

Jedním z významů adjektiva formální v běžném jazyce je „zdůrazňující vnější formu, vykazující vnější podobnost“. V souladu s tímto významem se pojem formální používá i v didaktice matematiky a jiných předmětů. Za formální poznatky jsou zpravidla označovány vědomosti, které jsou pouze povrchní, uchovávané pouze pamětně bez hlubšího porozumění a bez pochopení souvislostí. O problému formalismu ve znalostech žáků se zmiňuje například V. M. Bradis v roce 1953, který ho definuje takto:

„Formalismus ve vědomostech žáků . . . můžeme charakterizovat jako projev vnějších znaků vědění nepodložených skutečným pochopením. Hlavní rysy formálního vědění jsou: 1. odtržení formy od obsahu, 2. odtržení teorie od praxe, 3. převaha paměti nad porozuměním, 4. šablonovité vědění. Formální znalosti jsou mrtvé, neskutečné, neužitečné.“

(Bradis, 1953, str. 81)

Problém formalismu se netýká pouze výuky matematiky, ale vzhledem k dominanci struktury (vztahů, souvislostí, zákonitostí) nad pamětně udržovanými poznatky je problém formalismu v matematice významnější a též reflektovanější než v jiných disciplínách. Dále se zde budu podrobněji zabývat Hejného teorií, protože ta nejenže definuje, co je a jak vzniká formální poznání, ale zároveň pojmenovává příčiny, které vedou k vzniku formalismu a nachází východiska, jak tvorbě formálních poznatků předcházet.

Hejný a Kuřina vysvětlují význam slova formální znalost v kontrastu s plnohodnotnou abstraktní znalostí:

„Abstraktní znalost, která je opřena o izolované a univerzální modely, je neformální. Znalost, jež tuto oporu postrádá, která je uchována pouze pamětně, je formální znalost.“

(Hejný, Kuřina, 2009, str. 149)

Formálním poznatkem nazveme takovou znalost, které je uložena v mysli žáka pouze pamětně a postrádá propojení s ostatními poznatky. Žák takovouto znalost zpravidla brzo zapomíná a je neschopen si ji opět vybavit nebo odvodit. Schopnost žáka aplikovat formální znalost k řešení konkrétního problému je rovněž malá. Formální poznatek umí žák většinou správně použít pouze v napovídajícím kontextu, případně v úlohách obsahujících nějaký signál pobízející k použití odpovídajícího poznatku. Dále Kuřina a Hejný o formálnosti a neformálnosti poznatků podotýkají:

„Slova formální a neformální označují dvě krajnosti. Skutečnost se odehrává většinou mezi těmito póly. Proto někdy budeme používat opatrnější formulace a mluvit raději o míře (ne)formálnosti dané znalosti ve vědomí daného žáka.“

(Hejný, Kuřina, 2009, str. 149)

Jedním z možných postupů, jak zmírnit tendenci k vytváření formálních znalostí u žáků, je uplatňování konstruktivistického stylu výuky. Konstruktivistický edukační styl výuky napomáhá žákům získat hloubkový přístup k učení[1]. Dále stručně zmíním, co je to konstruktivismus, a jaký je rozdíl mezi transmisivním a konstruktivistickým stylem výuky.

1.2 Konstruktivismus, konstruktivistický edukační styl

Pedagogický slovník definuje konstruktivismus jako:

„Široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností. V tomto smyslu je také interakční teorií překonávající jednostrannost empirismu a nativismu. V didaktice je jedním z dominantních soudobých paradigmat, dělících se do několika proudů.“

(Průcha, Walterová, Mareš, 2001, str. 105)

V následujícím citátu Hrbáčková objasňuje, jak souvisí konstruktivismus s aktivitou žáka:

„Konstruktivistický přístup vychází z toho, že když se člověk učí, nevstřebává a neosvojuje si nové porozumění pasivně. Naopak, nové informace se aktivně integrují do dosavadní kognitivní struktury a jsou pochopeny prostřednictvím těchto schémat, která člověk má, ale současně je mohou také přetvářet. Proto je vše, co se člověk učí,

[1] Rozdíl mezi hloubkovým a povrchovým přístupem k učení je podrobně popsán v (Mareš, 1998, str. 21)

zasazeno do kontextu toho, co už předem ví. Každý z nás si prostřednictvím interakcí vytváří vlastní způsoby, struktury porozumění světu."

(Hrbáčková, 2006, str. 9)

Ve světové didaktice matematiky se myšlenka konstrukce vlastních poznatků žáky začíná výrazněji objevovat ve druhé polovině 20. století. U nás jsou hlavními představiteli konstruktivismu František Kuřina a Milan Hejný, kteří formulovali tzv. desatero konstruktivismu, jež odráží jejich představy o výuce matematiky:

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického poznání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

(Hejný, Kuřina, 2009, str. 194–195, cit. podle Stehlíková, 2004, str. 13)

Zvláště body 2, 3, 4, 7 a 9 se týkají vzniku poznatku s cílem, aby tento poznatek nebyl formální, přičemž v bodě 10 je přímo uvedeno, jak vzniká formální poznání.

Ve (Vondrová, 2014, str. 10) je pro vyučování založené na konstruktivistických zásadách používáno označení podnětná výuka. Pro tento přístup k výuce je typická aktivní role žáka, který si prostřednictvím své vlastní činnosti získává poznatky ze světa matematiky. Zcela zásadní je role učitele, která by měla být založena na sedmi následujících principech. Učitel:

1. probouzí zájem o matematiku a její poznávání

Za nejcennější je považována motivace k matematickému objevování.

2. předkládá žákům podnětná prostředí, úlohy a problémy

Za podnětné jsou považována taková prostředí, úlohy nebo problémy, které jsou pro žáka motivační, vedou ke konstrukci nových matematických poznatků nebo přinášejí nové matematické souvislosti a umožňují přitom žákům využít jejich předchozích znalostí a zkušeností.

3. podporuje žákův aktivní přístup k získávání poznatků
4. rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení v matematice
5. nahlíží na chybu žáka jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci

Žák by neměl být za chybu penalizován a měl by dostat prostor sám svou chybu odhalit.

6. iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů
7. orientuje se u žáků na diagnostiku porozumění

(Vondrová, 2014, str. 11–14)

1.3 Mechanismus poznávacího procesu podle Hejného

Základ této teorie je nutné uvést, protože objasňuje, jak probíhá poznávací proces, při kterém žáci získávají neformální poznatky. K tomu, aby byl poznávací proces vyvážený a plnohodnotný, musí podle Hejného obsahovat několik etap (hladin) a jeho součástí musí být alespoň jeden abstrakční zdvih. Takto člení Hejný hladiny poznávacího procesu ve své publikaci z roku 2014:

motivace	→	izolované modely	1→	generický model	2→	abstraktní poznatek	→	krystalizace

(Hejný, 2014, str. 40)

Poznávací proces je rozčleněn na 5 hladin a čísly 1 a 2, jsou označeny abstrakční zdvihy.

Motivace

Je to napětí, které vzniká v mysli žáka z rozporu mezi „nevím“ a „chci vědět“. Děti v předškolním a mladším školním věku jsou vybavené přirozenou zvídavostí, která je zároveň nejsilnější motivací, protože vyplývá z jejich přirozené potřeby a touhy po poznávání.

Hladina izolovaných modelů

V této fázi se žák setkává s konkrétními případy budoucího poznání, které se nazývají izolované (separované) modely. Toto je velmi důležitá etapa budování neformálních poznatků, kterou nelze přeskočit a není dobré ji ani urychlovat. Za touto hladinou následuje 1. abstrakční zdvih. Z hlediska žáka jde o učinění objevu, který bývá doprovázen silným prožitkem radosti tzv. aha efektem.

Hladina generických modelů

Později se jednotlivé izolované modely začnou seskupovat, ukazovat na sebe, až dojde k jejich propojení a vzniku generického (univerzálního) modelu. Generický model je reprezentací určité skupiny izolovaných modelů. Za touto hladinou následuje 2. abstrakční zdvih.

Abstraktní znalost

Jde o vyšší úroveň poznání, často bývá doprovázena používáním matematické symboliky. K reprezentaci izolovaných modelů už není potřeba obecný generický model, v této fázi je už model nahrazen abstraktním poznáním, které může být doprovázeno používáním čísel a symbolů.

Krystalizace

Jde o propojování nových poznatků s již existujícími poznatky v kognitivní struktuře žáka. Tento proces je většinou dlouhodobý a má individuální délku trvání u každého žáka. Při této etapě vznikají nové vztahy mezi novými a stávajícími poznatky žáků. Může dojít i ke změně některých vztahů vlivem nového poznání.

Za krystalizací následuje ještě automatizace, při níž dochází k zautomatizování nabytých poznatků. V této etapě poznávacího procesu už žák nemusí vynakládat zvýšené úsilí při opětovném použití nabytých vědomostí, neboť je používá zcela automaticky. Při automatizaci nedochází k vzniku nových poznatků, proto není součástí poznávacího procesu, i když na něj bezprostředně navazuje.

1.4 Transmisivní edukační styl

Transmisivní styl výuky je založen na přenosu informací. Učitel je v roli autority, která předává žákům informace prostým sdělováním. Žáci informace většinou pasivně přijímají. Tento styl výuky upřednostňuje výkon žáka před jeho osobním rozvojem. Učitel zpravidla dokáže vyložit velké množství učiva, žáci nemusí probranému učivu rozumět, stačí, když ho dokáží reprodukovat.

Někdy je důraz kladen na předávání dobře zapamatovatelných instrukcí, které žáci mají za úkol provést většinou, pokud se setkají s určitým signálem nebo napovídajícím kontextem. Typ transmisivního stylu výuky, který je zaměřen na předávání instrukcí (algoritmů, postupů, předpisů), se nazývá instruktivní. Hejný a Stehlíková (1999, str. 31) označují instruktivní styl za obzvlášť nebezpečný případ transmisivního vyučování.

Nevýhodou tohoto stylu výuky je zejména to, že nenechává žákům dostatečný prostor pro jejich seberealizaci, nerozvíjí jejich tvořivost a schopnost kriticky myslet. Vědomosti žáků jsou uloženy pouze pamětně, nebývají dlouhodobé. Tento výukový styl se tradičně používá na většině škol, často je spojen s frontální výukou. Při tomto výukovém stylu je velké riziko vzniku formálních poznatků u žáků. Tato tendence je ještě podporována způsobem hodnocení. Jsou-li formální poznatky hodnoceny stejně nebo dokonce lépe než neformální, vede přirozená ekonomie chování žáky k preferenci formálních znalostí.

Srovnání konstruktivistického a transmisivního vyučování

	polaritní dipól	**konstruktivistické vyučování**	**transmisivní vyučování**
1	hodnota poznání	kvalita	kvantita
2	motivace	vnitřní	vnější
3	trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
4	vztah učitel–žák	partnerský	submisivní
5	klima	důvěry	strachu
6	nositel aktivity	žák	učitel
7	činnost žáka	tvořivá	imitativní
8	poznatek žáka	produktivní	reproduktivní
9	nosná otázka	CO? a PROČ?	JAK?

Tab. 1

(Hejný, Stehlíková, 1999, str. 33)

Body 1, 3, 7, 8 a 9 je možné považovat za nebezpečné z hlediska rizika vzniku formálního poznání.

1.5 Diagnostika formálního poznatku

Formální poznatek není hlouběji ukotven v kognitivní struktuře žáka. Jinými slovy, žák nevidí souvislosti mezi tímto poznatkem a svými ostatními znalostmi. Žák neumí tento poznatek správně použít, jak by se dalo předpokládat, proto je pro učitele celkem snadné formálnost vědomostí žáků odhalit správně položenými otázkami. Hejný doporučuje, aby učitelé při diagnostice formálního poznání využili následující typy úloh:

1. Objasnit paradox.
2. Najít náhradní řešení, když standardní řešení selže.
3. Přenést známou argumentaci do nového kontextu.
4. Rozhodnout o platnosti neznámé věty.
5. Vytvořit objekt požadovaných vlastností.
6. Dát nestandardní definici známého objektu.
7. Vyřešit úlohu vyžadující propojení několika dílčích poznatků.

(Hejný, 2004, str. 41)

Formálnost poznatku je natolik významný jev, že jej lze popsat prakticky v libovolné teorii vzniku poznatku či taxonomii poznatků. Jako příklad můžeme uvést patrně nejznámější tzv. Bloomovu taxonomii, která vyjadřuje výukové cíle aktivními slovesy. Formální poznatek v tomto případě odpovídá dosažení pouze 1. z cílů a nejvýše cíle 3., a to pouze v úzce vymezeném kontextu.

Bloomova taxonomie kognitivních cílů:

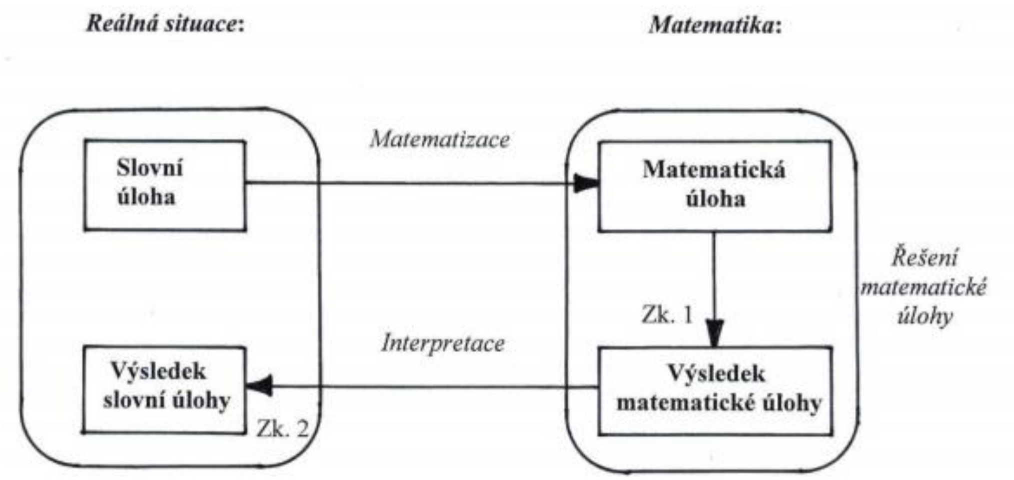
1. **Znalosti**: Prostá znalost faktů, výrazů, teorií atd.
2. **Porozumění**: Porozumění významu těchto znalostí.
3. **Uplatnění**: Schopnost uplatnit tuto znalost a porozumění v nových konkrétních situacích.
4. **Analýza**: Schopnost rozdělit látku na její stavební součásti a rozpoznat vztahy mezi nimi.
5. **Syntéza**: Schopnost uspořádat tyto součásti do nových a smysluplných vztahů a tím vytvořit nový celek.
6. **Hodnocení**: Schopnost posoudit hodnotu látky s použitím explicitních a soudržných kritérií buď vytvořených samostatně, nebo odvozených z práce jiných.

(Bloom, 1956, cit. podle Fontana, 1997, str. 161,) Ve svém výzkumu jsem se zaměřila na další důležitou vlastnost formálního poznatku a to, že je vázán na kontext, ve kterém vznikl. K aktivaci formálního poznatku dochází na základě signalizace tohoto kontextu povrchními jevy specifickými pro tento kontext, jako je terminologie či struktura úloh. Při rozsáhlém počtu žáků, který jsem zařadila do svého výzkumu, nebylo v mých silách žáky sledovat přímo při řešení úloh, proto jsem použila jako výzkumný nástroj test složený z osmi úloh, z nichž šest jsou slovní úlohy.

1.6 Řešení slovních úloh

Slovním úlohám se věnovala řada našich i zahraničních autorů, např. Vyšín (1962), Fridman (1977), Novotná (2000), Šíma (2003) a mnoho dalších. Dále se budu věnovat pouze postupu řešení slovních úloh.

Šíma se zabývá řešením slovní úlohy žáky na ZŠ a SŠ. Vysvětluje, že při řešení slovní úlohy se žáci učí matematizovat reálné situace a pro tento účel používá následující schéma:



Obr. 1

(Šíma, 2013, str. 13)

Toto schéma matematizace reálné situace uvádějí téměř ve stejné podobně i další autoři, např. Novotná nebo Odvárko. Celý proces lze rozdělit na tři fáze. Nejprve žák matematizuje reálnou situaci s využitím informací ze zadání slovní úlohy. V druhé fázi žák řeší matematickou úlohu a s využitím prostředků matematiky dochází k hledanému řešení. Ve třetí fázi žák interpretuje výsledky matematické úlohy v reálném kontextu slovní úlohy.

Matematizace může mít různé podoby. V běžných školských úlohách znamená zpravidla převod do stavu, kdy už je úloha dále řešitelná algoritmy školské matematiky (jako řešení rovnic). V případě mého výzkumného testu žáci 6. ročníku plnou matematizaci v tomto smyslu provést nemohli, protože jim příslušný aparát nebyl znám. Očekávala jsem tedy použití nejjednodušší formy matematizace, tvorbu modelu.

2 Rešerše učebnic

V této kapitole věnované rešerším učebnic se budou objevovat ukázky z jednotlivých učebnic. Rozhodla jsem se proto, že odkazy na učebnice zde budu kvůli jednoznačnosti a přehlednosti uvádět nikoliv ve standardní formě odkazu na literaturu, nýbrž ve tvaru (autor: název učebnice, strana).

Mým prvním výzkumným cílem bylo zmapovat propedeutiku a výuku dělitelnosti skrze používané učebnice. Pro účely své práce jsem cíle formalizovala takto:

1. Detailně zmapovat výklad tématu dělitelnost ve všech učebnicích pro základní školu.
2. Zhruba zmapovat výskyt a formy propedeutiky dělitelnosti v reprezentativním vzorku učebnic pro 1. stupeň a 2. stupeň.

Za stěžejní považuji výklad tématu dělitelnosti v používaných učebnicích, který jsem proto označila za první výzkumný cíl. Rešerše učebnic obsahující výklad dělitelnosti jsem se snažila zpracovat v plné šíři a v odpovídající míře podrobnosti. Průběh propedeutiky dělitelnosti jsem se pokusila nastínit v hrubých obrysech, abych zjistila, nakolik měli žáci připraveny prekoncepty, které jsou důležité pro výuku dělitelnosti. Z toho důvodu jsem nezmapovala všechny učebnice, ale pouze 5 řad učebnic, které jsme považovala za reprezentativní vzorek. Výsledky výzkumu jsem ve své práci řadila chronologicky, tzn. nejprve propedeutika a pak výuka dělitelnosti.

Rozhodla jsem se, že se budu zabývat všemi učebnicemi pro 1. a 2. stupeň, které jsou schváleny MŠMT a v nichž je výklad učiva z tématu dělitelnost. Pracovní sešity jsem nemapovala, protože v nich není uveden výklad dělitelnosti, a protože nejsou součástí všech učebnicových řad. Do svého výzkumu jsem zařadila deset učebnic pro tradiční styl výuky (devět učebnic pro 6. ročník a jednu učebnici pro 7. ročník) a tři učebnice pro konstruktivistický styl výuky (učebnici pro 4., 5. a 6. ročník) autorů Hejný a kol. Snažila jsem se každou učebnici posoudit z několika hledisek, která uvádím zde:

1. jak jsou v učebnici zavedeny pojmy
2. jaká tvrzení se v učebnici vyskytují
3. nakolik jsou tato tvrzení odvozena

4. pro jaký výukový edukační styl je učebnice vhodná[2]
5. zda se v učebnici vyskytuje základní učivo nebo i rozšiřující učivo
6. je-li učebnice přehledná a zda má jednotnou grafickou úpravu
7. zda je učebnice moderní[3] a jestli obsahuje návrhy na využití moderních technologií
8. jsou-li příklady použité k objasnění nového učiva dostatečně názorné a přiměřeně obtížné
9. obsahuje-li učebnice dostatečné množství úloh na procvičení
10. je-li učebnice v nějakém ohledu alternativní, tj. odlišná od standardu nastaveného ostatními učebnicemi

Obsah každé z vybraných učebnic jsem podrobně popsala v jednotlivých kapitolách. Nakonec jsem učebnici zhodnotila z výše uvedených hledisek a sestavila jsem pro přehlednost tabulku, která slouží k porovnání zkoumaných učebnic z výše uvedených hledisek. Tato tabulka je obsažena v příloze A.

Propedeutikou dělitelnosti budu nazývat takové prvky ve výuce, které žáky připravují pro snazší pochopení budoucího výkladu učiva z tohoto tématu. Nerozlišuji, zda se tak děje úmyslně nebo neúmyslně. Na rozdíl od rešerše učebnic obsahujících výklad dělitelnosti nestačilo zpracovat vymezené téma, bylo zapotřebí učebnice důkladně projít napříč kapitolami a zaměřit se na prvky, které rozvíjejí prekoncepty z tématu dělitelnost. K tomuto účelu jsem si vybrala pět řad učebnic pro 1. stupeň, a sice učebnice nakladatelství Alter, Fraus, Prodos a SPN a jednu učebnici spol. H-mat pro 2. stupeň určenou pro výuku Hejného metodou. Významnou pozici v této kapitole zaujímají učebnice pro výuku Hejného metodou (nakladatelství Fraus pro 1. stupeň, spol. H-mat pro 2. stupeň). Tyto učebnice totiž ve srovnání s tradičními učebnicemi obsahují výrazně větší množství propedeutiky dělitelnosti, proto je jim v mé práci věnován větší prostor.

Rešerše učebnic je pro mě především zkoumáním toho, jak se dělitelnost učí, a proto ji doplňuji rozhovory s učiteli na téma jejich vlastní výuky tohoto tématu. Lépe již lze zjistit realitu výuky dělitelnosti jen pozorováním reprezentativního vzorku skutečné výuky, což metodologicky přesahuje horizont této práce.

---

[2] *Učitel může obsah učebnice zpracovat libovolným způsobem a je tedy teoreticky možné podle kterékoliv učebnice učit libovolným způsobem. Vhodností pro určitý výukový styl rozumím to, že je pro něj učebnice přizpůsobena, tedy že umožňuje své přímé použití ve výuce s minimálním přepracováním učitelem.*
[3] *Za moderní zde bude považována učebnice, která respektuje školskou realitu, zohledňuje soudobé výukové nástroje a didaktické trendy (mezipředmětové vztahy, rozvíjení kompetencí atd.)*

Následující rozbor je členěn vzhledem k cílům, nejprve se zabývám propedeutikou a pak výkladem. Jelikož jsem při svém výzkumu narazila i na učebnice, v nichž je obsažena jak propedeutika, tak výklad, některé učebnice se proto mohou vyskytovat v obou částech této kapitoly.

2.1 Propedeutika dělitelnosti v tradičních učebnicích

Za tradiční učebnice považuji všechny kromě učebnic určených pro Hejného metodu. Toto rozdělení podporuje srovnání jejich obsahu (viz tabulka v příloze A).

Podklady pro zpracování následující kapitoly jsem čerpala z běžně dostupných učebnic pro první stupeň vydávaných nakladatelstvími Alter, Fraus, Prodos a SPN. Výjimečně jsem zařadila i učebnice z jiných nakladatelství, pokud se mi v nich podařilo nalézt podnětné netradiční úlohy. Další informace jsem získávala z rozhovorů s pedagogy, kteří učí na prvním stupni ZŠ. Tyto poznatky jsem dále porovnávala s rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), jehož část zde cituji. V RVP ZV pro oblast Matematika a její aplikace se propedeutika dělitelnosti neobjevuje. Je jen implicitně obsažena v některých výstupech a učivu, které zde uvádím.

ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Očekávané výstupy – 1. období žák

- provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace

Očekávané výstupy – 2. období žák

- využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení
- provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel

Učivo

- násobilka
- vlastnosti početních operací s přirozenými čísly
- písemné algoritmy početních operací

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/opatreni-ministra-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-kterym-se-4

V tradičním pojetí didaktiky matematiky, kterému je přizpůsobena většina učebnic používaných k výuce matematiky na ZŠ, je učivo rozděleno na tematické celky, které následují jeden za druhým a jsou uspořádány logicky za sebou, aby se žáci nejprve seznámili se základními znalostmi z matematiky a později jsou tyto znalosti rozšiřovány o další témata. Učivo je zpravidla žákům nejprve vyloženo a pak jsou probrané znalosti procvičeny na příkladech.

2.1.1 Učebnice pro 1. ročník ZŠ

V první třídě se žáci seznamují s pojmem číslo, učí se rozumět tomuto pojmu a trénují početní operace sčítání a odčítání. Většinou pracují s čísly od 1 do 20. Osvojení si těchto znalostí a dovedností je nezbytné pro rozvíjení dalšího matematického poznání. Propedeutika dělitelnosti se zde nevyskytuje.

2.1.2 Učebnice pro 2. ročník ZŠ

Ve druhé třídě se žáci učí sčítat a odčítat do 100. Seznamují se s operací násobení a dělení a později dělí v oboru malé násobilky. Učebnice nakladatelství SPN obsahují pouze násobilky dvou tří, čtyř a pěti. V některých učebnicích se objevuje počítání se závorkami. Násobení je ve většině učebnic odvozeno zcela přirozeně jako opakované sčítání, což vytváří představu o násobcích čísla. Běžné je zaznamenávání násobků jednotlivých čísel do tabulky. V učebnicích nakladatelství Alter je vždy při zavádění násobilky dalšího čísla využita číselná osa, na které jsou vyznačeny násobky daného čísla. Vzdálenosti mezi těmito násobky jsou vyznačeny šipkami, aby bylo zdůrazněno, že jsou stejné. V učebnicích tohoto nakladatelství se též objevuje znázornění násobení na čtverečkovaném papíře, které považuji za velmi vhodné a názorné. Porozumění operacím násobení a dělení je nutné pro porozumění dělitelnosti, proto je možné nácvik malé násobilky považovat za propedeutiku dělitelnosti (především konceptu násobku), bez které není možné učivu dělitelnosti porozumět.

2.1.3 Učebnice pro 3. ročník ZŠ

Ve třetím ročníku si žáci dále osvojují jim již známé početní operace v oboru přirozených čísel. Dále se seznamují s tématy, které s dělitelností nesouvisejí, proto se v dalších kapitolách zaměřím pouze na učivo, které s dělitelností přímo souvisí, a které by mohlo mít vliv na pozdější správné porozumění poznatkům z dělitelnosti.

Některé učebnice pro 3. třídu seznamují žáky s násobilkou šesti až deseti. Ty řady učebnic, ve kterých již byla násobilka probrána ve 2. ročníku, se věnují jejímu procvičování a uvádějí slovní úlohy na malou násobilku. Také se předpokládá, že při procvičování násobení by žáci měli porozumět komutativitě násobení. V učebnicích nakladatelství Fraus si žáci osvojují násobení a dělení mimo obor násobilek až do 100 a násobí zpaměti dvouciferné číslo jednociferným číslem. V učebnicích nakladatelství Alter a Fraus se žáci učí dělit se zbytkem.

V mnoha učebnicích se žáci poprvé seznamují s pojmem sudé a liché číslo (Fraus, Prodos, SPN). Učebnice nakladatelství SPN zmiňuje násobení pěti, deseti a stem a seznamuje žáky s označením stokrát menší a stokrát větší.

2.1.4 Učebnice pro 4. ročník ZŠ

Ve 4. ročníku žáci procvičují a upevňují získané znalosti početních operací. Procvičují pamětní dělení a násobení v oboru i mimo obor násobilek a postupně si osvojují postup při písemném násobení nejprve jednociferným později dvouciferným a trojciferným číslem. Ve většině učebnic (Alter, Prodos, SPN) se rovněž objevuje písemné dělení čísel jednociferným číslem se zbytkem i beze zbytku. V učebnicích jsou též obsaženy slovní úlohy na násobení a dělení.

Učebnice nakladatelství Prodos upozorňují na komutativitu násobení a formálně ji definují. Stejně jako v učebnici nakladatelství Alter se zde vyskytují pojmy dělenec, dělitel, podíl, činitel a součin, které se v jiných učebnicích objevují až v 5. ročníku. V učebnici nakladatelství Fraus se žáci seznamují s rozvinutým zápisem čísla v desítkové soustavě.

2.1.5 Učebnice pro 5. ročník ZŠ

Schopnost provádět početní operace násobení a dělení je nadále procvičována a prohlubována. Nejdříve jsou v učebnicích většinou zařazeny úlohy na pamětní dělení a násobení (Alter, Scientia, SPN). Dále následuje výklad písemného dělení jednociferným a dvouciferným číslem. Při písemném dělení se žáci znovu setkají s pojmem zbytek po dělení daným číslem. Rovněž je trénován odhad, kolikrát je dělitel obsažen v dělenci. Učebnice nakladatelství Alter obsahuje násobení a dělení deseti, stem a tisícem. Vyskytuje se zde i otázka, kdy je zbytek při dělení deseti nula, což je propedeutika dělitelnosti deseti. V této učebnici je též grafické znázornění dělení a dělení se zbytkem a poučka, že zbytek je menší než dělitel. Pojmy dělenec, dělitel, podíl, neúplný podíl, činitel a součin jsou obsaženy v učebnicích nakladatelství Fraus, Alter a SPN. Žáci řeší složitější slovní úlohy, při jejichž řešení využívají násobení a dělení. V učebnici nakladatelství SPN se žáci setkávají s rozvinutým zápisem čísla v desítkové soustavě.

V učebnici nakladatelství Scientia se objevuje alternativa k tradičnímu písemnému násobení nazvaná Gelosia. Tuto metodu najdeme v Hejného učebnicích pod názvem indické násobení. Za zmínku také stojí učebnice *Svět čísel a tvarů* nakladatelství Prometheus. Tato učebnice podle mého názoru obsahuje velké množství netradičních podnětných úloh, které jsou propedeutikou dělitelnosti a svou složitostí přispívají k hlubšímu porozumění učivu.

2.2 Propedeutika dělitelnosti a výuka dělitelnosti v učebnicích Hejného metody

Pro porozumění čtení této kapitoly předpokládám základní obeznámenost čtenáře s učebnicemi Hejného metody a v nich používanou terminologií.

Dalším znakem, kterým se zásadně liší Hejného učebnice od tradičních učebnic, je členění učiva. Zatímco v tradičních učebnicích se propedeutika dělitelnosti vyskytuje na 1. stupni a výuka je soustředěna v jedné kapitole na 2. stupni, v učebnicích pro výuku Hejného metodou je tomu jinak. V těchto učebnicích se propedeutika i výuka do jisté míry prolíná, neboť v prvostupňových učebnicích lze najít propedeutiku i výuku dělitelnosti a totéž lze říci o učebnicích pro 2. stupeň a tomu též odpovídá mé zařazení učebnic do oddílů zabývajících se propedeutikou a výukou.

Učebnice Hejného metody jsou určeny pro konstruktivistický edukační styl výuky, jehož principy jsou popsány v oddíle 1.2. Koncepce Hejného učebnic je touto skutečností ovlivněna, a proto se tyto učebnice zásadně odlišují od tradičních učebnic. Při výuce Hejného metodou je úkolem učitele žáky pozitivně motivovat, využít jejich přirozené zvídavosti a zaujmout je úlohou, která je jim svou povahou blízká a vidí smysl v hledání správného řešení. Žáci získávají své poznatky z vlastních zkušeností řešením různých úloh a problémů. Poznatky jsou též upevňovány emociálně, protože při odhalení zákonitostí a vztahů nezřídka dochází u žáků k aha efektu[4]. Žáci se také učí své názory správně formulovat při komunikaci s učitelem a spolužáky, která má v Hejného metodě důležitou roli. Vzájemné učení a výměna názorů a poznatků mezi spolužáky je totiž významnou součástí výuky a poznávání. Další významnou výukovou zásadou je poskytnutí dostatečného množství konkrétních, tzv. izolovaných[5] modelů daného problému žákům, aby si mohli snáze vytvořit obecný, tzv. generický model dané situace a dospěli až k abstraktnímu poznání.

Poznávací proces žáků se z velké části odehrává v didaktických matematických prostředích, jichž je využíváno k tomu, aby žáci mohli odvozovat své vlastní poznatky.

4 náhlé pochopení dříve nesrozumitelného problému vhledem, bývá doprovázen pocity radosti a uspokojení
5 přesné vymezení pojmů izolovaný a generický model nalezne čtenář v (Hejný 2004, str. 28)

„Didaktickým matematickým prostředím rozumíme takový soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit další úlohy:

- umožňující žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky
- obdařené silným motivačním potenciálem
- přiměřené žákům jak 1., tak 2. stupně
- s nastavitelnou obtížností“

(Hejný, 2014, str. 13)

Učebnice Hejného metody jsou velmi důmyslně propracované. Většina látky je probírána v tematických prostředích. V souladu s principy teorie výuky touto metodou se témata v jednotlivých prostředích prolínají a řešení úlohy v určitém prostředí vyžaduje kombinaci poznatků z více témat. V prostředích žáci řeší nejprve jednoduché úlohy, aby se seznámili se zákonitostmi, které zde platí. Postupně je obtížnost úloh stupňována až na úroveň abstraktního poznatku. Jen občas odpovídají názvy tematické celků těm, které se vyskytují v tradičních učebnicích (Dělení jednomístným číslem, Zlomky). I těchto případech jsou pojmy budovány pomocí podnětných úloh, nikoliv tradičním výkladem faktů. Koncepce výuky v Hejného učebnicích je v souladu s teorií generického modelu, která popisuje mechanizmus poznávacího procesu a teorií vyučování orientovaného na budování schémat.

V tab. 2 jsou očekávané znalosti žáků po ukončení jednotlivých tříd 1. stupně při absolvování výuky Hejného metodou, které mají souvislost s propedeutikou a výukou dělitelnosti.

Očekávané výstupy pro jednotlivých ročníky vyučované Hejného metodou, které mají souvislost s propedeutikou dělitelnosti				
1. ročník	2. ročník	3. ročník	4. ročník	5. ročník
	Žák získává porozumění pro násobení jednomístným číslem v různých kontextech sémantických i strukturálních. Násobí formou opakovaného sčítání. Dělí v oboru probraných násobilek.	Dobře se orientuje v situacích s násobením i dělením. Umí násobit vícemístná čísla a dělit trojmístné číslo jednomístným. Osvojuje si pojem prvočíslo. Zná dělitelnost čísly 2, 5 a 10. Násobí 10.	Počítá v číselném oboru do 1 000 000. Dělí dvoumístným číslem se zbytkem.	Dělí trojmístným číslem se zbytkem. Počítá v některých jiných číselných soustavách.

Tab. 2

(Hejný a kol.: *Matematika 3, příručka pro učitele*, str. 14–15)

2.2.1 Učebnice Hejného metody pro 1. třídu

Učivo 1. třídy se i při výuce Hejného metodou zaměřuje především na porozumění pojmu číslo, zvládnutí početních operací sčítání a odčítání pro čísla od 1 do 20. Žáci kromě toho řeší úlohy, které trénují jejich smysl pro pravidelnost a vzory, např. doplňují periodicky se opakující barevný vzor v přímce nebo v rovině. Později je vzor kombinován s číselnou řadou. Vnímají periodicitu kalendáře. Ve hře „Kolik je na obrázku tanečnic?“ žáci dělí počet rukou dvěma, aby získali počet tanečnic.

2.2.2 Učebnice Hejného metody pro 2. třídu

Násobení je možno považovat za propedeutiku dělitelnosti, protože bez porozumění operacím násobení a dělení nelze porozumět ani dělitelnosti. Násobení je v Hejného učebnicích odvozeno jako opakované sčítání. K nácviku je využito sčítacích šipek, kdy žáci přičítají stále stejné číslo. Při probírání násobilek jednotlivých čísel žáci sami zapisují násobky daného čísla do tabulky. V učebnici se vyskytují příklady na násobení, ve kterých jsou tři činitelé. Takové příklady jsou důležité, protože žáky seznamují s postupným násobením a mohou přispět k pochopení asociativity násobení.

K pochopení dělitelnosti též přispívají slovní úlohy, v kterých se vyskytují různá zvířata (holubi, psi, kozy) a žáci mají zjistit, např. kolik má daná skupina zvířat dohromady hlav, nohou, křídel, očí atd. Dalšími úlohami, které procvičují dělení, jsou úlohy, ve kterých se vyskytuje násobení a dělení různých počtů dvoukorunových a pětikorunových mincí. Násobilkové obdélníky procvičují násobení, ale i dělení, protože žáci dopočítávají čísla na různých pozicích.

Učebnice též obsahuje mnoho úloh z denního života, které žákům umožňují lépe pochopit operaci násobení. Jsou např. slovní úlohy typu: „Kolik je v bonboniéře bonbónů?“, „Na jednu dávku moučníku je potřeba určité množství surovin. Jaké množství je potřeba na dvě, tři nebo čtyři dávky?“

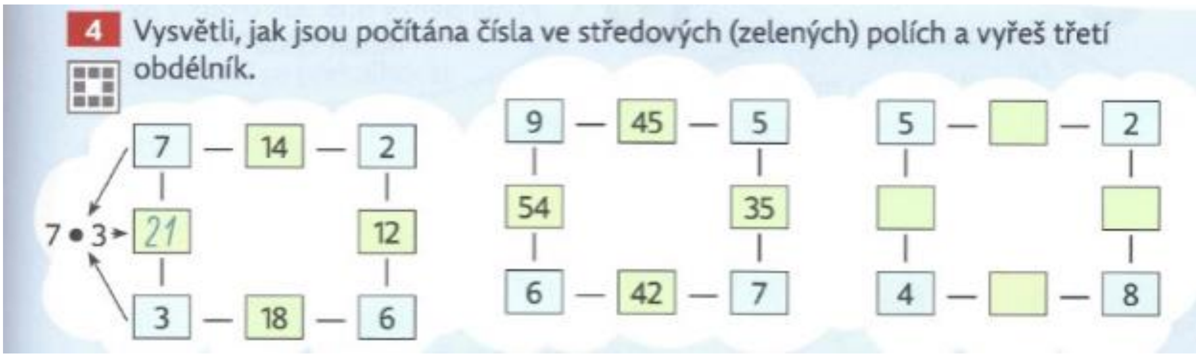
V dalších úlohách se objevuje řada, jejíž prvky jsou pravidelně se opakující různě barevná písmena. Barev je vždy jiný počet, než jaký je počet písmen. Takovéto úlohy považuji za propedeutiku společného násobku dvou čísel, protože jeho hodnota určuje, po kolika písmenech se stejná písmena stejné barvy opakují. Další obdobou těchto úloh jsou řady na doplňování vzoru složeného z barevných tvarů.

2. díl učebnice pro 2. třídu obsahuje v zásadě stejná prostředí a typy úloh jako 1. díl. Úlohy v 2. dílu mají většinou vyšší obtížnost. Žáci se znovu setkávají se slovní úlohami, v nichž se vyskytuje počítání částí těla různých zvířat. Jsou ztíženy tak, že žáci znají celkový počet zvířat a počet nohou a mají určit počet kusů jednoho druhu zvířat. „Na dvoře je pět zvířat, kozy a husy. Dohromady mají čtrnáct nohou. Kolik je hus?“

2.2.3 Učebnice Hejného metody pro 3. třídu

V učebnici pro 3. třídu ještě není samostatná kapitola dělitelnost, ale žáci jsou již systematicky připravováni na to, že se s dělitelností setkají v následující učebnici pro 4. třídu a různých prostředích řeší zatím jednodušší úlohy, které budou postupně směřovat k osvojení si důležitých poznatků z oblasti dělitelnosti. Tato prostředí popíšu v následujícím výčtu a zmíním druhy úloh, které v nich žáci řeší.

Násobilkové obdélníky



Obr. 2 Násobilkové obdélníky v učebnici pro 3. třídu

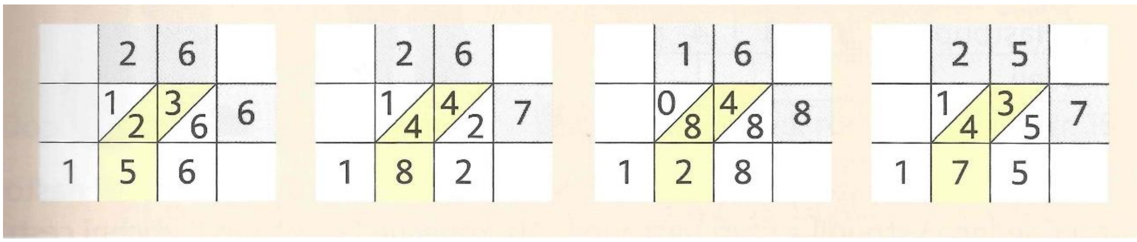
(Hejný a kol.: *Matematika učebnice pro 3. ročník základní školy,* str. 5)

S tímto prostředím, které je zachyceno na obr. 2, se už žáci setkali v učebnici pro 2. třídu. V učebnici pro 3. třídu se objevují složitější úlohy. Žáci pracují se součtem čtyř středových čísel a sledují, jak se mění v závislosti na změně rohových čísel. Další úkolem žáků je doplnit dvě vynechaná rohová čísla, když znají součet čtyř středových čísel.

Další úlohou jsou „neposedové“. Všech osm čísel je zapsáno mimo obdélník a žáci je mají doplnit na správná místa. Tato úloha je zřejmou propedeutikou dělitelnosti, protože žáci hledají společný násobek dvou čísel a přemýšlejí o tom, které číslo je dělitelem jiného čísla.

Indické násobení

Indické násobení je alternativní způsob písemného násobení, které používali staří Indové. Příklad tohoto způsobu násobení je zobrazen na obr. 3. Činitelé se zapisují do tabulky, jeden vodorovně, druhý svisle. Součin dvou cifer vždy zapíšeme do políčka, které je rozděleno diagonálně tak, že nahoře jsou desítky, dole jednotky. Postupné součiny pak sečteme diagonálně a získáme výsledek.



Obr. 3 Indické násobení v učebnici pro 3. třídu

(Hejný a kol.: *Matematika učebnice pro 3. ročník základní školy*, str. 17)

S indickým násobením se žáci seznamují ihned po zvládnutí operace násobení. V tomto prostředí jsou pak žákům zadávány různé úlohy, pro které je indické násobení vhodnější než běžné násobení. Nejprve se žáci v prostředí indického násobení učí násobit dvě dvoumístná a pak i dvě trojmístná čísla, později řeší úlohy na doplnění chybějících cifer v číslech činitelů.

Mince

V úlohách s mincemi se vyskytují korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince. Obtížnost úloh se stupňuje. Většinou mají žáci zjistit, kolika způsoby lze zaplatit určitou finanční částku a jaké mince je k tomu možné použít.

Biland

Biland je fiktivní země, kde se platí groši. Groše (g) jsou označeny písmeny od nejmenší hodnoty Ag, Bg, Cg, atd. Dva Ag mají stejnou hodnotu jako jeden Bg. Dva Bg se rovnají jednomu Cg. Typická úloha v bilandu pak může být: „Převeď sumu Dg + Cg + Bg na Ag.“

Prostředí biland je velmi přirozenou propedeutikou dvojkové soustavy. Je možné ho též považovat za propedeutiku dělitelnosti dvěma. Příklady na převody z desítkové soustavy do jiných číselných soustav se dříve vyskytovaly v učebnicích pro základní školy, současné učebnice tradičního výukového stylu ale převody do jiných soustav neobsahují.

Práce s tabulkou čísel

V úlohách tohoto typu žáci pracují nejprve s menšími tabulkami a pak se stovkovou tabulkou, v níž hledají různé cesty, které jsou označené šipkami a zjišťují jejich součet. Součet cesty je roven součtu čísel, která na dané cestě leží. Později hledají cesty podle hodnoty jejich součtu. Další obměnou těchto úloh je hledání největšího součtu pěkné čtveřice v tabulce čtyři krát čtyři, tj. takové čtveřice, jejíž čísla jsou v každém řádku, žádná dvě ale neleží ve stejném sloupci.

Dělení se zbytkem

K výkladu dělení se zbytkem je zde uveden příklad rozdělení sedmnácti bonbónů mezi pět dětí. Dalším rozšířením jsou úlohy, ve kterých žáci pokračují v posloupnosti čísel, která při dělení daným číslem dává zbytek jedna. Dále následují úlohy na zjištění vzdáleného čísla v této posloupnosti, k němuž se už nelze dostat postupným přičítáním.

Přeměna tvarů

Žáci mají za úkol nakreslit na čtverečkovaný papír obdélník a délce stran 15 a 2. Vhodným přestřižením se dá obdélník změnit na jiný obdélník o stejném obsahu, ale s jinak dlouhými stranami. V dalších úlohách mají žáci stejným způsobem změnit další obdélníky a najít co nejvíce způsobů řešení. Následně mají žáci za úkol přeměnit dané obdélníky na čtverce. Tento typ úloh je velmi přínosný pro nácvik hledání dělitelů daných čísel. Velmi neobvyklé je zde využití grafického řešení. V dalších úlohách je na základě těchto úloh zaveden pojem čtvercová a obdélníková čísla, pomocí nichž jsou později odvozena čísla složená a prvočísla.

Algebrogramy

Algebrogramy jsou různé příklady, ve kterých jsou jednotlivé číslice v číslech zadány písmeny. Žák pak hledá, jaké číslice představují jednotlivá písmena, tak aby byla splněna rovnost. Tyto příklady jsou dost obtížné a vyžadují zkušenost s jejich řešením. Žáci řeší úlohy metodou pokus – omyl.

2.2.4 Učebnice Hejného metody pro 4. třídu

V učebnici pro 4. třídu je kromě propedeutiky dělitelnosti, která se opět vyskytuje v různých prostředích, obsažena samostatná kapitola Dělitelnost, ve které si žáci prostřednictvím podnětných úloh mohou vytvořit mnoho poznatků o dělitelnosti. Žáci se například setkávají s pojmem číslo dělitelné daným číslem, prvočíslo, dělitelnost třemi, čtyřmi atd.

Opakování

V první opakovací kapitole jsou úlohy na mince, malou a velkou násobilku, násobilkové obdélníky, dělení se zbytkem, algebrogramy v indickém násobení a doplnění řady násobků, které mají v řádu desítek určité číslo.

Násobení a dělení

I v této kapitole většinou dochází k nácviku operace násobení pomocí podnětných úloh (např. slovních úloh) a úloh v žákům již známých didaktických prostředích, konkrétně násobilkových obdélnících, pavučinách, zvířátkách dědy Lesoně a algebrogramech. Kromě toho je v této kapitole zařazena definice sudých a lichých čísel, na niž navazují úlohy, ve kterých je úkolem rozhodnout o pravdivosti obecných tvrzení o sudých a lichých číslech.

Dělení jednomístným číslem

V této kapitole se žáci učí postup při dělení jednomístným číslem. Operace dělení je procvičována ve slovních úlohách na dělení, v úlohách zabývajících se měřením času. Dále je pak předveden trik dvojího dělení, pomocí něhož se žáci můžou vyhnout dělení dvanácti. V další úloze se vyskytují algebrogramy v dělení se zbytkem. Podnětná je úloha, ve které žáci hledají čtveřici čísel, pro kterou platí, že součin největšího a nejmenšího čísla je stejný jako součin dvou prostředních čísel.

V druhé části této kapitoly se žáci poprvé setkávají s vymezením pojmu dělitelnost čísla daným číslem, která je definována pomocí dělení beze zbytku. Následně se zde vyskytuje několik úloh, které jsou v tradičních učebnicích zařazeny až na 2. stupeň do kapitoly Dělitelnost, pokud se tam vůbec vyskytují. Prvním takovou úlohou je zápis čísla ve tvaru součinu čísel větších než jedna. Déle mají žáci za úkol v čtveřici po sobě následujících čísel najít ta, která jsou dělitelná třemi a v jiné pětici ta, která jsou dělitelná čtyřmi. Pak následuje úloha, ve které je úkolem žáků vydláždit obdélníkový dvůr čtvercovými panely. V další úloze žáci hrají hru MIN. Z hromádky sedmi kamenů odebírají jeden nebo dva kameny a vyhrává ten, kdo vezme poslední kámen. Postupně se počet kamenů zvyšuje. Další úloha je na hledání cest ve stovkové tabulce, jejichž součet je dělitelný číslem tři.

Biland

Jak už bylo řečeno, biland je propedeutikou dvojkové soustavy, která je prezentována takovým způsobem, že žáci, kteří nejprve nemají tušení, co je to dvojková soustava, jsou postupně schopni napsat zápis čísla ve dvojkové soustavě a získávají porozumění tomu, jak dvojková soustava funguje. V kapitole Dělitelnost je např. úloha, kde žáci mají rozhodnout o pravdivosti tvrzení, že číslo, které v bilandu končí nulou, je sudé a číslo, které končí jedničkou, je liché.

2.2.5 Učebnice Hejného metody pro 5. třídu

V učebnici pro 5. třídu je rovněž kapitola Dělitelnost, které navazuje na výuku dělitelnosti ve 4. třídě. Tato kapitola obsahuje úlohy, jejichž řešení vede ke stejným poznatkům, které jsou obsaženy v tradičních učebnicích pro 2. stupeň ZŠ, které se zabývají výukou dělitelnosti. Navíc žáci mohou uplatnit poznatky z dělitelnosti ještě při řešení dalších úloh, které zde budou také popsány.

V úvodní kapitole Opakování je zařazeno několik příkladů, při jejichž řešení žáci používají poznatky z dělitelnosti. Jsou to příklady, v nichž se vyskytují násobilkové obdélníky, indické násobení, dělení se zbytkem a algebrogramy. V dalších kapitolách učebnice se objevují ještě další čtyři úlohy, v nichž žáci mohou využít poznatky z dělitelnosti, a jsou to v úlohy s šipkovými grafy, mincemi, hra NIM a úloha, v níž žáci pracují s kartičkami z pexesa. V této úloze mají žáci k dispozici 12, 18 a 24 čtvercových kartiček z pexesa a mají za úkol zjistit, kolik různých obdélníků lze vytvořit z daného počtu kartiček.

Násobení a dělení

V této kapitole se žáci kromě procvičování početních operací násobení a dělení učí hledat souvislosti. Například pomocí šipkového grafu je zde ukázáno, že násobení šesti a následné dělení třemi můžeme nahradit násobením dvěma. Dále jsou zde slovní úlohy na násobení a dělení a algebrogramy na dělení se zbytkem.

V druhé části této kapitoly je předvedeno dělení dvoumístným číslem. Následují zajímavé úlohy, v prostředí hadi, kde každá šipka znázorňuje násobení nebo dělení daným číslem a úlohy v prostředí součtových obdélníků a také algebrogramy na dělení a dělení se zbytkem.

Biland a ciferník

V této kapitole jsou nejprve úlohy v prostředí biland, kde se žáci setkávají se zápisem čísel od nuly do jednatřiceti ve dvojkové soustavě. Pak řeší úlohy, ve kterých sčítají čísla ve dvojkové soustavě. V druhé části této kapitoly následuje ciferníková aritmetika, která je propedeutikou dvanáctkové soustavy. Žáci nejprve sčítají a odčítají ve dvanáctkové soustavě a pak přejdou k řešení rovnic v této soustavě. Modifikací této úlohy je práce s ciferníkem, který má sedm hodin, jde tedy o sedmičkovou soustavu.

2.2.6 Učebnice Hejného metody pro 6. třídu

V učebnici *Matematika A* samotné téma dělitelnost obsaženo není, objevuje se zde ale propedeutika dělitelnosti. Propedeutika dělitelnosti se vyskytuje v kapitolách, kde se objevují prostředí mince, šipkové grafy, indické násobení a součtové čtverce (v učebnicích Hejného a kol. pro 1. stupeň označované součtové obdélníky).

Mince

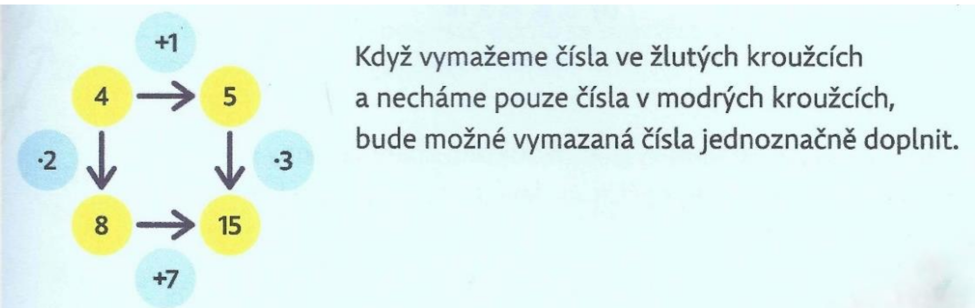
V této kapitole je pět příkladů, v nichž se objevují mince hodnot 1, 2, 5, 10 a 50. V úloze 1 žáci zjišťují, jakými mincemi je možné zaplatit dané částky, jestliže mají použít právě tři mince. Ostatní úlohy jsou spíš propedeutikou řešení rovnic.

Indické násobení

V motivační úloze jsou vypočítány tři příklady indicky, úkolem žáků je rozluštit, jak počítali staří Indové. Další úlohy jsou obdobné jako v prvostupňových učebnicích.

Šipkové grafy

Toto prostředí už se objevuje i v prvostupňových učebnicích, kde se zpravidla vyskytují úlohy tohoto typu pouze jednotlivě. Zde jsou šipkovým grafům věnovány dvě kapitoly, které obsahují celkem osm úloh. Jaké vztahy platí v šipkovém grafu, zachycuje obr. 4. V prvních dvou úlohách mají žáci za úkol doplnit graf, jestliže znají všechna čísla v modrých políčkách. V úloze 3 jsou naopak známá čísla ve žlutých políčkách. V další úloze pak žáci sestavují celý graf, znají jen operace, které mají provést, nikoliv jejich pořadí. V dalších úlohách je obtížnost zvýšena tak, že některé hodnoty jsou zadány pomocí parametricky.



Obr. 4 Šipkový graf

(Hejný a kol.: *Matematika A, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, str. 25)

Součinové čtverce

Toto prostředí se vyskytuje již v učebnicích pro 1. stupeň pod názvem násobilkové obdélníky. Úlohy, které se objevují v této učebnici, se od prvostupňových úloh většinou liší vyšší obtížností. Žáci zde řeší úlohy, v nichž pracují se součtem čtyř středových čísel, který je označen *S*. V úloze 3 je vždy jedno z rohových čísel zadáno parametricky a úkolem žáků je stanovit *S*, při měnících se hodnotách parametru a výsledky zapsat do tabulky. Poté žáci sledují zapsané výsledky a pomocí nich objevují další zákonitosti platné v tomto prostředí.

2.3 Srovnání učebnic z hlediska propedeutiky dělitelnosti

Tradiční učebnice pro 1. stupeň neobsahují žádnou kapitolu věnující se výuce dělitelnosti. Za propedeutiku dělitelnosti lze považovat násobení, dělení a dělení se zbytkem. Většina učebnic též definuje pojmy sudá a lichá čísla, která se vyučují v tématu dělitelnost na 2. stupni ZŠ. V těchto tradičních učebnicích se buďto vůbec nebo jen velmi zřídka vyskytují úlohy, které by vedly žáky k objevování poznatků z dělitelnosti, experimentování nebo zobecňování. Úlohy v těchto učebnicích se spíše zaměřují na dobré zvládnutí matematického řemesla, tj. bezchybný nácvik početních operací.

V učebnicích pro výuku Hejného metodou je propedeutika dělitelnosti obsažena v mnoha úlohách napříč různými prostředími. V učebnicích pro 4. a 5. ročník už jsou kapitoly, které se přímo věnují výuce dělitelnosti. S propedeutikou a následně výukou dělitelnosti se při výuce Hejného metodou začíná daleko dřív. Po výuce dělitelnosti žáci mohou dále získané poznatky uplatnit v dalších úlohách, které následují za kapitolou Dělitelnost. Je to typická ukázka stylu Hejného učebnic, kdy učivo z daného tématu není ostře ohraničeno v jedné kapitole. Jednak má delší propedeutiku a jednak se v učebnici několikrát opakuje a prohlubuje. Pro tento způsob výuky je v (Bradis, 1953, str. 42) výstižně použit termín koncentrický výklad. Naproti tomu výklad, který probíhá uceleně po tématech, je označen jako přímočarý neboli postupný. Tyto termíny budu pro jednoduchost dále používat.

2.4 Výuka dělitelnosti

Dělitelnost je součástí teorie čísel. Hejný o výuce dělitelnosti na základní škole mimo jiné píše:

„Teória čísel nesúvisí so žiadnou časťou stredoškolskej matematiky, a preto sa z nej do osnov dostávajú iba úlomky. . . Prvé školské stretnutie dieťaťa s deliteľnosťou prebehne v tretej triede pri preberaní delenia so zvyškom. . . Fenomén deliteľnosti však ďaleko presahuje rámec jedného algoritmu – je prítomný v mnohých javoch okolitého sveta; v rytme, v periodických dejoch, v pravidelných geometrických vzorcoch atď.“

(Hejný, 1990, str. 118–121)

V úvodu výuky dělitelnosti se většina učebnic omezí na práci s přirozenými čísly bez nuly. Dělitel daného čísla je definován jako číslo, kterým je dané číslo možné beze zbytku dělit. Hejný k tomu poznamenává:

„Ako zistíme, či je prirodzené číslo *n* deliteľné prirodzeným číslom *k* bez zvyšku? To je nosná úloha tematického celku deliteľnosť."

(Hejný, 1990, str. 122)

Podle některých autorů (např. Bradis 1953, str. 109) je učivo z tématu dělitelnost nezbytné pro úspěšné zvládnutí tématu zlomky a operace se zlomky, proto by dělitelnost měla předcházet výuce zlomkům.

Ve většině učebnic se v tématu dělitelnost vyskytují následující podkapitoly:

- Dělitel, násobek
- Kritéria dělitelnosti čísly 2, 3, 5, 9 a 10
- Prvočíslo, složené číslo, čísla soudělná a nesoudělná
- Prvočíselný rozklad
- Největší společný dělitel (dále jen NSD)
- Nejmenší společný násobek (dále jen nsn)

Jednotlivé tradiční učebnice se od sebe nepatrně liší rozsahem učiva, výběrem konkrétních vzorových příkladů a úloh na procvičení, jak bude podrobněji rozpracováno v oddíle 2.5. Výrazně se od všech učebnic odlišují učebnice od Hejného a kol., protože tyto učebnice předpokládají konstruktivistický přístup k výuce. Rozdíl mezi konstruktivistickým a transmisivním edukačním stylem byl vysvětlen v první kapitole.

Dělitelnost je součástí vzdělávacího obsahu oboru Matematika a její aplikace, jehož výuku upravuje RVP ZV (Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání). Téma dělitelnost je zařazeno do tematického okruhu Číslo a početní operace, jehož očekávané výstupy týkající se dělitelnosti jsou zachyceny v tab. 3 a učivo je toto:

dělitelnost přirozených čísel – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani *ukázka je uvedena z verze RVP ZV s vyznačenými změnami oproti roku 2007.*

Standardy pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace vymezují očekávané znalosti, schopnosti a dovednosti z tématu dělitelnost takto:

Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	1. Číslo a početní operace
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-1-03** Žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel
Indikátory	1. žák rozlišuje pojmy prvočíslo a číslo složené; společný dělitel a společný násobek 2. žák využívá kritéria dělitelnosti (2, 3, 5, 10) 3. žák rozloží dvojciferné číslo na součin prvočísel
Ilustrativní úloha	
Máš pět kartiček s čísly: 0 4 5 7 9 Sestav z kartiček čtyřciferné číslo dělitelné 10: Sestav z kartiček čtyřciferné číslo dělitelné 5: Sestav z kartiček čtyřciferné číslo dělitelné 2: Sestav z kartiček čtyřciferné číslo dělitelné 3:	
Poznámky k ilustrativní úloze	M-9-1-03.2

Tab. 3

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/opatreni-ministra-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-kterym-se-4

V metodické příručce *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 6*. ročník základní školy jsou znalosti žáků z tématu dělitelnost vymezeny takto:

Co by měl žák umět o DĚLITELNOSTI PŘIROZENÝCH ČÍSEL

- rozeznat prvočíslo a číslo složené;
- provést rozklad přirozeného čísla na prvočinitele;
- určit čísla soudělná a nesoudělná;
- určit největšího společného dělitele dvou až tří přirozených čísel;
- určit nejmenší společný násobek dvou až tří přirozených čísel;
- řešit jednoduché slovní úlohy vedoucí k určení nejmenšího společného násobku 2 až 3 přirozených čísel, nebo největšího společného dělitele 2 až 3 přirozených čísel

Tab. 4

(Odvárko, Kadleček: *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 6. ročník základní školy*, str. 50)

V následujících dvou oddílech jsou obsaženy rešerše učebnic, schválených MŠMT, které se věnují výuce dělitelnosti. Z důvodu specifičnosti přístupu k výuce v učebnicích Hejného metody bude těmto učebnicím věnována samostatná kapitola. V tradičních učebnicích se výuka dělitelnosti na 2. stupni objevuje v 6., resp. 7. ročníku a je soustředěna do jedné samostatné kapitoly. Ve vyšších ročnících už se dělitelnost přímo nevyučuje, žáci se s ní setkávají pouze v rámci opakování. V učebnicích Hejného metody se výuka dělitelnosti objevuje už ve 4. a 5. ročníku na 1. stupni, proto jsem do svého výzkumu učebnic zahrnula i dvě učebnice určené pro 1. stupeň. V druhostupňových učebnicích Hejného metody se objevuje propedeutika dělitelnosti a následně je téma dělitelnost rozděleno do několika kapitol, které na sebe bezprostředně nenavazují. Při výuce dělitelnosti Hejného metodou se žáci pravděpodobně budou setkávat s výukou dělitelnosti i ve vyšších ročnících. Učebnice Matematika C až G do svého výzkumu nezařazuji, protože momentálně probíhá jejich pilotování v 8. a 9. ročníku a jejich oficiální verze ještě nejsou k dispozici. Zde uvádím seznam učebnic schválených MŠMT, které obsahují téma dělitelnost a kterými se budu podrobně zabývat v dalším textu:

1. Cihlář, J., Zelenka, M.: *Matematika 6*, Pythagoras Publishing, 1997
2. Coufalová, J. a kol.: *Matematika 6 pro 6. ročník základní školy*, Fortuna, 2008
3. Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: *Matematika 6 učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika*, Fraus, 2007
4. Rosecká, Z., Čuvajová, V.: *Aritmetika učebnice pro 6. ročník*, Nová škola, 1997
5. Jedličková, M., Krupka, P., Nechvátalová, J.: *Matematika: Dělitelnost*, Nová škola, 2013
6. Molnár, J. a kol.: *Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele*, Prodos, 2004
7. Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J.: *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Dělitelnost*, Prometheus, 2003
8. Šarounová, A. a kol.: *Matematika 7, 1. díl*, Prometheus, 1997
9. Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 2. díl: Desetinná čísla, dělitelnost*, Prometheus, 1997
10. Půlpán, Z., Čihák, M.: *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*, SPN, 2007
11. Hejný M. a kol.: *Matematika učebnice pro 4. ročník základní školy*, Fraus, 2010
12. Hejný M. a kol.: *Matematika učebnice pro 5. ročník základní školy*, Fraus, 2011
13. Hejný M. a kol.: *Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, H-mat, 2015

Dříve než bude v následujících kapitolách rozebráno, jakým způsobem je probíráno téma dělitelnost v jednotlivých učebnicích, popíšu zde krátce symboliku a schématické zápisy používané v učebnicích, které jsou typické pro dělitelnost.

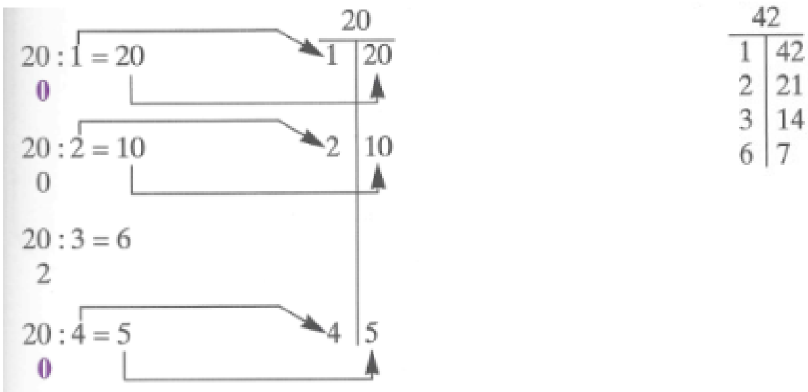
Symbolický zápis tvrzení „číslo a je dělitelem čísla b“ a jeho negace se vyskytuje pouze v jedné učebnici, a to v učebnici Hejného a kol., v této podobě:

$$a \mid b\,, \qquad a \nmid b$$

Ve čtyřech učebnicích (autoři: Rosecká a kol.; Jedličková, Krupka a Nechvátalová; Herman, Chrápavá, Jančovičová a Šimša; Šarounová a kol.) se přímo zavádí množinový zápis výroku „množina všech dělitelů čísla 12 jsou čísla 1, 2, 3, 4, 6 a 12“ takto:

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

V mnoha učebnicích se můžeme setkat se schématickým zápisem při vypisování všech dělitelů daného čísla, který je označován názvem „téčko“. Na obr. 5 je vidět, jakým způsobem vzniká toto schéma pro číslo 20 a dále jak jsou pomocí „téčka“ vypsány všechny dělitele čísla 42.



Obr. 5

(Půlpán, Čihák: *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*, str. 53)

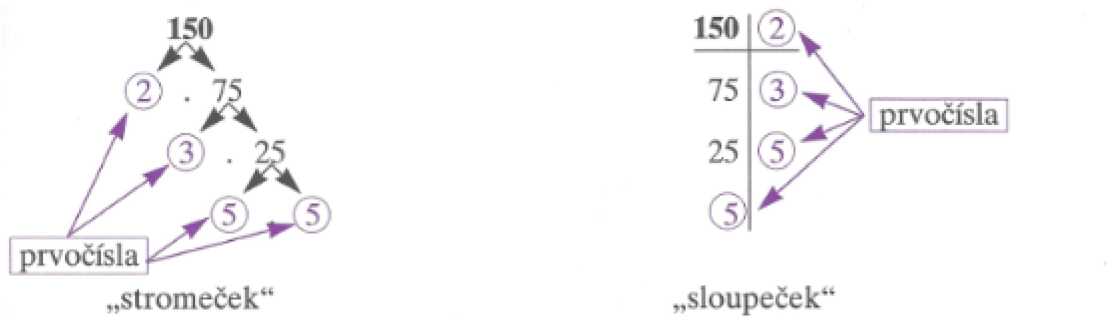
V mnoha učebnicích je rovněž použit schématický zápis pro rozklad na součin prvočinitelů. Smyslem zavádění těchto zápisů je zautomatizovat u žáků postup hledání prvočíselného rozkladu konkrétních čísel. Prvočíselný rozklad je zpravidla předváděn třemi druhy schématických zápisů. Prvním je postupný rozklad na součin, který může být zapsán na řádek. Tento druh prvočíselného rozkladu je uveden na obr. 6.

$$150 = 2 \,.\, 75 = 2 \,.\, 3 \,.\, 25 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5$$

Obr. 6

(Půlpán, Čihák: *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*, str. 65)

Další dva tentokrát grafické druhy prvočíselného rozkladu jsou většinou nazývány „stromeček“ (v Odvárko a kol. „vodopád“, v Jedličková, Krupka, Nechvátalová a Molnár a kol. „strom“) a „sloupeček“ (v učebnici autorů Odvárko a kol. „žebřík“ a v Jedličková, Krupka, Nechvátalová „tabulka“) a jsou zachyceny na obr. 7.



Obr. 7

(Půlpán, Čihák: *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*, str. 65)

Pro pojem nejmenší společný násobek čísel a, b je v učebnicích pro tradiční výuku jednotně použito značení $n(a, b)$ a v učebnici autorů Hejný a kol. značení $nsn(a, b)$. Pro pojem největší společný dělitel čísel a, b je v tradičních učebnicích použito značení $D(a, b)$ a učebnici autorů Hejný a kol. značení $NSD(a, b)$.

Zvláště v řešených příkladech, které jsou použity k odvozování některých tvrzení, se v některých učebnicích vyskytuje tzv. „rozvinutý zápis čísla (po řádech)“, který pro konkrétní číslo 2345 vypadá takto:

$$2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$$

2.5 Rešerše tradičních učebnic

2.5.1 Cihlář J., Zelenka M.: *Matematika 6*

Tématu dělitelnost je věnováno zhruba 30 stran formátu přibližně A5, které jsou rozděleny do následujících podkapitol: Násobek a dělitel; Znaky dělitelnosti; Prvočísla a čísla složená; Společný násobek a společný dělitel

Násobek a dělitel

Na začátku podkapitoly je připomenuto, co jsou to přirozená čísla, a je zdůrazněno, že v této kapitole se budeme zabývat přirozenými čísly. Násobky jsou zopakovány na řešených příkladech o nakupování ořechů po 24 Kč a sýrů po 6 Kč. Násobky jsou vypsány slovně, zaznamenány do tabulky a znázorněny na číselné ose, jako postupné sčítání. V dalším řešeném příkladu je dovedena tato myšlenka až k zobecnění a násobky čísla a jsou znázorněny jako $1 \cdot a,\ 2 \cdot a,\ 3 \cdot a,$ atd. n-tý násobek je pak vyjádřen jako $n \cdot a$. Po úlohách na procvičení je v učebnici pojem násobku znázorněn graficky v čtverečkované síti. V dalších řešených příkladech je toto znázornění ještě doplněno zobrazením na číselné ose. Příklad 6 se věnuje pojmu dělitel, který je definován pomocí dělení beze zbytku. Ani zde nechybí grafické znázornění. V podkapitole je celkem 45 úloh na procvičení, za ní následuje Autotest IV. Autotest je soubor pěti úloh, který se vyskytuje na konci každé podkapitoly a který obsahuje návod pro samostatné vyhodnocení. Pomocí řešení autotestů má tedy žák možnost provést sebereflexi zvládnutí probraného učiva.

Znaky dělitelnosti

V úvodu podkapitoly je vysvětleno, co jsou znaky dělitelnosti a k čemu slouží. Jsou zde uvedeny znaky dělitelnosti dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, osmi a devíti. Dělitelnost deseti, pěti a dvěma mají žáci vysledovat řešením příkladů. Dělitelnost čtyřmi a osmi je odvozena metodou postupného odečítání násobků. Dělitelnost devíti je odvozena pomocí rozkladu čísla na tisíce, stovky, desítky a jednotky. Postupně je vysvětleno, proč pro dělitelnost daného čísla devíti je rozhodující dělitelnost jeho ciferného součtu devíti. Dělitelnost třemi je uvedena bez důkazu. V příkladu 1 jsou graficky znázorněna sudá a lichá čísla. V podkapitole je 35 úloh na procvičení a za ní následuje Autotest V.

Prvočísla a čísla složená

V úvodu této podkapitoly mají žáci za úkol vyřešit úlohu spočívající v hledání všech dělitelů skupiny čísel a rozřazení těchto čísel podle toho, kolik mají dělitelů. Je zaveden pojem samozřejmí dělitelé čísla. Přes tyto samozřejmé dělitele jsou definována prvočísla jako čísla, které mají pouze dva dělitele. Čísla složená jsou nazvána čísla, která mají více než dva dělitele a číslo 1 není ani prvočíslo ani číslo složené. Pak následuje devět úloh na procvičení zavedených pojmů. Příklad 2 nastiňuje, jak lze hledat prvočísla metodou Eratosthenova síta. V příkladu 3 je předvedeno čtyřmi způsoby, jak rozložit složené číslo na součin prvočísel. Pak následuje dalších deset úloh na procvičení. V tvrzení k zapamatování je zdůrazněno, že pokud je číslo dělitelem daného čísla, je obsaženo v jeho prvočíselném rozkladu. Příklad 5 obsahuje netradiční rozdělení přirozených čísel „do pater“, podle toho, kolik prvočísel je v jejich rozkladu na prvočinitele. Za touto kapitolou je Autotest VI.

Společný násobek a společný dělitel

Tato podkapitola navazuje na znalosti z předchozí podkapitoly, zejména schopnost určit všechny dělitele daného čísla. V prvních dvou řešených příkladech je na konkrétních číslech předvedeno, co jsou to společní dělitelé daných čísel a jak je nalézt pomocí výpisu všech dělitelů. Největší z těchto dělitelů je označen jako NSD. Poté následuje obecná definice těchto pojmů a formální zápis. Hledání NSD je procvičeno na řešení úloh. Poté jsou definovány pojmy soudělná a nesoudělná čísla pomocí NSD. V příkladech 3 a 4 je ukázáno, jak určit společné násobky a nsn skupiny čísel pomocí vypisování několika jejich násobků. Pak je zavedeno formální značení nsn. Po úlohách na procvičení hledání nsn, následuje vzorový postup, jek hledat NSD a nsn pomocí rozkladu na prvočinitele. V příkladu 8 je graficky odvozena na konkrétních číslech platnost vztahu $a \cdot b = D(a,b) \cdot n(a,b)$. V závěru jsou zařazeny úlohy na procvičení, včetně slovních úloh, které jsou aplikací hledání nsn a NSD. Po této kapitole následuje Autotest VII.

Hodnocení

Tato učebnice je napsána tradičně. V kapitole Násobek a dělitel je patrná snaha o grafické znázornění probíraných pojmů a snaha o obecné vyjádření. V kapitole znaky dělitelnosti jsou graficky znázorněna lichá a sudá čísla a je zde odvození kritéria dělitelnosti devíti, čtyřmi, šesti a osmi. Rozklad na prvočinitele je předveden několika základnímu způsoby. Algoritmus hledání nsn a NSD je vysvětlen tradičně. Definice a tvrzení jsou zvýrazněna. Učebnice obsahuje dostatečné množství úloh na procvičení a za každou kapitolou je zařazen Autotest umožňující sebereflexi. Je třeba na této učebnici vyzdvihnout snahu o odvozování, zobecňování a grafické znázorňování. Grafická úprava koresponduje s logickým členěním na vzorové příklady, tvrzení a definice a úlohy k procvičení, je jednoduchá a přehledná. Dále stojí za zmínku osobité ilustrace S. Holého, které dávají učebnici nezaměnitelný styl.

2.5.2 Coufalová J. a kol.: *Matematika 6 pro 6. ročník základní školy*

V této učebnici je téma dělitelnost zpracované na 26 stranách formátu přibližně A5 a je rozdělené do osmi podkapitol a rozšiřujících úloh pro chytré hlavy. Součástí tohoto tématu je i krácení zlomků, které většina učebnic do dělitelnosti nezahrnuje, proto se této podkapitole nebudu podrobněji věnovat. V úvodu kapitoly je uvedeno, že se dále bude pracovat pouze s přirozenými čísly bez nuly. Podkapitoly v kapitole Dělitelnost jsou tyto: Násobek; Dělitel, prvočíslo, číslo složené; Znaky dělitelnosti deseti, pěti, dvěma, třemi, šesti, devíti, čtyřmi; Rozklad čísla na součin prvočísel; Nejmenší společný násobek; Největší společný dělitel; Krácení zlomků; Opakování; Pro chytré hlavy

Násobek

Tato podkapitola začíná motivačním příkladem, ve kterém je úkolem žáků doplnit odjezdy autobusu do jízdního řádu, když je zadáno, v jakých časových intervalech autobus jezdí. V další z úloh se vyskytují pojmy dvojnásobek, trojnásobek, čtyřnásobek atd. V jedné z úloh se též objevuje znázorňování násobků daného čísla na číselné ose. Za úlohami následuje až příliš návodný algoritmus, jak zjistit, zda je číslo násobkem daného čísla. Smyslem je patrně ukázat, že číslo je násobkem daného čísla, pokud je tímto číslem dělitelné beze zbytku. V závěru podkapitoly je pět úloh na procvičení daného tvrzení.

Dělitel, prvočíslo, číslo složené

V motivační úloze žáci rozhodují o pravdivosti tvrzení typu, zda je možné rozdělit 24 žáků do skupin po osmi a po šesti. Pak následuje výpis všech dělitelů čísla 24 a zápis a je zde předveden zápis těchto dělitelů pomocí „tečka“. Definice pojmu dělitel chybí, je zde ale uvedeno tvrzení, že každé číslo větší než jedna, má aspoň dva dělitele. Následují úlohy k procvičení probraných poznatků. V závěru podkapitoly je uvedena definice prvočísla a čísla složeného pomocí počtu dělitelů.

Znaky dělitelnosti

V této kapitole jsou probrány znaky dělitelnosti deseti, pěti, dvěma, třemi, šesti, devíti a čtyřmi. Kapitola začíná vysvětlujícím tvrzením, že znaky dělitelnosti jsou pravidla, která nám umožní rozhodnout, zda je číslo dělitelné jiným číslem. Dělitelnost deseti mohou žáci odhalit pomocí dvou příkladů, v nichž sledují vlastnosti násobků deseti. Poté je uveden znak dělitelnosti deseti a čtyři úlohy na jeho procvičení. Znak dělitelnosti pěti a dvěma je odvozen obdobným způsobem. U dělitelnosti dvěma jsou též zavedeny pojmy sudé a liché číslo, situace je znázorněna na číselné ose a je zde zmíněn i obecný zápis sudých a lichých čísel. V závěru tohoto oddílu je šest úloh na procvičení včetně úloh na zjištění pravdivosti obecných tvrzení o dělitelnosti.

Motivačním příkladem pro zjišťování znaku dělitelnosti třemi je úloha, kdy žáci mají zjistit, zda lze určitou peněžní částku rozdělit mezi tři děti rovným dílem. Jedním vzorovým řešením je písemné dělení, které nevede k odvození obecného pravidla. Druhé řešení objasňuje, že čísla deset, sto i tisíc dávají při dělení třemi zbytek jedna. K ověření dělitelnosti třemi tedy stačí sečíst počet jednotek, desítek, stovek a tisíců (případně i vyšších řádů) v daném čísle a ověřit, zda je toto číslo dělitelné třemi. Hledané číslo je ciferný součet daného čísla. Za tímto odvozením následuje tabulka, která uvádí znak dělitelnosti třemi a příklady ciferného součtu. V závěru tohoto oddílu je pět úloh na procvičení.

Dělitelnost šesti je odvozena pomocí skupiny čísel, u nichž žáci zjišťují, která z nich jsou dělitelná dvěma, třemi a která jsou dělitelná šesti. Žáci mohou snadno zjistit, že čísla, která jsou dělitelná dvěma i třemi zároveň, jsou dělitelná šesti. Pak je v tabulce uveden znak dělitelnosti šesti a za ním jsou tři úlohy na procvičení.

Dělitelnost devíti žáci odvozují experimentálně. Žáci ověřují dělitelnost devíti pomocí kalkulačky a zároveň si všímají ciferného součtu daných čísel. Po definici znaku dělitelnosti devíti následuje jeho stručné odvození, které je analogické jako u dělitelnosti třemi.

Před uvedením znaku dělitelnosti čtyřmi žáci ověřují dělitelnost čtyřmi pomocí kalkulačky. Čísla jsou rozdělena do skupin tak, aby v každé skupině byla čísla končící stejným dvojčíslím. Po uvedení znaku dělitelnosti čtyřmi následuje stručné odvození, které využívá toho, že stovky a jejich násobky jsou dělitelné čtyřmi.

Rozklad čísla na součin prvočísel

V úvodu podkapitoly jsou předvedeny čtyři možné rozklady čísla 36 na součin prvočísel pomocí „stromečku“. Smyslem je zřejmě ukázat, že vždy vyjde součin stejných prvočísel, jen pořadí prvočísel v součinu může být jiné. Následuje tabulka prvočísel menších než 200 a osm úloh na procvičení prvočíselného rozkladu. Dvě poslední úlohy nejsou typicky školské. Žáci mají za úkol postupně sčítat první tři, čtyři, pět atd. lichých čísel, rozkládat získaný součet na součin prvočísel a objevovat, co pro tento součet platí.

Nejmenší společný násobek

V úvodním řešeném příkladu žáci zjišťují, na které schody skočí dva chlapci společně, když jeden bere schody po dvou a druhý po třech. Příklad je vyřešen graficky na číselné ose a na modelu schodiště a vypsáním společných násobků dvou a tří. Pak je uvedena definice nsn. Následují úlohy na procvičení, v nichž žáci hledají nsn na číselné ose a pak je předveden způsob, jak určit nsn pomocí prvočíselného rozkladu. V závěru podkapitoly je dalších osm úloh na procvičení včetně čtyř slovních úloh, při jejichž řešení žáci hledají nsn.

Největší společný dělitel

Jako motivace je uveden příklad, ve kterém mají žáci za úkol zjistit, mezi kolik štěňat lze rovným dílem rozdělit 24 piškotů a 36 vitamínových granulí. Příklad je názorně řešen pomocí výpisu dělitelů jednotlivých čísel, z nichž jsou vzápětí vybráni společní dělitelé a největší z nich je označen jako největší společný dělitel těchto čísel. Pak žáci řeší úlohy na hledání společných dělitelů pomocí číselné osy jako v předešlé podkapitole. Dále je uvedena definice čísel soudělných a nesoudělných. Po dalších dvou úlohách na procvičení následuje tabulka s příklady na procvičení a sedm slovních úloh na aplikaci algoritmu pro hledání NSD.

Opakování

Tato podkapitola obsahuje šest příkladů na procvičení poznatků z předešlých kapitol a devět slovních úloh vesměs na hledání nsn nebo NSD. Nejzajímavější je asi úloha, ve které mají žáci za úkol zjistit, kolik má knížka stránek, když se dá celá přečíst tak, že každý den přečteme buď dvanáct, třináct nebo osm stránek.

Hodnocení učebnice

V učebnici se často objevují pěkné motivační příklady. Učebnice uvádí u každého nového poznatku stručné a jasné shrnutí případně definici. V učebnici je dostatek úloh na procvičení. Úlohy jsou dostatečně diferencované. U některých se nepředpokládá, že je vyřeší všichni žáci, ale slouží jako rozšiřující učivo pro bystré žáky, kteří dokáží úlohy řešit rychle a správně. Učebnice obsahuje více kritérií dělitelnosti, než je uvedeno ve standardech pro základní vzdělávání, a obsahuje také hodně slovních úloh na procvičení nsn a NSD. Učebnice nedává příliš mnoho prostoru žákům k samostatnému řešení problémů. Vše je vzorově vyřešeno, uvedeno v tabulkách a znázorněno. Mnohá tvrzení jsou uvedena bez odvození nebo vysvětlení, jak se k nim došlo. Grafická úprava je přehledná.

2.5.3 Binterová H., Fuchs E., Tlustý P.: *Matematika 6 učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika*

Téma dělitelnost ve stejnojmenné kapitole na 20 stránkách formátu přibližně A4, která je členěna do následujících pěti podkapitol: Dělitel a násobek; Vlastnosti dělitelnosti; Prvočísla a čísla složená; Co musíme vědět?; Zkouška znalostí

Dělitel a násobek

Podkapitola je rozdělena na čtyři části. V první části, která je nazvaná Dělíme přirozená čísla, je uvedeno několik názorných příkladů, kdy se ve světě, který nás obklopuje, můžeme setkat s dělením (plato vajec, rota vojáků, květ s okvětními lístky, bonboniéra atd.). V řešení slovní úlohy, při jejímž řešení žáci hledají společné násobky několika čísel, je doporučeno využít programu Excel.

V další části je zaveden pojem dělitel pomocí dělení beze zbytku. Úlohy obsahují velké množství příkladů. Třetí část se zabývá vysvětlením pojmu násobek, k čemuž je využita slovní úloha o tramvaji, která vyjíždí v intervalech 35 minut. V další úloze žáci zakreslují násobky čísel od 1 do 5 do stovkové tabulky, násobky každého čísla barevně odlišují. Pak následuje definice pojmu násobek. Ve čtvrté části jsou odvozena tvrzení o dělitelnosti součtu, rozdílu a součinu. Všechna tvrzení jsou znázorněna pomocí řešených slovních úloh. Dělitelnost součtu a rozdílu je vysvětlena na slovních úlohách, ve kterých se odměřují suroviny pomocí odměrky a dělitelnost součinu je odvozena na dělení obdélníkové místnosti na stejné části.

Vlastnosti dělitelnosti

V této kapitole je vysvětleno, co jsou to znaky dělitelnosti, a je zde probráno kritérium dělitelnosti dvěma, deseti, pěti, čtyřmi, třemi a devíti. Dělitelnost dvěma je vysvětlena pomocí rozdělování lidí do dvojic a dále označování násobků dvou ve stovkové tabulce. V učebnici je uveden znak dělitelnosti dvěma společně s definicí sudých a lichých čísel. K odvození znaku dělitelnosti deseti je využito příkladu s rozměňováním mincí, dále označení násobků deseti ve stovkové tabulce. Poté je uveden znak dělitelnosti deseti a jako aplikace dělitelnosti deseti jsou zmíněny předpony soustavy jednotek SI. Dále je analogickým způsobem odvozen znak dělitelnosti pěti. K vysvětlení znaku dělitelnosti čtyřmi je použito skutečnosti, že násobky stovky jsou dělitelné čtyřmi, proto o dělitelnosti čtyřmi rozhoduje poslední dvojčíslí. K odvození znaku dělitelnosti třemi je využito 41 korunových mincí, na kterých je ukázáno, že z každé desítky zbyde jedna a k tomu přičteme počet jednotek, proto o dělitelnosti třemi rozhoduje, jestli je ciferný součet daného čísla dělitelný třemi. Znak dělitelnosti devíti je pouze vysloven bez odvození.

Prvočísla a čísla složená

Tato podkapitola je rozdělena na dvě části. V první části jsou definována prvočísla a čísla složená, druhá část se zabývá nsn a NSD. Při odvozování pojmu prvočíslo žáci hledají ve stovkové tabulce prvočísla metodou Eratosthenova síta. V učebnici jsou dokonce uvedena všechna prvočísla menší než tisíc. Pak je definován pojem prvočíslo a číslo složené. Dále žáci objevují, jak provést rozklad na prvočinitele. Za definicí rozkladu na prvočinitele je předvedeno třemi způsoby, jak provést prvočíselný rozklad. Je využito „sloupečku“, „stromečku“ a „postupného rozkladu na součin“.

V druhé části této podkapitoly jsou odvozeny pojmy NSD a nsn pomocí slovních úloh z každodenního života. K objasnění pojmu NSD je použito řezání dvou prken nestejné délky na co největší stejné díly. V dalších úlohách je ukázáno, jak hledat NSD dvou čísel pomocí vypsání všech jejich násobků a pak i pomocí rozkladu na prvočinitele. Po definici společného dělitele a NSD následuje ještě definice čísel soudělných a nesoudělných. Druhá část se zabývá vysvětlením pojmu nsn. Opět je použito slovní úlohy, ve které žáci zjišťují, kdy budou z jedné zastávky odjíždět autobusy dvou linek s různými intervaly současně. Pak je nsn opět určen pomocí vypisování násobků daných čísel a pomocí prvočíselného rozkladu. Nakonec je uvedena definice společného násobku a nsn.

Co musíme vědět?

Zde je uveden souhrn základních poznatků probraných v kapitole Dělitelnost.

Zkouška znalostí

Tato podkapitola obsahuje deset úloh na procvičení poznatků z dělitelnosti. Jedná se o reálné úlohy z každodenního života i početní úlohy na určování nsn a NSD.

Hodnocení

Učebnice získala v roce 2009 2. místo v soutěži nejlepších evropských učebnic. Učebnice existuje i v elektronické verzi a je k ní i pracovní sešit. Jde o moderní učebnici, která se snaží, aby součástí výuky bylo objevování žáků. Podle mého názoru jde o učebnici, která prokazatelně obsahuje konstruktivistické prvky, ale při jejich uplatňování není zdaleka tak systematická a důsledná jako učebnice autorů Hejný a kol. Také se nedá říct, že by učebnice byla založena na ucelené konstruktivistické teorii. Nutno podotknout, že důslednost v přístupu závisí do značné míry také na učiteli. Tato učebnice obsahuje všechny základní poznatky i některé poznatky, které je možné označit jako rozšiřující učivo. Při výkladu kritérií dělitelnosti dvěma a třemi je patrná snaha o odvození. Kniha je přehledně graficky členěná. V úvodu je uvedeno čtrnáct symbolů, které v textu označují jednotlivé části textu podle jejich funkce. Kromě toho jsou v každé kapitole barevně zvýrazněny oddíly Co jsme objevili, v nichž jsou shrnuty postupy a poznatky vedoucí k odvození nových vědomostí, a Slovníček, který obsahuje definice nebo nové poznatky a vědomosti. Kniha je doplněna ilustracemi i fotografiemi.

2.5.4 Rosecká Z., Čuvajová V.: *Aritmetika učebnice pro 6. ročník*

Tato učebnice patří do série učebnic Nové Školy Brno, která propaguje činnostní učení. K plnému využití všech předností této učebnice by měl být učitel obeznámen s principy činnostního učení, samotná učebnice tyto informace neobsahuje. K výuce dělitelnosti se například používá stovková tabulka, čtverečky z tvrdého papíru velikosti 2 x 2 cm, pruhy papíru na řešení příkladů a hlasovací karty Ano, Ne. Kapitola Dělitelnost v této učebnici obsahuje 17 stránek formátu přibližně B5. Na každé z nich najdeme jeden z těchto oddílů: Násobek; Dělitel; Dělitele daného čísla; Hledání všech dělitelů daného čísla; Znaky dělitelnosti 2, 5, 10; Znak dělitelnosti číslem 3; Prvočísla a čísla složená; Rozklad čísel na prvočinitele; Společný dělitel; Největší společný dělitel; Čísla soudělná a nesoudělná; Společný násobek; Nejmenší společný násobek; Slovní úlohy

Násobek

Tento oddíl se snaží žákům přiblížit pojem násobek propojením s předchozími znalostmi násobilky. Po zopakování násobilky hledají žáci ve stovkové tabulce násobky daných čísel. Potom pracují s číselným čtvercem 10 x 10, který obsahuje různá čísla. Žáci ve čtverci hledají cesty násobků čísla 2, 3, 5 a 6. Vždy postupují od zeleně vyznačeného čísla a hledají cestu jeho násobků, přičemž se mohou pohybovat vždy o jedno políčko nahoru, dolů, doleva nebo doprava.

Dělitel

Na analogii se slovy, která mají více významů, je zde poukázáno, že pojem dělitel má v matematice dva významy. Je vysvětleno, že dále budeme dělitele chápat jako číslo, které dělí dané číslo beze zbytku. Žáci za pomoci kartonových čtverečků doplňují konkrétní tvrzení o dělitelích a násobcích.

Dělitele daného čísla

V úvodu tohoto oddílu žáci pracují s číselným čtvercem a hledají dělitele a násobky daných čísel. Dále následují úlohy, v nichž žáci ověřují, kterými čísly je dané číslo dělitelné. Žáci mají za úkol také tvořit obdobné úlohy.

Hledání všech dělitelů daného čísla

V tomto oddílu je uvedeno několik postupů, jak hledat všechny dělitele daného čísla. Také je zde uveden správný matematický zápis všech dělitelů daného čísla. V dalších třech cvičeních jsou aktivity využívající kartonové čtverečky, kdy děti hledají mezi danými čísly taková čísla, která mají určitý počet dělitelů.

Znaky dělitelnosti 5, 10, 2

Jako motivaci pro studium dělitelnosti zde učebnice uvádí dobré zvládnutí zlomků v sedmém ročníku. Dále je zde předloženo žákům pravidlo, kdy je číslo dělitelné pěti. Žákům je doporučeno toto pravidlo ověřit dělením nebo znalostí malé násobilky. Následně žáci hledají násobky pěti ve stovkové tabulce. Pak žáci tvoří z daných šesti cifer různá čísla dělitelná pěti. Pravidlo dělitelnosti deseti a dvěma je odvozeno obdobným způsobem. Znaky dělitelnosti dvěma, pěti a deseti jsou následně definovány společně s definicí sudých a lichých čísel. Následující cvičení využívají číselného čtverce 5 x 5, v němž žáci ověřují, zda jsou daná čísla dělitelná dvěma, pěti a deseti.

Znaky dělitelnosti číslem 3

Na začátku tohoto oddílu žáci vyplňují tabulku, v níž ověřují, zda existuje souvislost mezi dělitelností třemi a ciferným součtem daného čísla. Správné vyplnění tabulky má žáky dovést k odvození znaku dělitelnosti třemi. Hned pod tabulkou je uvedena definice znaku dělitelnosti třemi. Následují úlohy na procvičení.

Prvočísla a čísla složená

Nejdříve žáci hledají počet dělitelů daných čísel. V následujícím cvičení jsou čísla rozdělena do dvou skupin na prvočísla a čísla složená. Žáci zjišťují, jak se od sebe daná čísla liší na základě počtu dělitelů. Pak následuje zvýrazněná definice zmíněných pojmů. Potom žáci tyto znalosti procvičují hledáním prvočísel v první stovce a dalšími úlohami, které kombinují hledání prvočísel a sčítání. Je zde též uveden pojem prvočíselná dvojčata.

Dělitelnost – opakování

V tomto oddílu jsou úlohy na zopakování probraného učiva. Kromě toho v jedné úloze žáci experimentálně odvozují, zda součet dvou čísel dělitelných třemi je opět dělitelný třemi a součet čísla dělitelného třemi a čísla nedělitelného třemi je dělitelný třemi. Správná tvrzení jsou v učebnici zvýrazněna.

Rozklad čísel na prvočinitele

V tomto oddíle je žákům předveden postup, jak zapsat číslo složené jako součin prvočísel třemi způsoby (postupný rozklad na součin, „stromeček“, „sloupeček“).

Společný dělitel

Tento oddíl seznamuje žáky s pojmem společný dělitel. Žáci nejprve hledají společné dělitele daných čísel výpisem všech dělitelů. Pochopení žáků je ověřeno minitestem, který obsahuje šest otázek.

Největší společný dělitel

Tento oddíl začíná definicí společného dělitele. Poté je předvedeno fiktivními žáky pět způsobů hledání NSD. Ihned následuje několik příkladů na procvičení.

Čísla soudělná a nesoudělná

V tomto oddíle mají žáci za úkol rozřadit dvojice čísel do dvou skupin, podle toho, zda mají společného dělitele většího než jedna nebo nikoliv. Hned poté následuje definice čísel soudělných a nesoudělných a několik úloh na procvičení.

Společný násobek

Nejdříve žáci vypisují násobky čtyř a šesti a hledají mezi nimi stejná čísla. Následuje definice společného násobku dvou čísel. Potom žáci hledají společné násobky různých čísel ve stovkové tabulce.

Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel

V tomto oddíle žáci pokračují v hledání společných násobků. Na příkladu je zde vysvětleno, co je to nsn a jak ho lze nalézt pomocí rozkladu na součin prvočinitelů. Je zde jedna slovní úloha, při jejímž řešení mohou žáci využít znalosti nsn dvou čísel.

Dělitelnost – slovní úlohy

Zde jsou obsaženy pouze čtyři úlohy, které procvičují poznatky z dělitelnosti a kombinační schopnosti žáků. Slovní úlohy v tomto oddílu spíš procvičují násobení desetinných čísel než poznatky z dělitelnosti.

Hodnocení:

Tato učebnice je vhodná pro učitele, kteří jsou obeznámeni s principy činnostního učení a s metodami výuky, které prosazuje sdružení Tvořivá škola o. s. Snaží se výuku obohatit o prvky činnostního učení, žáci jsou vedení k tomu, aby experimentálně ověřovali různá tvrzení, výuka je zpestřena o různé hry s tabulkami čísel a hlasování žáků o správnosti některých tvrzení. Některé postupy jsou názorně ukázány s využitím fiktivních žáků. V učebnici ale postrádám snahu o odvození kritérií dělitelnosti a dalších tvrzení. K tvrzením jsou pouze uváděny příklady, nikoliv důkazy nebo vysvětlení, proč tomu tak je. Za další nevýhodu této učebnice považuji to, že neobsahuje téměř žádné slovní úlohy z dělitelnosti. Učebnice dává větší důraz na nácvik početních dovedností a pamětní zvládnutí uvedených tvrzení než na učení s porozuměním.

2.5.5 Jedličková M., Krupka P., Nechvátalová J.: *Matematika: Dělitelnost*

Tématem celé učebnice je dělitelnost. Kniha obsahuje 56 stran formátu A4 a je rozčleněna do deseti kapitol. Kapitoly mají neobvyklé názvy, které většinou formulují problém, kterým se daná kapitola zabývá. Názvy kapitol jsou následující: Zopakujeme si násobení a dělení přirozených čísel; Jak můžeme třídit čísla nebo objekty?; Vraťme se k násobení a dělení přirozených čísel; Lze s násobkem a dělitelem počítat?; Co nám prozradí poslední číslice?; Co nám prozradí ciferný součet?; Je možné každé přirozené číslo dělit beze zbytku?; Lze různá čísla dělit stejným dělitelem?; Je možné různá čísla násobit tak, aby vyšel stejný součin?; Malá čísla určují dělitelnost velkými čísly

Zopakujeme si násobení a dělení přirozených čísel

Tato kapitola se soustředí na zopakování a shrnutí základních poznatků, které žáci získali na 1. stupni a které jsou klíčové pro výklad učiva z dělitelnosti. Je zde zopakováno písemné násobení, pamětní násobení, pojem dvojnásobek, trojnásobek atd., písemné dělení a dělení se zbytkem.

Jak můžeme třídit čísla nebo objekty?

Tato kapitola seznamuje žáky s pojmem množina. Rozlišuje mezi množinami zadanými výčtem prvků a množinami prvků společné vlastnosti. Je zde též zaveden pojem podmnožina, průnik množin a sjednocení množin. Výklad těchto pojmů je doplněn grafickým znázorněním. Důraz je kladen i na formální správnost zápisu.

Vraťme se k násobení a dělení přirozených čísel

V této kapitole jsou zavedeny pojmy násobek, dělitel a samozřejmí dělitelé a dále formální zápis množiny všech dělitelů a množiny všech násobků daného čísla. V první části kapitoly jsou žákům přiblíženy na příkladech stavění zdi a skládání obdélníků z čtvercových kartiček pojmy násobek a dělitel. Pro násobek jsou využity obdélníky, které mají vždy tři různě dlouhé řady kartiček. Z čísla, které není dělitelné třemi, nelze vytvořit obdélník tohoto typu.

Pojem dělitel je definován pomocí dělení beze zbytku. Pak je opět pomocí grafického znázornění odvozena myšlenka, že každé číslo má nekonečně mnoho násobků a je zaveden formální zápis množiny násobků daného čísla. Čtvercových kartiček je použito i k hledání všech dělitelů daného čísla. Na příkladu je ukázáno, že počet dělitelů daného čísla souvisí s tím, kolik obdélníků se z daného počtu kartiček dá sestavit. Pak následuje formální zápis množiny všech dělitelů daného čísla. V poslední části této kapitoly je ještě předvedeno grafické řešení určení všech dělitelů čísla šestnáct a všechny nové poznatky jsou zopakovány v přehledném shrnutí.

Lze s násobkem a dělitelem počítat?

V této kapitole jsou odvozena tvrzení o dělitelnosti násobku, součtu a rozdílu dvou čísel. V celé této kapitole se opět pracuje s čtvercovými kartičkami, ze kterých jsou tvořeny požadované obdélníky. Pokud obdélník nelze utvořit, výsledné číslo není dělitelem daného čísla a podle toho pak rozhodujeme o pravdivosti daných tvrzení. V závěru jsou opět shrnuty odvozené poznatky a za nimi jsou ještě čtyři úlohy na procvičení.

Co nám prozradí poslední číslice?

V této kapitole jsou probrány znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma. První je jako obvykle dělitelnost deseti. Tento znak je odvozen pomocí postupného sčítání. Když sčítáme různý počet desítek, na konci je vždy nula. Poté následuje ještě znak dělitelnosti stem, který je odvozen podobným způsobem. Tyto poznatky jsou opět doplněny grafickým znázorněním. Poté následuje odvození dělitelnosti pěti, k čemuž jsou také využity čtvercové kartičky. Stejným způsobem je předvedeno i odvození znaku dělitelnosti dvěma. Společně se znakem dělitelnosti dvěma jsou zavedeny i pojmy sudé a liché číslo. K odvození znaku dělitelnosti čtyřmi je využito násobků čísla sto a věty o dělitelnosti součtu. Na konci kapitoly jsou shrnuty všechny nové poznatky a je zde i pět úloh na procvičení.

Co nám prozradí ciferný součet?

V této kapitole je odvozen znak dělitelnosti devíti a třemi. K odvození dělitelnosti devíti je využito skutečnosti, že při dělení desítky, stovky a tisícovky devíti je vždy zbytek jedna. Pro dělitelnost devíti je tedy rozhodující počet jednotek, desítek, stovek, tisícovek atd. Toto odvození je znázorněno i graficky pomocí obdélníku o devíti řadách. V další části je vysvětlen pojem ciferný součet a je zde formulován znak dělitelnosti devíti. Obdobným způsobem je odvozen i znak dělitelnosti třemi. Opět následuje shrnutí nových poznatků a čtyři příklady na procvičení.

Je možné každé přirozené číslo dělit beze zbytku?

V této kapitole jsou definovány pojmy prvočíslo, číslo složené a rozklad na součin prvočísel. Před definováním pojmu číslo složené je ukázáno pro číslo osm, kolik různých obdélníků je možné složit z osmi kartiček. Ze sedmi kartiček, které představují číslo, nelze utvořit žádný netriviální obdélník. Pak je uvedena definice prvočísla a čísla složeného. Číslo jedna není ani prvočíslo ani číslo složené, protože má právě jednoho dělitele. Jako úvahová úloha, která poukazuje na další souvislosti, je zde uvedeno hledání prvočísel v první stovce. Rozklad čísel složených na prvočísla je rovněž znázorněn graficky. 24 kartiček je složeno do obdélníku o čtyřech řadách a šesti sloupcích. V každém kroku, který kopíruje postupný rozklad na součin, se rozdělením původního obdélníku znásobí počet obdélníků. Po grafickém znázornění následuje definice rozkladu na prvočinitele. V další části této kapitoly jsou předvedeny tři různé možnosti, jak rozložit číslo složené na součin prvočísel. Je využito zápisu, který se v jiných učebnicích označuje jako „postupný rozklad na součin“, „stromeček“ a „sloupeček“. V závěru kapitoly je shrnuto probrané učivo a jsou zde čtyři úlohy na procvičení.

Lze různá čísla dělit stejným dělitelem?

Tato kapitola se zabývá objasňováním pojmů společný dělitel, NSD, čísla soudělná a nesoudělná. V úvodu je vysvětlen pojem společný dělitel dvou a více čísel na příkladu rozdělování různého počtu různých druhů potravin mezi pět skautů. Po definici pojmu společný dělitel dvou, nebo více čísel se výklad zaměřuje na hledání NSD dvou čísel. K tomu je použito jak čtvercových kartiček, tak výpisu všech násobků daných čísel. Poté následuje obecná definice a formální zápis NSD a postup, jak hledat NSD pomocí rozkladu na prvočinitele. V další části kapitoly je ještě předvedeno, jak hledat NSD trojice čísel pomocí postupného rozkladu na součin anebo rozkladem pomocí „sloupečku“. Na závěr je zařazeno shrnutí a čtyři úlohy na procvičení.

Je možné různá čísla násobit tak, aby vyšel stejný součin?

V této kapitole je odvozen pojem společný násobek a nsn. V úvodu je k objasnění pojmu společný násobek použito slovní úlohy s ozubenými koly s různým počtem zubů. Úkolem je zjistit po kolika otáčkách se obě kola opět ocitnou ve výchozí poloze. Poté jsou určeny násobky čísel 9 a 12 pomocí výpisu několika násobků těchto čísel. Po definici pojmu společný násobek následuje i znázornění pomocí čtvercových kartiček. V další části je ukázáno, že společný násobek dvou čísel lze nalézt vždy, jde se o součin těchto čísel a jeho násobky. Pak následuje definice nsn a je na několika příkladech předvedeno, jak využít prvočíselný rozklad k hledání nsn. V závěru kapitoly je shrnutí a čtyři úlohy na procvičení.

Malá čísla určují dělitelnost velkými čísly

V této kapitole jsou uvedena následující dvě tvrzení:

Když je číslo n dělitelné číslem a je rovněž dělitelné všemi děliteli čísla a.

Když je číslo n dělitelné čísly a a b, je dělitelné rovněž $n(a, b)$.

Platnost těchto tvrzení je podložena konkrétními příklady. Tato tvrzení pokládám za rozšiřující učivo.

Hodnocení

Učebnice této řady se vždy věnují pouze jednomu tématu a jsou doplněny o pracovní sešit. Svým zpracováním se učebnice trochu liší od ostatních tradičních učebnic. Například kapitola, která se zabývá množinami, se nevyskytuje v žádné jiné učebnici věnované dělitelnosti. Je nutné ocenit snahu autorů v každé kapitole ilustrovat řešení problému grafickým znázorněním. K tomuto znázornění jsou využity čtvercové kartičky, z nichž jsou sestavovány obdélníky nebo jiné útvary, pokud netriviální obdélník sestavit nelze. Podle mého názoru by bylo vhodnější, aby žáci sami pracovali s čtvercovými kartičkami, případně zakreslovali řešení na čtverečkovaný papír. To, že by měli žáci pracovat s čtverečky, případně s čtverečkovaným papírem, ale v učebnici nikde řečeno není. Společný násobek je vykládán prostřednictvím slovní úlohy, zde považuji za nedostatek, že se v příkladu ihned pracuje s vysokými čísly. V knize je patrná snaha o důsledné grafické členění jednotlivých částí textu. Text je pomocí barev a symbolů odlišen na osm různých částí podle funkce (motivace, připomenutí učiva, řešené úlohy atd.). Podbarvování větších částí textu sytými barvami ale může působit rušivě. Ve spodní části každé stránky je možné najít některý ze základních termínů přeložený do angličtiny a němčiny, což může být výhoda při výuce metodou CLIL.

2.5.6 Molnár J. a kol.: *Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele*

Součástí této učebnicové sady je učebnice, pracovní sešit a učebnice s komentářem pro učitele. V této učebnici se dělitelností zabývá samostatná kapitola, která má 17 stránek formátu přibližně A4 a obsahuje následující podkapitoly: Násobek a dělitel; Sudá a lichá čísla; Prvočísla a čísla složená; Znaky dělitelnosti; Největší společný dělitel; Čísla soudělná a nesoudělná; Nejmenší společný násobek; Souhrnná cvičení

Násobek a dělitel

Na příkladu žabky, která skáče na každé druhé políčko, a zajíce, který skáče na každé třetí políčko, jsou zde ilustrovány násobky dvou a tří. Pojem dělitel je pak definován pomocí pojmu násobek a dělení beze zbytku. V poznámce pro učitele je zmíněno, že tato podkapitola využívá dovednosti dělení a násobení, které žáci získali na 1. stupni a učí se rozlišovat pojmy násobek, součin, dělitel a podíl. V učebnici je rovněž vysvětlen pojem samozřejmí dělitelé. Pak následuje třináct úloh na procvičení. Jsou mezi nimi i slovní úlohy a úlohy, které vyžadují grafické řešení.

Sudá a lichá čísla

Tato podkapitola se zabývá sudými a lichými čísly. K demonstraci pojmu sudost a lichost je zvoleno grafické uspořádání čísla do dvou řad. Čísla, která lze uspořádat do dvou stejných řad, jsou čísla sudá, ostatní čísla jsou lichá. Pomocí grafického znázornění mají žáci též rozhodnout o pravdivosti obecných tvrzení, zabývajících se součtem dvou sudých čísel, dvou lichých čísel a sudého a lichého čísla. Dále následuje devět vesměs početních procvičovacích úloh.

Prvočísla a čísla složená

V úvodu této podkapitoly jsou definována prvočísla a čísla složená pomocí počtu dělitelů. Pak je zdůrazněna důležitost rozkladu na prvočinitele. Dále je vysvětleno, co jsou to prvočinitelé a je předvedeno třemi způsoby, jak lze provést rozklad na prvočinitele. Pak následuje šest početních úloh na procvičení. V poznámce pro učitele je zmíněno, že zde je vhodné s žáky hledat prvočísla pomocí Eratosthenova síta.

Znaky dělitelnosti

V této podkapitole jsou probrány znaky dělitelnosti deseti, pěti, dvěma, třemi, devíti a čtyřmi. Jako první je odvozen znak dělitelnosti deseti. Autoři učebnice předpokládají, že žáci tento znak odvodí pomocí toho, že si napíšou několik násobků deseti. Obdobným způsobem lze odvodit i znak dělitelnosti pěti. V učebnici k tomu slouží násobky pěti znázorněné na dresech gymnastek. K odvození znaku dělitelnosti dvěma dojde analogicky. Následují čtyři úlohy na procvičení.

Před odvozením znaku dělitelnosti třemi je vyložen pojem ciferný součet. Pak mají žáci za úkol vypsat několik násobků tří větších než deset a sledovat jejich ciferný součet. Dělitelnost devíti je vysvětlena obdobně. V podkapitole je vysvětlena i dělitelnost čtyřmi. Je objasněno, že každá stovka, tisícovka, desetitisícovka atd. je dělitelná čtyřmi, proto pro dělitelnost čtyřmi je rozhodující poslední dvojčíslí. V celé kapitole je dvacet úloh na procvičení. V poznámce pro učitele je navrženo, že důkazů platnosti tvrzení o dělitelnosti součtu, rozdílu, součinu atd. může být použito jako rozšiřující učivo.

Největší společný dělitel

Podkapitola začíná definicí pojmu společný dělitel dvou nebo více čísel a pojmu NSD. Je zde zmíněno, že znaky dělitelnosti je možné použít při hledání dělitelů daného čísla a je uveden formální zápis pro NSD dvojice čísel. Nejprve žáci procvičují hledání společných dělitelů daných čísel pomocí vypisování dělitelů těchto čísel. Pak následuje několik úloh na procvičení, za kterými je uveden postup, jak hledat NSD pomocí rozkladu na prvočísla. Je zde i aplikační slovní úloha, ve které je úkolem žáků najít co největší rozměr čtverce, na který je možné rozdělit obdélníkovou tabulku čokolády. Dále následují čtyři úlohy na procvičení.

Čísla soudělná a nesoudělná

K definování čísel soudělných a nesoudělných je využitu pojmu NSD. Po definicích následuje pět úloh na procvičení. Jsou zde i úlohy, ve kterých mají žáci za úkol rozhodnout o pravdivosti jednoduchých tvrzení o dělitelnosti, např. „Jsou každá dvě lichá čísla nesoudělná?“.

Nejmenší společný násobek

Pojem společný násobek je vysvětlen na příkladu šesti různých zvířat, z nichž každé dělá kroky různé délky. Žáci v tomto příkladu určují společné násobky čísel 2, 3, 4, 5 a 6. Poté je uvedena definice nsn a jeho formální zápis pro dvojici čísel. Poté následují úlohy na procvičení. Mezi nimi i slovní úloha, ve které mají žáci za úkol nalézt číslo, které je zároveň dělitelné třemi, pěti a šesti. V řešeném příkladu je uveden postup, jak určit nsn pomocí rozkladu na prvočísla. V závěru podkapitoly je dalších deset procvičovacích úloh včetně několika úloh slovních.

Souhrnná cvičení

Tato podkapitola obsahuje šestnáct úloh na zopakování poznatků z celé kapitoly Dělitelnost. Jde se vesměs o slovní úlohy typu „lze z 366 zápalek složit šestiúhelníky tak, aby žádná nezbyla?“. Jsou zde ale i početní úlohy na hledání nsn a NSD.

Hodnocení

Učebnice je vhodná pro transmisivní způsob vyučování. Jsou v ní obsaženy většinou jen základní poznatky z dělitelnosti. Za rozšiřující učivo považuji znak dělitelnosti čtyřmi. Při vysvětlování nových poznatků jsou v učebnici většinou vhodné názorné příklady. Znak dělitelnosti třemi a devíti je v učebnici uveden bez snahy o odvození nebo vysvětlení. Postupy pro nalezení NSD a nsn jsou provedeny přehledně a jasně. Mezi slovními úlohami by mohlo být víc slovních úloh na hledání nsn a NSD. Grafická úprava je přehledná a přitažlivá.

2.5.7 Herman J., Chrápavá V., Jančovičová E., Šimša, J.: *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Dělitelnost*

Tato kniha se věnuje výkladu učiva z tématu dělitelnosti a je určena pro víceletá gymnázia. S dělitelností se žáci osmiletého gymnázia setkají již v primě, ve vyšších ročnících dochází pouze k opakování a upevňování těchto poznatků. Učebnice má 100 stran formátu přibližně B5 a je rozdělena do následujících 15 kapitol: Násobek; Dělitel; Dělitelnost součtu, součinu a rozdílu; Znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma; Znaky dělitelnosti čtyřmi a osmi; Znaky dělitelnosti devíti a třemi; Prvočísla a čísla složená; Rozklad složených čísel; Společný dělitel; Čísla soudělná a nesoudělná; Společný násobek; Znaky dělitelnosti dalšími čísly; Slovní úloh; Úlohy z matematické olympiády; Souhrnná cvičení

Již v úvodu knihy je poznámka, že v celé učebnici budeme pracovat s přirozenými čísly bez nuly. Podrobně zmíním, co je obsahem jednotlivých kapitol, kromě kapitoly Úlohy z matematické olympiády, která podle mého názoru patří mezi rozšiřující učivo a v ostatních učebnicích věnujících se dělitelnosti není obsažena.

Násobek

Pojem násobek je zde vyložen nejdříve pomocí součinu dvou čísel a pak pomocí dělení beze zbytku. Ke znázornění násobků je též použita číselná osa, kde jsou nejprve znázorněny násobky dvou, které získáme z dvojky postupným přičítáním čísla dvě. Pak jsou násobky čísla a znázorněny na číselné ose i obecně jako $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, $3 \cdot a$, atd. Už v této kapitole žáci hledají všechny součiny, pomocí kterých je dané číslo možné zapsat. Na konci kapitoly je dvanáct úloh na procvičení. Mezi nimi jsou i úlohy na zobecňování.

Dělitel

V úvodu kapitoly je zopakováno dělení se zbytkem, pomocí něhož je definován pojem dělitel. Dále jsou zopakovány pojmy dělenec, dělitel a podíl. Pak je zaveden symbolický zápis množiny všech dělitelů daného čísla. Poté následuje sedm úloh na procvičení, včetně úlohy s obecným zadáním. V závěru kapitoly je žákům nabídnuto několik možností, jak najít všechny dělitele daného čísla. Přehledný je zvláště výpis dělitelů tabulkou. V závěru jsou ještě tři úlohy na procvičení. Za těmito dvěma kapitolami je dalších osmnáct úloh na zopakování poznatků z první a druhé kapitoly.

Dělitelnost součtu, součinu a rozdílu

Dělitelnost součtu je odvozena pomocí zákona o distributivitě, nejprve pro dva sčítance a pak pro libovolný počet sčítanců. Dále je formulováno tvrzení, kdy součet není dělitelný daným číslem. Obdobně je tomu i s dělitelností rozdílu. Na závěr je podobné tvrzení vysloveno i pro součin. Všechna tvrzení jsou názorně zapsána pomocí příkladů s konkrétními čísly. Na závěr kapitoly je zařazeno pět příkladů, z nichž jeden je zadán obecně a je označen hvězdičkou jako obtížný příklad.

Znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma

V úvodu této kapitoly je objasněno, co je to znak dělitelnosti. Znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvou jsou zařazeny do stejné kapitoly, protože pro dělitelnost každým z těchto čísel stačí sledovat číslici na řádu jednotek. To je názorně poukázáno na příkladu čísel 2836 a 2830, které jsou rozepsány v rozvinutém zápisu. Po stručném odvození znaku dělitelnosti každého z těchto čísel je odvozený znak zvýrazněn a zapsán do rámečku. Tato kapitola obsahuje deset úloh na procvičení.

Znaky dělitelnosti čtyřmi a osmi

K odvození znaků dělitelnosti čtyřmi je opět použit rozvinutý zápis čísel 2836 a 2830. Je zde poukázáno na skutečnost, že tisíce i stovky jsou vždy dělitelné čtyřmi beze zbytku. Desítky a jednotky však být dělitelné čtyřmi nemusí, proto o dělitelnosti čtyřmi rozhoduje poslední dvoučíslí. Potom následují čtyři úlohy na procvičení.

Při odvozování znaku dělitelnosti osmi jsou použita čísla 10, 100 a 1000. Zde je zdůrazněna skutečnost, že pouze tisíce o vyšší řády jsou vždy dělitelné osmi beze zbytku. Proto je pro dělitelnost daného čísla osmi rozhodující dělitelnost posledního trojčíslí číslem osm. Po odvození znaku dělitelnosti osmi je zařazen jeden řešený příklad a tři příklady na procvičení.

Znaky dělitelnosti devíti a třemi

Znaky dělitelnosti devíti a třemi jsou zařazeny v jedné podkapitole, protože pro oba tyto znaky je klíčový ciferný součet. Při odvození dělitelnosti devíti je použito číslo 3753, které je zapsáno pomocí rozvinutého zápisu. Je zdůrazněna skutečnost, že čísla 999, 99 a 9 jsou dělitelná devíti. Každá tisícovka, stovka i desítka dává při dělení devíti zbytek jedna, proto problém dělitelnosti daného čísla devíti můžeme převést na dělitelnost devíti ciferného součtu tohoto čísla. Před znakem dělitelnosti devíti je uvedena definice ciferného součtu.

Znak dělitelnosti třemi je odvozen obdobným způsobem. Rovněž je využito toho, že tisíc, sto i deset dává po dělení třemi zbytek jedna. Tato kapitola obsahuje osm úloh na procvičení dělitelnosti devíti. Za touto kapitolou je zařazeno osmnáct úloh na procvičení znaků dělitelnosti. Zajímavé jsou úlohy, ve kterých žáci mají najít čísla, která jsou dělitelná dvěma nebo třemi různými čísly zároveň.

Prvočísla a čísla složená

V úvodu této kapitoly jsou vymezena čísla složená a prvočísla, pomocí toho, zda se dají rozložit na součin dvou menších čísel. Slovní definice je doplněna znázorněním na číselné ose. Hned za definicí následují příklady na procvičení, ve kterých mají žáci za úkol hledat ve stovkové tabulce všechna prvočísla a prvočíselná dvojčata, která jsou zavedena jako dvě prvočísla, která se liší o dvě. Dále žáci pokračují ve zkoumání trojciferných prvočísel.

Rozklad složených čísel

Tato kapitola navazuje na znalosti z předchozí kapitoly a rozvíjí myšlenku, že každé složené číslo lze zapsat jako součin. Nyní však budeme chtít zapsat dané číslo jako součin prvočísel. Učebnice nabízí několik vzorových způsobů, jak provést prvočíselný rozklad čísla 60. S využitím fiktivních žáků je proveden rozklad pomocí „postupného rozkladu na součin", „sloupečku" a „stromečku". Poté je vymezen pojem rozklad na prvočinitele a je zde též předveden zápis rozkladu na prvočinitele pomocí mocnin prvočísel. S mocninami se zde žáci patrně setkávají poprvé. Dále následuje poučka o tom, že pro určení, zda dvouciferné číslo není prvočíslo, stačí ověřit dělitelnost dvěma, třemi, pěti a sedmi. V závěru této kapitoly je sedmnáct úloh na procvičení. Nejpodnětnější je příklad, ve kterém mají žáci za úkol stanovit, kolika prvočísly je nutné vydělit trojciferné číslo při rozhodování, zda jde o prvočíslo.

Společný dělitel

Na začátku kapitoly je definován společný dělitel dvou čísel a po několika příkladech i největší společný dělitel a hned je uveden symbolický zápis NSD dvou čísel. V druhé části kapitoly jsou ukázány tři různé postupy, jak lze snadno určit NSD pomocí rozkladu na prvočinitele. V této kapitole je sedm úloh na procvičení.

Čísla soudělná a nesoudělná

Tato kapitola obsahuje definice čísel soudělných a nesoudělných, několik příkladů takových dvojic nebo trojic čísel a sedm úloh na procvičení.

Společný násobek

Vysvětlení pojmu společný násobek začíná řešeným příkladem na hledání společných násobků čísel čtyři a šest. Společné násobky jsou označeny mezi násobky čtyř a šesti. Stejným způsobem patrně žáci hledají společné násobky dvojic čísel v následujících úlohách. V dalším textu je vysvětleno, že nejdůležitější je nsn, protože každý další společný násobek je násobkem nsn. V rámečku je uvedena definice nsn. V druhé části této kapitoly jsou uvedeny čtyři různé postupy, jak hledat nsn dvou čísel. Mezi úlohami na procvičení stojí za zmínku úloha, která upozorňuje žáky, že při vynásobení nsn a NSD dvou čísel dostaneme vždy součin těchto čísel. Další řešený příklad obsahuje návod, jak hledat nsn trojice čísel. Za touto kapitolou je zařazeno sedmnáct úloh na procvičení.

Znaky dělitelnosti dalšími čísly

V této kapitole jsou odvozeny znaky dělitelnosti šesti, dvanácti, patnácti a osmnácti. Nakonec je odvozeno pravidlo, že pokud je číslo dělitelné dvěma nesoudělnými čísly, pak je dělitelné i jejich součinem. V závěru kapitoly je obsaženo osm úloh na procvičení. Zajímavá je úloha označená dvěma hvězdičkami jako velmi těžká, ve které mají žáci za úkol ověřit, že součin čtyř po sobě následujících čísel je vždy dělitelný číslem 24. Tato kapitola je vzhledem k RVP rozšiřujícím učivem.

Slovní úlohy

Tato kapitola obsahuje čtyři řešené příklady a osm slovních úloh na procvičení. Všechny slovní úlohy v této kapitole lze vyřešit hledáním dělitelů daného čísla nebo aplikací algoritmu na hledání nsn nebo NSD.

Souhrnná cvičení

Poslední kapitola této knihy je rozdělena do devíti podkapitol. V osmi podkapitolách jsou úlohy k učivu ke každé z prvních osmi kapitol. Devátou podkapitolou jsou různé úlohy. Úloh je celkem 155. Jednotlivé úlohy mají různou obtížnost, některé jsou vhodné k řešení zpaměti, jiné jsou označeny jako obtížné, velmi obtížné nebo zajímavé.

Hodnocení učebnice

Učebnice pro víceletá gymnázia je graficky přehledně členěná, definice a tvrzení jsou tištěny modře a jsou orámované, kniha obsahuje velké množství didakticky vhodných znázornění a ilustrací. Mezi úlohami, kterých učebnice obsahuje opravdu velké množství, jsou zvlášť označeny úlohy na pamětní počítání, úlohy náročnější nebo úlohy zajímavé. Tato učebnice je ve srovnání s tradičními učebnicemi pro ZŠ obsáhlejší. Navíc je zde například zařazena dělitelnost součtu, rozdílu a součinu, dělitelnost čtyřmi, osmi, šesti, dvanácti a patnácti. I pro svůj rozsah (100 stran) je patrné, že záměrem této publikace je probrat učivo do větší hloubky, než je běžné v učebnicích pro ZŠ. Tato učebnice je vhodná pro transmisivní styl výuky. Podnětných úloh obsahuje jen malé množství. Nicméně kladně hodnotím, že se v učebnici dají najít i úlohy, které jsou zaměřené na zobecňování a dokazování.

2.5.8 Šarounová A. a kol.: *Matematika 7, 1. díl*

Tématem dělitelnost se zabývá zhruba 44 stran formátu přibližně A5, které jsou rozděleny do následujících podkapitol: Dělitel a násobek; Dělitelnost součtu, rozdílu a součinu; Znaky dělitelnosti; Dělitelnost devíti a třemi; Prvočísla a čísla složená; Rozklad složených čísel na prvočinitele; Společný dělitel; Nejmenší společný násobek; Opakování a doplnění učiva o dělitelnosti

Dělitel a násobek

Tato podkapitola začíná nezvykle pojmem dělitel, nikoliv násobek. Problém dělitelnosti je žákům přiblížen na dělení bonbónů mezi tři kamarády. Dělitelnost je poté definována pomocí dělení beze zbytku. Obdobně je definován i násobek. Následuje řešená slovní úloha, ve které mají žáci za úkol pokrýt obdélníkovou místnost různě širokými pruhy koberce, aby se nemuselo nic stříhat. V závěrečné části podkapitoly je předvedeno, jak hledat všechny dělitele daného čísla. Jako správný zápis je zde předvedeno „téčko“. Také je definován pojem samozřejmí dělitelé. V závěru podkapitoly je 23 úloh na procvičení.

Dělitelnost součtu, rozdílu a součinu

V této podkapitole je na příkladu, v kterém je odměřován prací prášek odměrkami po 62 g, názorně ukázáno, že součet dvou čísel dělitelných daným číslem je opět dělitelný daným číslem. Následně je tvrzení zobecněno na libovolný počet sčítanců. Dále je odvozeno podobné tvrzení pro rozdíl a součin. Tvrzení jsou vždy doprovázena početními příklady. V závěru podkapitoly je dvanáct úloh na procvičení.

Znaky dělitelnosti

V této podkapitole jsou probrány znaky dělitelnosti deseti, pěti, dvěma a čtyřmi. Dělitelnost deseti je vysvětlována na geometrickém příkladu, žáci mají za úkol zjistit, který ze tří daných obdélníků lze beze zbytku rozdělit na čtverce o straně 10 x 10 cm. Dále je k odvození dělitelnosti deseti využito rozvinutého zápisu čísla a tvrzení o dělitelnosti součtu z minulé kapitoly. Dělitelnost pěti je odvozena obdobně. V dalším textu je vysvětlen pojem sudá a lichá čísla pomocí dělitelnosti dvěma. Dělitelnost čtyřmi je odvozena také pomocí tvrzení o dělitelnosti součtu, dále je využito toho, že číslo 100 a jeho násobky jsou dělitelné čtyřmi. Na závěr podkapitoly je zařazeno 21 úloh na procvičení.

Dělitelnost devíti a třemi

Dělitelnost devíti je odvozená pomocí zbytků, které dávají při dělení devíti násobky deseti, sta a tisíce. Je vidět, že zbytek je vždy roven počtu desítek, stovek nebo tisíců. Pak je ukázáno, co je ciferný součet daného čísla, a je formulován znak dělitelnosti devíti. Znak dělitelnosti třemi je vysvětlen obdobným způsobem. V závěru podkapitoly, před úlohami k procvičení, je souhrnná tabulka znaků dělitelnosti pro doposud zkoumaná čísla.

Prvočísla a čísla složená

Pojem prvočíslo a číslo složené je demonstrován na příkladu, ve kterém žáci mají za úkol navrhnout, jakým způsobem je možné rozdělit tři různé počty závodníků do skupin. Dále je zařazen příklad na určování prvočísel v první stovce pomocí Eratosthenova síta a šest dalších procvičovacích úloh.

Rozklad složených čísel na prvočinitele

Tato podkapitola opět začíná řešenou slovní úlohou, ve které žáci hledají různé součiny, pomocí kterých lze zapsat číslo 30. Dále je předvedeno, jak toto číslo zapsat jako součin prvočísel. Následuje definice rozkladu na prvočinitele a předvedení tří různých postupů, jak rozklad provést („stromeček“, „sloupeček“ a „postupný rozklad na součin“). V závěru podkapitoly je osm úloh na procvičení.

Společný dělitel

Při řešení úvodní slovní úlohy v této podkapitole žáci hledají rozměry čtverců, kterými je možné beze zbytku pokrýt daný obdélník. V předvedeném řešení jsou vypsány všechny dělitele obou délek stran obdélníku a jsou mezi nimi vybrána stejná čísla. Pomocí tohoto příkladu je definován společný dělitel dvou nebo více čísel. Dále následuje definice NSD, jeho formální zápis a několik doporučených postupů, jak NSD určit. V závěru podkapitoly jsou ještě vymezeny pojmy soudělná a nesoudělná čísla a je zde zařazeno jedenáct početních úloh na procvičení.

Nejmenší společný násobek

Pojem společný násobek dvou čísel je vysvětlen na slovní úloze. Ve vzorovém řešení jsou vypsány násobky 60 a 70 a zvýrazněny jsou násobky, které jsou společné pro obě čísla. Obdobným způsobem žáci řeší další úlohu, po které následuje definice pojmu nsn. Dále je předveden způsob, jak najít nsn pomocí rozkladu na prvočinitele. Na závěr je ještě uvedena poučka, že nsn dvou nesoudělných čísel se rovná jejich součinu, pak následuje třináct úloh na procvičení.

Opakování a doplnění učiva o dělitelnosti

V této podkapitole se žáci seznámí se znaky dělitelnosti osmi a dvaceti, které jsou považovány za rozšiřující učivo. Pak je zde pět řešených slovních úloh na aplikaci poznatků z dělitelnosti. Zajímavé jsou úlohy s ozubenými koly nebo umístění lamp po obvodu obdélníkového náměstí tak, aby mezi nimi byly stejné vzdálenosti.

Hodnocení

Pozitivně hodnotím snahu o vysvětlování nových pojmů a skutečností na názorných příkladech, které jsou žákům blízké. Některé z těchto úloh mi ale připadají na první setkání s problémem dost složité, nebo se v nich vyskytují zbytečně vysoká čísla. Před formulací nového tvrzení je téměř vždy snaha o odvození daného tvrzení. Učebnice obsahuje dostatek slovních úloh na aplikaci poznatků z dělitelnosti i dostatečné množství úloh na procvičení. Grafická úprava učebnice je přehledná, patrně ne však příliš atraktivní pro žáky 2. stupně ZŠ. Učebnice působí poněkud zastarale. Také členění do kapitol není vždy úplně logické. Např. podkapitola Dělitelnost třemi a devíti by měla být součástí podkapitoly Znaky dělitelnosti.

2.5.9 Odvárko O., Kadleček J.: *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 2. díl: Desetinná čísla, dělitelnost*

Téma dělitelnost je v této učebnice rozděleno do dvou kapitol, které se dále dělí na podkapitoly tímto způsobem: Dělitel a násobek (Dělitel; Násobek; Dělitelnost deseti a pěti; Dělitelnost dvěma; Dělitelnost třemi; Úlohy na závěr); Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel (Prvočísla a čísla složená; Společní dělitelé; Společné násobky; Úlohy na závěr)

Kapitola Dělitel a násobek má jedenáct stran a kapitola Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel má třináct stran formátu přibližně B5.

Dělitel

Před definicí pojmu dělitel jsou uvedeny dvě slovní úlohy, které vedou na dělení se zbytkem. Pojem dělitel je definován pomocí dělení se zbytkem. Pak následují čtyři úlohy na procvičení, za kterými je opět na příkladu vysvětleno tvrzení, že každé číslo větší než jedna, má aspoň dva různé dělitele. V závěru podkapitoly je pět úloh na procvičení, ve kterých žáci vesměs hledají dělitele daných čísel.

Násobek

Pojem násobek je zopakován ve slovní úloze, kde žáci hledají násobky patnácti. Dále jsou zavedeny pojmy jednonásobek, dvojnásobek, trojnásobek atd. Následují procvičovací úlohy. V dalším tvrzení je ztotožněn výrok být násobkem osmi a být dělitelný osmi. V závěru podkapitoly jsou úlohy, které vedou k poznatku, že každé číslo má nekonečně mnoho násobků.

Dělitelnost deseti a pěti

Před formulací znaku dělitelnosti deseti žáci zkoumají, které z daných čísel jsou dělitelná deseti, řeší problém, jak rozdělit zlaťáky mezi deset loupežníků a ověřují tvrzení fiktivní žákyně Aničky. Při odvozování dělitelnosti pěti se žáci zamýšlejí, zda všechna čísla dělitelná deseti jsou také dělitelná pěti a zda musí být číslo dělitelné deseti, aby bylo dělitelné pěti. Současně s vyslovením tvrzení, kdy je číslo dělitelné pěti, jsou některé násobky pěti také znázorněny graficky pomocí postupného přičítání pěti. V závěru podkapitoly jsou tři úlohy na procvičení.

Dělitelnost dvěma

Dělitelnost dvěma je ilustrována na příkladu řazení vojáků do dvojstupu. Dále žáci ověřují, zda jsou daná čísla dělitelná dvěma a zkoumají, co mají společného násobky dvou menší než 36. Pak je formou tvrzení uveden znak dělitelnosti dvěma. Hned potom jsou pomocí dělitelnosti dvěma definována sudá a lichá čísla. Na závěr podkapitoly je zařazeno pět úloh na procvičení.

Dělitelnost třemi

Znak dělitelnosti třemi je probrán pomocí tvrzení fiktivního žáka, který přišel na to, že dělitelnost třemi souvisí s ciferným součtem. Žáci platnost jeho tvrzení ověřují. Následně je uvedena definice ciferného součtu a je formulován znak dělitelnosti třemi. V závěru podkapitoly je zařazeno deset úloh na procvičení.

Úlohy na závěr

Zde je obsaženo deset početních úloh na procvičení poznatků z této kapitoly.

Prvočísla a čísla složená

Tato podkapitola navazuje na učivo z podkapitoly Dělitel. Nejprve si žáci všímají počtu dělitelů u čísel v první patnáctce. Poté jsou pomocí počtu dělitelů definována prvočísla a čísla složená. V následujících procvičovacích úlohách je zmíněn pojem prvočíselná dvojčata. Na čísle 105 je poté předveden rozklad na součin prvočísel. Poté jsou předvedeny tři různé možnosti, jak složené číslo rozložit na součin prvočísel. Tyto tři různé zápisy prvočíselného rozkladu jsou nazvány: „postupné dělení“ (jinde postupný rozklad na součin), „vodopád“ (jinde stromeček) a „žebřík“ (jinde sloupeček). V této podkapitole je celkem patnáct procvičovacích úloh.

Společní dělitelé

Pojem společný dělitel je přiblížen na problému, do jakých stejně početných družstev můžeme rozdělit 20 a 70 žáků ze dvou různých škol. Za tímto příkladem následuje vymezení společného dělitele a NSD pomocí konkrétního příkladu. Pak následuje pět úloh na procvičení, ve kterých žáci hledají společné dělitele a NSD výpisem všech dělitelů nebo pamětně. V dalším příkladu žáci určují NSD několika dvojic různých čísel. Tento příklad ukáže žákům rozdíl mezi dvojicí čísel soudělných a nesoudělných. Dále je v této podkapitole uveden postup k hledání NSD.

Společné násobky

Na úvodních dvou slovních úlohách je ukázáno, jak lze určit společné násobky dvou čísel pomocí vypisování násobků těchto čísel. Společné násobky a nsn jsou uvedeny na příkladu čísel 9 a 12. Pak následují úlohy na procvičení a po nich postup, jak určit nsn pomocí rozkladu na součin prvočísel. Je uveden i postup pro hledání nsn trojice čísel. Žáci jsou též upozorněni na skutečnost, že nsn dvojice nesoudělných čísel je jejich součin.

Úlohy na závěr

Toto je velmi stručná podkapitola obsahující pouze pět početních úloh.

Hodnocení

V této učebnici je patrná snaha o to, aby si žáci osvojovali nové poznatky s porozuměním, v učebnici není mnoho početních úloh, spíše převažují slovní úlohy a netradiční úlohy, jejichž řešení vyžaduje kombinaci znalostí z více témat. Nové poznatky jsou vysvětlovány na úlohách z běžného života, které jsou žákům blízké a jejichž řešení vede k těmto poznatkům. V učebnici je jen částečně odvozeno kritérium dělitelnosti třemi a kritérium dělitelnosti devíti zde uvedeno není. Učebnice obsahuje pouze základní učivo. Grafická úprava je přehledná a konzistentní, kniha je doplněna velkým množstvím grafických znázornění řešení (často na číselné ose), tabulek a pod. Ilustrace jsou vkusné a vtipné.

2.5.10 Půlpán Z., Čihák M.: *Matematika pro 6. ročník ZŠ: Aritmetika*

Dělitelnost je obsažena v druhé kapitole na 57 stranách formátu přibližně B5 v následujících šesti podkapitolách: Násobek; Dělitel; Dělitelnost deseti, pěti, dvěma; Dělitelnost třemi a devíti; Prvočísla a čísla složená; Společní dělitelé; Společné násobky

Násobek

Podkapitola je rozdělena na několik oddílů. V úvodu jsou znázorněny násobky tří a čtyř na číselné ose pomocí postupného přičítání, je zde snaha o propojení se znalostmi malé násobilky. Dále následuje definice násobku pomocí dělení se zbytkem. V dalším oddíle jsou na praktických příkladech vysvětleny pojmy dvojnásobek, trojnásobek atd. Poslední oddíl obsahuje jedenáct úloh na procvičení.

Dělitel

Pojem dělitel je zde přiblížen na problému rozdělení skupiny chlapců do dvou družstev a dělení se zbytkem. Je uvedena definice pojmu dělitelnost. Další oddíl se zabývá hledáním všech dělitelů daného čísla. Po několika příkladech následují „téčka“, která jsou předvedena jako vzorový výpis dělitelů. Dále je uvedeno tvrzení o samozřejmých dělitelích. V dalším oddíle je sedmnáct úloh včetně pěti slovních úloh.

Dělitelnost deseti, pěti, dvěma

Tato podkapitola začíná vypsáním některých násobků deseti, pěti a dvou. Pozornost žáků je šipkami upoutána na číslici v řádu jednotek. Bezprostředně za tím následují tvrzení o znacích dělitelnosti deseti, pěti a dvěma. Následuje třináct úloh na procvičení. Další oddíl začíná definicí sudých a lichých čísel a znázorněním těchto čísel na číselné ose. Tyto poznatky žáci procvičí v devíti úlohách. Ve zmínce o číslech popisných u domů na opačných stranách ulice je vidět snaha o propojení poznatků s praktickým životem.

Dělitelnost třemi a devíti

Tato podkapitola začíná výpisem násobků tří a zdůrazněním, že zde pravidlo o koncové cifře z předchozí podkapitoly neplatí. Následuje výklad ciferného součtu a definice znaku dělitelnosti třemi. Následuje osm úloh na procvičení. Dělitelnost devíti je vyložena obdobným způsobem.

Prvočísla a čísla složená

V úvodu podkapitoly je na konkrétním a později obecném příkladu vysvětlen pojem samozřejmí dělitelé daného čísla. Hned za příklady následuje definice. Pomocí následujícího tvrzení o počtu dělitelů jsou definována čísla složená a prvočísla. V následujících pěti úlohách je mimo jiné uveden příklad Eratosthenova síta, pomocí něhož mají žáci hledat prvočísla v první stovce. V dalším oddílu je předvedeno, jak se konkrétní číslo dá rozložit na součin prvočísel. Dále jsou uvedeny dva různé způsoby, kterými je možné postupovat při rozkladu na součin prvočísel, které jsou pojmenovány „sloupeček" a „stromeček". Žáci jsou rovněž upozorněni na skutečnost, že každé číslo složené se dá zapsat jako součin prvočísel. Podkapitola končí čtyřmi početními úlohami na procvičení.

Společní dělitelé, společné násobky

Tato podkapitola začíná slovní úlohou, jejímž řešením je hledání NSD. Úloha je vyřešena výpisem násobků obou čísel a určením NSD. Je zaveden pojem společný násobek. V dalším příkladu jsou dělitelé obou čísel vypsáni pomocí „téček" a pak je určen NSD a předveden jeho formální zápis. Na dalších příkladech, v nichž se rovněž objevují „téčka", je zde objasněn a definován pojem čísla soudělná a nesoudělná čísla. V dalším oddíle jsou početní úlohy k procvičení. Následující oddíl žákům demonstruje, jak hledat NSD pomocí rozkladu na prvočinitele.

Hledání společných násobků je žákům vysvětleno na řešení slovní úlohy o dvou lodích, které vyjíždějí z přístavu různé dny. Žáci řeší, kdy budou lodě opět vyjíždět z přístavu společně. Řešení je předvedeno výpisem násobků daných čísel a znázorněním na číselné ose. Následují další příklady řešení vypisováním všech násobků hledaných čísel a hledáním těch, které jsou společné. Pak je uvedena definice nsn. Po početních úlohách následuje vzorová ukázka určení nsn pomocí rozkladu na prvočísla. Po dalších početních úlohách jsou žáci upozorněni na skutečnost, že součin nsn a NSD dvou čísel je roven součinu těchto čísel. Tento poznatek následně ověřují experimentálně a výsledky zaznamenávají do tabulky. V posledním oddíle této podkapitoly je sedm slovních úloh, při jejichž řešení žáci mohou uplatnit poznatky, které byly vyloženy v kapitole Dělitelnost.

Hodnocení

Tato učebnice je způsobem, jakým je napsána, vhodná pro transmisivní styl výuky. V knize není patrná žádná snaha o odvozování nebo dokazování uvedených tvrzení. Zobecnění se vyskytuje pouze jednou u samozřejmých dělitelů. Učivo je vyloženo na konkrétních příkladech, které jsou žákům blízké, ale nepředpokládá se, že se žáci budou na odvozování svých poznatků významným způsobem podílet. K učebnici jsou často předkládány vzorové postupy řešení. Občas se vyskytne propojení předkládaných poznatků s problémy praktického života. V učebnici jsou vesměs uvedeny pouze základní poznatky, neobsahuje žádné rozšiřující učivo. Úlohy jsou většinou školského typu. Grafická úprava je jednotná a přehledná. Učebnice je tištěna dvoubarevně s ilustracemi, občas doplněná o fotografie.

2.6 Rešerše učebnic pro výuku Hejného metodou

V této kapitole se budu zabývat výukou dělitelnosti v učebnicích Hejného metody. Jak již bylo řečeno, dělitelnost se v tomto typu učebnic vyskytuje už ve 4 a 5. ročníku, proto jsou zde zařazeny i dvě učebnice pro 1. stupeň. Je vhodné, aby žáci, kteří byli učeni na 1. stupni Hejného metodou, byli učeni stejným způsobem i na 2. stupni. V praxi ale dochází i k případům, že jsou žáci učeni Hejného metodou až od 6. ročníku, resp. jsou učeni Hejného metodou pouze na 1. stupni. I s touto možností autoři učebnic počítali, a proto je obě řady učebnic možné používat nezávisle na sobě.

Tyto učebnice jsou určeny pro konstruktivistický styl výuky. Rozdíly mezi pojetím výuky podle tradičních učebnic a učebnic Hejného metody už byly zmíněny v oddíle 2.2. Výuka dělitelnosti Hejného metodou na 2. stupni ZŠ se liší nejen stylem výuky, ale i rozložením učiva dělitelnosti do ročníků. Zatímco v tradičním pojetí výuky je učivo z dělitelnosti celé soustředěno do jednoho celku, který žáci proberou během 6., resp. 7. třídy, v Hejného matematice je učivo z tématu dělitelnost rozprostřeno do 6. až 8. třídy při rychlejším tempu výuky, resp. 6. až 9. třídy při pomalejším tempu výuky. Očekávané výstupy pro 6.–9. ročník vyučovaný Hejného metodou, jak je stanovuje příručka pro učitele k učebnicím *Matematika A* a *Matematika B,* zachycuje tab. 5.

Učebnice pro 2. stupeň ZŠ jsou určeny jak pro ZŠ, tak i pro víceletá gymnázia, protože v Hejného metodě je důsledně uplatňován princip diferenciace žáků. Tempo výuky lze přizpůsobit potřebám žáků. Žáci jsou znova obeznámeni s pravidly, která platí v jednotlivých didaktických prostředích, aby se podle učebnice mohli učit i žáci, kteří byli na 1. stupni učeni tradičně. V učebnicích pro 2. stupeň jsou zachována některá prostředí z prvostupňových učebnic (autobus, hadi, hra sova) a jsou doplněna některými novými prostředími (procenta, mnohostěny, racionální čísla). Důležitou součástí učebnic jsou i některé didaktické pomůcky (parkety, dřívka, geoboard). Žáci prostřednictvím těchto pomůcek získávají nové znalosti a vědomosti manipulací s předměty. V současné době jsou vydané a schválené MŠMT učebnice *Matematika A* a *Matematika B*. Ve školním roce 2016/2017 už by měla být schválená MŠMT i učebnice *Matematika C*.

Očekávané výstupy dle RVP ZV

Očekávané výstupy pro jednotlivých ročníky vyučované Hejného metodou z tématu dělitelnost			
6. ročník	7. ročník	8. ročník	9. ročník
Pracuje s pojmy sudé/liché číslo, prvočíslo, číslo složené, násobek, nsn, dělitel, NSD, rozkládá přirozené číslo na součin, získává zkušenosti s n-ciferními čísly, s ciferným součtem	Odhaluje a používá kritéria dělitelnosti 3, 4, 9, řeší úlohy s propedeutikou dělitelnosti 6, 8, 11, 12. Pro nalezení nsn a NSD používá prvočíselný rozklad	Odhaluje a používá kritéria dělitelnosti 6, 8, 11, 12. Využívá prvočíselný rozklad pro nalezení nsn a NSD více čísel. Seznamuje se z Euklidovým algoritmem.	

Tab. 5

(Hejný a kol.: *Matematika AB, Příručka učitele 2. stupně a víceletých gymnázií*, str.18–19)

2.6.1 Hejný a kol.: *Matematika učebnice pro 4. ročník základní školy*

V této učebnice je téma dělitelnost probíráno na 2 stranách formátu A4.

Dělitelnost

V úvodu této kapitoly žáci objevují, že některá čísla jsou prvočísly, neboť je nelze zapsat jako součin dvou jiných čísel různých od jedné, a jiná čísla jsou čísla složená. Čísla složená jsou nazvána obdélníkovými čísly, protože se dají graficky znázornit jako netriviální více než jednořádkové obdélníky, a žáci řeší úlohu rozkládání daného čísla na součin graficky a snaží se z počtu čtverečků odpovídajících danému číslu utvořit obdélník. Podle toho, kolik takových rozkladů existuje, je možné čísla nazvat dvouobdélníková, trojobdélníková atd. Autor počítá s tím, že žáci budou při objevování úspěšní a některým se podaří najít všechny rozklady i větších čísel jako je 360. Další podnětnou úlohou je úloha dokázat, že číslo končící sedmičkou nemusí být vždy prvočíslo.

Zajímavým prostředím je růžice světových stran, která dělí čísla na severní, východní, jižní a západní podle toho, jaký dávají zbytek při dělení čtyřmi. Později v tomto prostředí žáci pracují se součtovou pyramidou, která má v prvním řádku čísla 3, 1, 4, 2 a 5. Žáci mají za úkol uspořádat čísla v prvním řádku tak, aby výsledky byla čísla východní, jižní, resp. západní. Tuto úlohu pokládám za náročnou, protože kombinuje schopnost porozumění součtovým pyramidám a porozumění dělení se zbytkem. Hledání řešení tohoto příkladu může vést k odhalení kritéria dělitelnosti čtyřmi. Dalším rozšířením této úlohy je hledání řešení pro obdobnou pěticí čísel následujících za sebou, která jsou dvoumístná a trojmístná. Pro kritérium dělitelnosti čtyřmi Hejný nepoužívá pojem poslední dvoučíslí, ale upozorňuje žáky, aby si všímali, jaká číslice předchází určitou poslední číslici, aby byla čísla severní, východní, jižní nebo západní. Dalším rozšířením je zjistit pravdivost tvrzení, že součet dvou čísel dělitelných čtyřmi je opět dělitelný čtyřmi. Úloha je samozřejmě zadána řečí růžice světových stran.

Násobilkové obdélníky jsou zde rozšířeny o práci se středovými čísly, což je součet čtyř čísel, která vzniknou jako postupné součiny sousedících rohových čísel. Dále se objevuje úloha neposedové, kdy jsou čísla zapsána mimo políčka obdélníku a úkolem žáků je doplnit čísla na správná místa.

V této kapitole je též série úloh vedoucí k odhalení pravidla pro dělitelnost číslem tři. Jde o úlohy, v nichž žáci vytvářejí čísla dělitelná třemi z předem daných cifer záměnou jejich pořadí. Žáci sledují, jestli je výsledné číslo stále dělitelné třemi. Další úloha na dělitelnost číslem tři využívá prostředí stovkové tabulky, ve které žáci hledají cesty podle šipek a určují součet dané cesty.

2.6.2 Hejný a kol.: *Matematika učebnice pro 5. ročník základní školy*

V této učebnice je téma dělitelnost probíráno na 2 stranách formátu A4.

Dělitelnost

Tato kapitola obsahuje několik gradovaných úloh, které jsou modely společných násobků nebo společných dělitelů daných čísel. Nejprve jde o společné násobky čísel dvě a tři, které žáci objevují pomocí hry *Tleskni, dupni*. Poté je tato hra modifikována na násobky dvou a pěti. Obdobným způsobem žáci hledají společné násobky v tabulce čísel, kdy násobky dvou se přeškrtávají zleva doprava a násobky tří zprava doleva. Čísla, které jsou přeškrtnuta oběma šikmými čarami, jsou společné násobky dvou a tří.

Další velmi podnětná je úloha, která je geometrickou interpretací největšího společného dělitele. Žáci rýsují na čtverečkovaném papíře obdélníky s různými délkami stran. Zkoumají, kolika mřížovými body prochází úhlopříčka těchto obdélníků. Inverzní úloha, kdy žáci zkoumají, kolika čtverečky prochází úhlopříčka daného obdélníku, je geometrickou interpretací nejmenšího společného násobku. Jinou úlohou, kdy žáci hledají všechny dělitele daného čísla, je sestrojování grafů dělitelnosti. Nejprve jsou žáci seznámení s tím, co je to graf dělitelnosti a jak se sestrojuje a pak hledají čísla se stejnými grafy dělitelnosti.

Tato kapitola též obsahuje úlohy na dláždění obdélníku čtvercovými dlaždicemi, co největší délky strany a úlohy na hledání co nejmenšího čtverce, který může být vydlážděn obdélníkovými dlaždicemi. Dále jsou zde obsaženy úlohy na dělení se zbytkem.

2.6.3 Hejný M. a kol.: Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia

V učebnici *Matematika B* je téma dělitelnost obsaženo v kapitolách Dělitelnost I–VI a Prvočísla. K výuce dělitelnosti jsou využity algebrogramy, které jsou kromě kapitoly Dělitelnost II ještě obsaženy v samostatné kapitole zařazené mezi kapitoly Dělitelnost III a Dělitelnost IV. Tématem dělitelnost se tedy zabývá celkem 8 kapitol na 16 stranách formátu přibližně B5.

Dělitelnost I

Úvodní kapitola navazuje na znalosti žáků z 1. stupně a zabývá se dělením se zbytkem. Na začátku kapitoly je domluva, že v dělitelnosti se bude pracovat s přirozenými čísly, a je vymezen zápis dělení se zbytkem. Následuje osm gradovaných úloh, při jejichž řešení žáci získávají hlubší vhled do dělení se zbytkem. V první úloze žáci zjišťují, že není neobvyklé, když různé příklady vychází při dělení se zbytkem stejně. V úloze 2 a 3 žáci řeší příklady na dělení se zbytkem s dvěma utajenými číslicemi. Tyto příklady mohou mít víc než jedno řešení. V úloze 4 a 5 mají žáci za úkol sami vytvořit příklad s utajenými číslicemi. Úlohy 6, 7 a 8 jsou propedeutikou nsn, protože úkolem žáků je např. najít společný násobek čísel 2, 3 a 4 zmenšený o číslo 1.

Dělitelnost II

V této kapitole je zaveden formální zápis relace dělitelnost. Kapitola obsahuje šest úloh. Z nichž úlohy 1–3 se zabývají vztahem dělitelnosti mezi dvěma čísly a úlohy 4–6 obsahují různé algebrogramy. V úloze 1 žáci rozhodují o pravdivosti konkrétních tvrzení o dělitelnosti jednoho čísla druhým. V úloze 2 žáci sami tvoří obdobné výroky s využitím zadaných číslic a rozhodují o jejich pravdivosti. V úloze 3 žáci hledají libovolné tři číslice tak, aby výrok byl vždy nepravdivý. V úloze 4 žáci řeší algebrogram tak, aby jeho výsledkem bylo číslo dělitelné osmi. V úloze 5 žáci hledají všechny dělitele daných čísel. Při řešení úlohy 6 by měli žáci využít poznatky, které získali při řešení úlohy 5. Tato úloha je velmi náročná, protože úkolem žáků je dokázat v ní uvedená tvrzení.

Dělitelnost III

Tato kapitola zavádí pojem ciferný součet a v prvních pěti úlohách se ciferný součet vyskytuje. V úlohách 1–3 žáci postupně hledají dvoumístná a trojmístná čísla, jejichž ciferný součet vyhovuje zadané hodnotě resp. je menší než daná hodnota. V úloze 4 a 5 žáci navíc zkoumají, zda jsou nalezená čísla s ciferným součtem stejné hodnoty dělitelná čísly 2, 3, 4 a 5. Úlohy 6–10 patrně slouží k odhalení znaků dělitelnosti 2, 5, 10. V úloze 6 se objevuje had s třemi neznámými, na jehož šipkách je postupně násobení dvěma a pěti. V úloze 7 se vyskytuje taková obměna této úlohy, která může vést k odhalení kritéria dělitelnosti deseti. V úloze 8 žáci prohazují v daných trojmístných a čtyřmístných číslech cifry tak, aby tato čísla byla dělitelná dvěma, pěti nebo deseti. Úlohy 9 a 10 obsahují výroky o dělitelnosti, o jejichž pravdivosti mají žáci rozhodnout.

Algebrogramy

V této kapitole jsou tři úlohy, v nichž se vyskytují příklady na sčítání dvouciferného a jednociferného čísla nebo dvou dvouciferných čísel. Žáci hledají vždy dvě neznámé číslice, které se v úlohách mohou opakovat, např. UV + VV = 70. V poslední úloze žáci se objevuje i nerovnice.

Dělitelnost IV

Tato kapitola obsahuje 6 úloh a v každé z nich se objevuje ciferný součet. V úlohách 1–3 žáci tvoří dvoumístná, až trojmístná čísla s různými ciferními součty, která jsou dělitelná třemi. Jsou zde i podúlohy, které nemají řešení. V úloze 4 žáci hledají čísla, která jsou dělitelná čtyřmi a jejich ciferný součet není dělitelný čtyřmi a naopak. Úlohy 5 a 6 jsou obdobou předchozí úlohy pro číslo tři. Tyto úlohy mohou vést k odhalení znaku dělitelnosti třemi, protože žáci si jistě všimnou souvislosti mezi ciferným součtem a dělitelností třemi.

Prvočísla

V této kapitole se vyskytuje definice pojmu prvočíslo a číslo složené. V úloze 1 žáci rozhodují, zda jsou daná čísla prvočísla nebo čísla složená a v úloze 2 hledají prvočísla ve stovkové tabulce metodou Eratosthenova síta. V úloze 4 žáci zapisují daná čísla jako součin prvočísel a v úloze 5 hledají v první padesátce čísla, která se dají zapsat jako součin dvou, tří nebo čtyř prvočísel. Úloha 6 je slovní úloha, při jejímž řešení žáci hledají společný dělitel dvou čísel.

Dělitelnost V

Tato kapitola se zabývá NSD. V úloze 1 žáci hledají dělitele čtyř různých čísel a pak určují, která čísla mají společné dělitele. Úlohy 2–4 jsou slovní úlohy, které vedou na hledání NSD. Pak je uvedena definice společného dělitele a NSD. Úlohy 4 a 5 obsahují početní příklady na procvičení NSD. Mezi těmito úlohami je uveden návod fiktivní žákyně Uršuly, jak snadno zjistit NSD dvou čísel pomocí prvočíselného rozkladu. V úloze 6 žáci hledají např. čtyřmístné číslo dělitelné 37, jestliže znají největší trojmístné číslo dělitelné 37. Úloha 7 je obtížnější, protože v ní žáci rozhodují o pravdivosti výroku o dělitelnosti obsahujícím proměnnou. Úlohy 8 a 9 jsou velmi netradiční úlohy, které prohlubují porozumění pojmu NSD dvou čísel, protože neznámou není výsledný NSD ale jedno z dvojice čísel.

Dělitelnost VI

Tato kapitola se zabývá nsn. V úloze 1 žáci hledají rozměry čtverce, který lze pokrýt stejnými obdélníky dané šířky a délky stran. Úloha 2 je obměnou této úlohy. Poté je zavedena definice a formální zápis nsn. Úloha 3 obsahuje početní příklady na procvičení hledání nsn. Úloha 4 prohlubuje porozumění pojmu nsn, neboť žáci nehledají nsn dvojice čísel, ale znají nsn a hledají jedno ze dvojice čísel. Úlohy 5 a 6 jsou slovní úlohy, jejichž řešení vede k hledání nsn dvou čísel. V úloze 7 je úkolem žáků najít $D(a \cdot b, a \cdot c)$

a $n(a \cdot b, a \cdot c)$, pro tři různá prvočísla $a,\ b,\ c$. Žáci řeší úlohu nejprve konkrétně a pak obecně.

Hodnocení

Tato učebnice je vhodná pro konstruktivistický edukační styl. Důležitou součástí učebnice je příručka pro učitele, která obsahuje kromě řešení úloh také zkušenosti učitelů, kteří již Hejného metodu uplatňují ve své učitelské praxi. V učebnici je důsledně uplatňována zásada, že žáci si své poznatky tvoří sami na základě řešení gradovaných podnětných úloh, které vedou k získávání nových vědomostí. Řazení úloh není náhodné, ale sleduje záměr postupného objevování nových poznatků. Úlohy jsou řazeny od jednoduchých konkrétních až po úlohy na zobecňování a odvozování pravidel. Časté je zařazování úloh, v kterých žáci sami tvoří úlohy, zobecňují nebo řeší úlohy inverzní, kdy podle výsledku hledají zadání úlohy. Učebnice obsahuje nepřeberné množství netradičních podnětných úloh, jejichž cílem je žáky motivovat k objevování nových poznatků. Učebnice má jednotnou a přehlednou grafickou úpravu, je doplněna mnoha grafickými znázorněními a ilustracemi. Působí jednoduše, ale atraktivně.

2.7 Srovnání učebnic z hlediska výuky dělitelnosti

Analýza učebnic ukázala, že všechny učebnice kromě učebnic autorů Hejného a kol. jsou si navzájem podobné (přesněji, jsou si navzájem podobnější, než je kterákoliv z nich podobná učebnicím Hejného, viz tabulka v příloze A), což legitimizuje původní rozdělení na učebnice pro Hejného metodu a učebnice tradiční.

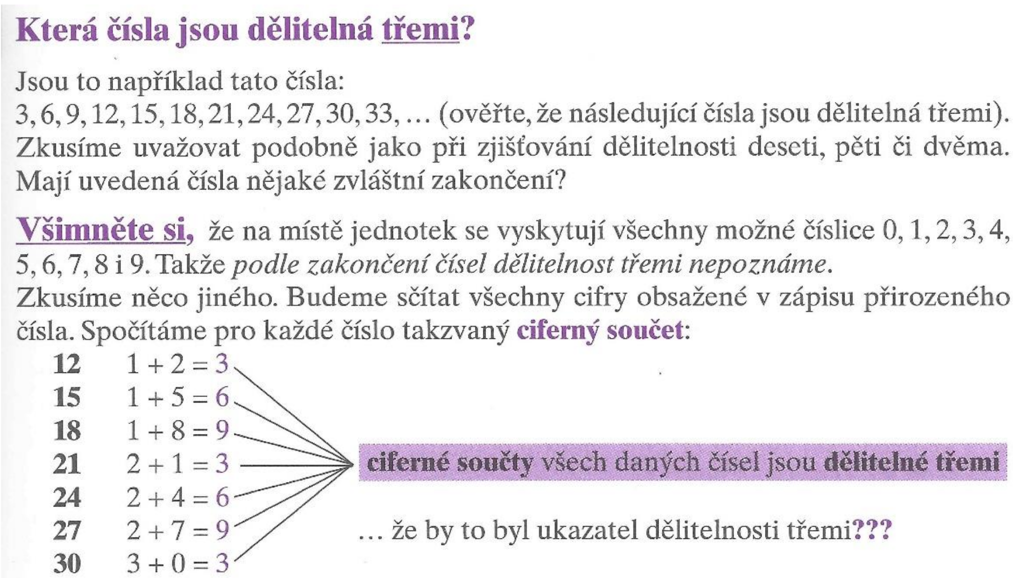
Tradiční učebnice mají řadu společných rysů, z nichž nejvýznamnější jsou tyto:

- Jsou vhodné pro transmisivní styl výuky, případně transmisivní s konstruktivistickými prvky.
- Každý tematický celek včetně dělitelnosti je soustředěn do jednoho bloku.
- Výuka dělitelnosti na 2. stupni není cíleně připravována žádnou propedeutikou.
- Témata v učebnicích obsažená vždy odpovídají základním standardům RVP ZV.
- Učivo je vždy nejprve vyloženo a pak následují úlohy na procvičení.
- Všechny učebnice obsahují shrnutí základních poznatků.

Vedle společných rysů existují i takové, ve kterých se tradiční učebnice liší. Jsou to zejména tyto rysy:

- použitelnost pro konstruktivistický výukový styl
- zahrnutí rozšiřujícího učiva
- míra formálnosti zaváděných definic
- reflexe moderních výukových trendů
- snaha o využití soudobých výukových metod
- použití alternativních výukových prvků

Za nejvýznamnější považuji míru použitelnosti pro konstruktivistické výukový styl. Například učebnice autorů Půlpán, Čihák se hodí téměř výhradně pro transmisivní vyučování. Pokud dochází k objevování poznatků žáky, je to objevování velmi návodné a ihned následuje očekávané řešení problému. Nové poznatky jsou sdělovány bez odvození, jak je patrné z obr. 8.


Která čísla jsou dělitelná třemi?

Jsou to například tato čísla:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, … (ověřte, že následující čísla jsou dělitelná třemi).
Zkusíme uvažovat podobně jako při zjišťování dělitelnosti deseti, pěti či dvěma.
Mají uvedená čísla nějaké zvláštní zakončení?

Všimněte si, že na místě jednotek se vyskytují všechny možné číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Takže *podle zakončení čísel dělitelnost třemi nepoznáme.*
Zkusíme něco jiného. Budeme sčítat všechny cifry obsažené v zápisu přirozeného čísla. Spočítáme pro každé číslo takzvaný **ciferný součet**:

12 1 + 2 = 3
15 1 + 5 = 6
18 1 + 8 = 9
21 2 + 1 = 3 → **ciferné součty** všech daných čísel jsou **dělitelné třemi**
24 2 + 4 = 6
27 2 + 7 = 9 … že by to byl ukazatel dělitelnosti třemi???
30 3 + 0 = 3

Obr. 8

(Půlpán, Čihák: *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*, str. 59)

V ostatních učebnicích je vždy před probíráním nového tématu uveden motivační, většinou řešený příklad. Tento příklad je ale většinou početně náročný nebo prozrazuje správné řešení velmi záhy. V některých učebnicích se vyskytují velmi návodné postupy při řešení některých problémů, což ukazuje obr. 9, který je z učebnice autorů Coufalová a kol. Žákům je tím odebírán prostor pro nalezení vlastního způsobu řešení.

	Je číslo 75 násobkem čísla 5?
Číslo 75 vydělíme pěti.	*75 : 5 = 15*
Číslo 75 je dělitelné 5 beze zbytku.	***Číslo 75 je násobkem 5.***
75 : 5 = 15	*15 . 5 = 75*

	Je číslo 378 násobkem čísla 4?
Číslo 378 vydělíme čtyřmi.	*378 : 4 = 94* 18 2 ← **zbytek**
Číslo 378 není dělitelné 4 beze zbytku.	***Číslo 378 není násobkem 4.***

Obr. 9

(Coufalová: *Matematika 6 pro 6. ročník základní školy,* str. 132–133)

Učebnici autorů Cihlář a Zelenka je nutné ocenit za snahu o dovozování nových poznatků, předvedení grafického řešení a zobecňování. Učebnice autorů Odvárko a Kadleček je také vhodná spíše pro transmisivní styl výuky, nicméně obsahuje některé zajímavé úlohy, které budují schopnost žáků hledat hlubší souvislosti. Učebnice autorů Molnár a kol. a Binterová a kol. jsou zpracovány ve stejném stylu, mají velmi pěknou grafickou úpravu, obsahují velké množství motivační příkladů a vhodně propojují probírané vědomosti s problémy praktického života. V učebnice autorů Binterová a spol. je navíc patrná snaha o objevování poznatků žáky. Na obr. 10 jsou zachyceny úlohy vedoucí k objevování kritéria dělitelnosti číslem čtyři. Proto si myslím, že tato učebnice je vhodná pro transmisivní styl s konstruktivistickými prvky. Učebnice rovněž navrhuje využití matematického softwaru ve výuce. Učebnice autorů Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša je určena pro žáky víceletých gymnázií, celkově je výrazně obsáhlejší než učebnice určené pro základní školy a lze v ní nalézt velké množství rozšiřujícího učiva a úloh na procvičení. Učebnice autorů Šarounová a spol. působí především svou grafickou úpravou poněkud zastarale.

Učebnice autorů Jedličková, Krupka, Nechvátalová patří mezi nejnovější učebnice a dá se říct, že je ovlivněna novými trendy ve výuce. Odráží to mimo jiné složité grafické členění na části, které mají v textu různé funkce, anglické termíny, které zdůrazňují mezipředmětové vztahy anebo nezvyklé názvy kapitol, které jsou většinou formulovány ve tvaru otázky. Snaha o důsledné grafické znázornění ve všech kapitolách je občas na úkor jednoduchosti.

2.8 V tabulce v pracovním sešitu vybarvěte násobky 4. Udělejte na fólii stejně velkou tabulku pro čísla od 101 do 200 a vybarvěte násobky 4. Udělejte na fólii stejně velkou tabulku pro čísla od 201 do 300 a vybarvěte násobky 4. Položte všechny tři tabulky na sebe a do pracovního sešitu zapište:

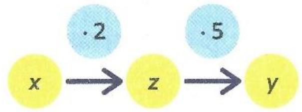
- Co mají tyto tabulky (násobky) společného?
- Kolik je násobků 4 v tabulce od 1 do 100?
- Jaké vlastnosti mají násobky čísla 4?
- Jak by vypadala tabulka násobků 4 pro další stovku čísel?
- Odhadněte, jak poznáme, že je některé přirozené číslo dělitelné číslem 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obr. 10

(Binterová H. a kol.: *Matematika 6 učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika*, str. 46)

6 Vyřešte hada pro:



a) $x = 18$ **c)** $y = 675$
b) $y = 880$ **d)** $y = 676$.
e) Znáte číslo y. Jak zjistíte číslo x?

7 Jsou dány číslice 0, 0, 4 a 5. Zvolte tři z nich a sestavte trojmístné číslo y tak, aby v horním hadu:

a) číslo x bylo celé
b) číslo z bylo celé, ale číslo x nebylo celé.

Hledejte více řešení.

8 V čísle 5 201 prohoďte dvě číslice tak, aby nové číslo bylo dělitelné číslem:

a) 2 **b)** 5 **c)** 10.

Stejnou úlohu řešte pro čísla 473, 101, 2 153, 4 071, 90 777, 62 497 a 505 043.

Obr. 11

(Hejný M.: *Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, str. 41)

Učebnice Rosecké zdůrazňuje začlenění prvků činnostního učení, což je jistě chvályhodné, avšak z hlediska výukového stylu patří mezi učebnice vhodné pro transmisivní styl výuky, protože podíl objevování žáků při výkladu nových poznatků je malý.

Naproti tomu učebnice Hejného a kol. je vhodná pro konstruktivistický styl výuky. Poznatky si žáci tvoří ze zkušeností, které získávají na základě řešení úloh. Odvození poznatků je předem připravováno předkládáním úloh k zamyšlení ještě před začátkem probírání jednotlivých kapitol a téměř vždy se žáci k němu opět vrací a řeší daný problém v jiném kontextu. Obr. 11 zachycuje úlohy vedoucí k objevování kritérií dělitelnosti dvěma, pěti a deseti a vztahů mezi nimi.

2.8 Rozhovory s učiteli

Chceme-li se přiblížit ke znalosti toho, jak se dělitelnost na základních školách skutečně vyučuje, pak nepostačují pouhé rešerše učebnic, protože učitelé nemusejí využívat celý jejich obsah, a naopak mohou použít vlastní postupy, které nejsou v učebnicích zachyceny. Pro upřesnění závěrů z rešerší učebnic jsem proto oslovila učitele ze škol, kde jsem prováděla experimenty s žádostí o upřesnění toho, jak oni sami vyučují dělitelnost.

K tomuto účelu jsem sestavila dotazník, na který každý z dotazovaných učitelů odpovídal. Mým záměrem bylo udělat rozhovor alespoň s jedním z učitelů z každé ze všech osmi škol, které se zúčastnily výzkumu, což se mi podařilo. Z každé školy, která se zúčastnila experimentu, odpovídal na otázky alespoň jeden učitel matematiky. Rozhovory jsem dělala i s některými učiteli, kteří ve třídách, které řešily test, neučí. S některými učiteli jsem hovořila osobně a pořídila jsem z rozhovorů s nimi audiozáznam. Někteří učitelé odpovídali na dotazník pouze písemně a s některými jsem mluvila osobně a pořídila jsem z rozhovoru s nimi písemný záznam. Pokud některý z učitelů otázce nerozuměl, snažila jsem se mu ji vysvětlit. Když u některé z otázek někdo z učitelů nevěděl, jak odpovědět, dala jsem mu doplňující otázky.

Mluvila jsem celkem s třinácti učiteli: jednou učitelkou, která učí na osmiletém gymnáziu, dvěma učiteli, kteří učí Hejného metodou, a jedenácti učiteli ze základních škol, kde se nevyučuje Hejného metodou. Někteří učitelé odpovídali velmi stručně, jiní naopak obšírně a svou výuku byli schopni a ochotni dopodrobna popsat. Snažila jsem se učitele v jejich odpovědích nekorigovat, aby odpovídali podle toho, jak oni sami danou situaci vnímají. Někdy jsem položila doplňující otázku, abych se ujistila, že tvrzení učitele dobře rozumím. Učitelé odpovídali na tyto otázky:

1. Jak byste charakterizoval svůj přístup k výuce? (konstruktivistický, tradiční s konstruktivistickými prvky, tradiční, jiný – rozveďte)
2. Připravujete žáky na výuku dělitelnosti nějakou propedeutikou? Pokud ano, popište jakou.

3. Jakým způsobem vyučujete dělitelnost? Je nějaký moment ve vaší výuce, který by se dal označit za klíčový?
4. Jaké používáte učebnice, materiály nebo pomůcky?
5. Jaké jsou nejčastější chyby vašich žáků v úlohách na dělitelnost (včetně slovních úloh)?

Otázka 1

Na tuto otázku dva učitelé, kteří učí Hejného metodou, odpověděli, že učí konstruktivisticky. I jedna učitelka ze ZŠ, kde se matematika nevyučuje Hejného metodou, ohodnotila svůj přístup k výuce jako konstruktivistický. Ve své výuce se snaží uplatňovat zásady konstruktivismu, nepoužívá ale učebnice Hejného a kol. od společnosti H-mat. Třídy, ve kterých učí tato učitelka, jsem do svého výzkumu nezařadila, protože touto kategorií jsem se nezabývala, nicméně její odpovědi jsem brala v potaz. Ze zbylých deseti učitelů označili čtyři svůj přístup k výuce za tradiční s konstruktivistickými prvky a šest označilo svůj přístup k výuce jako tradiční. Podle těchto výsledků by se mohlo zdát, že na ZŠ je běžné zařazovat do tradiční výuky konstruktivistické prvky. Můj názor je ale takový, že ne všichni učitelé jsou ochotni o svém způsobu výuky mluvit a odpovídat na otázky. Proto si spíš myslím, že učitelé, kteří přemýšlí o svém stylu výuky, chtějí se neustále zlepšovat a hledají zpětnou vazbu, jsou právě ti, kteří byli ochotni se zúčastnit výzkumu, proto jen málo z těchto učitelů učí pořád stejným tradičním způsobem výuky. Jedna z učitelek, která označila svůj styl výuky jako tradiční s konstruktivistickými prvky, zřejmě úplně nepochopila, co se skrývá pod pojmem konstruktivismus, protože z jejich dalších odpovědí vyplynulo, že se svou výuku sice snaží udělat pro žáky zajímavější a přitažlivější formou her, což samo o sobě ještě není možné považovat za prvky konstruktivismu.

Otázka 2

Propedeutikou bylo v této otázce myšleno cílená příprava na výuku dělitelnosti a získávání potřebných znalostí pro pochopení tohoto tématu. Jeden z učitelů, který učí Hejného metodou, odpověděl: „Propedeutiky je v Hejného metodě velké množství, dá se najít ve spoustě prostředí už na prvním stupni. Konkrétně např. algebrogramy, úlohy s dřívky, parkety, zlomky atd. Je toho hodně.“ Ostatní učitelé, kteří neučí Hejného metodou, buďto odpověděli, že žádná propedeutika není (ve dvou případech), nebo zmiňovali, že propedeutika dělitelnosti je už na prvním stupni (násobení, dělení a dělení se zbytkem). Jeden z učitelů doslova řekl: „Snažím se o aktivaci znalostí z prvního stupně.“ Dva učitelé, kteří svůj přístup k výuce označili za tradiční, vyzdvihli důležitost zopakování násobilky.

Jeden z nich řekl: „Kladu důraz na zautomatizování malé i velké násobilky u jednotlivých dětí a z toho vyplývajících početních operací.“

Otázka 3

Odpovědi učitelů na tuto otázku byly zásadně ovlivněny rozdílem v edukačním stylu výuky. Při výuce dělitelnosti tradičním způsobem je dělitelnost probírána přímočaře, tzn. žáci se dělitelností setkají pouze jednou v 6. ročníku a ve vyšších ročnících je toto téma zařazeno pouze v rámci opakování. Zatímco ve výuce Hejného metodou se toto téma vrací do výuky několikrát, znalosti se opakují a prohlubují, což odpovídá koncentrickému způsobu výuky, jak už bylo popsáno v oddíle 2.3.

Většina z dotazovaných učitelů, kteří učí tradičním způsobem nebo tradičně s konstruktivistickými prvky, uvedla, že se při výuce drží učebnice aspoň co do rozsahu probíraných témat. Jeden z učitelů, který učí tradičním způsobem, považuje za nejdůležitější, aby výuka dělitelnosti byla dostatečně názorná a spojená s praxí. Jiný z učitelů považuje za důležitý i sled témat, jak následují za sebou, a uvádí: „Dodržuji posloupnost v pořadí:

- násobek, dělitel
- znaky dělitelnosti
- prvočísla
- společný Dělitel a násobek (D největší, n nejmenší)
- čísla soudělná, nesoudělná
- aplikace, úlohy

Za klíčové považuji aplikovat toto učivo do konkrétních úloh.“ Jedna z učitelek se snaží procvičovat znaky dělitelnosti různých čísel pomocí soutěží mezi žáky. Jiná vyžaduje, aby žáci uměli kritéria dělitelnosti zpaměti. Žáci musí prokázat jejich znalost i při zkoušení. Čtyři z učitelů používají k probírání prvočísel a čísel složených Eratosthenova síta, kdy žáci vyškrtávají násobky prvočísel od dvou do sedmi ve stovkové tabulce. Učitelé, kteří zařazují do tradiční výuky konstruktivistické prvky, se snaží o odvozování kritérií dělitelnosti, včetně kritéria dělitelnosti třemi a devíti. Před předvedením prvočíselného rozkladu žáci též řeší úlohy na určení nsn a NSD vypisováním společných násobků a dělitelů. Prvočíselný rozklad pro určování nsn a NSD je žákům ukázán a později procvičován na početních příkladech a slovních úlohách. Jedna z učitelek si stěžuje, že s časovou dotací čtyři hodiny matematiky týdně se dělitelnost nedá probrat včetně slovních úloh. Říká, že „žáci pak nemají řešení slovních úloh zažité.“

Učitelka z gymnázia tvrdí, že žáci používají k řešení početních příkladů na hledání nsn a NSD výhradně prvočíselný rozklad. Při řešení slovních úloh už je ale pro ně těžší rozpoznat, že je prvočíselný rozklad dovede ke správnému řešení. Za nejdůležitější považuje, aby žáci později dokázali používat kritéria dělitelnosti a aplikovat je ve složitějších úlohách.

Otázka 4

Co se týká používaných učebnic, dva učitelé, kteří učí Hejného metodou, používají učebnice Matematika A, B od autorů Hejný a kol., čtyři učitelé používají učebnici Aritmetika 6 od autorů Rosecká a kol., tři učitelé učí podle učebnice Matematika 6, Binterová a spol. a další tři učí dělitelnost podle učebnice Matematika pro 6. ročník ZŠ od Odvárka a Kadlečka. Jedna učitelka používá k výuce učebnici Matematika pro 6. ročník ZŠ autorů Molnár a kol. Jedna z učitelek hodně čerpá z učebnice Matematika pro 6. ročník základní školy autorů Coufalová a kol. Učitelé též používají různé pracovní sešity, v nichž žáci často řeší úlohy k procvičení. Učitelé například zmínili pracovní sešit Hravá matematika z vydavatelství Taktik nebo Matematika 6, 1.–3. díl, které vydalo nakladatelství TV Grahpics. Dalším zdrojem pro výuku je pro učitele internet, materiály pro interaktivní tabuli a další výukové programy.

Otázka 5

Učitelé, kteří učí Hejného metodou, pochopili otázku široce a zmiňovali nejen chyby, ale i jejich příčiny. Jako problém uváděli například neporozumění zadání vyplývající z nepozornosti, které může zadání úlohy ještě ztížit. Dále problém s nepochopením symboliky, která se v učebnicích v kapitolách o dělitelnosti vyskytuje. Další obtíže mohou být způsobeny vlivem špatné komunikace mezi žáky, což může zpomalovat proces objevování. Pokud spolu žáci nekomunikují vlivem zhoršených vztahů v třídním kolektivu, může jít o závažný a dlouhodobý problém.

V tradiční výuce (příp. tradiční s konstruktivistickými prvky) si někteří učitelé stěžují, že žáci neumí násobilku. Jiná učitelka zmiňuje, že žáci „neumí pravidlo 3, 9." Dalším velkým problém jsou slovní úlohy, které za slabé místo žáků označuje většina dotázaných učitelů. Jedna učitelka zastává názor, že „na probírání slovních úloh není dostatek času". Základním problémem je neporozumění zadání. Také se stává, že žáci řeší slovní úlohy rutinně bez pochopení. To se například projevuje tím, že zaměňují úlohy, jejichž řešením je nsn za úlohy na hledání NSD. Když už najdou správný postup, a úlohu vyřeší, ještě to neznamená, že budou schopni správně odpovědět na otázku položenou ve slovní úloze. Tři z dotázaných učitelů si myslí, že algoritmus pro hledání nsn a NSD žáci většinou dokáží použít, jen když se ve výuce probírá, postupem času ho zapomenou. Tento postřeh úzce souvisí s předpokladem druhé výzkumné části, že formální poznatky mají horší retenci.

Žáci gymnázia podle slov své učitelky „nepoznají, jestli mají určit nsn nebo NSD ve slovních úlohách." Většina třídy ale dokáže správně řešit i slovní úlohy. Učitelka si ale myslí, že kdyby se její žáci setkali s podobným typem úloh s odstupem času mimo napovídající kontext, že by procento úspěšnosti řešení těchto úloh dost kleslo[6]. Další problém, který tato učitelka zmiňuje, je že žáci občas nechávají v prvočíselném rozkladu čísla složená, nerozloží je až na prvočísla a myslí si, že už jsou hotovi.

Chyby a obtíže popsané učiteli, se dají rozčlenit do několika kategorií. V první kategorii jsou chyby, které vyplývají z neznalosti látky, na které dělitelnost staví (neznalost násobilky, neschopnost provádět početní operace: násobení, dělení a dělení se zbytkem). Další kategorie chyb je dána neznalostí formálních pravidel, která se v dělitelnosti probírají (kritéria dělitelnosti) a neznalostí algoritmů (použití prvočíselného rozkladu k hledání dělitelů, nsn a NSD). Do poslední kategorie spadá neschopnost matematizace slovní úlohy a nízká úroveň abstrakce. Tento druh chyb se projevuje neschopností řešit slovní úlohy.

---

[6] tento názor odpovídá mým předpokladům o nesignálních úlohách

3 Znalosti a dovednosti žáků 6. a 7. tříd z dělitelnosti se zřetelem na formálnost

3.1 Cíl výzkumu

Ve své výuce jsem pozorovala, že poznatky žáků z dělitelnosti jsou často formální – žáci jsou schopni algoritmicky řešit typové úlohy jako nalezení NSD, nejsou však schopni použít strukturální znalosti z tohoto tématu mimo napovídající kontext, tedy při řešení úloh, kde jim žádný signál (jako použití pojmů z příslušné teorie nebo podobnost s úlohami, jež na základě zkušenosti považují za typické pro dané téma) nedává informaci o tom, že (případně jak) lze tyto poznatky použít[7]. Rozhodla jsem se proto zkoumat rozšířenost tohoto jevu u českých žáků s předpokladem, že tím ověřím míru formálnosti jejich poznatků z dělitelnosti.

Jádrem mého výzkumu je proto testování úspěšnosti žáků v nesignálních úlohách. Předpokládala jsem, že budou-li takové úlohy natolik jednoduché, aby je bylo možno vyřešit vhledem či za pomocí modelu i bez poznatků z tématu dělitelnost, pak by po výuce dělitelnosti žáci, kteří získali poznatky pouze formální, měli tyto úlohy řešit stejným způsobem a přibližně stejně úspěšně jako žáci, kteří výuku dělitelnosti dosud neabsolvovali (s přihlédnutím k rozdílnému stavu obecných kognitivních schopností u různě starých žáků). Pokud jejich poznatky nebudou pouze formální a dokážou je při řešení úloh použít, měli by být úspěšnější přinejmenším proto, že součástí těchto poznatků jsou algoritmy umožňující řešit matematizované úlohy (jako hledání NSD a nsn) efektivněji (a tedy rychleji, což ponechá více času na ostatní etapy řešení), systematičtěji a s minimalizací chyb.

Hlavním cílem výzkumu bylo tedy porovnáním úspěšnosti žáků před a po výuce dělitelnosti v řešení nesignálních úloh z tohoto tématu zjistit, nakolik se výuka dělitelnosti v 6. třídě projevuje na schopnosti žáků řešit tyto úlohy, s implikacemi pro úroveň formálnosti jejich poznatků.

Žáci 6. a 7. tříd, které jsem chtěla testovat, však netvoří homogenní skupinu. Předpokládala jsem, že odlišné výsledky budou mít přinejmenším tři skupiny: žáci ZŠ vyučovaní (více či méně) tradičním způsobem, žáci ZŠ vyučovaní Hejného metodou

[7] Tyto úlohy budu dále pro jednoduchost nazývat „nesignální úlohy“.

a žáci osmiletých gymnázií. Druhým cílem práce je proto porovnání výsledků těchto tří skupin, opět s případnými důsledky pro formálnost poznatků.

Třetím cílem je otestování validity výše popsané metody pro diagnostiku formálnosti poznatků.

3.2 Hypotéza

Dělitelnost se probírá na začátku 2. stupně. V tradičním pojetí výuky je důraz kladen na zapamatování si znaků dělitelnosti, hledání dělitelů daného čísla, nácvik prvočíselného rozkladu k určení NSD a nsn. Podle mého názoru a podle oddílu 2.8 není slovním úlohám, k jejichž řešení se dá využít prvočíselný rozklad, věnována dostatečná pozornost. Výsledkem je, že znalosti žáků často trpí formalismem a žáci nejsou schopni tyto znalosti aplikovat k řešení slovních úloh.

Při výuce Hejného metodou probíhá výuka dělitelnosti jinak, nejprve žáci opakují dělení se zbytkem, pak se setkávají s kritérii dělitelnosti, společným dělitelem a NSD a nakonec se společným násobkem a nsn. Tyto tři kapitoly nenásledují těsně za sebou, mezi nimi se probírají ještě jiná témata. Učivo je probíráno konstruktivistickým způsobem, tj. žáci sami objevují nové poznatky prostřednictvím podnětných úloh a otázek učitele.

Na osmiletém gymnáziu, které se zúčastnilo mého výzkumu, jsou žáci vyučováni tradičně. K výuce používají běžné učebnice pro základní školy, ale seznamují se i s některým rozšiřujícím učivem. Učitelé kladou na znalosti žáků větší požadavky než učitelé na ZŠ.

Na základě předchozích charakteristik učebních stylů, rozdílů mezi různými typy škol a vlastních zkušeností jsem stanovila hypotézy takto:

1. Žáci po výuce dělitelnosti nebudou výrazně úspěšnější v řešení úloh, jejich schopnost aplikovat naučené postupy řešení úloh z dělitelnosti bude pravděpodobně nízká. Žáci nebudou schopni aplikovat ve slovních úlohách na hledání nsn nebo NSD postup využívající prvočíselný rozklad ani po výuce dělitelnosti.
2. Znalosti žáků, kteří jsou vyučováni matematice Hejného metodou, budou zřejmě méně zatíženy formalismem. V řešení úloh by mohli být úspěšnější ve srovnání s žáky, kteří jsou vyučování tradičním způsobem výuky. Očekávám, že často budou schopni úlohu řešit pomocí modelu.

3. Žáci osmiletých gymnázií mají lepší studijní předpoklady než žáci základních škol. Předpokládám, že jejich úspěšnost v testu bude nejvyšší a jejich znalosti budou nejméně zatíženy formalismem.

Jelikož ve svém výzkumu budu opakovaně hovořit o žácích ze zmíněných skupin, budu pro označení žáků 6. ročníku používat označení šesťáci, žáci 7. ročníku budou nazýváni sedmáky a o žácích primy osmiletého gymnázia budu hovořit jako o primánech. Tyto názvy jsem se rozhodla použít pro stručnost, i když jsem si vědoma toho, že se spíše jedná o kolokviální výrazy.

3.3 Metodologie

Rozhodla jsem se k prověření znalostí žáků použít písemných testů bez intervence experimentátora. Testy jsem následně vyhodnocovala kvantitativně běžnými statistickými metodami. Do výzkumu bylo zahrnuto celkem 428 žáků z osmi různých škol. Žáků 6. ročníku bylo celkem 207 z pěti různých ZŠ. Z toho bylo 113 žáků ZŠ, kteří se učí tradičním způsobem výuky, ze tří různých ZŠ a pěti různých tříd. Žáků 6. ročníku ZŠ, kteří se učí Hejného metodou, bylo do výzkumu celkem zahrnuto 64 ze dvou různých ZŠ a tří různých tříd. Žáků 7. ročníků ZŠ se výzkumu zúčastnilo celkem 196. Z toho bylo 157 žáků, kteří se učí tradičním způsobem výuky, ze tří různých ZŠ a osmi různých tříd. Žáků 7. ročníku vyučovaných Hejného metodou se výzkumu zúčastnilo 39 ze dvou různých ZŠ a dvou různých tříd. Výzkumu se zúčastnili též žáci primy a sekundy jednoho osmiletého gymnázia, z obou ročníků po jedné třídě, tedy 30 žáků z primy a 25 žáků ze sekundy.

Skupina žáků vyučovaných Hejného metodou byla vnitřně diferencovaná tím, že žáci z jedné ZŠ měli Hejného metodu už na 1. stupni, zatímco žáci z druhé ZŠ se začali Hejného metodou učit až od 6. ročníku. Problémem konzistentnosti této skupiny se zabývám v oddíle 3.6. Testy byly současně zadány žákům 6. ročníků před výukou dělitelnosti a žákům 7. ročníků po výuce dělitelnosti. Administrace testů proběhla v první polovině školního roku 2015/2016 v časovém rozmezí zhruba tří měsíců.

U žáků, kteří se učí Hejného metodou, nebyl můj záměr rozlišit žáky před výukou dělitelnosti a po jejím absolvování zcela dodržen. Učivo je v Hejného metodě probíráno v jiném časovém sledu než při výuce tradičním způsobem a různé třídy nepostupují stejně rychle. Navíc je zde víc propedeutiky vztahující se k tématu dělitelnosti a podle slov jednoho z učitelů „je těžké určit čas, kdy mají žáci všechno učivo z jednoho tématu probráno, protože učivo se probírá déle s přestávkami a do výuky se opakovaně vrací.“ V 7. třídách, které se učí Hejného metodou, žáci ještě neprobírali nejmenší společný násobek.

U žáků, kteří se zúčastnili výzkumu, jsem zjišťovala známku z matematiky na posledním vysvědčení. Primárním cílem zjišťování známek bylo určit korelaci mezi úspěšností v testu a známkou z matematiky a ověřit, nakolik si odpovídají kritéria, podle kterých jsou žáci v matematice obecně hodnoceni, a to, co testuje výzkumný test. Jak už jsem uvedla v oddíle 1.4, formálnost poznatků může být zapříčiněna i hodnotícími kritérii učitele. Nízká korelace známky z matematiky s výsledky v testu neformálních znalostí tedy může poukazovat na pozitivní hodnocení i (nebo dokonce především) formálních poznatků.

Testy zadávali žákům jejich učitelé matematiky. Žáci neměli povoleno používat kalkulačky ani žádné jiné pomůcky. Podle instrukcí měli žáci všechny své výpočty zaznamenávat do testového listu a neměli nic gumovat, pouze přeškrtávat, pokud se spletli. Potřeba gumovat je v žácích hluboko zakořeněná a nepodařilo se mi je přimět k tomu, aby vůbec negumovali. Na řešení testů měli žáci 45 minut.

Pro interpretaci výsledků je podstatné, že v rámci skupiny žáků vyučovaných Hejného metodou je podstatný prospěchový rozdíl mezi šesťáky a sedmáky. V těchto skupinách jsem si poznamenala známku z posledního vysvědčení z matematiky u všech žáků. Žáci 6. ročníku mají o 0,85 lepší průměr známek z matematiky než žáci 7. ročníků (šesťáci mají prospěch 1,66, zatímco sedmáci 2,51). Navíc při rozhovorech s učiteli, kteří učí v těchto třídách, se jejich pedagogové nezávisle na sobě sami zmiňovali, že žáci 6. ročníků mají pro matematiku větší nadšení, v hodinách jsou více aktivní a zúčastňují se různých soutěží, např. Matematické olympiády nebo Matematického klokana, ve kterých dosahují lepších výsledků než jejich spolužáci ze 7. tříd. Žáci 6. třídy vyučovaní Hejného metodou z druhé školy, kteří se zúčastnili výzkumu, mají v soutěžích rovněž dobré výsledky, naproti tomu žáci 7. třídy se matematických soutěží neúčastní.

3.4 Výzkumný nástroj – test

Jako výzkumný nástroj jsem si vybrala písemný test, protože nejlépe splňoval potřeby mého výzkumu a bylo v mých možnostech test sestavit a zadat žákům 6. a 7. ročníků různých škol. Plné znění testu v podobě, v které byl administrován žákům, čtenář nalezne v příloze C.

Při sestavování testu jsem se řídila několika hlavními zásadami:

1. Navrhnout úlohy tak, aby byly srozumitelné i pro žáky, kteří ještě neabsolvovali výuku dělitelnosti. V testu jsou proto nahrazeny pojmy „dělitel“ a „dělitelné“ výrazy „dělí beze zbytku“ nebo „při dělení dává zbytek nula“. Také není použito termínů „sudá“ a „lichá“ čísla. Tím je dosaženo i toho, že úlohy jsou nesignální.
2. Sestavit test tak, aby komplexně testoval znalosti žáků ze všech oblastí dělitelnosti vyučovaných v 6. a 7. ročníku ZŠ, a zároveň aby užití těchto znalostí řešení úloh zefektivnilo.
3. Zařadit do testu úlohy, které nejsou typicky školské a je velká pravděpodobnost, že se s nimi žáci během školní výuky nesetkají, a tím prověřit formálnost a neformálnost znalostí žáků.
4. Stanovit obtížnost testu tak, aby rozlišoval mezi různě zdatnými žáky i skupinami, tedy aby nenastávala situace, kdy v určité skupině nevyřeší test žádný nebo naopak všichni žáci.
5. Určit rozsah testu tak, aby byl ve všech skupinách administrovatelný v rámci jedné vyučovací hodiny.

Před sestavením konečné verze testu jsem vytvořila tři verze pilotních testů, které jsem zadala žákům (po řadě jedné, čtyřem a dvěma třídám na ZŠ) a poté upravila tak, aby konečná verze testu vyhovovala požadavkům výzkumu. Nejdříve jsem měla v úmyslu sestavit gradovaný test, který by měl u každé testové úlohy tři podúlohy různé obtížnosti. Nepodařilo se mi ale vhodně sestavit tři různé varianty jedné úlohy rozdílné obtížnosti. I vyhodnocení gradovaného testu je složitější než vyhodnocení testu s jednou variantou v každé úloze. Další překážkou bylo to, že žáci nemají dostatečnou zkušenost s řešením takovýchto testů a volba vhodné strategie řešení pro ně při testu představuje další ztížení podmínek.

Druhá varianta testu byla pro žáky příliš časově i početně náročná. Bylo tedy nutné snížit obtížnost testu a zredukovat počet úloh. Do testu jsem zařadila úlohy tak, aby se shodovaly s jednotlivými podtématy vyučovanými v rámci dělitelnosti.

Úlohy, které jsou zařazeny do testu, vznikaly nejčastěji modifikací běžných úloh, které se vyskytují v tradičních i alternativních učebnicích a pracovních sešitech. Úlohy byly vždy pozměněny tak, aby vyhovovaly záměrům, se kterými jsem test tvořila, tzn. byla upravena jejich obtížnost nebo byly změněny některé výrazy, aby neobsahovaly pojmy typické pro téma dělitelnost. Takto vznikly úlohy 2, 3, 5, 6, 7 a 8. Úlohu 1 jsem vytvořila sama tak, aby ověřovala poznatky o sčítání sudých a lichých čísel. Úlohu 4 jsem převzala ze sbírky úloh osobně zaslaných prof. Hejným.

3.5 Testové otázky – metodologie vyhodnocení testu

Veličinu, kterou jsem u žákovských řešení jednotlivých úloh vyhodnocovala, nazývám úspěšností. Tu jsem určovala jako funkci dvou parametrů: správnosti, která nabývala hodnoty 1 v případě, že všechna uvedená řešení byla matematicky správná, a v ostatních případech hodnoty 0, a úplnosti, kterou jsem definovala jako poměr počtu žákem uvedených správných řešení k počtu všech správných řešení. Tzv. striktní úspěšnost nabyla hodnoty 1, pokud nabyla hodnoty 1 správnost i úspěšnost, jinak nabyla hodnoty 0 (jinými slovy žák byl v řešení úlohy ve striktním smyslu úspěšný, pouze pokud byla jeho odpověď úplná a správná). Procentuální úspěšnost jsem definovala jako součin správnosti a úplnosti (takže např. pokud žák v úloze, kde bylo více správných řešení, uvedl pouze polovinu z nich a žádné chybné, byla jeho procentuální úspěšnost 0,5). V úlohách s jediným správným řešením (1, 2, 5, 7 a 8) striktní a procentuální úspěšnost splývají, zvlášť je proto uvádím pouze u úloh 3, 4 a 6.

Porovnání výsledků žáků z hlediska striktní úspěšnosti a procentuální úspěšnosti vypovídá o systematičnosti, se kterou jsou žáci schopni řešit slovní úlohy. Pokud je procentuální úspěšnost výrazně vyšší než striktní úspěšnost, znamená to, že žáci jsou schopni nějakým způsobem (např. pomocí modelu) najít některá řešení, ale nemají systém, který by jim umožnil najít všechna řešení.

O tom, jak jsem vyhodnocovala správnou odpověď a úplnou odpověď v konkrétních případech, se podrobně rozepíšu v popisu jednotlivých úloh. Nyní pouze přiblížím základní principy, kterými jsem se řídila.

Při posuzování správnosti mi šlo o to, zda žák vyřešil matematickou podstatu úlohy, nikoliv zda jeho odpověď byla formálně správná. Uznávala jsem tedy jako správné i matematicky nekorektní zápisy správných odpovědí, případně i odpovědi, které správný výsledek přímo neobsahovaly, ale byl z nich triviálně odvoditelný (viz úloha 4). Řešila jsem problém, jestli žákům napovídat, že se jedná o úlohu s víceprvkovou množinou řešení. Nakonec jsem se rozhodla pro kombinaci těchto možností, abych mohla srovnat, nakolik to ovlivní úspěšnost žáků při řešení úlohy. V úlohách 3 a 6 jsou žáci upozorněni na existenci více řešení, zatímco v úloze 4 nikoliv.

Součet striktních, resp. procentuálních úspěšností jednoho respondenta ve všech úlohách testu dělený počtem úloh nazývám celkovou úspěšností respondenta. Na škále 0–1 vyjadřuje podíl úloh, které respondent úspěšně vyřešil.

Při analýze výsledků testu jsem dále pracovala s rozdílem striktní, resp. procentuální úspěšnosti mezi 7. a 6. ročníkem (v tomto pořadí), který vyjadřuje nárůst úspěšnosti sedmáků vzhledem k úspěšnosti šesťáků.

Pro označení výše zavedených veličin budu používat tyto značky (zvláště v tabulkách a grafech):

SÚ – striktní úspěšnost

PÚ – procentuální úspěšnost

Δ SÚ – rozdíl ve striktní úspěšnosti mezi žáky 7. a 6. ročníku

Δ PÚ – rozdíl v procentuální úspěšnosti mezi žáky 7. a 6. ročníku

Nyní popíšu jednotlivé úlohy testu se správným řešením a apriorní analýzou obsahu a formy.

Úloha 1

V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.

a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?
b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

Správná odpověď: a) ano b) ne

Za správnou jsem považovala i tuto krátkou odpověď bez zdůvodnění. Úspěšnost řešení úlohy 1 předpokládala správné řešení obou podúloh.

Tato úloha nepatří k tradičním školským úlohám. Předpokládala jsem, že se s ní v této podobě žáci nesetkali, před výukou ani při výuce dělitelnosti. Pojem liché číslo byl v úloze nahrazen tak, aby žáci porozuměli zadání i bez znalosti významu tohoto pojmu, protože vyjádření „seřadit se do dvojstupu tak, aby nikdo nezbyl“ lze porozumět intuitivně. Úloha ověřovala schopnost odvodit obecná pravidla pro sčítání dvou a tří lichých čísel a pro mnohé žáky byla překvapivě obtížná.

Úloha 2
Zakroužkuj čísla, která po dělení číslem 3 dávají zbytek nula.

147 253

Správná odpověď: Číslo 147 je beze zbytku dělitelné třemi. Číslo 253 není beze zbytku dělitelné třemi.

Správnou odpověď stačilo vyjádřit zakroužkováním bez zdůvodnění. Za správnou odpověď jsem považovala zakroužkování čísla 147. Pokud žák nezakroužkoval ani jedno z čísel a nechal testový papír bez jakéhokoliv záznamu, považovala jsem úlohu za neřešenou. Když žák zakroužkoval číslo 253 nebo obě čísla, pokládala jsem úlohu za chybně řešenou.

Tato úloha se vyhýbá pojmu „dělitelný třemi“, který je nahrazen formulací „čísla, která po dělení číslem 3 dávají zbytek nula“. Tato úloha byla v testu zařazena, aby prověřila, zda jsou žáci po výuce dělitelnosti schopni používat kritérium dělitelnosti třemi a díky tomu efektivněji řešit úlohy tohoto typu než žáci před výukou dělitelnosti. Konkrétně měla ověřit, jestli žáci po výuce dělitelnosti používají ciferného součtu k ověření dělitelnosti daného čísla třemi. Úloha je záměrně v úvodu testu a její obtížnost není vysoká. Tuto úlohu mohli úspěšně vyřešit všichni žáci, kteří ovládají písemné nebo pamětní dělení trojmístného čísla jednomístným číslem.

Úloha 3
Doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem:

a) dvěma 77_ ______________________

b) pěti 3_6 ______________________

c) devíti 45_ ______________________

Najdi všechna řešení.
Správná odpověď: a) 2, 4, 6, 8, 0 b) řešení neexistuje c) 9, 0

Úloha 3 má pro podúlohy a) a c) víceprvkovou množinu řešení, proto jsem při vyhodnocování testů použila striktní a procentuální úspěšnost. Z hlediska striktní úspěšnosti byli v řešení úlohy úspěšní pouze ti respondenti, kteří uvedli všechna možná řešení. Úspěšnost respondentů, kteří odpověděli částečně správně, zachycuje procentuální úspěšnost, která vyjadřuje poměr zaznamenaných správných odpovědí k počtu všech správných odpovědí. Pokud žák doplnil na vynechané místo více než jednu číslici, považovala jsem jeho řešení za neporozumění zadání, byť bylo správné.

Tato úloha se opět vyhýbá pojmu dělitelný daným číslem a nahrazuje ho formulací „doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem“.

Předpokládala jsem, že úloha bude pro žáky před výukou dělitelnosti obtížnější, neboť k řešení úlohy budou muset použít písemné dělení místo kritérií dělitelnosti. Další komplikací při hledání správného řešení byly zřejmě pro žáky nestandardní množiny řešení jednotlivých podotázek. Zatímco podúlohy a) a c) mají víceprvkovou množinu řešení, podúloha b) má prázdnou množinu řešení. Předpokládala jsem, že u sedmáků bude úspěšnost vyšší i proto, že jedna úloha měla více řešení a jedna žádné. Takový výsledek je v matematice do 6. třídy značně neobvyklý, naopak je běžný v tématu dělitelnost. Nejen samotná látka, ale i forma výsledku by tedy měla být sedmákům podstatně bližší než šesťákům.

Tuto úlohu jsem do testu zařadila, protože je vhodná k ověření znalosti znaků dělitelnosti dvěma, pěti a devíti, a zároveň jsem chtěla ověřit, zda žáci po výuce dělitelnosti jsou schopni aplikovat kritéria dělitelnosti a řešit tuto úlohu efektivněji a s větší úspěšností než žáci před výukou dělitelnosti.

Úloha 4

Petr zaplatil v obchodě pouze dvoukorunami a pětikorunami a víme, že dvoukorun bylo stejně jako pětikorun. Kolik zaplatil v obchodě za nákup, jestliže platil více než 40 Kč a méně než 50 Kč?

Správná odpověď: Petr platil 42 nebo 49 Kč.

Tato úloha má dvě správná řešení, proto jsem k jejímu vyhodnocení opět použila striktní a procentuální úspěšnost. Pokud žák neuvedl v odpovědi částku, kterou Petr zaplatil, ale pouze počet dvoukorun a pětikorun, považovala jsem tuto odpověď za správnou, protože podstata úlohy byla vyřešena a jde pouze o jinou formu zápisu správného výsledku.

Tuto úlohu jsem zařadila do testu, protože procvičuje dělitelnost sedmi a správné porozumění slovní úloze. Klíčem ke správnému řešení je správné pochopení zadání, ve kterém je uvedeno, že dvoukorun je stejně jako pětikorun. V daném intervalu má úloha dvě řešení, což stupňuje její obtížnost. Formulace záměrně nenapovídá, že existuje více řešení, na rozdíl od úloh 3 a 6, kde je formulace „najdi všechna řešení“. Zajímalo mě, nakolik budou sedmáci schopni tento typ úloh řešit úspěšněji než šesťáci. Úloha je ze sbírky úloh prof. Hejného. Předpokládala jsem tedy, že žáci, kteří jsou učeni Hejného metodou, budou v řešení této úlohy úspěšnější než žáci, kteří jsou učeni tradičním způsobem.

Úloha 5

Víme, že v 6. A i 6. B je mezi 25 žáků a 35 žáky[8]. Když se žáci v 6. A postaví do dvojstupu anebo do pětistupu, žádný nezbyde. Když se žáci 6. B seřadí do dvojstupu, zbyde jeden, a když se seřadí do pětistupu, zbydou dva.

a) Kolik je žáků v 6. A?
b) Kolik je žáků v 6. B?
c) Když jsou žáci 6. B a 6. A pohromadě, mohou utvořit dvojstup tak, aby nikdo nezbyl?

Správná odpověď: a) 30 b) 27 c) ne

Podúloha a) testovala schopnost nalézt číslo současně dělitelné dvěma a pěti z daného intervalu. Podúloha b) byla o dost obtížnější, protože šlo o to nalézt číslo, které dává různé zbytky při dělení dvěma a pěti. Podúloha c) pak byla obdobou podúloh z úlohy 1, protože v ní žáci řešili problém, zda součet sudého a lichého čísla je sudé nebo liché číslo. Správné řešení této podúlohy mohli žáci určit obecně ze zadání, aniž by počítali s konkrétními čísly. Pravděpodobně se vyskytly i případy, že žák odpověděl na podúlohy a) a b) správně, a přesto se dopustil chyby v řešení podúlohy c), nebo naopak odpověděl aspoň jednu z podúloh a) a b) špatně, ale přesto vyřešil podúlohu c) správně. Dokonce se mohlo stát, že žák odpověděl podúlohu c) správně, i když podúlohy a) a b) vůbec neřešil. Podúlohy a), b) a c) byly vlastně na sobě nezávislé, ale žáci na to nemuseli přijít, proto jsem zkoumala, jak se nezávislost matematicky projevila ve výsledcích žáků.

Správnost podúloh jsem vyhodnocovala nezávisle na sobě, ale pro úspěšnost v řešení úlohy 5 bylo nezbytné zodpovědět správně všechny tři podúlohy. Slovní úloha byla zařazena do testu proto, že při jejím řešení mohli žáci využít hned několik poznatků z dělitelnosti: společný násobek dvou čísel, znaky dělitelnosti dvěma a pěti, anebo dělení se zbytkem.

Podúloha a) ověřovala schopnost najít nsn dvou čísel, a tak by měli být sedmáci zvýhodněni konkrétním poznatkem. Naproti tomu podúloha b) se nedala řešit pomocí žádného naučeného algoritmu a zjišťovala, zda sedmáci mají lepší vhled do dané problematiky než žáci před výukou dělitelnosti.

[8] Tato formulace vznikla jako překlep, kterého jsem si všimla až v průběhu experimentu, protože neměla vliv na matematickou správnost zadání ani na jeho srozumitelnost, nijak jsem jej nadále nezohledňovala.

Mým cílem bylo ověřit, nakolik jsou žáci po výuce dělitelnosti schopni lépe využít svých poznatků o dělitelnosti ve srovnání s žáky, kteří dělitelnost ještě neprobírali a nezbývá jim než řešit úlohu experimentálně nebo za pomocí vhodného modelu.

Úloha 6

24 žáků ze třídy 6. A jelo na výlet. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů tak, aby nikdo nezbyl.

a) Vypiš všechny možnosti, do kolika stejných skupin po kolika členech se mohou žáci rozdělit.

b) Jak by se mohli žáci rozdělit do skupin, kdyby jeden z nich onemocněl a na výlet nejel?

Správná odpověď: a) 2 skupiny po 12, 3 skupiny po 8, 4 skupiny po 6, 6 skupin po 4, 8 skupin po 3, 12 skupin po 2 b) nemá řešení

Úloha ověřovala schopnost žáků nalézt vlastní dělitele daného čísla. Klíčové pro správné řešení bylo porozumění formulaci „do skupin se stejným počtem členů“. Podúloha a) měla šest řešení. Neúplnost správného řešení zachycuje procentuální úspěšnost, jak bylo popsáno v úvodu této podkapitoly. Jelikož řešením byl výpis součinů, považovala jsem v podúloze a) za správné i prosté vypsání počtů členů jednotlivých skupin bez uvedení počtu skupin. Přidání nebo vynechání jedné skupiny po 24 žácích a 24 skupin po jednom žákovi jsem zohledňovala v úplnosti řešení podúlohy a), zohledňovala jsem to až v řešení podúlohy b).

Jak už jsem naznačila, v řešeních této úlohy se ukázala záludnost formulace „rozdělit do skupin“ bez matematické terminologie. Z formulace „rozdělit“ nebylo jasné, zda rozdělením je i celá skupina, v úloze 6 tedy 24 nebo 23 žáků. Pojem „skupina“ zase jasně nedefinuje, zda může existovat i skupina, která má pouze jednoho člena.

Mým záměrem bylo považovat za skupinu dvou a vícečlenné seskupení žáků. Rovněž celou třídu jsem nepovažovala za „rozdělení do skupin“. U žáků se ale vyskytlo i jiné porozumění, což mohlo mít vliv na správnost odpovědi v podúloze b). Pokud žák k problému v podúloze b) přistupoval striktně z matematického hlediska a uvedl v řešení dvě možnosti, 1 skupina po 23 a 23 skupin po 1, považovala jsem takovéto řešení za správné a úplné. Pokud zmínil pouze jednu z těchto možností, považovala jsem to za porušení úplnosti, nikoliv však správnosti. Pokud žák uvedl rozdělení na nestejně velké skupiny, popřípadě navrhl jiné alternativní rozdělení, které nebylo odpovědí na položenou podotázku b), považovala jsem takové řešení za chybné.

Úloha 7

Z letiště vylétají letadla na lince A každý šestý den a letadla na lince B každý osmý den. Dnes odlétají obě letadla. Za kolik dní budou letadla opět odlétat z letiště společně?

Správná odpověď: Letadla budou opět spolu vylétat za 24 dní a pak za každý další násobek čísla 24.

I když se jedná o slovní úlohu, považovala jsem za správný i pouhý výsledek bez slovní formulace odpovědi. Pokud žák neuvedl 24, ale jiný násobek 24, považovala jeho řešení za správné a úplné, protože v zadání úlohy není formulace „kdy budou letadlo nejdříve vylétat společně“. Pouze jsem zohlednila v poznámce, že žák neuvedl v řešení nsn. Ze zadání úlohy rovněž neplyne, že žáci musí uvést všechna řešení. Pokud tedy uvedli jakýkoliv násobek čísla 24, považovala jsem odpověď za správnou a úplnou. Úloha testuje schopnost porozumění slovní úloze, jejíž řešení vede k hledání společného násobku čísel 6 a 8. U žáků po výuce dělitelnosti jsem očekávala, že se v jejich řešení častěji vyskytne nsn než u žáků před výukou dělitelnosti, případně že k řešení budou schopni použít prvočíselný rozklad pro výpočet $n(6, 8)$.

Úloha 8

Ze dvou stuh délky 24 cm a 40 cm je třeba nastříhat co nejdelší stejně dlouhé stužky, aby nezůstaly žádné zbytky. Stužky je nutné stříhat po celých centimetrech. Jak dlouhé budou tyto stužky?

Správná odpověď: Stuhy nastříháme na díly po 8 cm.

Věta „Stužky je nutné stříhat po celých centimetrech“ není v zadání z matematického hlediska nutná. Zařadila jsem ji proto, aby se žáci nerozptylovali pokusy o řešení, které nesouvisejí s dělitelností jako takovou.

Jako v předešlých slovních úlohách ani zde jsem po respondentech nevyžadovala slovní odpověď, ale stačilo, když ve výsledku uvedli číslo 8. I když řešením by mohli být další společní dělitelé čísel 24 a 40 (1, 2, 4), nepovažovala jsem takovéto odpovědi za správné, protože v úloze je jasná formulace „co nejdelší stejně dlouhé stužky“. Jiný společný dělitel čísel 24 a 40 jsem pouze uvedla do poznámky.

Úloha byla do testu zařazena, protože ověřuje schopnost porozumění slovní úloze, jejíž řešení vede k hledání $D(24, 40)$. Klíčové pro správné řešení bylo porozumění formulaci „co nejdelší stejně dlouhé stužky, aby nezůstaly žádné zbytky“. Úloha měla žáky inspirovat k vytvoření matematického modelu, popřípadě k vypisování dělitelů jednotlivých čísel.

U žáků po výuce dělitelnosti jsem očekávala použití prvočíselného rozkladu k výpočtu $D(24, 40)$, případně zdůvodnění, že se jedná o NSD.

3.6 Konzistence skupiny vyučované Hejného metodou

Pro srovnání různých skupin žáků je podstatná otázka, zda žáci 6. ročníku, kteří se Hejného metodou učí od začátku 2. stupně, byli již v momentě zařazení do mého výzkumu adaptováni na nový způsob výuky, nebo zda u nich byl stále silnější vliv výuky tradičním způsobem.

V této skupině je celkem 103 žáků, z toho 39 žáků 7. ročníku a 64 žáků 6. ročníku. Skupina je dále vnitřně diferencovaná, protože zahrnuje žáky ze dvou různých škol. Na jedné z těchto škol probíhá výuka matematiky Hejného metodou již od 1. stupně, zatímco na druhé se žáci učí matematiku tímto způsobem až od 2. stupně. Budu tedy zkoumat, zda žáci, kteří byli na 1. stupni vyučováni tradičně a od 6. ročníku Hejného metodou, mají blíže ke skupině žáků vyučovaných tradičním způsobem, nebo ke skupině žáků vyučovaných Hejného metodou od začátku 1. stupně.

Z toho důvodu jsem 6. ročník vyučovaný Hejného metodou rozdělila na dvě podskupiny: HM1 – skupinu žáků, kteří měli Hejného metodu od 1. stupně, a HM2 – skupinu žáků, kteří měli Hejného metodu od 2. stupně. V tab. 6 jsou zachyceny striktní úspěšnosti v procentech po jednotlivých testových úlohách žáků učených tradičním způsobem, žáků učených Hejného metodou rozdělených na skupiny HM1 a HM2 a žáků osmiletého gymnázia. Z této tabulky je patrné, že celková striktní úspěšnost v testu je nejpodobnější mezi dvěma skupinami učenými Hejného metodou.

Pro další srovnání podobnosti skupin učených Hejného metodou a skupiny učené tradičním způsobem jsem zjišťovala velikost rozdílového vektoru úspěšnosti mezi jednotlivými skupinami. Skupinu žáků primy osmiletého gymnázia jsem do srovnání nezařadila. Nejprve jsem spočítala součet druhých mocnin rozdílů úspěšností v jednotlivých úlohách. Tuto sumu jsem následně odmocnila a nazvala jsem ji velikostí rozdílového vektoru úspěšností mezi jednotlivými skupinami. Tyto výsledky jsou zachyceny v tab. 7 a plyne z nich, že velikost rozdílového vektoru je nejmenší právě mezi dvěma skupinami, které jsou učeny Hejného metodou. Vliv výuky na 1. stupni ve skupině, která je učena Hejného metodou až od 2. stupně, se projevil v tom, že velikost rozdílového vektoru mezi skupinami TV (tradiční výuka) a HM2 je menší než mezi skupinami TV a HM1.

Striktní úspěšnost	Tradiční výuka	Hejného metoda od 1. stupně	Hejného metoda od 2. stupně	Osmileté gymnázium
Úloha 1	56,96	47,37	51,11	86,67
Úloha 2	67,09	89,47	84,44	86,67
Úloha 3	0,00	15,79	9,00	23,33
Úloha 4	2,53	21,05	35,56	43,33
Úloha 5	16,46	63,16	31,11	73,33
Úloha 6	5,06	15,79	26,67	33,33
Úloha 7	29,11	36,84	57,78	33,33
Úloha 8	12,66	36,84	17,78	26,67
Celková úspěšnost	23,73	40,79	39,17	50,83

Tab. 6 SÚ v jednotlivých úlohách s celková SÚ jednotlivých skupin v procentech

Striktní úspěšnost	TV – HM1	TV – HM2	HM1 – HM2
Úloha 1	0,0959	0,0585	-0,0374
Úloha 2	-0,2239	-0,1736	0,0503
Úloha 3	-0,1579	-0,0900	0,0679
Úloha 4	-0,1852	-0,3302	-0,1450
Úloha 5	-0,4670	-0,1466	0,3205
Úloha 6	-0,1073	-0,2160	-0,1088
Úloha 7	-0,0773	-0,2866	-0,2094
Úloha 8	-0,2418	-0,0512	0,1906
Velikost rozdílového vektoru	0,6424	0,5510	0,4736

Tab. 7 Vzdálenost skupin TV, HM1 a HM2 z hlediska SÚ[9]

Vysvětlivky:

Názvy skupin ve sloupcích znamenají rozdíly úspěšností dvou skupin v pořadí, v kterém jsou uvedeny.

Další srovnání, napříč skupinami, které jsem provedla, se týká schopnosti použití modelu k řešení úloh. Modelu se dalo využít v řešení úloh 1, 4, 5, 6, 7 a 8 a četnost výskytu modelů v procentech v řešeních jednotlivých skupin zachycuje tab. 8. Poté jsem provedla srovnání velikosti rozdílového vektoru četností použití modelu obdobným způsobem jako v případě úspěšností. Zkoumala jsem, jestli v použití modelu k nalezení řešení je skupina HM2 podobnější skupině HM1 nebo skupině učené tradičním způsobem. I v tomto případě z výsledků zachycených v tab. 9 vyplývá, že skupina HM2 je o něco blíže ke skupině HM1

[9]Zde výjimečně neuvádím SÚ v procentech, ale podle její definice. Velikost rozdílového vektoru by vyjádřená v procentech neměla dobrý smysl.

než ke skupině TV. Celkové úspěšnosti i četnost výskytu modelů ukazují, že skupina HM2 je někde mezi skupinami HM1 a TV, blíže ke skupině HM2.

Model	Tradiční výuka	Hejného metoda od 1. stupně	Hejného metoda od 2. stupně	Osmileté gymnázium
Úloha 1	7,08	26,32	15,63	23,33
Úloha 4	10,62	10,53	10,94	33,33
Úloha 5	9,73	10,53	6,25	30,00
Úloha 6	4,42	10,53	3,13	0,00
Úloha 7	7,96	42,11	31,25	56,67
Úloha 8	1,80	26,32	12,50	6,67

Tab. 8 Výskyt modelů v řešení jednotlivých skupin v procentech

Model	TV – HM1	TV – HM2	HM1 – HM2
Úloha 1	-0,1924	-0,0855	0,1069
Úloha 4	0,0009	-0,0032	-0,0041
Úloha 5	-0,0079	0,0348	0,0428
Úloha 6	-0,0610	0,0130	0,0740
Úloha 7	-0,3414	-0,2329	0,1086
Úloha 8	-0,2451	-0,1070	0,1382
Velikost rozdílového vektoru	0,4633	0,2727	0,2228

Tab. 9 Vzdálenost skupin TV, HM1 a HM2 z hlediska použití modelů

Vysvětlivky:

Názvy skupin ve sloupcích znamenají rozdíly výskytů modelů dvou skupin v pořadí, v kterém jsou uvedeny.

Tento výsledek považuji za uspokojivý. Mým cílem nebylo srovnávat přímo výukové metody v jejich čisté podobě, nýbrž mapovat školskou realitu, ve které se vyskytují jak skupiny učené Hejného metodou od začátku školní docházky, tak skupiny učené Hejného metodou až od začátku 2. stupně. Z metodologického hlediska tedy možná nekonzistence skupiny učené Hejného metodou není tak významný problém jako absence skupiny, která byla učena na 1. stupni Hejného metodou a na 2. stupni tradičním způsobem. Edukační styly, tedy tradiční způsob výuky a výuku Hejného metodou nelze na základě výsledků mého výzkumu přímo srovnávat také z toho důvodu, že nebyla provedena kontrola vzhledem k míře obecných kognitivních schopností.

3.7 Statistické výsledky

Během vyhodnocování výsledků testu jsem si uvědomila, že mám k dispozici multidimenzionální soubor dat, protože získaná data lze vyhodnocovat z hlediska čtyř různých dimenzí: úloh, ročníků, skupin a typu úspěšnosti (striktní a procentuální). Získaná multidimenzionální data je obtížné přehledně analyzovat, proto jsem se rozhodla postupovat následujícím způsobem: nejprve vyhodnotím celkovou úspěšnost, čímž zmizí dimenze úlohy. Tyto výsledky jsou obsaženy v oddíle 3.7.1. Následně budu v oddíle 3.7.2 data analyzovat po jednotlivých úlohách. Nejprve zafixuji dimenzi úlohy a získané výsledky budu analyzovat z hlediska ostatních dimenzí pro každou z osmi úloh. Tyto výsledky jsou obsaženy v oddíle 3.7.2.1. Dále zafixuji dimenzi skupiny a ročníku. Tuto analýzu čtenář nalezne v oddíle 3.7.2.2.

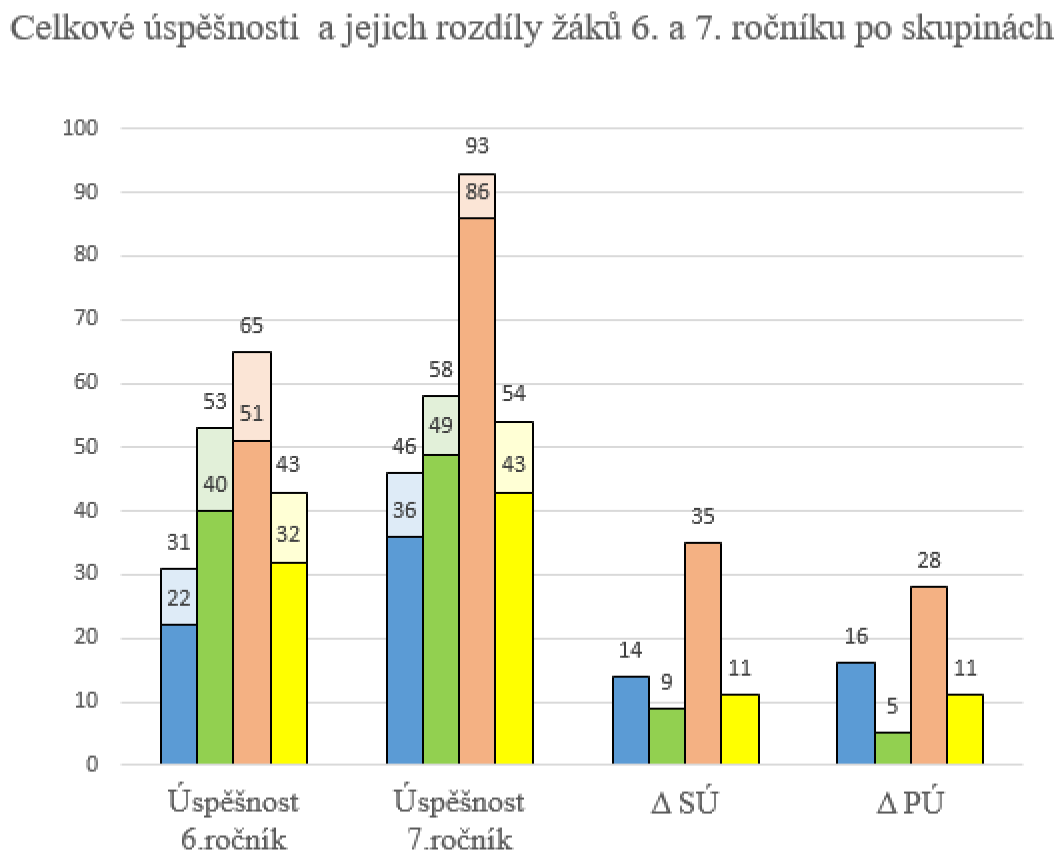
3.7.1 Celková úspěšnost

Zde uvádím do grafů zpracovanou podobu celkových úspěšností jednotlivých skupin a celku a rozdílů úspěšností mezi 6. a 7. ročníkem.

Z grafu na obr. 12 vidíme, že z hlediska striktní i procentuální úspěšnosti v testu dominují žáci osmiletého gymnázia, druzí jsou s odstupem žáci učeni Hejného metodou a nejslabší skupinou jsou žáci vyučovaní tradičním způsobem. Striktní i procentuální úspěšnost je v 7. ročníku vyšší než v 6. ve všech skupinách. Nárůst úspěšnosti je výrazně nejvyšší u gymnazistů a nejmenší u skupiny učené Hejného metodou. Rozdíl ve striktní a procentuální úspěšnosti mezi ročníky má velmi podobnou charakteristiku, což ovšem může být způsobeno tím, že pro pět z osmi úloh se hodnoty striktní a procentuální úspěšnosti shodují. Rozdíl mezi striktní a procentuální úspěšností je u gymnazistů a u skupiny učené Hejného metodou v 7. ročníku menší než v 6. ročníku, což svědčí o nárůstu systematičnosti při řešení úloh.

	6. ročník		7. ročník		Δ SÚ (procentní body)	Δ PÚ (procentní body)
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)		
Tradiční výuka	22	31	36	47	14	16
Hejného metoda	40	53	49	58	9	5
Osmileté gymnázium	51	65	86	93	35	28
Celkové vyhodnocení	32	43	43	54	11	11

Tab. 10

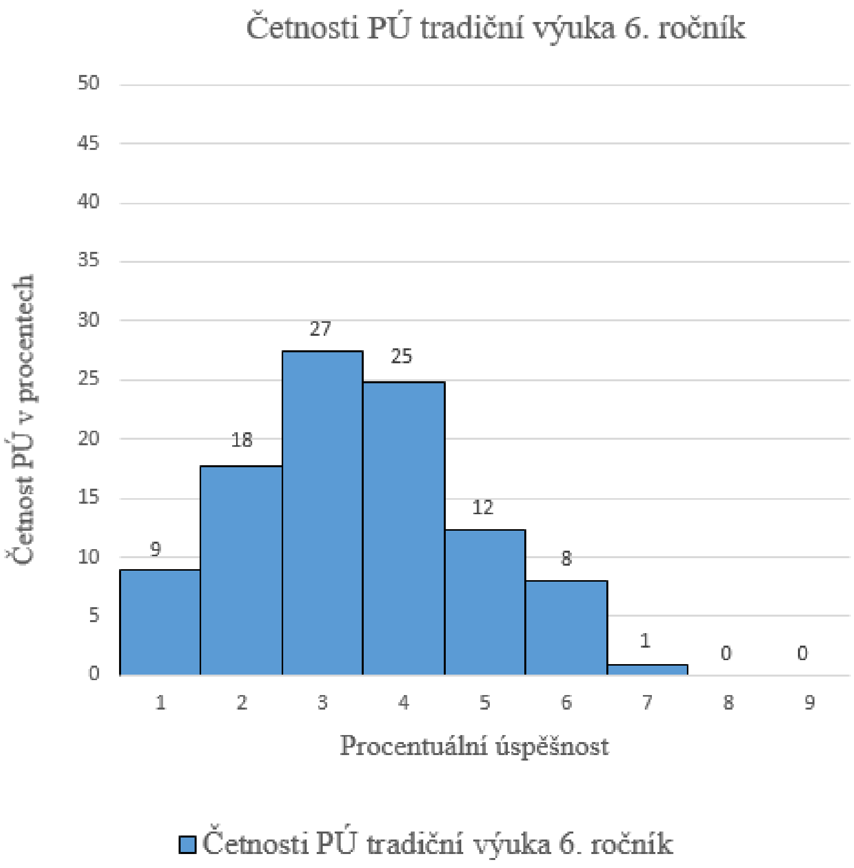


Obr. 12

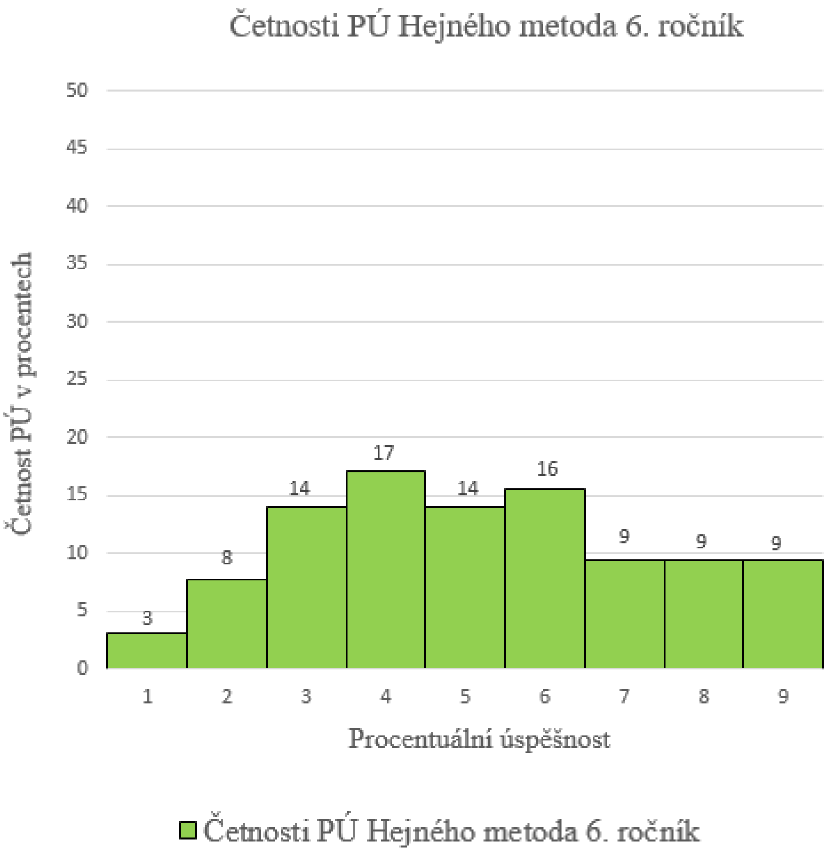
Vysvětlivky

- Tradiční výuka SÚ
- Tradiční výuka PÚ
- Hejného metoda SÚ
- Hejného metoda PÚ
- Osmileté gymnázium SÚ
- Osmileté gymnázium PÚ
- Celkový přehled SÚ
- Celkový přehled PÚ

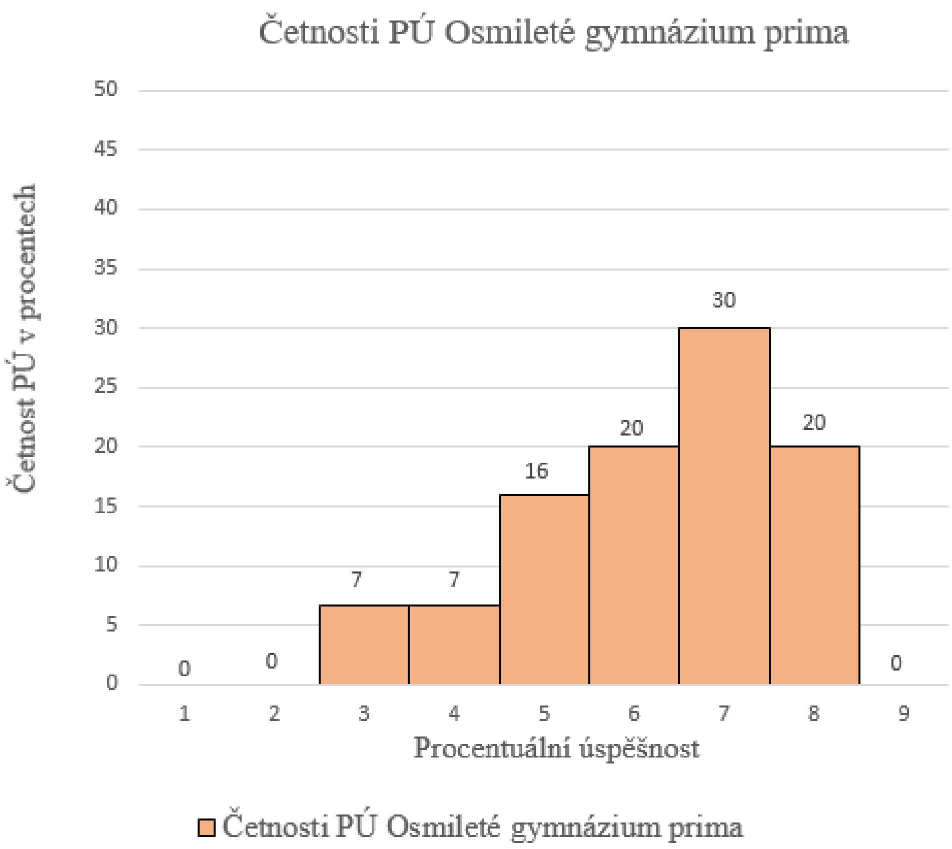
Bližší představu o struktuře výsledků v rámci jednotlivých skupin a celku čtenář získá z obr. 13–20, které zachycují grafy procentuálního rozložení respondentů podle procentuální úspěšnosti. Grafy jsou sestrojeny pro jednotlivé skupiny 6. a 7. ročníku. Ve všech grafech jsem pracovala pouze s procentuální úspěšností, protože jinak by grafů bylo až příliš velké množství. Upřednostnila jsem procentuální úspěšnost před striktní, protože striktní úspěšnost pomíjí schopnost řešit úlohu alespoň částečně.


Četnosti PÚ tradiční výuka 6. ročník
Četnost PÚ v procentech
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
9
18
27
25
12
8
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnosti PÚ tradiční výuka 6. ročník

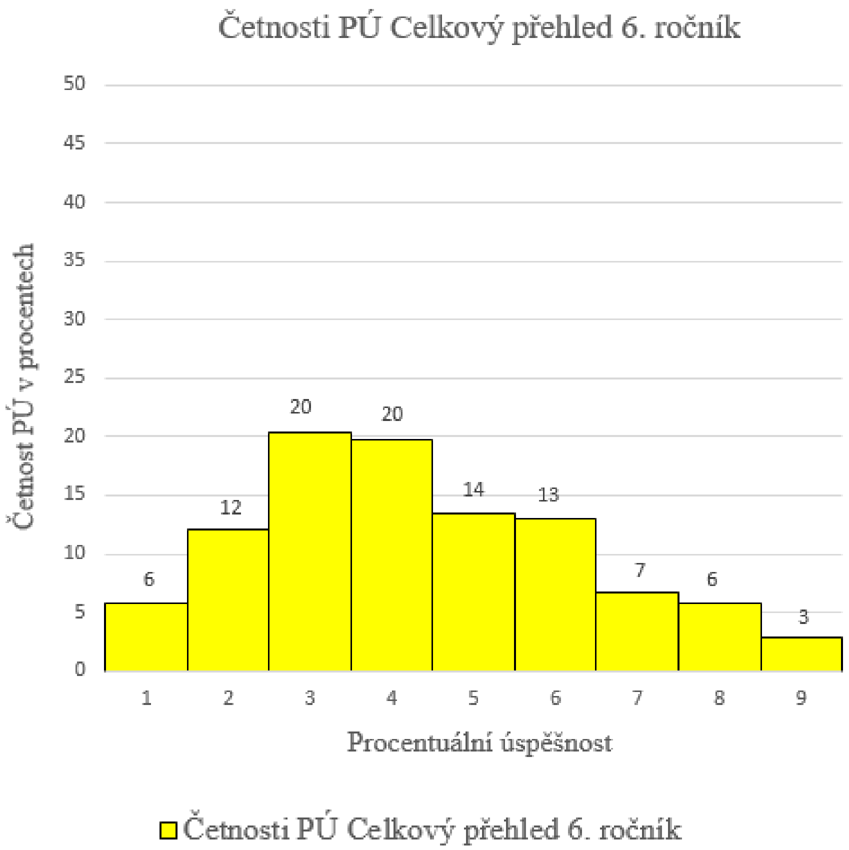
Obr. 13


Četnosti PÚ Hejného metoda 6. ročník
Četnost PÚ v procentech
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
3
8
14
17
14
16
9
9
9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnosti PÚ Hejného metoda 6. ročník

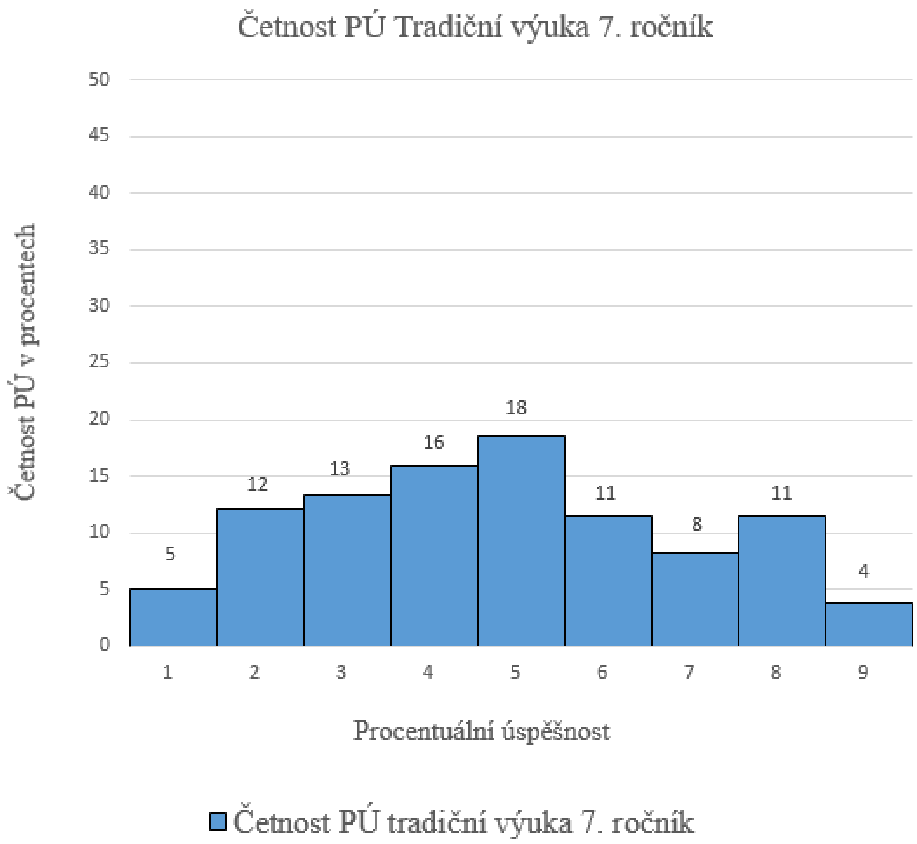
Obr. 14


Četnosti PÚ Osmileté gymnázium prima
Četnost PÚ v procentech
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
0
7
7
16
20
30
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnosti PÚ Osmileté gymnázium prima

Obr. 15

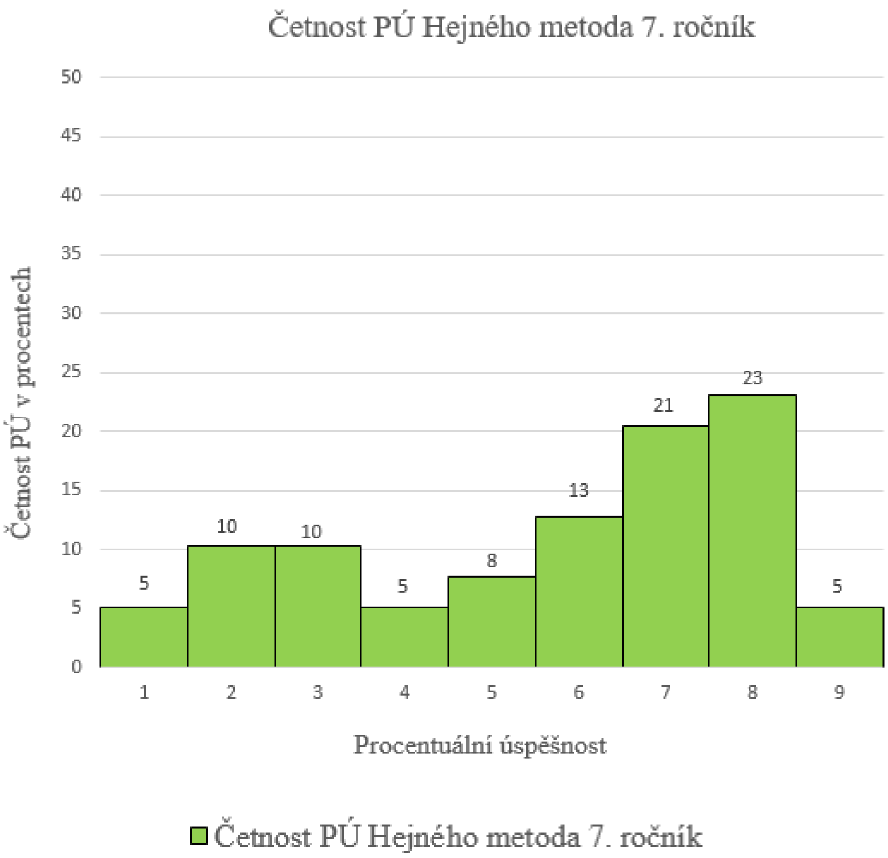

Četnosti PÚ Celkový přehled 6. ročník
Četnost PÚ v procentech
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
6
12
20
20
14
13
7
6
3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnosti PÚ Celkový přehled 6. ročník

Obr. 16



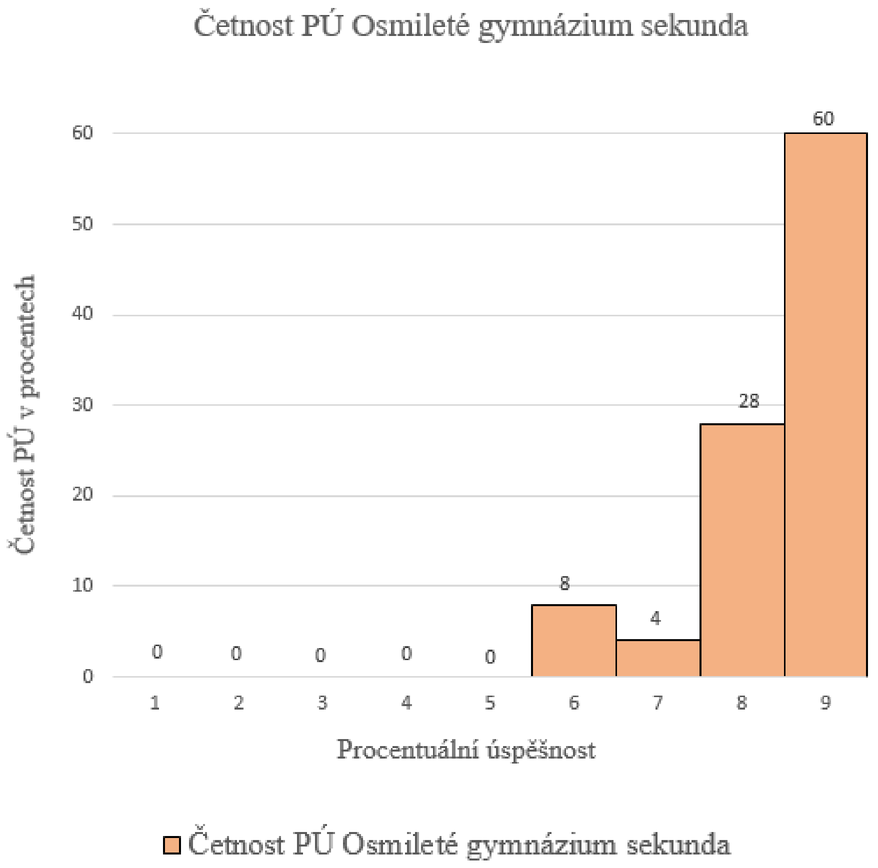
Četnost PÚ Tradiční výuka 7. ročník
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Četnost PÚ v procentech
5
12
13
16
18
11
8
11
4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnost PÚ tradiční výuka 7. ročník

Obr. 17

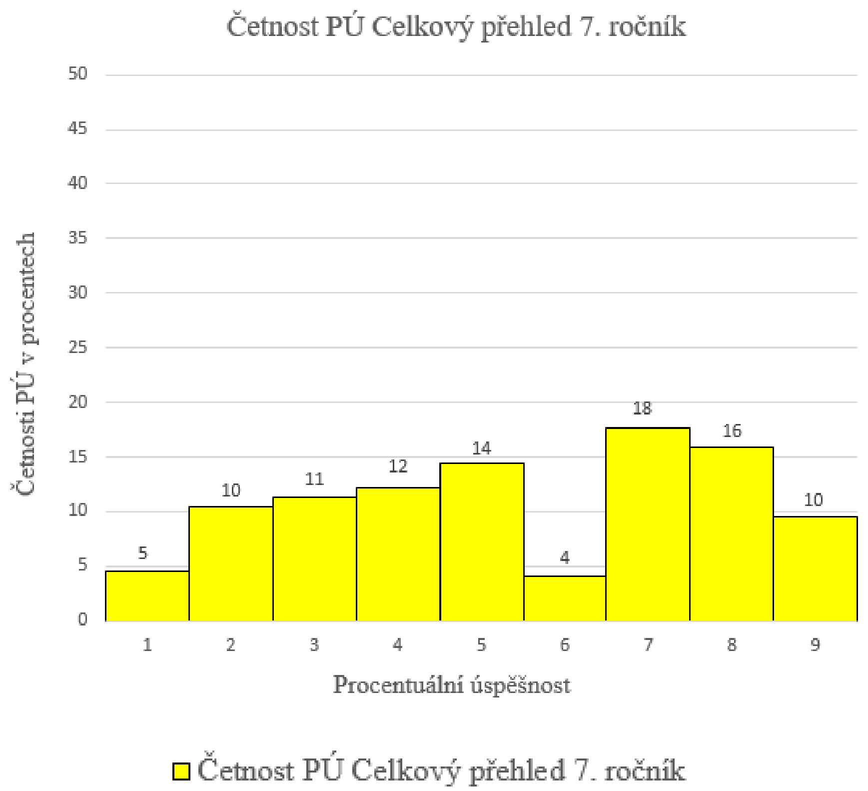


Četnost PÚ Hejného metoda 7. ročník
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Četnost PÚ v procentech
5
10
10
5
8
13
21
23
5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Procentuální úspěšnost
Četnost PÚ Hejného metoda 7. ročník

Obr. 18


Četnost PÚ Osmileté gymnázium sekunda
Četnost PÚ v procentech
60
50
40
30
20
10
0
0 0 0 0 0 8 4 28 60
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Procentuální úspěšnost
Četnost PÚ Osmileté gymnázium sekunda

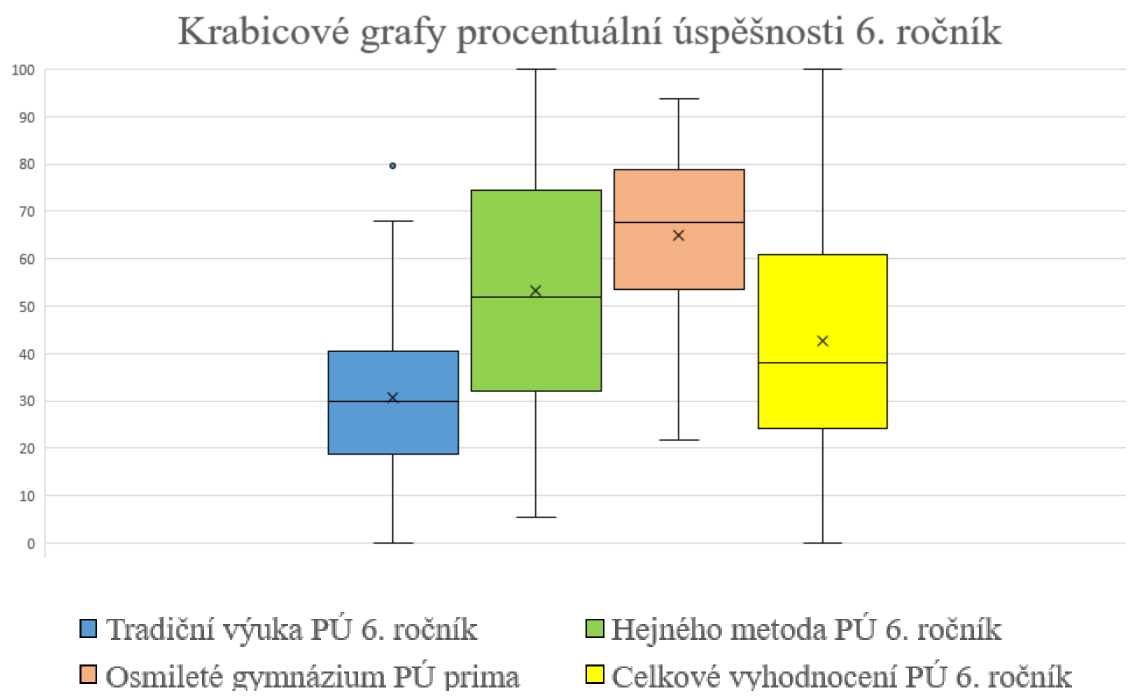
Obr. 19


Četnost PÚ Celkový přehled 7. ročník
Četnosti PÚ v procentech
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5 10 11 12 14 4 18 16 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Procentuální úspěšnost
Četnost PÚ Celkový přehled 7. ročník

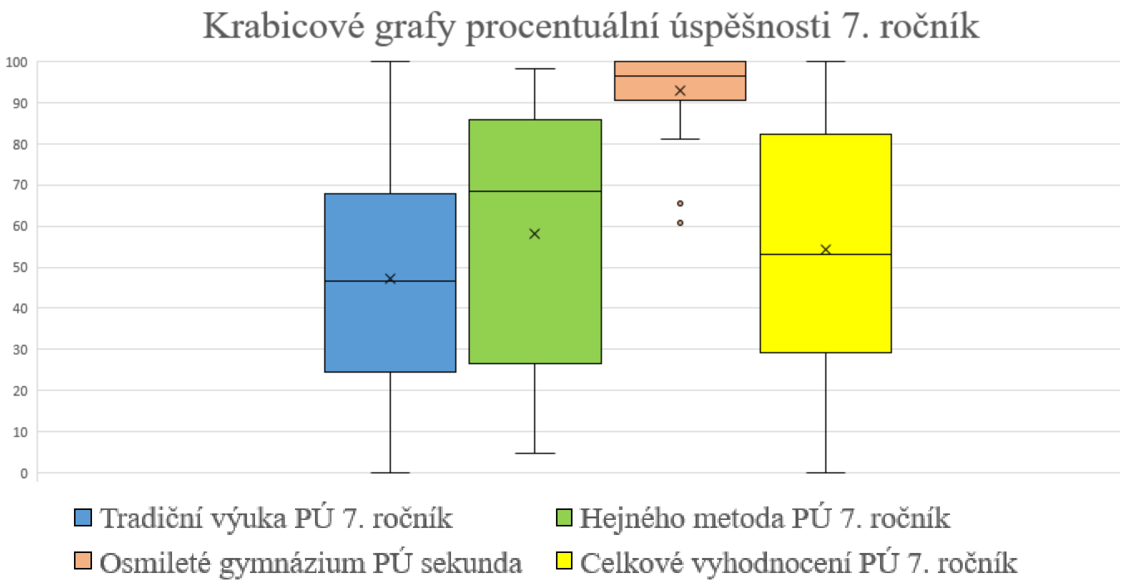
Obr. 20

Vzhledem k povaze dat, která mají diskrétní strukturu a ne spojitou, jsem se rozhodla místo běžného histogramu pro spojitě rozložené hodnoty přizpůsobit histogram diskrétnímu charakteru dat. Z toho důvodu je každý sloupec grafu centrován kolem jedné možné hodnoty striktní úspěšnosti. Jednotlivé sloupce v grafu jsou značeny osminásobkem této úspěšnosti neboli součtem úspěšnosti v jednotlivých úlohách a je v nich vynesen podíl respondentů s celkovou PÚ $\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8},\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8}\right\rangle$, kde x je označení sloupce.

Pro lepší představu o rozložení procentuální úspěšnosti kolem mediánu připojuji ještě na obr. 21 a 22 krabicové grafy pro jednotlivé skupiny v rámci obou sledovaných ročníků.



Obr. 21



Obr. 22

3.7.2 Úspěšnost po úlohách

3.7.2.1 Popis výsledků jednotlivých úloh

Na úvod analýzy jednotlivých úloh uvádím tabulku celkové úspěšnosti pro 6. a 7. ročník jednotlivých skupin a tabulku frekvence výskytu nejdůležitějších jevů souvisejících se strategií řešení. Popis úloh začnu tabulkami kvantitativních výsledků a dále se budu věnovat podrobnějšímu popisu a interpretaci dat.

Úloha 1

Úloha 1	SÚ 6. ročníky (procenta)	SÚ 7. ročníky (procenta)	Δ SÚ (procentní body)
Tradiční výuka	48	46	-2
Hejného metoda	50	46	-4
Osmileté gymnázium	87	100	13
Celkové vyhodnocení	54	52	-2

Tab. 11 Úspěšnost v úloze 1

Úloha 1	6. ročník			7. ročník		
	výpočet	model	zdůvodnění	výpočet	model	zdůvodnění
Tradiční výuka	6	7	11	3	16	15
Hejného metoda	13	23	22	3	15	13
Osmileté gymnázium	30	23	13	12	24	12
Celkové vyhodnocení	12	15	15	4	17	14

Tab. 12 Významné jevy v úloze 1 v procentech

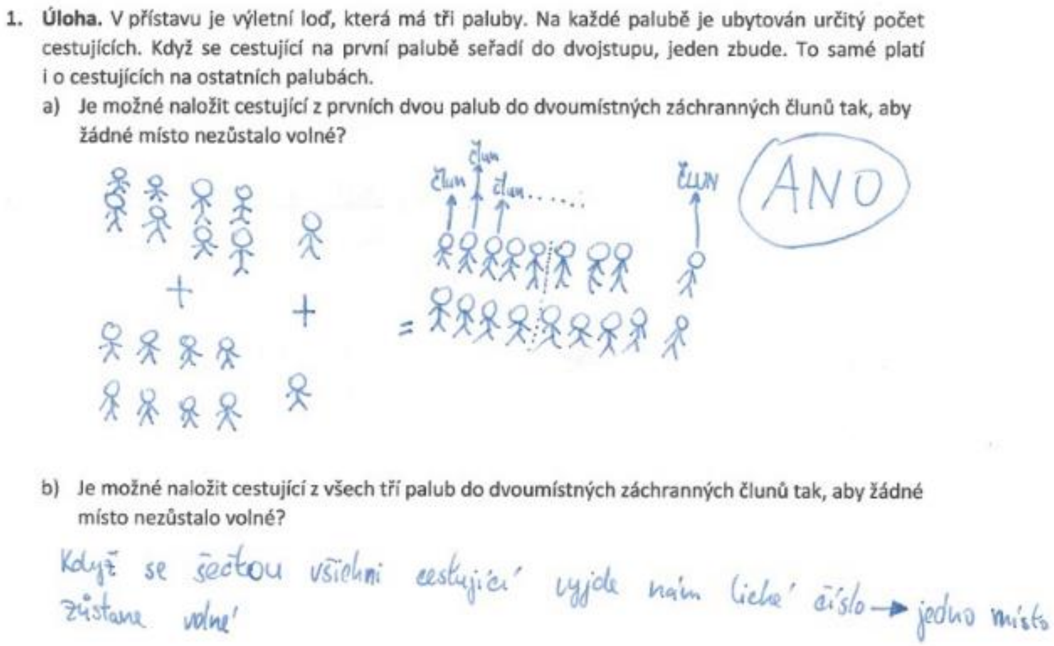
Úspěšné řešení této úlohy vyžaduje porozumění tomu, že součet dvou lichých čísel je sudé číslo a součet tří lichých čísel je liché číslo. Obtížnost této úlohy spočívá v tom, že žáci nejsou zvyklí pracovat s obecným vyjádřením lichého počtu. Zobecňování pravidel pro počítání se sudými a lichými čísly nepatří mezi požadované výstupy RVP a žáci se tyto poznatky neučí vždy, jsou obsaženy pouze v některých učebnicích. Přesto tuto úlohu nepovažuji za obtížnou. Žáci si mohli řešení úlohy usnadnit zvolením správného modelu s použitím obecného vyjádření nebo konkrétních čísel. Celková úspěšnost žáků 6. ročníku byla statisticky nevýznamně vyšší než úspěšnost žáků 7. ročníku, což platí i pro žáky vyučované tradiční metodou a žáky vyučované Hejného metodou. Tento výsledek je poměrně překvapivý. Žáci sekundy osmiletého gymnázia měli o 13 procentních bodů vyšší úspěšnost než žáci primy osmiletého gymnázia. Žáci sekundy osmiletého gymnázia měli navíc v testu 100% úspěšnost, což znamená, že pro ně byla úloha příliš lehká. Navíc i úspěšnost žáků primy osmiletého gymnázia byla poměrně vysoká. Test byl ovšem sestaven pro žáky běžných základních škol a na nich byl také pilotován, aby měl pro tyto žáky přiměřenou obtížnost a z výsledků testu bylo možné stanovit požadované závěry.

Žáci všech tří sledovaných typů škol měli v tomto testu stejné podmínky, protože tato netradiční úloha se nevyskytuje ani v tradičních učebnicích ani v učebnicích Hejného metody. Žáci 6. tříd řešili tuto úlohu přibližně stejně úspěšně jako žáci 7. tříd. Stejně můžeme interpretovat závěry testu i pro žáky základních škol, kteří jsou vyučováni tradičním způsobem a Hejného metodou. U skupiny žáků učených Hejného metodou se pro nepatrný rozdíl mezi úspěšností žáků 6. a 7. ročníku nabízí vysvětlení, že relativní úroveň matematických dovedností je vyšší u šesťáků než u sedmáků, jak bylo uvedeno v oddíle 3.3. U skupiny žáků učených tradičním způsobem je interpretace obtížná a zpochybňuje mou domněnku, že relativní úroveň matematických dovedností šesťáků je vyšší pouze ve skupině učené Hejného metodou.

Z hlediska formálnosti aproximované rozdílem úspěšnosti 6. a 7. ročníků dosáhli v úloze 1 nejlepších výsledků žáci osmiletých gymnázií. Zjištěný rozdíl je v tomto případě pouze spodním odhadem, neboť žáci sekundy dosáhli plné, 100% úspěšnosti. V obtížnější úloze, kde by úspěšnost lépe indikovala stav jejich znalostí, by rozdíl mohl být (i podstatně) větší.

Ukázky žákovských řešení

Celkový přehled použitých žákovských strategií v řešení testových úloh je v souhrnných tabulkách, které čtenář najde v příloze B. Žákovské strategie v řešení úlohy 1 jsou zachyceny v tabulce 12. V souhrnu lze říct, že žáci všech skupin používali k řešení výpočet, model a uváděli pro své domněnky různá zdůvodnění. U žáků 6. ročníků jsem zaznamenala nepatrně větší tendenci řešit úlohu pomocí konkrétních čísel. Procento výskytů těchto strategií řešení se pohybovalo od 3 % do 25 % napříč všemi skupinami žáků. Ostatní respondenti svůj postup řešení neuvedli.


1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.

a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

Obr. 23 Prima, osmileté gymnázium

V řešeních pomocí modelu byla patrná odlišná míra abstrakce v jednotlivých modelech, čímž se budu zabývat v oddíle 3.8.1. Na obr. 23 je vidět vývoj ve strategii řešení respondenta mezi podúlohou a) a b). Respondent řeší podúlohu a) pomocí nepříliš abstraktního modelu a následně využívá získaných poznatků z tvorby modelu v podúloze b), kterou již dokáže správně řešit úsudkem bez modelu. Z řešení pomocí modelu využitých žáky plyne, že žák musí dospět na určitou úroveň abstrakce, aby byl schopen připustit, že k nalezení řešení nepotřebuje konkrétní čísla, a aby jeho kognitivní struktura připustila, že některé vlastnosti čísel se dají zobecnit.

V řešeních pomocí modelu se vyskytla i řešení, která nevedla ke správnému výsledku. Jednalo se o chyby, které vznikly tím, že žák nebyl schopen v modelu zachytit podstatné informace a nepodstatné vynechat, proto jeho řešení selhalo. V jednom případě se vyskytlo i řešení, kdy se žák pod vlivem reálného kontextu snažil nalézt řešení i tam, kde neexistuje. Podúlohu a) vyřešil správně pomocí modelu, ale v podúloze b) se snažil lichý počet cestujících rozdělit do dvojic za každou cenu, proto vymyslel toto řešení: „nacpeme tam i řidiče“. V dalším žákovském řešení se vyskytl komentář „nevím kolik je lidí“ a tento respondent se do řešení ani nepustil. Z toho lze usuzovat, že mnohé žáky od řešení této úlohy odradila absence konkrétního počtu cestujících v zadání.

Na obr. 24 je patrné, že žák zdůvodnění, ke kterému došel, odvodil použitím konkrétních čísel. Použití konkrétních čísel se v řešeních vyskytovalo poměrně často.

1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.
   a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

   Je to možné, protože na obou palubách je lichý počet cestujících a lichý + lichý je sudý a sudý jde vydělit 2.

   Např. Na jedný palubě je 39 a na druhý třeba taky 39 tak je to 78 a to je dělitelné dvěma

   b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

   Není to možné, protože na třech palubách je lichý počet cestujících a lichý + lichý + lichý je lichý a to nejde vydělit 2.

   Např. Na všech třech je 39 a to je dohromady 117 a to není dělitelné 2.

Obr. 24 7. ročník, tradiční výuka

Úloha 2

Úloha 2	SÚ 6. ročníky (procenta)	SÚ 7. ročníky (procenta)	Δ SÚ (procentní body)
Tradiční výuka	68	74	6
Hejného metoda	86	79	-7
Osmileté gymnázium	87	96	9
Celkové vyhodnocení	76	77	1

Tab. 13 Úspěšnost v úloze 2

Úloha 2	6. ročník			7. ročník		
	výpočet	zdůvodnění	ciferný součet	výpočet	zdůvodnění	ciferný součet
Tradiční výuka	58	0	0	41	0	1
Hejného metoda	84	0	0	38	0	3
Osmileté gymnázium	80	0	0	68	0	0
Celkové vyhodnocení	69	0	0	44	0	1

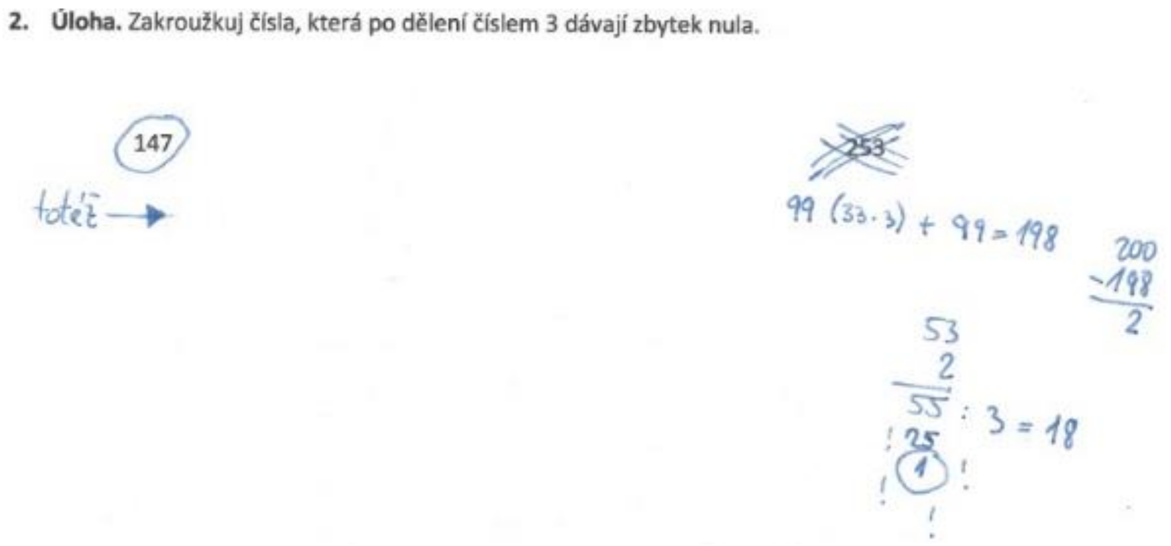
Tab. 14 Významné jevy v úloze 2 v procentech

Prokázat, že žáci po výuce dělitelnosti používají k ověření dělitelnosti číslem tři ciferný součet, se mi nepodařilo v takové míře, jak jsem očekávala. Z žáků, kteří jsou učeni tradičně, prokazatelně využilo ciferného součtu 1 % žáků, z žáků vyučovaných Hejného metodou 3 % žáků a z žáků osmiletého gymnázia žádný. V souhrnu všech žáků prokazatelně k ověření dělitelnosti třemi využilo ciferného součtu pouze 1 % všech žáků. Výsledky mohou být ovlivněny tím, že mnoho žáků navzdory pokynům v testu neuvádělo svůj postup řešení a je možné, že někteří žáci, kteří dospěli k správnému výsledku aplikací ciferného součtu, svůj postup v řešení testu neuvedli. Při vyhodnocování testu se mi podařilo zjistit, že úlohu 2 řešilo správně 77 % všech žáků 7. tříd. Z tohoto počtu prokazatelně 48 % žáků použilo k zjištění správného výsledku písemné dělení, 2 % ciferný součet a 5 % jiný postup. Písemné zdůvodnění svého postupu řešení neuvedl žádný z žáků. Z toho plyne, že u 45 % žáků, kteří úlohu řešili správně, není znám postup jejich řešení. Někteří žáci mohli dělit pamětně, jiní mohli k řešení použít ciferný součet, pomocí něhož se úloha řeší pamětně velmi pohodlně.

Z celkového počtu žáků, kteří se zúčastnili výzkumu, byli v řešení úlohy 2 žáci 7. ročníku o jeden procentní bod úspěšnější (a tedy nevýznamně). Tento výsledek není příliš příznivý a ukazuje, že žáci po výuce dělitelnosti nejsou schopni použít znalosti kritéria dělitelnosti třemi ani ve známém kontextu matematické úlohy. Patrně tuto znalost záhy zapomněli anebo nejsou schopni ji v pravou chvíli aplikovat, což obojí potvrzuje značnou míru formalismu v jejich znalostech. V rámci skupiny učené tradičně žáci 7. tříd mají nepatrně vyšší úspěšnost než žáci 6. tříd. Totéž platí i pro žáky osmiletého gymnázia. Ve skupině žáků učených Hejného metodu žáci 6. tříd zaznamenali v řešení této úlohy vyšší úspěšnost než žáci 7. tříd. Spíše než na formálnost jejich poznatků bych v tomto případě spíše usuzovala na to, že zde sehrál významnou roli rozdíl v úrovni matematických znalostí, nadání a píle v matematice mezi těmito dvěma skupinami. Této domněnce též nasvědčuje skutečnost, že žáci 6. tříd, kteří jsou vyučováni Hejného metodou, mají srovnatelnou úspěšnost v řešení této úlohy s žáky primy osmiletého gymnázia.

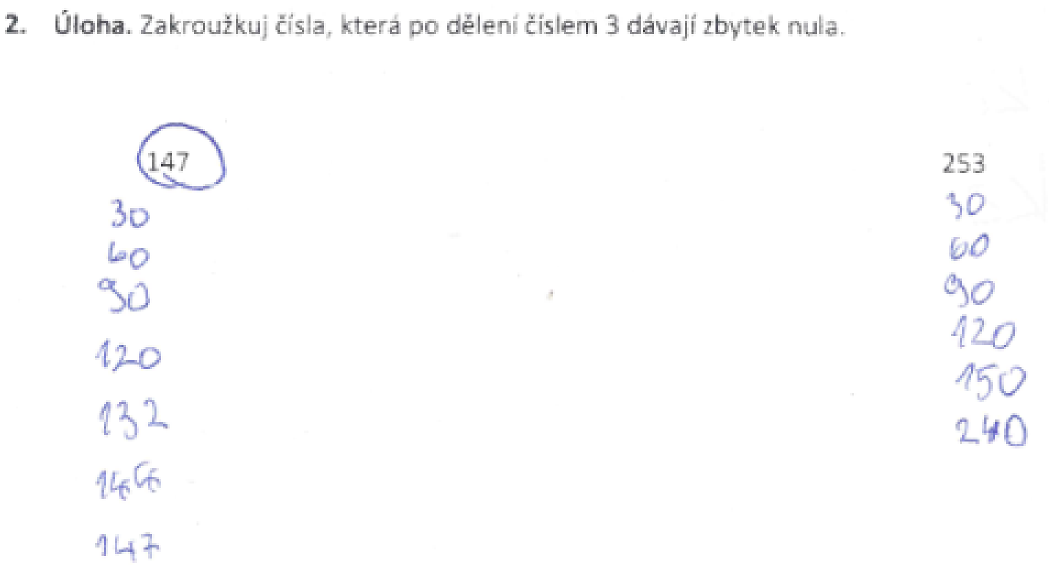
Ukázky žákovských řešení

Velké procento žáků 6. i 7. ročníků použilo k zjištění správného řešení písemné dělení, konkrétně 69 % šesťáků a 44 % sedmáků. Použití ciferného součtu bylo vzácné, i když je možné, že někteří sedmáci ho zřejmě použili, aniž by uvedli svůj postup. Na obr. 25 a 26 jsou zachyceny velmi překvapivé strategie řešení, které byly použity žáky.



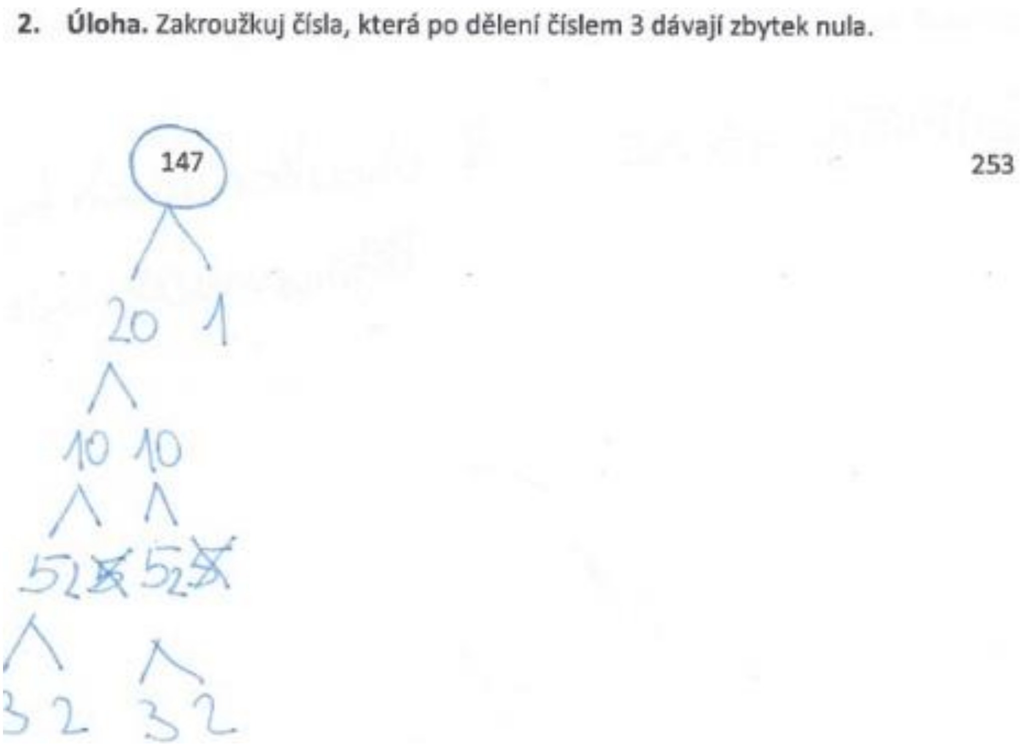
Obr. 25 Prima, osmileté gymnázium

Jeden žák z primy osmiletého gymnázia došel ke správnému výsledku pozoruhodným způsobem. Využil toho, že každá stovka dá při dělení třemi zbytek jedna, viz obr. 25. Toho se obvykle využívá při odvozování znaku dělitelnosti třemi.



Obr. 26 7. ročník, Hejného metoda

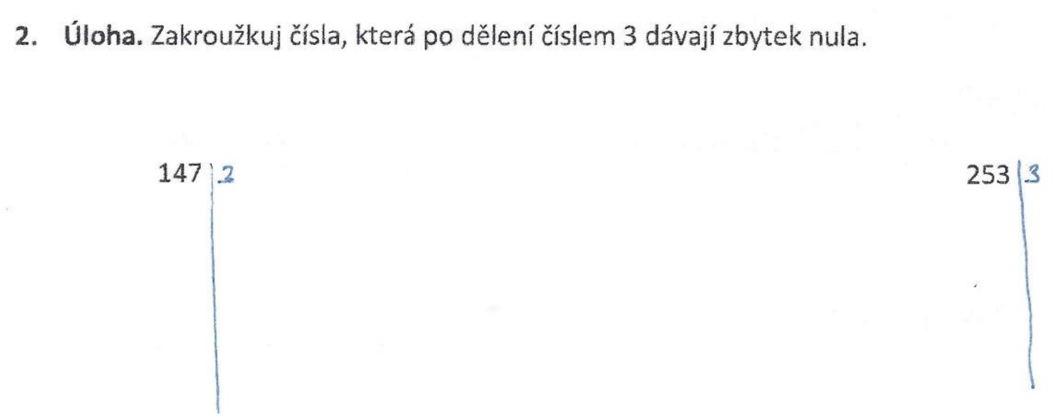
Na obr. 26 je vidět řešení opakovaným přičítáním násobků tří, žák prokázal porozumění tvrzení, že součet dvou čísel dělitelných třemi je opět dělitelný třemi.



Obr. 27 7. ročník, tradiční výuka

Dalším překvapivou strategií řešení, která vedla ke správnému výsledku, bylo využití násobení místo dělení. Žák náhodně násobil třemi různá čísla a zjišťoval, zda se výsledek rovná danému číslu. Následně násobená čísla zpřesňoval. Pro ověření dělitelnosti 147 třemi například použil čísla 40, 48 a 49. Žák prokázal schopnost dobrého odhadu při určování, kolikanásobkem tří jsou čísla v zadání úlohy 2.

Typy chyb, kterých se žáci dopustili při hledání řešení úlohy 2, byly například početní chyby, nekorektní symbolický zápis, chyby v algoritmu písemného dělení a zvolení chybné strategie řešení. Poslední zmíněný typ chyb je nejzávažnější a vypovídá o velké míře formálnosti poznatků. Tento druh chyb je zachycen na obr. 27 a 28. Obr. 27 uvádí řešení, které je správné, i když k němu vedl špatný postup řešení. Patrně se žák pokoušel provést prvočíselný rozklad, postup však provedl chybně. Domnívám se, že správné řešení nebylo odvozeno tímto způsobem, ale že žák jen tipoval. Zřejmě se jedná o fragment formálního poznatku.



Obr. 28 7. ročník, tradiční výuka

Další příklad tohoto typu poznatku je na obr. 28, kde je patrný náznak schématu „sloupeček“ používaného pro prvočíselný rozklad. Žák ho chtěl využít v řešení úlohy 2, tedy při ověřování dělitelnosti třemi. Své řešení ale nedokončil. Není jasné, jestli proto, že nevěděl, jak prvočíselný rozklad provést, nebo si uvědomil, že tento postup k cíli sice směřuje, ale velkou oklikou.

Úloha 3

Úloha 3	6.ročník		7.ročník		Δ SÚ	Δ PÚ
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	(procentní body)	(procentní body)
Tradiční výuka	0	17	18	48	18	31
Hejného metoda	11	59	23	57	12	-2
Osmileté gymnázium	23	68	84	93	61	25
Celkové vyhodnocení	7	38	26	55	19	17

Tab. 15 Úspěšnost v úloze 3

Úloha 3	6. ročník			7. ročník		
	výpočet	zdůvodnění	ciferný součet	výpočet	zdůvodnění	ciferný součet
Tradiční výuka	52	2	0	41	3	2
Hejného metoda	84	16	0	41	0	3
Osmileté gymnázium	67	17	0	36	0	0
Celkové vyhodnocení	64	8	0	41	2	2

Tab. 16 Významné jevy v úloze 3 v procentech

Tato úloha, i když ji považuji za podnětnou a vhodnou k procvičování kritérií dělitelnosti, se poměrně často vyskytuje v tradičních učebnicích v tématu dělitelnost, zvláště pak v pracovních sešitech. Podle předpokladu bylo pro žáky velkým problémem najít všechna správná řešení u podúloh a) a c) a také odhalit, že podúloha b) nemá žádné řešení, činilo mnohým žákům obtíže. Úlohu jsem vyhodnotila pomocí striktní úspěšnosti a procentuální úspěšnosti. Žáci při hledání správného řešení používali převážně písemné dělení. Tento postup použilo 64 % žáků 6. ročníku a 41 % žáků 7. ročníku. Svůj postup žáci zdůvodňovali spíš výjimečně (8 % šesťáků a 4 % sedmáků). Využití ciferného součtu k řešení podúlohy c) uvedla pouze 2 % žáků 7. ročníku. Nelze zjistit, kolik procent žáků ciferný součet skutečně použilo k řešení úlohy, protože ten lze provést i z hlavy, a tak se o jeho použití nemusíme nic dozvědět, ale 41 % žáků řešilo úlohu dělením, takže ciferný součet určitě nebyl použit v takové míře, v jaké by se vzhledem k jeho jednoduchosti po výuce dělitelnosti dalo očekávat.

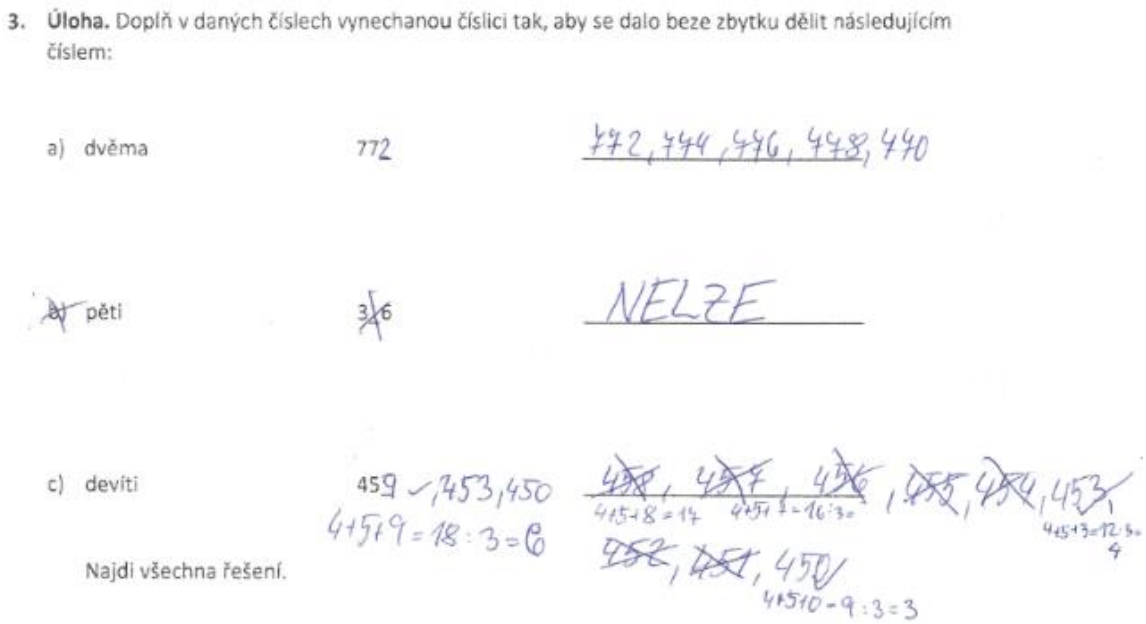
Nejlepšího výsledku dosáhla v testu skupina žáků osmiletého gymnázia, kde je vidět, že rozdíly v obou úspěšnostech jsou vyšší ve prospěch žáků sekundy, rozdíl mezi striktní úspěšností žáků primy a sekundy je dokonce výrazně vyšší, což vypovídá o malé míře formálních znalostí u žáků této skupiny. Skutečnost, že rozdíl striktní úspěšnosti je výrazně vyšší než rozdíl procentuální úspěšnosti, vypovídá i o nesystematičnosti žáků primy při řešení této úlohy (neboť byli úspěšnější v nalezení některých řešení než všech).

Poslední dva sloupce v tab. 15, kde jsou zachyceny rozdíly mezi úspěšnostmi sedmáků a šesťáků, ukazují neočekávané výsledky: zatímco pro žáky učené Hejného metodou a žáky osmiletého gymnázia jsou rozdíly ve striktní úspěšnosti ve prospěch sedmáků větší než rozdíly v procentuální úspěšnosti, u žáků učených tradičně je tomu naopak. Ve skupině žáků, kteří jsou vyučováni Hejného metodou, není významný rozdíl mezi úspěšností žáků 6. a 7. ročníků. V procentuální úspěšnosti jsou dokonce žáci 6. ročníků úspěšnější než žáci 7. ročníků. Opět to přičítám tomu, že v 6. ročnících se sešli žáci, kteří dosahují v matematice lepších výsledků než žáci 7. ročníků. V řešení této úlohy jsou obě sledované úspěšnosti skupin sedmáků ze ZŠ učených tradičně nižší než úspěšnosti primánů osmiletého gymnázia. Při intepretaci výsledků žáků ZŠ učených tradiční metodou je nutné vzít v potaz, že žáci 6. ročníku měli celkově striktní úspěšnost nula, tedy že výpovědní hodnota testu z hlediska striktní úspěšnosti je snížena. Rozdíl ve striktní úspěšnosti mezi sedmáky a šesťáky učenými tradičně je nejméně 18 procentních bodů, ale jak napovídá rozdíl v procentuální úspěšnosti, pravděpodobně by byl ještě větší při jinak nastavené obtížnosti testu. Celkově jsou sedmáci o 18 procentních bodů lepší než šesťáci jak v striktní, tak v procentuální úspěšnosti. Výsledky této úlohy nejsou ani tak nepříznivé z hlediska formálnosti a neformálnosti poznatků žáků, ale spíš v celkově malé úspěšnosti žáků v poměrně lehké úloze. Ukázalo se, že úlohy s nestandardní množinou řešení způsobují žákům při řešení velké obtíže.

Ukázky žákovských řešení

Jak už bylo řečeno výše, úlohu 3 řešila většina žáků písemným dělením, jak je vidět z tab. 16. Podúloha a) byla nejsnazší, žákům zde působilo obtíže zvláště nalezení úplného řešení. Podúloha b) byla pro žáky obtížná, žáci příliš nepočítali s možností, že úloha nemá řešení. V jednom konkrétním chybném případě řešení žák doplnil na volné místo jedničku. Tento žák byl tak silně přesvědčen o správnosti svého řešení, že svůj omyl neodhalil ani pomocí zkoušky, kterou provedl a v níž se rovněž dopustil chyby. Častým řešením bylo doplnění číslic 0 a 5 na chybějící místo, v mnoha případech žáci tuto podúlohu neřešili vůbec. Mou domněnku, že zvlášť šesťáci s neexistencí řešení příliš nepočítali, podporuje komentář jednoho šesťáka, který napsal: „nejde to, je to chyták“. Občas se mezi správnými řešeními objevilo i zdůvodnění, že čísla dělitelná pěti musí končit nulou nebo pětkou. Toto zdůvodnění byl schopen odvodit i jeden žák 6. ročníku učený tradičním způsobem výuky.

Prokazatelné využití kritéria dělitelnosti devíti pro řešení podúlohy c) bylo velmi vzácné, vyskytlo se v pouhých 2 % testů. Navíc se i v tomto způsobu řešení vyskytovaly chyby, jak ukazuje obr. 29. Jeden žák například při použití ciferného součtu ověřoval dělitelnost třemi a ne devíti, což svědčí buďto o nepozornosti nebo o částečné znalosti kritéria dělitelnosti devíti. Při řešení podúlohy c) měli žáci opět problém s úplností, protože podúloha měla dvě řešení. Někteří žáci doplňovali na vynechané místo více cifer, což jsem nepovažovala za správné řešení, ani když výsledné číslo bylo dělitelné devíti. Příklad chybné strategie hledání řešení uvádí obr. 30. Žák vytvořil z nabízených cifer číslo, které vydělil číslem, kterým mělo být hledané číslo dělitelné, a na volné místo v původním čísle doplnil zbytek, který obdržel při dělení. Tato strategie vedla ke správnému a neúplnému řešení pouze v podúloze c).



3. **Úloha.** Doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem:

a) dvěma 772 472, 474, 476, 478, 470

~~a)~~ pěti 3~~.~~6 NELZE

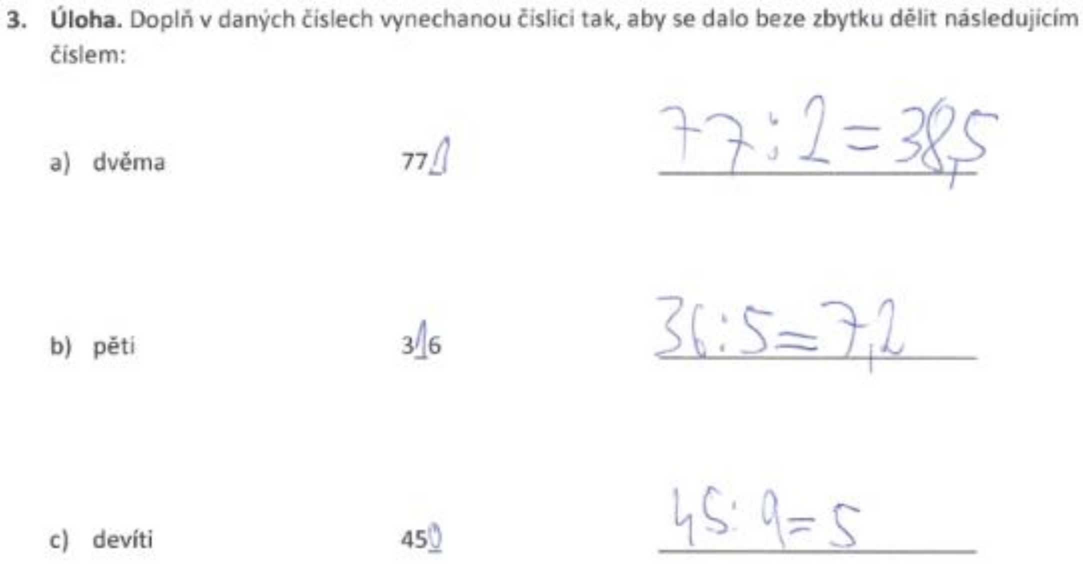
c) devíti 459 ✓, 453, 450 ~~458~~, ~~457~~, ~~456~~, ~~455~~, ~~454~~, 453, ~~452~~, ~~451~~, 450

4+5+9 = 18 : 3 = 6

4+5+8 = 17 4+5+7 = 16 : 3 = 4+5+3 = 12 : 3 = 4 4+5+0 = 9 : 3 = 3

Najdi všechna řešení.

Obr. 29 7. ročník, Hejného metoda



3. **Úloha.** Doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem:

a) dvěma 77 77 : 2 = 38,5

b) pěti 3 6 36 : 5 = 7,2

c) devíti 450 45 : 9 = 5

Obr. 30 6. ročník, tradiční výuka

Úloha 4

Úloha 4	6.ročník		7.ročník		Δ SÚ	Δ PÚ
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	(procentní body)	(procentní body)
Tradiční výuka	5	25	16	34	11	9
Hejného metoda	33	55	31	45	-2	-10
Osmileté gymnázium	43	72	64	82	21	10
Celkové vyhodnocení	20	41	24	41	4	0

Tab. 17 Úspěšnost v úloze 4

Úloha 4	6. ročník			7. ročník		
	výpočet	model	zdůvodnění	výpočet	model	zdůvodnění
Tradiční výuka	28	11	0	44	15	0
Hejného metoda	64	14	0	38	13	0
Osmileté gymnázium	60	33	7	76	24	8
Celkové vyhodnocení	44	15	1	47	15	1

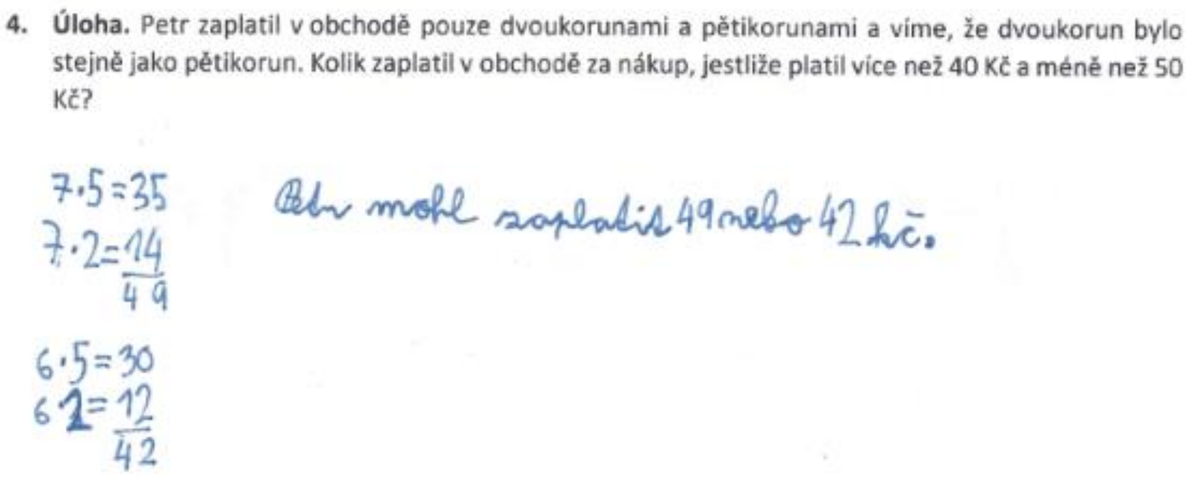
Tab. 18 Významné jevy v úloze 4 v procentech

Tuto úlohu jsem zařadila do testu, protože při jejím řešení žáci mohou využít dělitelnost sedmi (příp. dělitelnost dvěma a pěti). S úlohami, v jejichž zadání se vyskytují mince, se žáci, kteří jsou vyučováni Hejného metodou od 1. třídy, setkají již na prvním stupni ZŠ. I žáci, kteří s Hejného metodou začínají od 2. stupně, se s tímto typem úloh setkají ještě před výukou dělitelnosti. Tato skutečnost poněkud zvýhodňuje žáky, kteří jsou vyučováni Hejného metodou. Žáci řešili úlohu nejčastěji výpočtem. Dále se v řešeních úloh objevovaly různé modely, v nichž žáci pracovali s násobky dvou a pěti nebo sedmi. Velkým problémem bylo nezohlednění informace, že dvoukorun i pětikorun byl stejný počet. Žákům dělalo problém nalézt obě řešení, což vidíme z toho, že procentuální úspěšnost je u žáků 6. i 7. ročníku téměř dvakrát vyšší než striktní úspěšnost. Tato skutečnost potvrzuje zásadní roli textu úlohy, protože není-li žákům explicitně řečeno, aby hledali všechna řešení, předpokládají automaticky, že je jenom jedno, a po nalezení prvního v hledání řešení nepokračují.

V celkové skupině žáků 6. a 7. ročníků je zanedbatelný rozdíl v úspěšnosti řešení této úlohy. Celkově jsou sedmáci pouze o 4 procentní body lepší než šesťáci z pohledu striktní úspěšnosti. V procentuální úspěšnosti mezi šesťáky a sedmáky není rozdíl. K tomuto výsledku velkou měrou přispívá výsledek žáků, kteří jsou učeni Hejného metodou. V jejich úspěšnosti je totiž vidět, že žáci 6. ročníku si vedli v řešení této úlohy lépe než žáci 7. ročníku. Výsledky jsou zřejmě opět zkresleny nevyvážeností těchto skupin, protože jak už bylo řečeno, v 6. třídách jsou prospěchově lepší, na matematiku nadanější žáci. Výsledky skupiny žáků, která je učena tradiční metodou, jsou celkově slabé, rozdíl ve prospěch 7. ročníků je nepřesvědčivý. Naproti tomu žáci, kteří jsou učeni Hejného metodou, jsou podle očekávání při řešení této úlohy poměrně úspěšní, ale jak už bylo řečeno, rozdíl mezi šesťáky a sedmáky je zanedbatelný. U žáků osmiletého gymnázia je vidět rozdíl v úspěšnosti ve prospěch žáků sekundy, který činí 20 procentních bodů v striktní úspěšnosti a 10 procentních bodů v procentuální úspěšnosti. Podle těchto hodnot je zřejmé, že žáci primy byli při řešení této úlohy méně systematičtí než žáci sekundy.

Ukázky žákovských řešení

K řešení této úlohy žáci využívali model nebo výpočet, což dokumentuje tab. 18. Zdůvodnění se v řešeních téměř nevyskytovalo. V modelu se často vyskytovaly dvojky a pětky, které představovaly počet dvoukorun a pětikorun. Ve výrazně menším počtu modelů byli žáci schopni rovnou pracovat se sedmičkami. Někdy byly dvojky a pětky nahrazeny násobky dvou a pěti, které žáci následně sčítali a hledali správné řešení. Řešení, ve kterém by žák rovnou vypisoval násobky sedmi, se v testech nevyskytlo. Při řešení výpočtem žáci opět většinou sčítali dvojnásobky a pětinásobky různých čísel, ke kterým došli patrně odhadem. Řešit tuto úlohu výpočtem byli schopni jak šesťáci, tak sedmáci.


4. Úloha. Petr zaplatil v obchodě pouze dvoukorunami a pětikorunami a víme, že dvoukorun bylo stejně jako pětikorun. Kolik zaplatil v obchodě za nákup, jestliže platil více než 40 Kč a méně než 50 Kč?

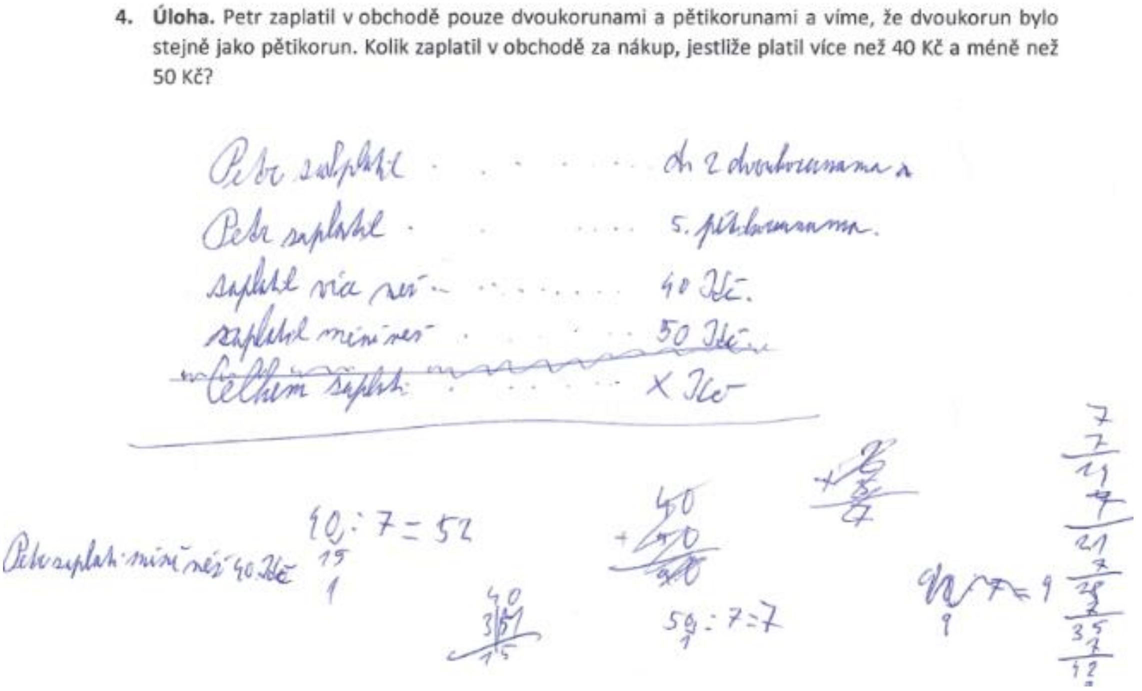
7·5=35
7·2=14
49

6·5=30
6·2=12
42

Aby mohl zaplatit 49 nebo 42 kč.

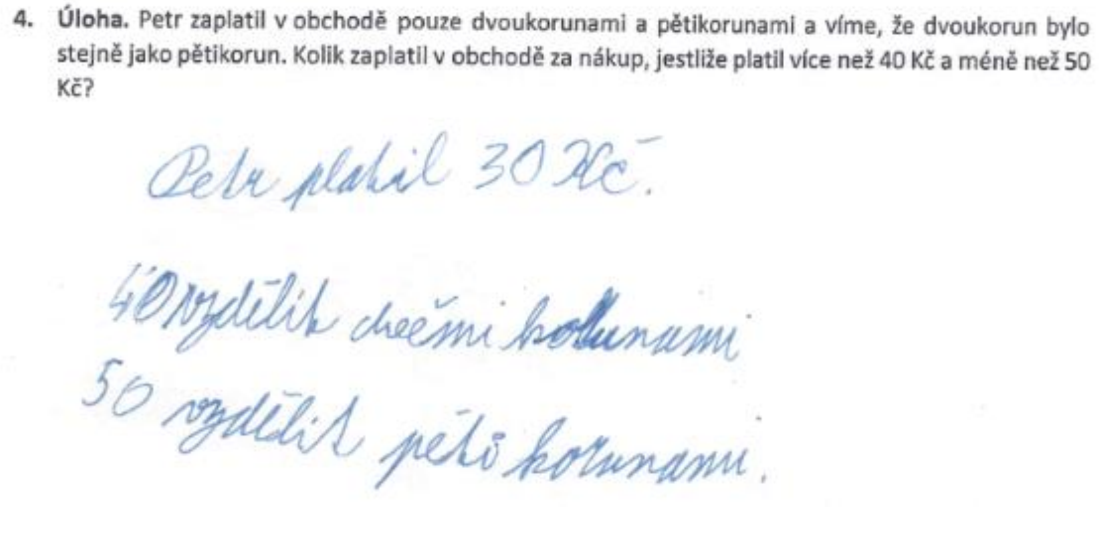
Obr. 31 6. ročník, Hejného metoda

Na obr. 31 je zachyceno úplné řešení výpočtem žáka 6. ročníku učeného Hejného metodu. Na obr. 32 je vidět neúspěšný pokus o řešení žáka 7. ročníku, který je učen tradičním způsobem. Žák s velkou pečlivostí provedl důkladný zápis všech údajů, který zjistil ze zadání úlohy. V řešení ale tápal, náhodně zkoušel čísla, která si zapsal, dělit sedmi, ale dělení nevycházelo beze zbytku. Pak čísla dokonce sčítal. Konečně došel k vypisování násobků sedmi, které zjišťuje opakovaným přičítáním. Tento pokus ale vzdává těsně před odhalením správného řešení.


4. Úloha. Petr zaplatil v obchodě pouze dvoukorunami a pětikorunami a víme, že dvoukorun bylo stejně jako pětikorun. Kolik zaplatil v obchodě za nákup, jestliže platil více než 40 Kč a méně než 50 Kč?

Obr. 32 7. ročník, tradiční výuka

Na obr. 33 je zachycen chybný postup řešení, žák patrně zadání úlohy neporozuměl, a tak zkusil, co ho napadlo. Jeho postup s hledáním správného řešení nesouvisí.


4. Úloha. Petr zaplatil v obchodě pouze dvoukorunami a pětikorunami a víme, že dvoukorun bylo stejně jako pětikorun. Kolik zaplatil v obchodě za nákup, jestliže platil více než 40 Kč a méně než 50 Kč?

Petr platil 30 Kč.

40 vydělit dvěmi korunami

50 vydělit pěti korunami.

Obr. 33 7. ročník, tradiční výuka

Úloha 5

Úloha 5	SÚ 6. ročníky (procenta)	SÚ 7. ročníky (procenta)	Δ SÚ (procentní body)
Tradiční výuka	16	43	27
Hejného metoda	41	69	28
Osmileté gymnázium	73	100	27
Celkové vyhodnocení	32	54	22

Tab. 19 Úspěšnost v úloze 5

Úloha 5	6. ročník			7. ročník		
	výpočet	model	zdůvodnění	výpočet	model	zdůvodnění
Tradiční výuka	21	10	0	25	14	8
Hejného metoda	44	9	9	26	26	10
Osmileté gymnázium	63	30	0	36	28	4
Celkové vyhodnocení	35	33	3	26	18	8

Tab. 20 Významné jevy v úloze 5 v procentech

Mým záměrem bylo ověřit, do jaké míry v řešení této úlohy využívají žáci po výuce svých znalostí znaků dělitelnosti dvěma a pěti a porozumění dělitelnosti se zbytkem. Z kvalitativní analýzy řešení respondentů vyplynulo, že více šesťáků než sedmáků použilo k zjištění správného řešení model anebo výpočet. Pro určení řešení použilo model 33 % šesťáků a výpočet 35 % šesťáků, zatímco model k řešení úlohy využilo 18 % sedmáků a výpočet 26 % sedmáků. Přesto byli sedmáci úspěšnější, je tedy možné, že model nebo výpočet byli schopni sestavit v hlavě. Zdůvodnit své výsledky bylo schopno 8 % sedmáků a 3 % šesťáků. Šesťáci tedy při hledání více experimentovali a snažili se více si danou situaci modelovat nebo řešit početně.

V této úloze měli sedmáci o 22 procentních bodů větší úspěšnost než šesťáci. V sledovaných podskupinách je rozdíl ve prospěch sedmáků ještě větší, a to okolo 27 procentních bodů. Zde se v praxi ukazuje efekt známý z popisné statistiky, tedy, že průměr celku může být nižší než průměr všech podskupin.

Míra formálnosti poznatků v jednotlivých podskupinách se podle vyhodnocení úspěšnosti této úlohy zdá být stejná. Je vhodné ještě upozornit, že rozdíly v úspěšnosti mezi šesťáky a sedmáky všech tří sledovaných skupin jsou odstupňované zhruba po 30 % v tomto pořadí sestupně: žáci osmiletého gymnázia, žáci vyučovaní Hejného metodou a žáci ZŠ vyučováni tradičně. Úspěšnost sedmáků učených tradičně je zhruba rovna úspěšnosti šesťáků učených

Hejného metodou a úspěšnost primánů osmiletého gymnázia je zhruba stejná jako úspěšnost sedmáků učených Hejného metodou.

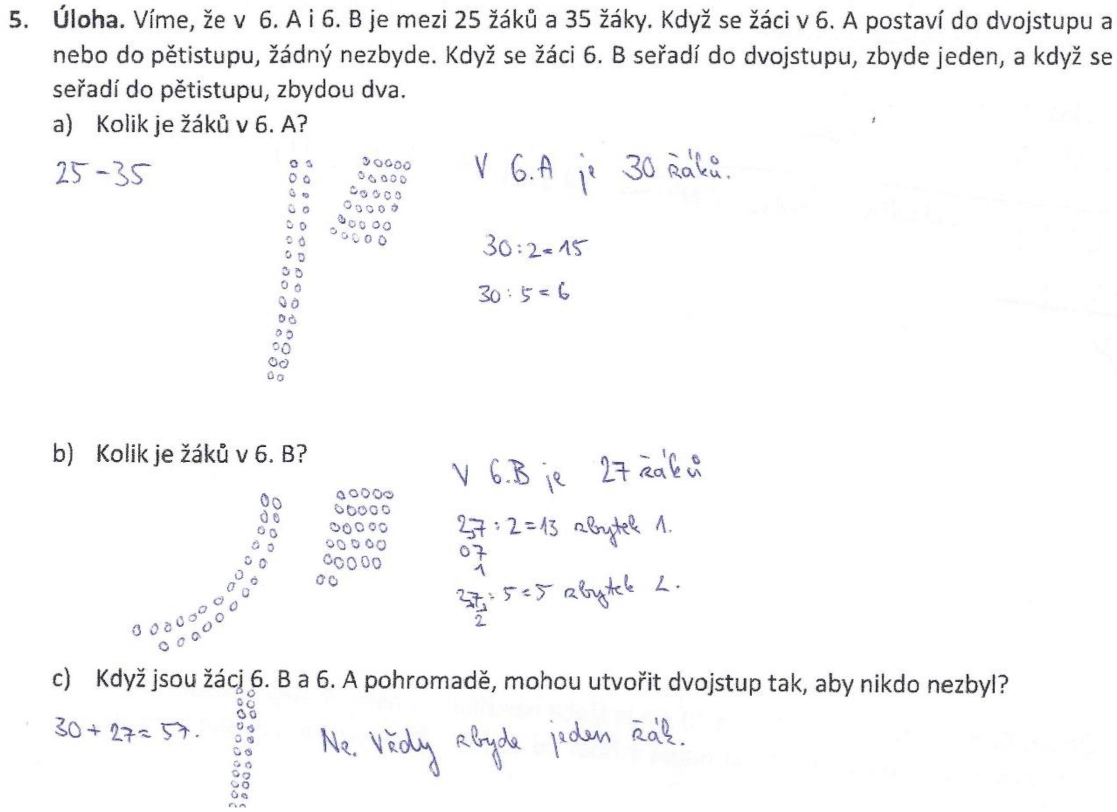
V této úloze jsem též zjišťovala i to, do jaké míry bylo řešení podúlohy c) nezávislé na řešení podúloh a) a b), protože jak už jsem uvedla v oddíle 3.5, podúlohu c) bylo možné správně řešit i bez řešení podúloh a) a b). Ve výsledcích jednotlivých podúloh jsem tedy zjistila, kolik respondentů vyřešilo správně podúlohy a) a b), ale nevyřešilo podúlohu c) a kolik žáků vyřešilo správně podúlohu c), ale nevyřešilo správně alespoň jednu z podúloh a) a b). Tab. 21 zachycuje tyto hodnoty v procentech pro žáky 6. a 7. ročníku. Ze zjištěných hodnot vyplývá, že u více než 80 % žáků 6. i 7. ročníku existuje závislost úspěšnosti řešení podúloh a) a b) na podúloze c). Jen 2 % sedmáků a 4 % šesťáků byla schopna řešit podúlohu c), aniž by uvedli správnou odpověď u zbývajících dvou podúloh.

Úloha 5 - závislost podúloh a) b) a c)	6. ročník	7. ročník
správně a) a b), chybně c)	15	10
chybně a) nebo b), správně c)	4	2
správně a) a b), správně c) chybně a) nebo b), chybně c)	81	88

Tab. 21 Závislost podúloh a), b) a c). Hodnoty úspěšností jsou v procentech.

Ukázky žákovských řešení

K řešení této úlohy žáci využívali výpočtů (dělení se zbytkem, násobení) nebo různých modelů. V řešeních žáků 7. ročníků a 6. ročníku učených Hejného metodou se v malé míře objevilo i zdůvodnění. Model k řešení této úlohy použilo 33 % žáků 6. ročníku a 18 % žáků sedmého ročníku. Příklad funkčního modelu vedoucího ke správnému řešení zachycuje obr. 34. Na obr. 35 je obdobný model v řešení podúlohy a). Je zde patrný posun v myšlení žáka, zatímco v řešení podúlohy a) využívá model, podúlohu b) už řeší početně. Dále velké množství řešitelů řešilo úlohu pomocí dělení se zbytkem. I zde je vidět, že žáci 6. ročníku byli schopni použít obdobný způsob řešení jako žáci 7. ročníku. V jednom případě žák využil k řešení poúlohy a) kritérium dělitelnosti pěti a to tak, že v daném intervalu hledal číslo končící nulou nebo pětkou.



5. Úloha. Víme, že v 6. A i 6. B je mezi 25 žáků a 35 žáky. Když se žáci v 6. A postaví do dvojstupu a nebo do pětistupu, žádný nezbyde. Když se žáci 6. B seřadí do dvojstupu, zbyde jeden, a když se seřadí do pětistupu, zbydou dva.

a) Kolik je žáků v 6. A?

25 – 35

V 6.A je 30 žáků.

30 : 2 = 15

30 : 5 = 6

b) Kolik je žáků v 6. B?

V 6.B je 27 žáků

27 : 2 = 13 zbytek 1.

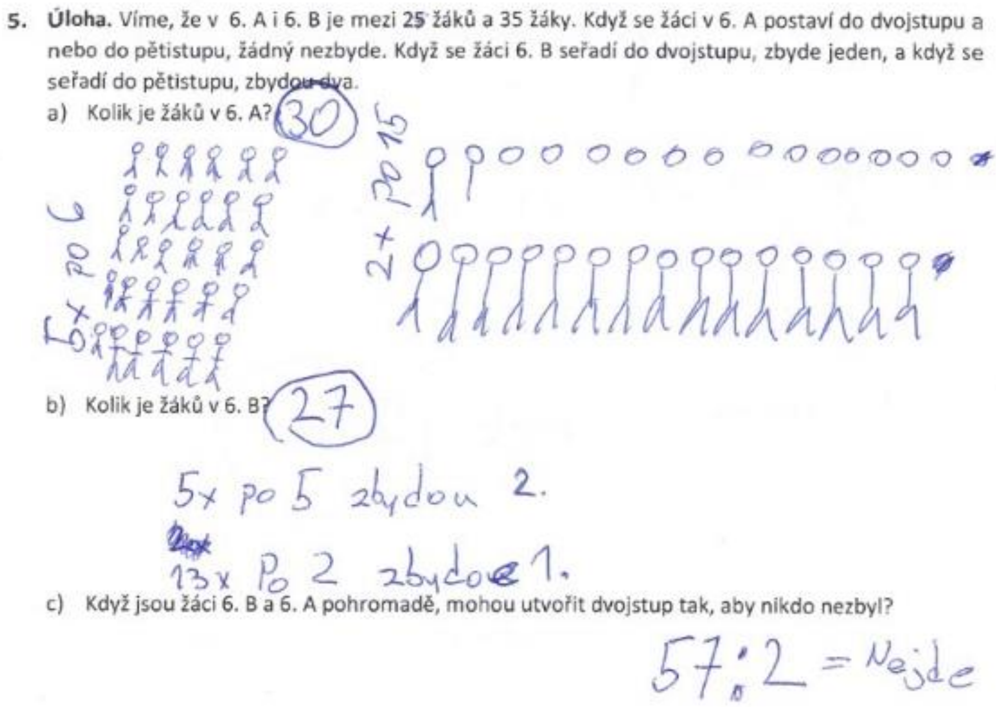
27 : 5 = 5 zbytek 2.

c) Když jsou žáci 6. B a 6. A pohromadě, mohou utvořit dvojstup tak, aby nikdo nezbyl?

30 + 27 = 57.

Ne. Vždy zbyde jeden žák.

Obr. 34 7. ročník, tradiční výuka



5. Úloha. Víme, že v 6. A i 6. B je mezi 25 žáků a 35 žáky. Když se žáci v 6. A postaví do dvojstupu a nebo do pětistupu, žádný nezbyde. Když se žáci 6. B seřadí do dvojstupu, zbyde jeden, a když se seřadí do pětistupu, zbydou dva.

a) Kolik je žáků v 6. A? 30

5x po 6

2x po 15

b) Kolik je žáků v 6. B? 27

5x po 5 zbydou 2.

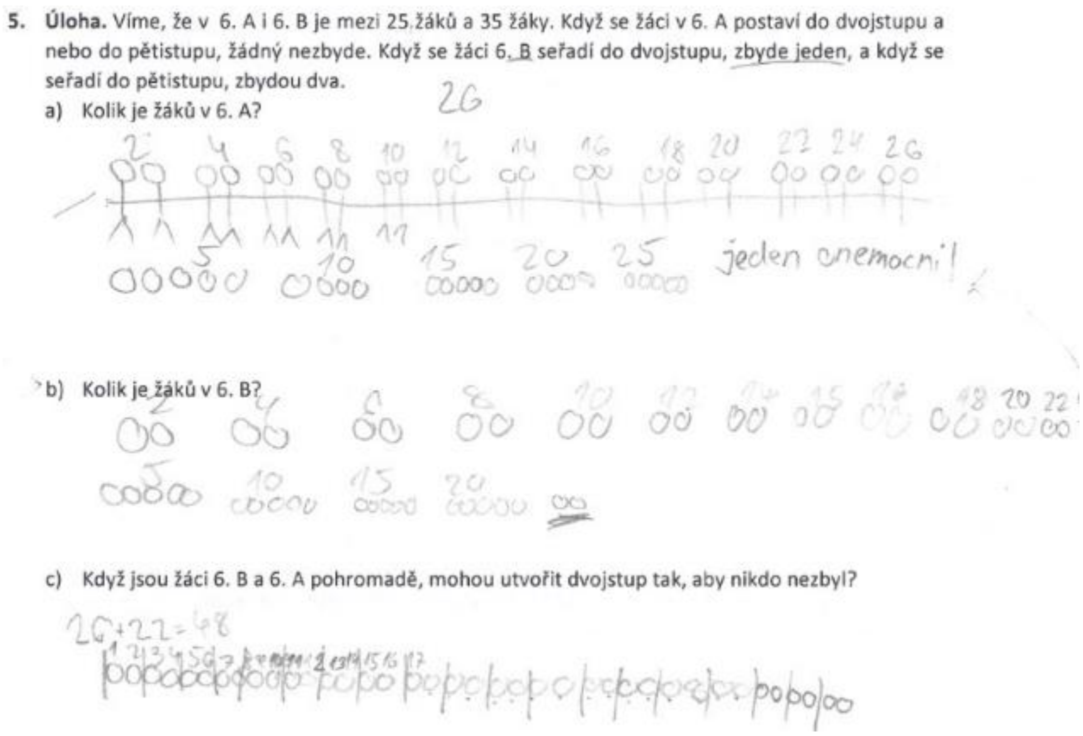
13x Po 2 zbydou 1.

c) Když jsou žáci 6. B a 6. A pohromadě, mohou utvořit dvojstup tak, aby nikdo nezbyl?

57 : 2 = Nejde

Obr. 35 7. ročník, Hejného metoda

Na obr. 36 je zachyceno chybné řešení. Podúlohu a) i b) řeší žák chybně navzdory tomu, že využívá stejný typ modelu, který např. na obr. 34 a 35 vede ke správnému řešení. V podúloze a) žák našel v daném intervalu číslo 26, které je dělitelné dvěma. Pak ale zjistil, že toto číslo není dělitelné pěti beze zbytku, proto uvádí vysvětlení „jeden žák onemocněl“. Podobným způsobem žák chybně vyřešil i podúlohu b). Chyba v poúloze c) je pak způsobena nesprávnými výsledky z předchozích podúloh.


5. Úloha. Víme, že v 6. A i 6. B je mezi 25 žáků a 35 žáky. Když se žáci v 6. A postaví do dvojstupu a nebo do pětistupu, žádný nezbyde. Když se žáci 6. B seřadí do dvojstupu, zbyde jeden, a když se seřadí do pětistupu, zbydou dva.

a) Kolik je žáků v 6. A?

26

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26

5 10 15 20 25 jeden onemocní!

b) Kolik je žáků v 6. B?

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22

5 10 15 20

c) Když jsou žáci 6. B a 6. A pohromadě, mohou utvořit dvojstup tak, aby nikdo nezbyl?

26+22=48

Obr. 36 6. ročník, Hejného metoda¨

Úloha 6

Úloha 6	6.ročník		7.ročník		Δ SÚ	Δ PÚ
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	(procentní body)	(procentní body)
Tradiční výuka	5	40	13	59	8	19
Hejného metoda	23	60	18	72	-5	12
Osmileté gymnázium	33	74	60	93	27	19
Celkové vyhodnocení	15	51	19	65	4	14

Tab. 22 Úspěšnost v úloze 6

Úloha 6	6. ročník				7. ročník			
	výpočet	model	zdůvodnění	"téčko"	výpočet	model	zdůvodnění	"téčko"
Tradiční výuka	26	4	4	0	15	4	10	0
Hejného metoda	46	6	13	0	26	4	5	3
Osmileté gymnázium	40	0	7	0	8	0	28	0
Celkové vyhodnocení	34	2	7	0	16	4	11	1

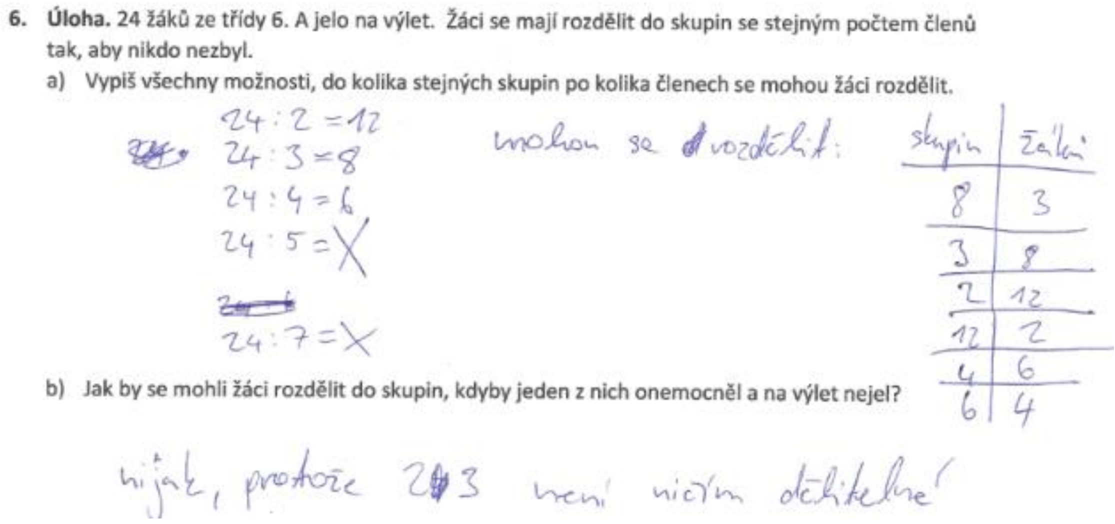
Tab. 23 Významné jevy v úloze 6 v procentech

Tato úloha má své místo v testu, protože ověřuje schopnost žáků určit všechny dělitele daného čísla. Náročnost řešení spatřuji mimo jiné v tom, že žáci při matematizaci slovní úlohy hledají všechny dělitele čísla 24, ale při návratu do reálného kontextu úlohy jsem očekávala, že vyloučí dělitele 1 a 24, protože ti neodpovídají požadavku „rozdělit žáky do skupin“. Obtížnost se pro žáky ještě stupňuje v podúloze b), jak potvrdily závěry z výsledků úlohy 3, pro žáky zvlášť obtížné úlohy, jejíž řešení neexistuje. Druhým faktem, který stupňuje obtížnost úlohy, jsou zkušenosti žáků z reálných situací, neboť skutečnost, že počet žáků je prvočíselný, přeci nezkazí žákům hru, při níž je třeba rozdělení do skupin. Mým záměrem bylo ověřit, do jaké míry jsou žáci po výuce dělitelnosti zběhlejší v hledání dělitelů daného čísla ve srovnání s žáky před výukou dělitelnosti a jaká je jejich schopnost rozpoznat prvočíslo. Také jsem chtěla posoudit, zda jsou žáci po výuce dělitelnosti schopni k hledání dělitelů čísla 24 použít schématu, které se v učebnicích často vyskytuje a je označováno názvem „téčko“.

V celkové skupině žáků 6. a 7. tříd jsou v této úloze nepatrně úspěšnější žáci 7. tříd. Rozdíl v procentních bodech v procentuální úspěšnosti je výraznější, zřejmě proto, že sedmáci byli úspěšnější v řešení podúlohy a), která má více řešení. Ve skupině žáků, kteří jsou učeni tradiční metodou, je rozdíl mezi šesťáky a sedmáky nepřesvědčivý a spíš ukazuje na formální poznání u žáků sedmých tříd učených tradiční metodou. Rozdíl v procentuální úspěšnosti je 19 procentních bodů ve prospěch sedmáků. U žáků, kteří jsou učeni Hejného metodou, je rozdíl v celkové úspěšnosti 5 procentních bodů ve prospěch šesťáků a v procentuální úspěšnosti je rozdíl 12 procentních bodů ve prospěch sedmáků. Tento výsledek ukazuje na formální znalosti sedmáků učených Hejného metodou, ale jak už bylo řečeno, výsledky testu mohou být ovlivněny nevyrovnaností relativní úrovně 6. a 7. ročníků učených Hejného metodou. V každém případě 6. třídy učené Hejného metodou si i v řešení úlohy 6 vedly lépe z hlediska striktní úspěšnosti než 7. třídy učené tradičním způsobem. Řešení, které připomínalo „téčko“, se vyskytlo pouze ve dvou případech u sedmáka učeného Hejného metodou a žáka sekundy osmiletého gymnázia.

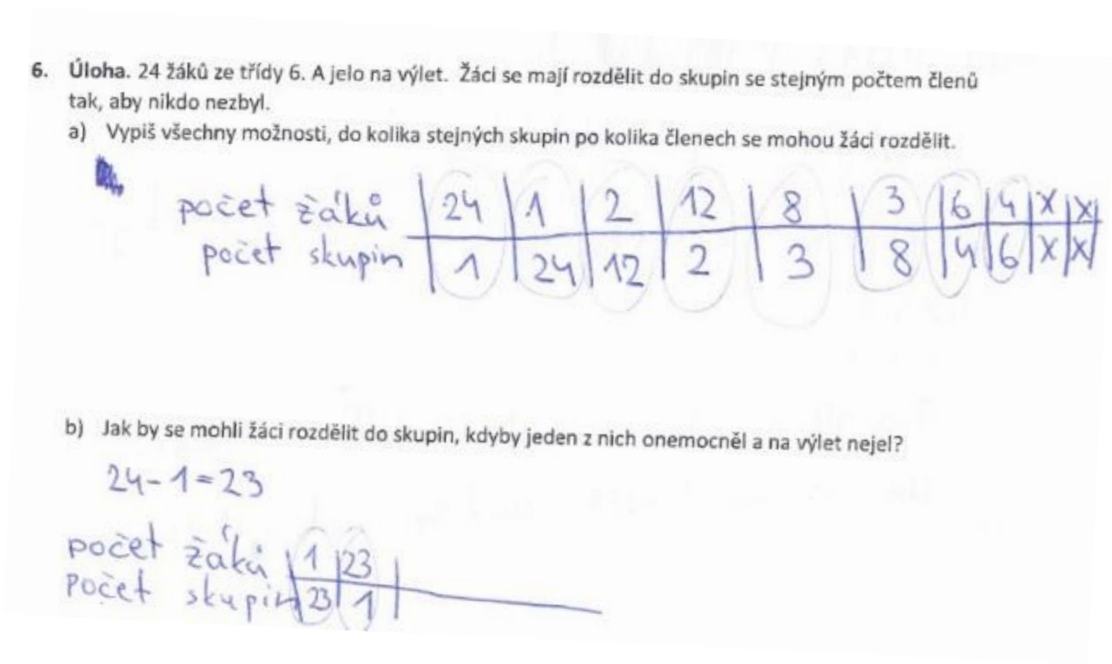
Ukázky žákovských řešení úlohy

Tuto úlohu žáci řešili většinou pomocí dělení, případně přímo vypisováním dělitelů čísla 24 a 23. Řešení pomocí modelů nebylo v případě této úlohy příliš efektivní a ve většině případů nevedlo ke správnému a úplnému řešení. Pouze ve třech řešeních se vyskytlo schéma připomínající „téčko“ pro vypisování dělitelů čísla 24 resp. 23, viz obr. 37.



Obr. 37 Sekunda, osmileté gymnázium

Všechna tři „téčka“ jsou nepatrně modifikovaná, aby lépe vyhovovala potřebám řešení úlohy. Jeden sloupec je označen „skupiny“ a druhý „děti“, takže do schématu se rovnou zapisují správné odpovědi. Domnívám se ale, že „téčko“ na obr. 37 bylo spíš použito jako tabulka k zaznamenání správných odpovědí, které žák získal dělením čísla 24 různými čísly, která jsou uvedena v pravém sloupci „téčka“. Tomu nasvědčuje i skutečnost, že tyto tabulky použili i žáci vyučovaní Hejného metodou a jeden žák 6. ročníku, kteří se se schématem „téčko“ pravděpodobně nesetkali. Na obr. 38 je horizontální obdoba „téčka“, které je použito pro obě podúlohy a je správné a úplné. Na obr. 39 je pak „téčko“, které je vhodně aplikováno k řešení podstatně složitější úlohy, než byla testová úloha 6. Toto řešení pochází z pilotního testu, kde se zmíněné „téčko“ též vyskytlo pouze jednou. V tomto případě byl poznatek dostatečně ukotven v kognitivní struktuře žáka. Jediným nedostatkem je neúplnost řešení. Nicméně si myslím, že v tomto případě můžeme mluvit o neformálním poznatku.


6. **Úloha.** 24 žáků ze třídy 6. A jelo na výlet. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů tak, aby nikdo nezbyl.

a) Vypiš všechny možnosti, do kolika stejných skupin po kolika členech se mohou žáci rozdělit.

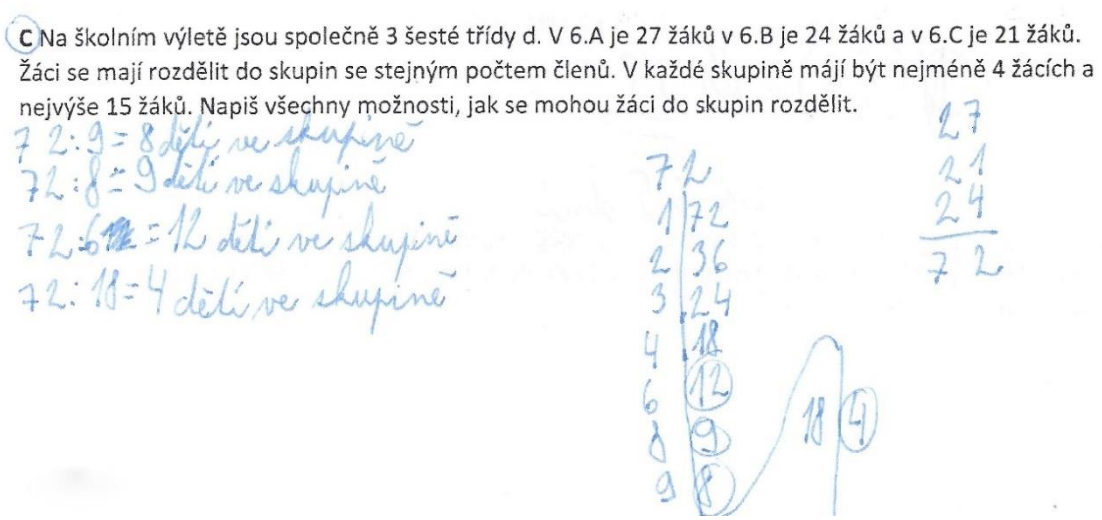
počet žáků	24	1	2	12	8	3	6	4	x	x
počet skupin	1	24	12	2	3	8	4	6	x	x

b) Jak by se mohli žáci rozdělit do skupin, kdyby jeden z nich onemocněl a na výlet nejel?

24 − 1 = 23

počet žáků	1	23
Počet skupin	23	1

Obr. 38 7. ročník, tradiční výuka


C Na školním výletě jsou společně 3 šesté třídy d. V 6.A je 27 žáků v 6.B je 24 žáků a v 6.C je 21 žáků. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů. V každé skupině mají být nejméně 4 žácích a nejvýše 15 žáků. Napiš všechny možnosti, jak se mohou žáci do skupin rozdělit.

72 : 9 = 8 dětí ve skupině
72 : 8 = 9 dětí ve skupině
72 : 6 = 12 dětí ve skupině
72 : 18 = 4 dětí ve skupině

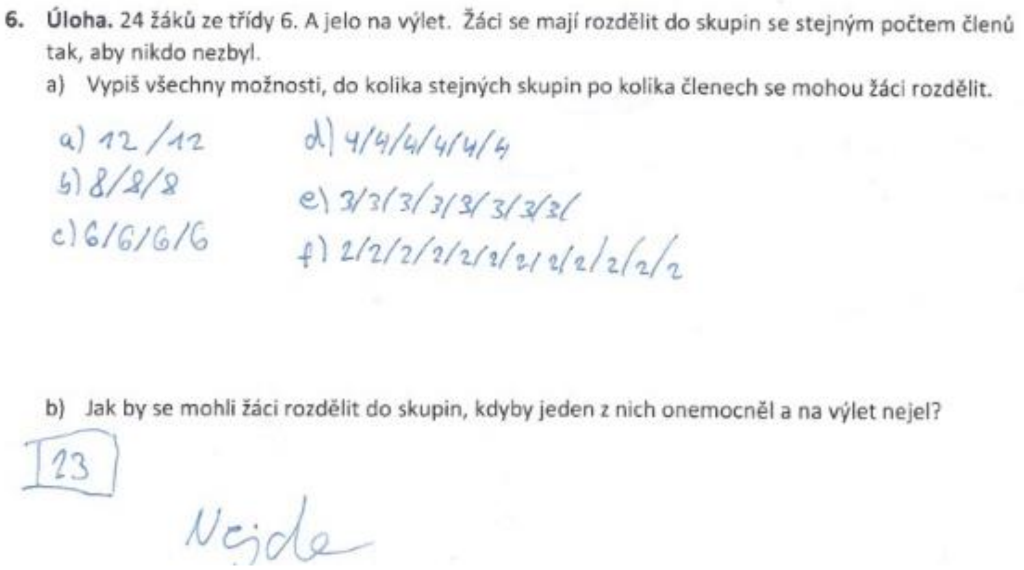
72
1 | 72
2 | 36
3 | 24
4 | 18
6 | 12
8 | 9
9 | 8
18 | 4

27
21
24
72

Obr. 39 7. ročník, tradiční výuka, pilotní test

Dalším způsobem řešení bylo vypisování počtu skupin, které lze z 24 dětí utvořit. Respondenti psali buď po kolika členech lze tvořit skupiny a kolik takových skupin lze vytvořit, nebo vypisovali pouze jeden z těchto údajů, což odpovídalo vypisování dělitelů daných čísel. Někteří žáci ještě své výsledky ověřovali písemným dělením. Na obr. 40 je příklad úspěšného řešení pomocí modelu, kdy žák používá k reprezentaci skupiny počet jejich členů. Na obr. 41 je rovněž řešení podúlohy a) pomocí modelu, ale žák není při řešení konzistentní. Nejprve vypisuje skupiny pomocí počtu jejich členů, ale pro číslo 6 najednou používá násobky tohoto čísla. Toto řešení rovněž není úplné.

Zatímco v podúloze a) způsobovala největší obtíže úplnost řešení, v podúloze b) bylo největším problémem přijít na to, že úloha řešení nemá. Někteří žáci se pod vlivem reálného kontextu snažili úlohu řešit například tvrzením, že „jeden žák půjde s paní učitelkou“ nebo „že žáky rozdělíme jakkoliv, protože někdo může zbýt“. Zde se ukázalo, že zadání této úlohy bylo pro žáky skutečně velmi známé ze školní reality, a proto se mnozí z nich nedokázali soustředit na matematizaci úlohy, ale byli silně ovlivněni hledáním řešení, které by odpovídalo skutečné situaci ve třídě. Dalším rovněž častým problémem bylo, že se někteří žáci nedrželi zadání a tvořili skupinky s nestejným počtem členů.


6. Úloha. 24 žáků ze třídy 6. A jelo na výlet. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů tak, aby nikdo nezbyl.

a) Vypiš všechny možnosti, do kolika stejných skupin po kolika členech se mohou žáci rozdělit.

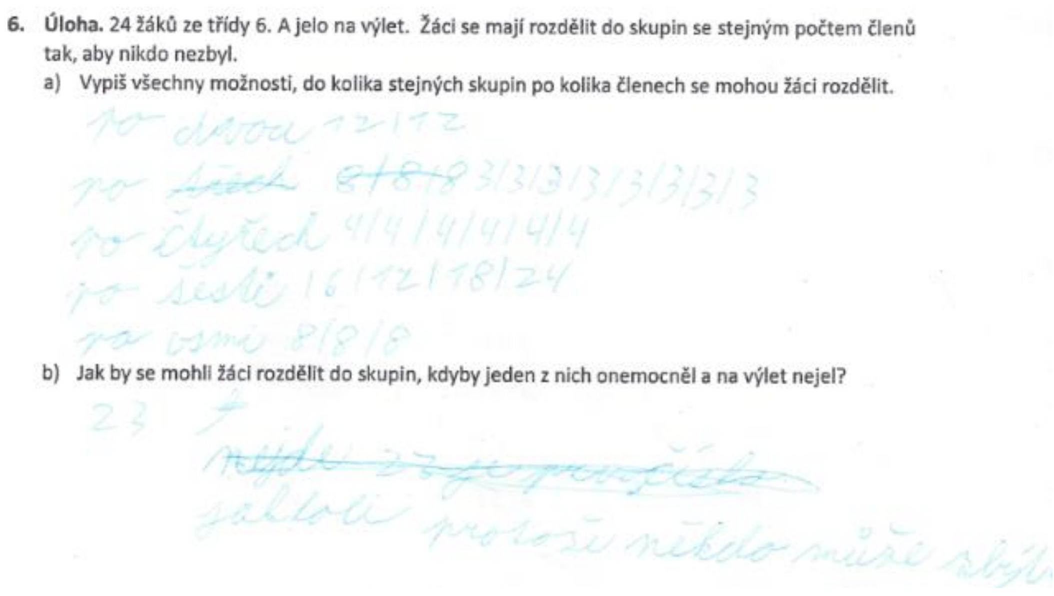
a) 12/12
b) 8/8/8
c) 6/6/6/6
d) 4/4/4/4/4/4
e) 3/3/3/3/3/3/3/3/
f) 2/2/2/2/2/2/2/2/2/2/2/2

b) Jak by se mohli žáci rozdělit do skupin, kdyby jeden z nich onemocněl a na výlet nejel?

$\boxed{23}$

Nejde

Obr. 40 6. ročník, Hejného metoda


6. Úloha. 24 žáků ze třídy 6. A jelo na výlet. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů tak, aby nikdo nezbyl.

a) Vypiš všechny možnosti, do kolika stejných skupin po kolika členech se mohou žáci rozdělit.

po dvou 12/12
po ~~třech~~ ~~8/8/8~~ 3/3/3/3/3/3/3/3
po čtyřech 4/4/4/4/4/4
po šesti 6/12/18/24
po osmi 8/8/8

b) Jak by se mohli žáci rozdělit do skupin, kdyby jeden z nich onemocněl a na výlet nejel?

23

~~nejde 23 je prvočíslo~~
jakkoli protože někdo může zbýt

Obr. 41 7. ročník, tradiční výuka

Úloha 7

Úloha 7	SÚ 6. ročníky (procenta)	SÚ 7. ročníky (procenta)	Δ SÚ (procentní body)
Tradiční výuka	21	54	33
Hejného metoda	52	59	7
Osmileté gymnázium	33	92	59
Celkové vyhodnocení	32	59	27

Tab. 24 Úspěšnost v úloze 7

Úloha 7	6. ročník		7. ročník	
	Úspěšnost	nsn	Úspěšnost	nsn
Tradiční výuka	21	14	54	39
Hejného metoda	52	47	59	51
Osmileté gymnázium	33	20	92	92
Celkový přehled	32	25	59	48

Tab. 25 Výskyt nsn v řešení úloh v procentech

Úloha 7	6. ročník				7. ročník			
	výpočet	model	zdůvodnění	součin prvočinitelů	výpočet	model	zdůvodnění	součin prvočinitelů
Tradiční výuka	10	8	0	0	12	20	4	3
Hejného metoda	25	44	0	0	12	60	0	0
Osmileté gymnázium	7	57	0	0	12	60	4	20
Celkové vyhodnocení	14	26	0	0	11	26	3	4

Tab. 26 Významné jevy v úloze 7 v procentech

Respondenti byli v řešení této úlohy obecně velmi úspěšní, velmi dobře se dařilo například šesťákům učeným Hejného metodou, kteří předstihli v úspěšnosti i primány osmiletého gymnázia. Při hledání řešení žáci obecně velmi často používali model. Použití modelu jistě má souvislost s úspěšností při řešení úlohy, jak ukazují tab. 41 a 42 v oddílu 3.8.1. Nejvíce model využívali žáci gymnázia, kde se použití modelu v obou skupinách pohybovalo okolo 60 %. Žáci, kteří jsou učeni Hejného metodou, též hojně využívali modelu, šesťáci v 44 % a sedmáci v 60 %. Ze žáků ZŠ s tradiční výukou použilo model 8 % šesťáků a 20 % sedmáků. Mezi těmito modely jsou započítány i modely, které ke správnému řešení nevedly, ať už proto, že byly chybné nebo proto, že žák nedokázal model správně interpretovat.

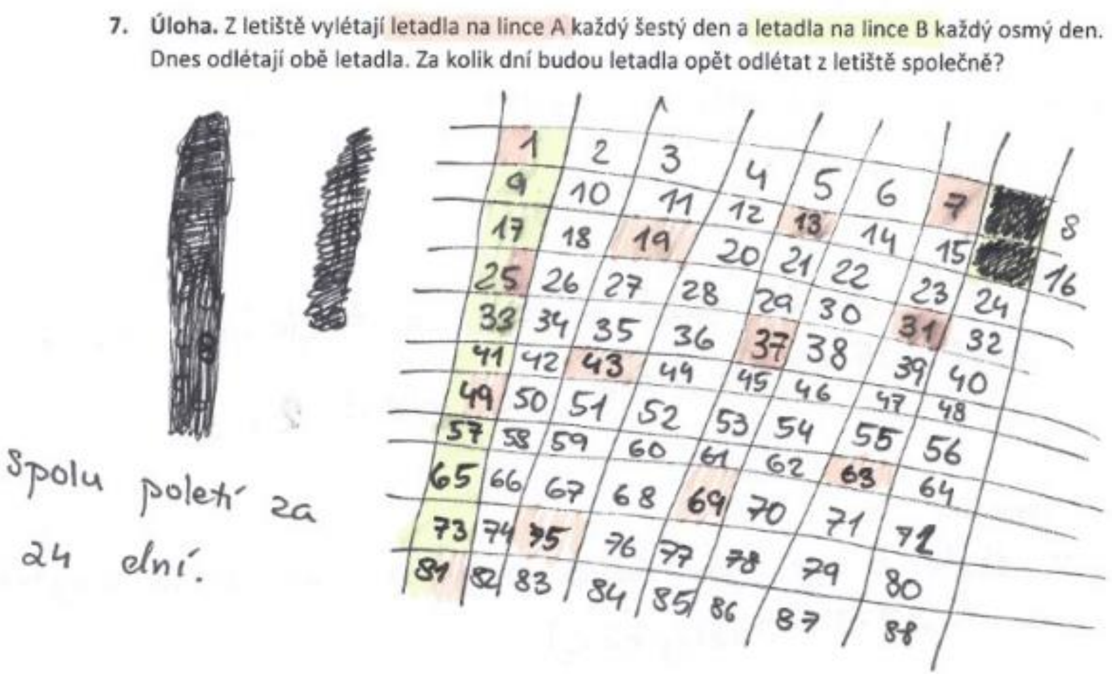
V řešení úlohy se v několika případech vyskytl tento způsob zápisu odpovědi: „24 a ∞“. Tento zápis sice vystihoval skutečnost, že úloha má nekonečně mnoho řešení, ale neříkal, jaká řešení to jsou, kromě čísla 24. Zápis „24, 48, 96 a ∞“ už byl o něco přesnější. Oba tyto zápisy jsem považovala za správné a úplné, protože žáci odpověď uvedli správně a pravděpodobně aspoň někteří z nich pochopili i souvislosti, v které dny budou letadla vylétat spolu. Nepřesná byla jen forma jejich matematického zápisu.

Rozdíl mezi úspěšností sedmáků a šesťáků je 27 procentních bodů ve prospěch sedmáků, což patří k jednomu z nejvyšších rozdílů v tomto testu, proto se odvažuji tvrdit, že co se týká hledání společného násobku dvou čísel, jsou poznatky žáků po výuce dělitelnosti jen málo zasaženy formalismem. Žáci po výuce dělitelnosti i pokud vědomosti z výuky o společném násobku zapomněli, dokázali si je při řešení úlohy znovu odvodit např. pomocí modelu. Tato skutečnost svědčí o malé míře formálnosti poznatků. Mezi šesťáky si v testu vedla skupina žáků učených Hejného metodou. Předstihli v úspěšnosti dokonce i primány osmiletého gymnázia. Výsledky sedmáků, kteří jsou vyučováni Hejného metodou, jsou srovnatelné se sedmáky, kteří se učí tradiční metodou, proto zde neusuzuji na formálnost poznatků této skupiny, ale na nadprůměrné znalosti šesťáků vyučovaných Hejného metodou. Z hlediska formálnosti poznatků dopadly velmi dobře i obě další skupiny, a to žáci ZŠ, kteří jsou učeni tradiční metodou, a žáci osmiletého gymnázia, u kterých byl zaznamenán rozdíl mezi úspěšností žáků primy a žáků sekundy celých 59 procentních bodů.

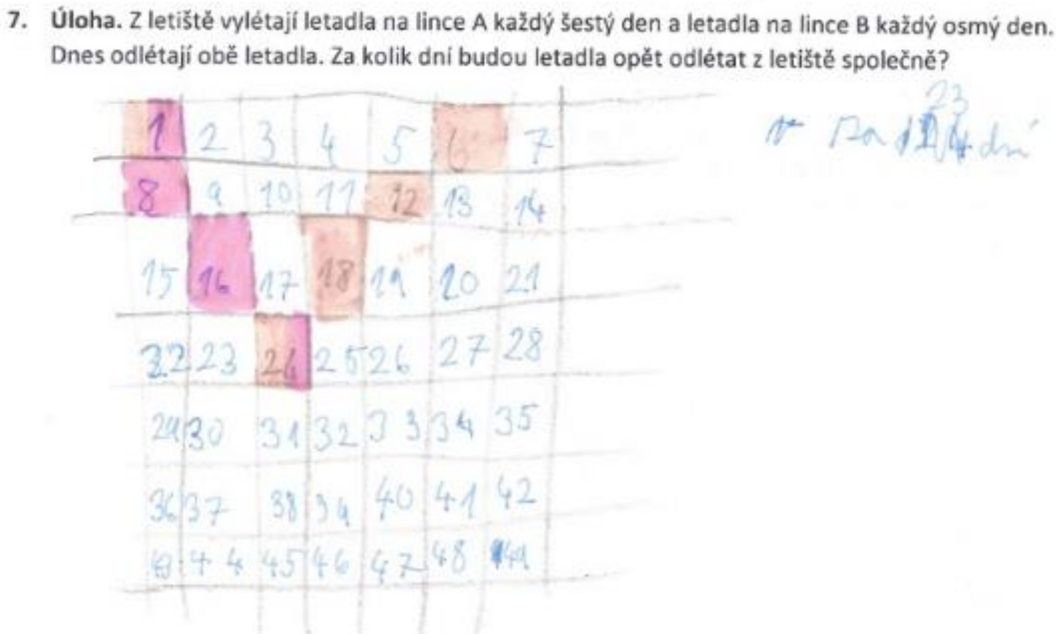
Ukázky žákovských řešení

K úspěšnému řešení této úlohy žáci využívali výpočet, různé typy modelů a rozklad na součin prvočinitelů, což zachycuje tab. 26. Poslední jmenovaný způsob se vyskytl jen ve velmi malém počtu řešení, konkrétně ho použilo 20 % žáků sekundy osmiletého gymnázia a 3 % žáků ZŠ s tradičním způsobem výukou. Modelů k řešení této úlohy využilo 26 % šesťáků i sedmáků a v jejich řešení se objevovaly modely různého druhu. Šesťáci i sedmáci využívali stejné typy modelů. Prvním typem modelu bylo vypisování násobků šesti a osmi. Při vypisování násobků si někteří respondenti uvědomili, že letadla se budou setkávat v určitých intervalech, a to také uvedli v odpovědi. Většina žáků ale uvedla jen jedno řešení. Někteří uvedli jako správný výsledek 24, jiní 48, dokonce se objevil i výsledek 72. Stalo se i to, že respondent nebyl schopen správný výsledek z tohoto druhu odečíst, i když si násobky správně vypsal.

Dalším typem druhem modelu byla tabulka. Tento typ modelu se vyskytl ve dvou případech u šesťáků učených Hejného metodou. Modely byly téměř totožné, přesto jeden z žáků měl do problému hlubší vhled a řešení určil správně a druhý se o den spletl, viz obr. 42 a 43.

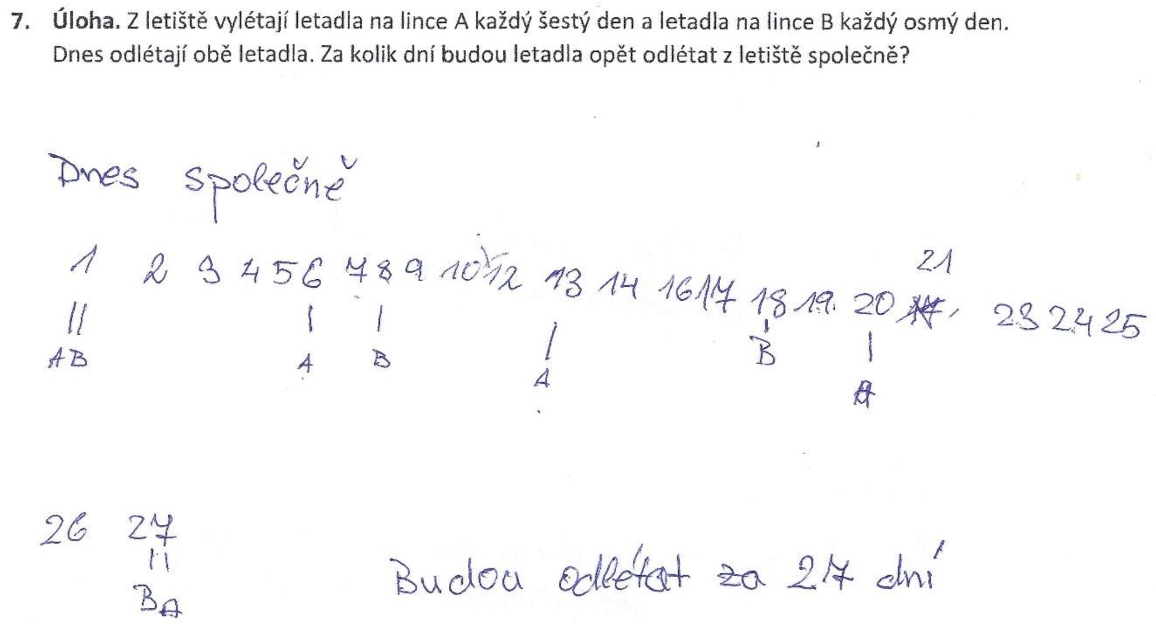


Obr. 42 6. ročník, Hejného metoda

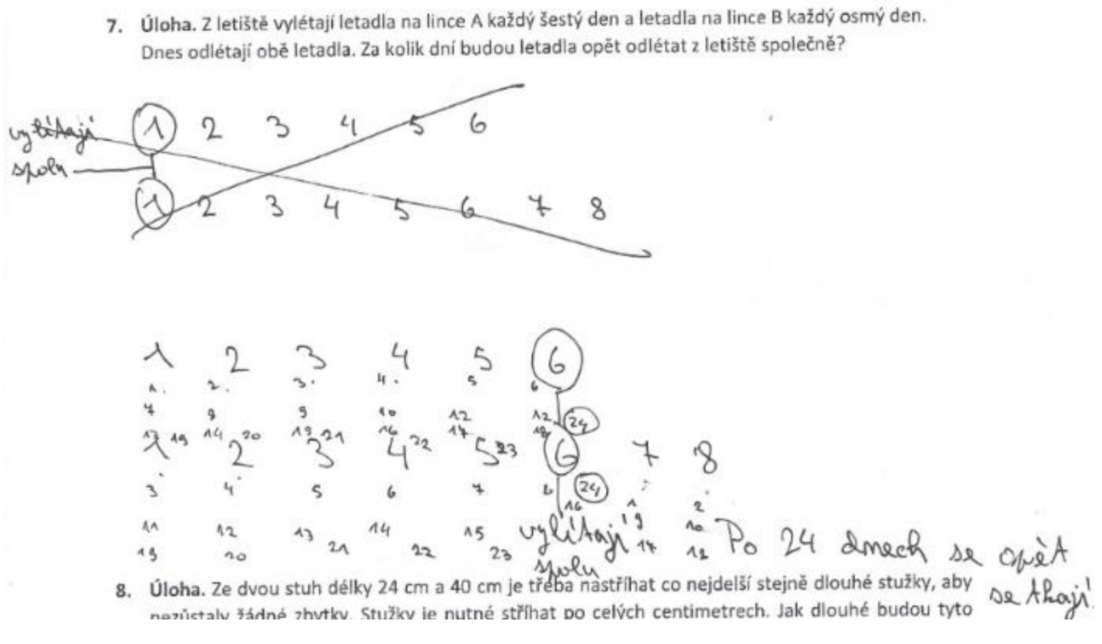


Obr. 43 6. ročník, Hejného metoda

Dalším zajímavým modelem byla časová osa, na kterou žák vynesl intervaly, v kterých odlétají letadla A a B a následně odečetl z osy, kdy odlétají obě letadla společně. Jiný model obsahoval názvy dnů v týdnu seřazené v tabulce nebo řádce za sebou. Tento model překvapivě ve více případech k nalezení správného řešení nevedl, pravděpodobně proto, že obě letadla odlétala s jinou periodou, než je počet dnů v týdnu. Vyskytl se i model, který obsahoval konkrétní data z kalendáře a začínal 1.1. Ani tento model ke správnému řešení nevedl, neboť žák jednak nedokázal vyznačit data odletů a místo správného data společného odletu 25.1. vyznačil u obou letadel 24.1., a ani tuto společnou hodnotu nedokázal z modelu vyčíst.

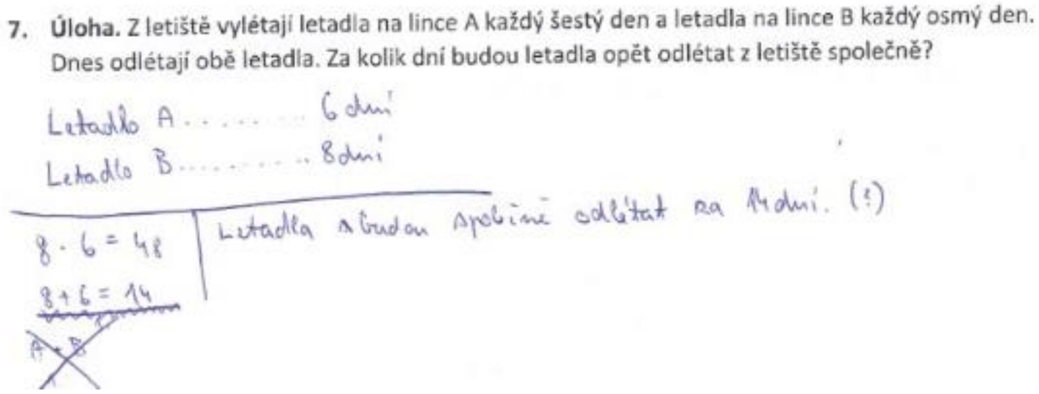


Obr. 44 7. ročník, tradiční výuka



Obr. 45 7. ročník, tradiční výuka

Na obr. 44 je chybný model, který nevedl ke správnému řešení, protože žák byl při tvorbě modelu nepozorný a vynechával čísla. Na obr. 45 je model, ve kterém jsou vypsány dny pomocí čísel. Tento model je velmi nepřehledný a je překvapivé, že respondent byl pomocí něho schopen určit správné řešení.


7. **Úloha.** Z letiště vylétají letadla na lince A každý šestý den a letadla na lince B každý osmý den. Dnes odlétají obě letadla. Za kolik dní budou letadla opět odlétat z letiště společně?

Letadlo A .... 6 dní
Letadlo B .... 8 dní

$8 \cdot 6 = 48$
$8 + 6 = 14$

Letadla a budou společně odlétat za 14 dní. (!)

Obr. 46 7. ročník, tradiční výuka

Dalším způsobem řešení byl výpočet. Žáci buďto použili prostý součin $6 \cdot 8$, čímž dospěli ke správnému výsledku, nebo počítali dva příklady $6 \cdot 4$ a $8 \cdot 3$, čímž vypočítali, kdy nejdříve se letadla setkají. Poslední příklad řešení, který je zachycen na obr 46, je řešení žáka 7. ročníku vyučovaného tradičním způsobem. Žák důsledně provedl zápis všech údajů obsažených v zadání a pak zkoušel namátkou násobit a sčítat čísla, která si zapsal. Skutečnost, že jeden z jeho výpočtů obsahuje správnou odpověď, si neuvědomil a jako odpověď uvedl chybný výsledek. Žák se zřejmě snažil zopakovat naučený postup při řešení slovních úloh, což nasvědčuje tomu, že jeho poznatky jsou značně formální.

Úloha 8

Úloha 8	SÚ 6. ročníky (procenta)	SÚ 7. ročníky (procenta)	Δ SÚ (procentní body)
Tradiční výuka	11	21	10
Hejného metoda	23	38	15
Osmileté gymnázium	27	88	61
Celkové vyhodnocení	17	32	15

Tab. 27 Úspěšnost v úloze 8

Úloha 8	6. ročník				7. ročník			
	výpočet	model	zdůvodnění	součin prvočinitelů	výpočet	model	zdůvodnění	součin prvočinitelů
Tradiční výuka	18	2	0	0	29	6	1	3
Hejného metoda	31	20	0	0	31	5	3	0
Osmileté gymnázium	47	7	3	0	72	4	0	28
Celkové vyhodnocení	26	8	0	0	34	6	1	5

Tab. 28 Významné jevy v úloze 8 v procentech

Klíčové pro správné řešení této úlohy bylo zřejmě porozumění, že stužky musí být nastříhané na stejné díly a že je nelze slepovat, protože mnoho chybných odpovědí bylo právě toho charakteru, že obě stuhy byly nastříhány na nestejně dlouhé díly. Úloha měla inspirovat žáky k vytvoření matematického modelu, popřípadě k vypisování dělitelů jednotlivých čísel. U žáků po výuce dělitelnosti jsem očekávala použití prvočíselného rozkladu k výpočtu NSD, případně zdůvodnění, že se jedná o NSD.

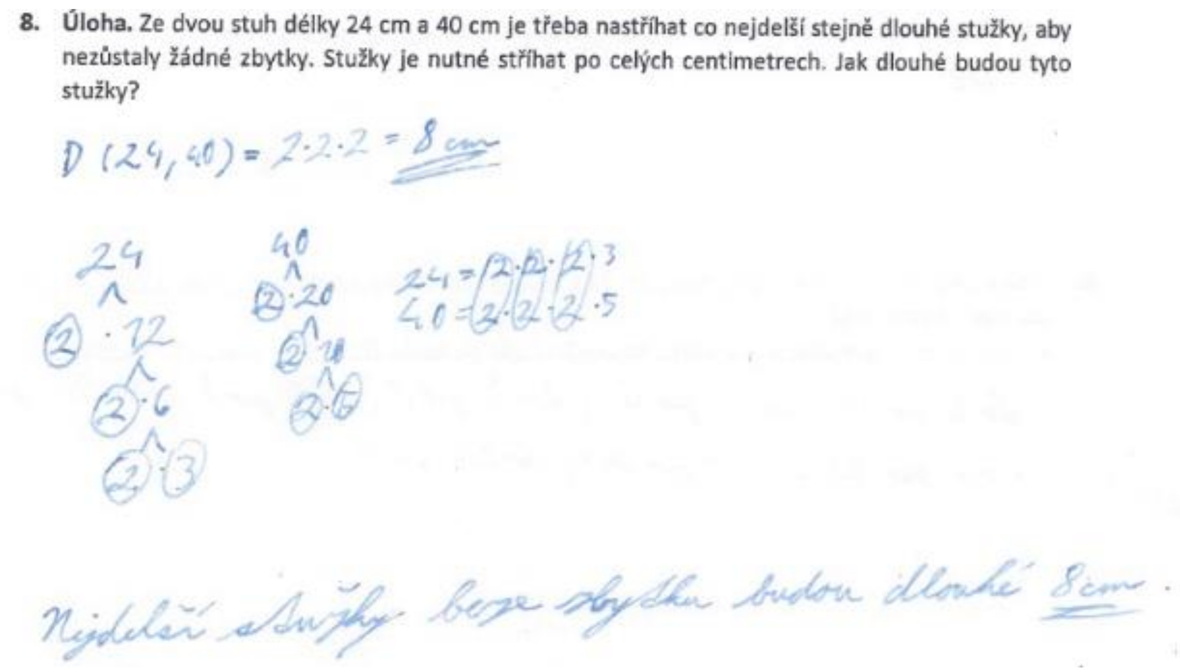
Tato úloha se ukázala být po žáky velmi obtížná a vytvořené modely většinou nebyly funkční a nevedly k nalezení správného řešení. Vytvořit správný model při hledání společných dělitelů dvou čísel asi nebylo pro respondenty úplně snadné, protože žáci z některých sledovaných skupin model k řešení úlohy téměř nepoužili.

Použití modelu u žáků 7. ročníku nepřekročilo 10 % v žádné ze sledovaných skupin. U žáků 6. ročníku se řešení pomocí modelu vyskytlo ve větší míře pouze u šesťáků učených Hejného metodou, kde model použilo 20 % žáků. Ostatní žáci spíše používali k řešení úlohy výpočet. 28 % žáků sekundy osmiletého gymnázia použilo k řešení úlohy prvočíselný rozklad, z ostatních skupin žáků použilo prvočíselný rozklad jen 3 % sedmáků ze ZŠ vyučovaných tradičně.

Celkově byly výsledky sedmáků o 15 procentních bodů vyšší než výsledky šesťáků. Tento výsledek svědčí spíš o větší míře formalismu poznatků o NSD. Stejně dopadla i skupina žáků učených tradičně a Hejného metodou. U žáků učených Hejného metodou je rozdíl mezi sedmáky a šesťáky 15 procentních bodů ve prospěch sedmáků. Tento výsledek se shoduje s výsledkem všech žáků celkově. U žáků osmiletého gymnázia naopak žáci sekundy měli větší úspěšnost o celých 61 procentních bodů. Jejich poznatky jsou zřejmě zasaženy formalismem jen v malé míře. Skupina šesťáků učených Hejného metodou měla srovnatelnou úspěšnost se skupinou žáky primy osmiletého gymnázia a sedmáci učeni Hejného metodou měli vyšší úspěšnost než primáni. Žáci základních škol s tradičním způsobem výuky měli v této úloze nejnižší úspěšnost.

Ukázky žákovských řešení

Žáci, kteří našli správnou odpověď, řešili tuto úlohu výpočtem (ověřování dělitelnosti dělením), použitím modelu nebo rozkladem na součin prvočinitelů. Nejčastěji dospěli respondenti ke správnému výsledku výpočtem, jak je patrné z tab. 28.


8. Úloha. Ze dvou stuh délky 24 cm a 40 cm je třeba nastříhat co nejdelší stejně dlouhé stužky, aby nezůstaly žádné zbytky. Stužky je nutné stříhat po celých centimetrech. Jak dlouhé budou tyto stužky?

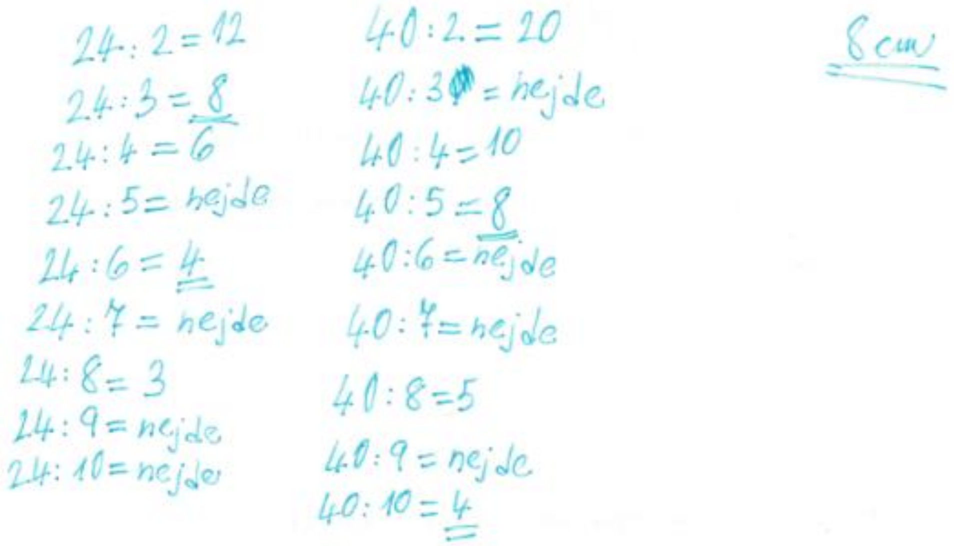
D (24, 40) = 2·2·2 = 8 cm

24 = 2·2·2·3
40 = 2·2·2·5

Nejdelší stužky beze zbytku budou dlouhé 8cm.

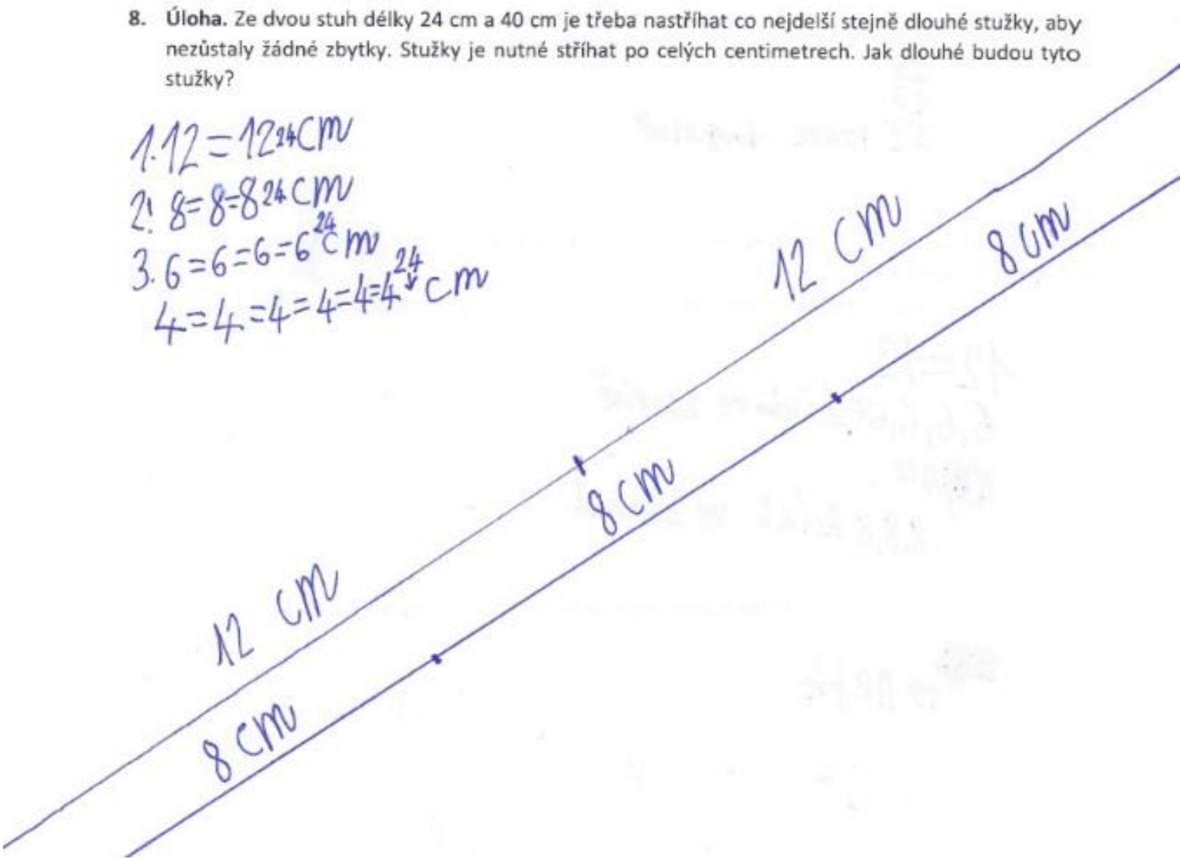
Obr. 47 7. ročník, tradiční výuka

Na obr. 47 je ukázka použití prvočíselného rozkladu žákem 7. ročníku vyučovaným tradičním způsobem výuky. Tento způsob řešení využilo 28 % žáků sekundy osmiletého gymnázia a 3 % žáků ZŠ s tradičním způsobem výuky.



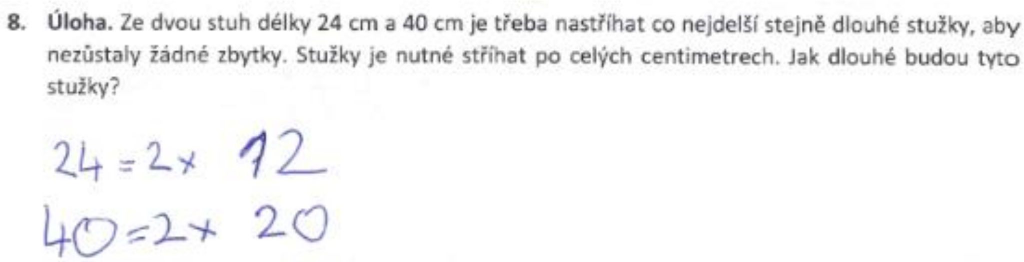
Obr. 48 6. ročník, Hejného metoda

V řešení pomocí modelu se objevovalo vypisováním společných dělitelů a to u šesťáků i u sedmáků. Na obr. 48 je tento způsob použitý žákem 6. ročníku vyučovaným Hejného metodou. Zajímavostí je, že jeden z žáků 7. ročníku učený tradičním způsobem byl schopen k určení správného řešení využít model, který obsahoval násobky čísla osm z řešení úlohy 7.



Obr. 49 6. ročník, Hejného metoda

Dalším druhem modelu, který žáci k řešení této úlohy využili, byl grafický model dvou stuh dané délky, které se pak snažili rozdělit na stejné části. I tento model se objevil v řešeních sedmáků i šesťáků. Na obr. 49 je pokus o grafický model, který zřejmě žák 6. ročníku vyučovaný Hejného metodou nestihl dokončit, proto se mu nepodařilo dojít ke správnému řešení. Na obr. 50 je příklad nesprávného řešení, které se objevovalo velmi často. Plyne z nepochopení, že obě stuhy je třeba nastříhat na stejně dlouhé části.



Obr. 50 7. ročník, Hejného metoda

3.7.2.2 Srovnání výsledků skupin

Úspěšnosti

Údaje, se kterými se čtenář už mohl seznámit v předchozím oddílu u jednotlivých úloh, uvádím znovu v přehledových tabulkách a grafech, ve kterých jsou dobře patrné údaje, na které se chci v této kapitole zaměřit. Zkratky použité v následujících tabulkách a grafech čtenář najde na začátku oddílu 3.5. Výsledky jsou zaznamenány v tab. 29–32 a také ve dvou grafech na obr. 51–52. Tyto grafy znázorňují úspěšnosti 6. a 7. ročníku v jednotlivých úlohách v rámci jednotlivých skupin. Grafické zobrazení výsledků jsem zvolila, protože umožňuje čtenáři získat ještě názornější souhrnný přehled striktních a procentuálních úspěšností jednotlivých skupin ve všech osmi úlohách. V grafech jsou jednotlivé skupiny rozlišeny stejnými barvami jako v tabulkách.

Tradiční výuka	6. ročník		7. ročník		Δ SÚ (procentní body)	Δ PÚ (procentní body)
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)		
Úloha 1	48		46		-2	
Úloha 2	68		74		6	
Úloha 3	0	17	18	48	18	31
Úloha 4	5	25	16	34	11	9
Úloha 5	16		43		27	
Úloha 6	5	40	13	59	8	19
Úloha 7	21		54		33	
Úloha 8	11		21		10	
Celkem	22	31	36	47	14	16

Tab. 29

Hejného metoda	6. ročník		7. ročník		Δ SÚ (procentní body)	Δ PÚ (procentní body)
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)		
Úloha 1	50		46		-4	
Úloha 2	86		79		-7	
Úloha 3	11	59	23	57	12	-2
Úloha 4	33	55	31	45	-2	-10
Úloha 5	41		69		28	
Úloha 6	23	60	18	72	-5	12
Úloha 7	52		59		7	
Úloha 8	23		38		15	
Celkem	40	53	49	58	9	5

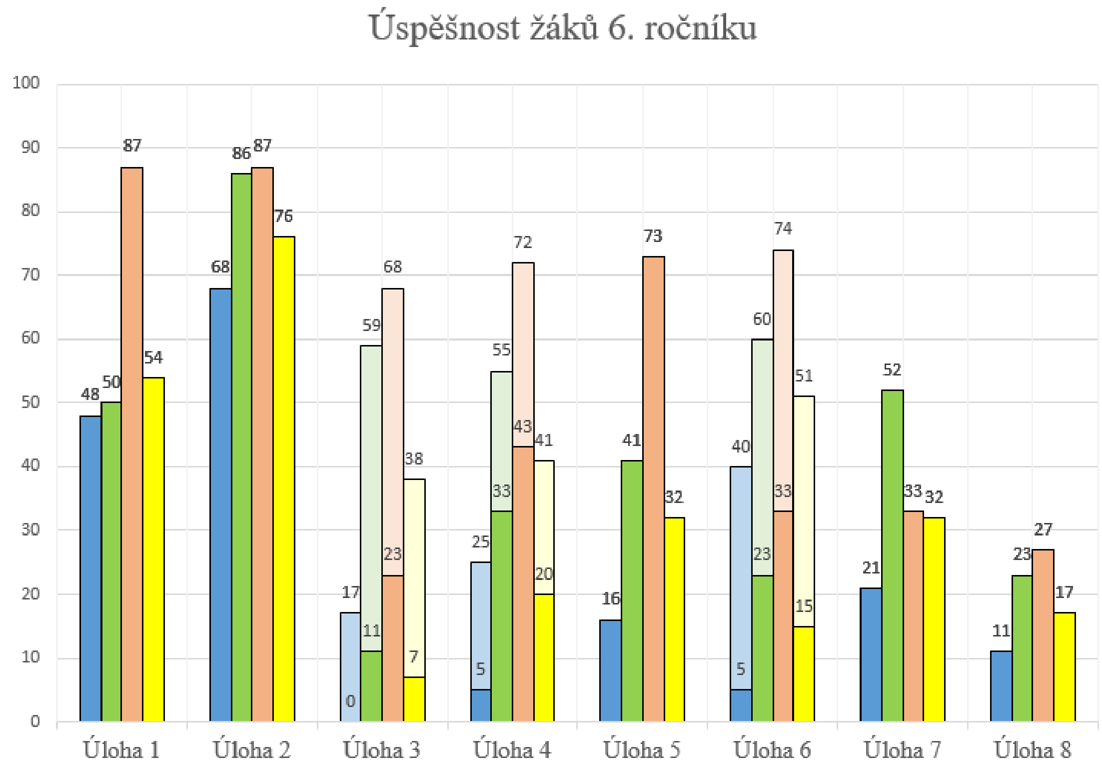
Tab. 30

Osmileté gymnázium	6. ročník		7. ročník		Δ SÚ (procentní body)	Δ PÚ (procentní body)
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)		
Úloha 1	87		100		13	
Úloha 2	87		96		9	
Úloha 3	23	68	84	93	61	25
Úloha 4	43	72	64	82	21	10
Úloha 5	73		100		27	
Úloha 6	33	74	60	93	27	19
Úloha 7	33		92		59	
Úloha 8	27		88		61	
Celkem	51	65	86	93	35	28

Tab. 31

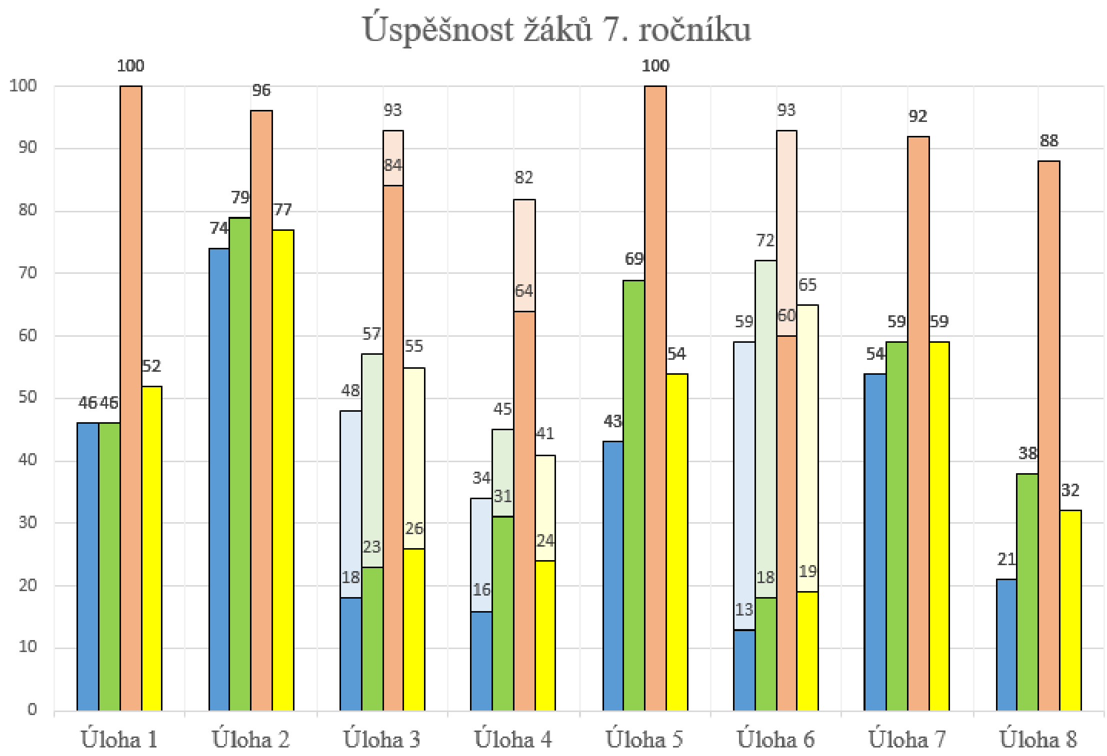
Celkové vyhodnocení	6. ročník		7. ročník		Δ SÚ (procentní body)	Δ PÚ (procentní body)
	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)	SÚ (procenta)	PÚ (procenta)		
Úloha 1	54		52		-2	
Úloha 2	76		77		1	
Úloha 3	7	38	26	55	19	17
Úloha 4	20	41	24	41	4	0
Úloha 5	32		54		22	
Úloha 6	15	51	19	65	4	14
Úloha 7	32		59		27	
Úloha 8	17		32		15	
Celkem	32	43	43	54	11	11

Tab. 32


Úspěšnost žáků 6. ročníku
Úloha 1
Úloha 2
Úloha 3
Úloha 4
Úloha 5
Úloha 6
Úloha 7
Úloha 8

Obr. 51

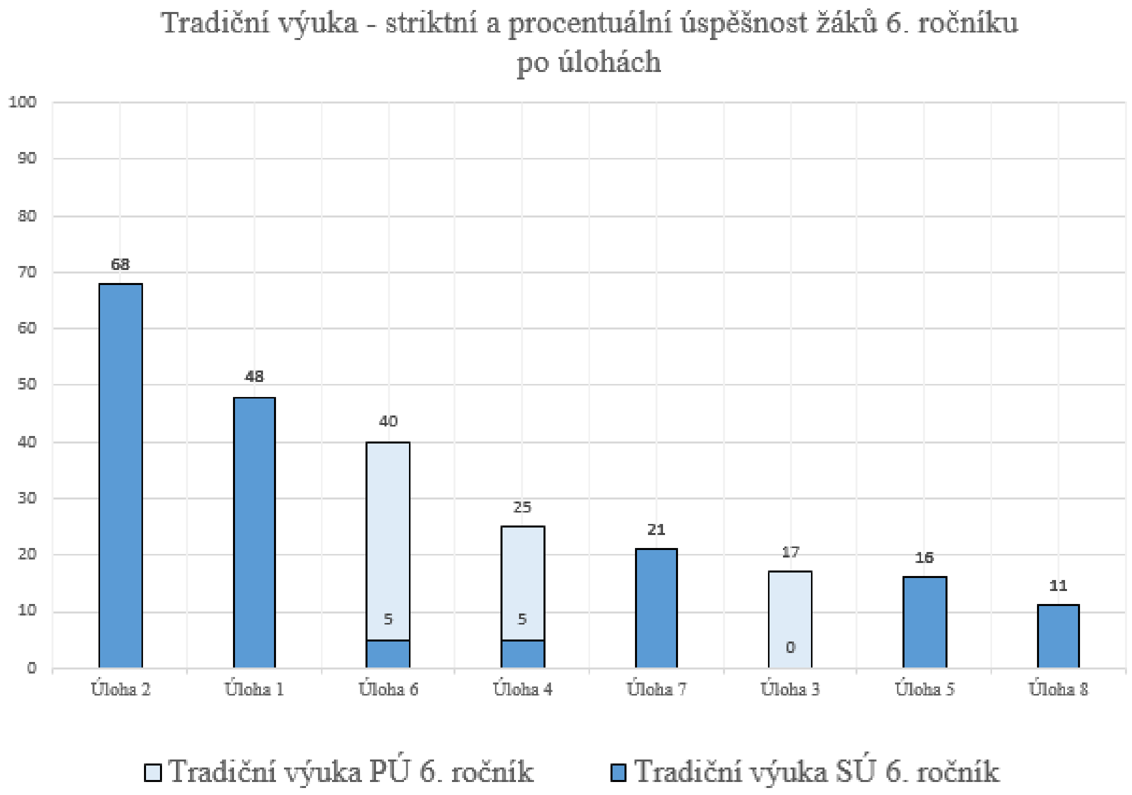

Tradiční výuka PÚ
Hejného metoda PÚ
Osmileté gymnázium PÚ
Celkové vyhodnocení PÚ
Tradiční výuka SÚ
Hejného metoda SÚ
Osmileté gymnázium SÚ
Celkové vyhodnocení SÚ


Úspěšnost žáků 7. ročníku
Úloha 1
Úloha 2
Úloha 3
Úloha 4
Úloha 5
Úloha 6
Úloha 7
Úloha 8

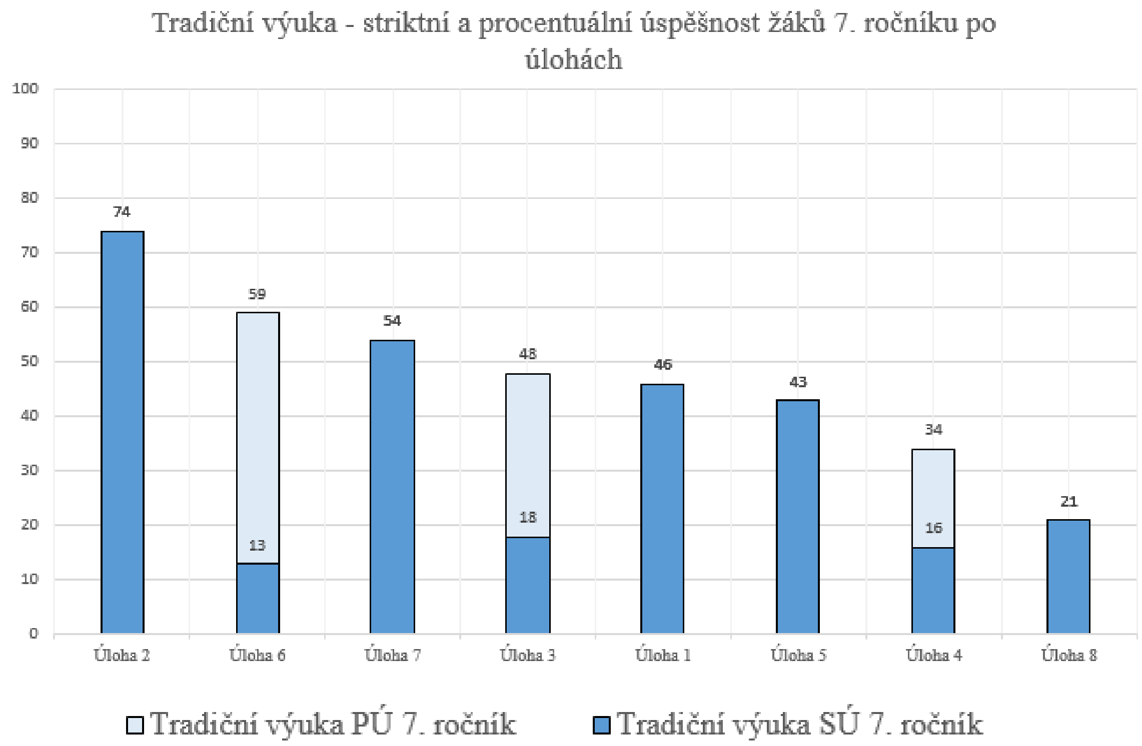
Obr. 52

Ve všech úlohách a obou ročnících byli nejúspěšnější žáci osmiletého gymnázia, na druhém místě byli žáci vyučovaní Hejného metodou a nejslabší byli žáci vyučovaní tradičním způsobem výuky s výjimkou úlohy 7 v 6. ročníku, kde byli žáci vyučovaní Hejného metodou úspěšnější než žáci osmiletého gymnázia. Rozdíly mezi skupinami v jednom ročníku jsou různě velké. V některých úlohách si žáci vyučovaní Hejného metodou vedou prakticky stejně jako žáci vyučovaní tradičně (v obou ročnících), v některých úlohách prakticky stejně jako žáci osmiletého gymnázia nebo lépe (v 6. ročníku). Dominance gymnazistů je v 7. ročníku výraznější než v 6. ročníku a to jak v striktní, tak v procentuální úspěšnosti. Jak už bylo uvedeno u jednotlivých úloh, procentuální úspěšnost (v úlohách, kde je od ní odlišná) výrazně přesahuje striktní úspěšnost. Poměr striktní k procentuální úspěšnosti v úlohách, kde jsou tyto úspěšnosti odlišné, je prakticky ve všech skupinách nižší v 6. ročníku (s výjimkou skupiny učené Hejného metodou v úloze 6). To svědčí o schopnosti sedmáků řešit úlohy systematičtěji a častěji nalézat všechna řešení.

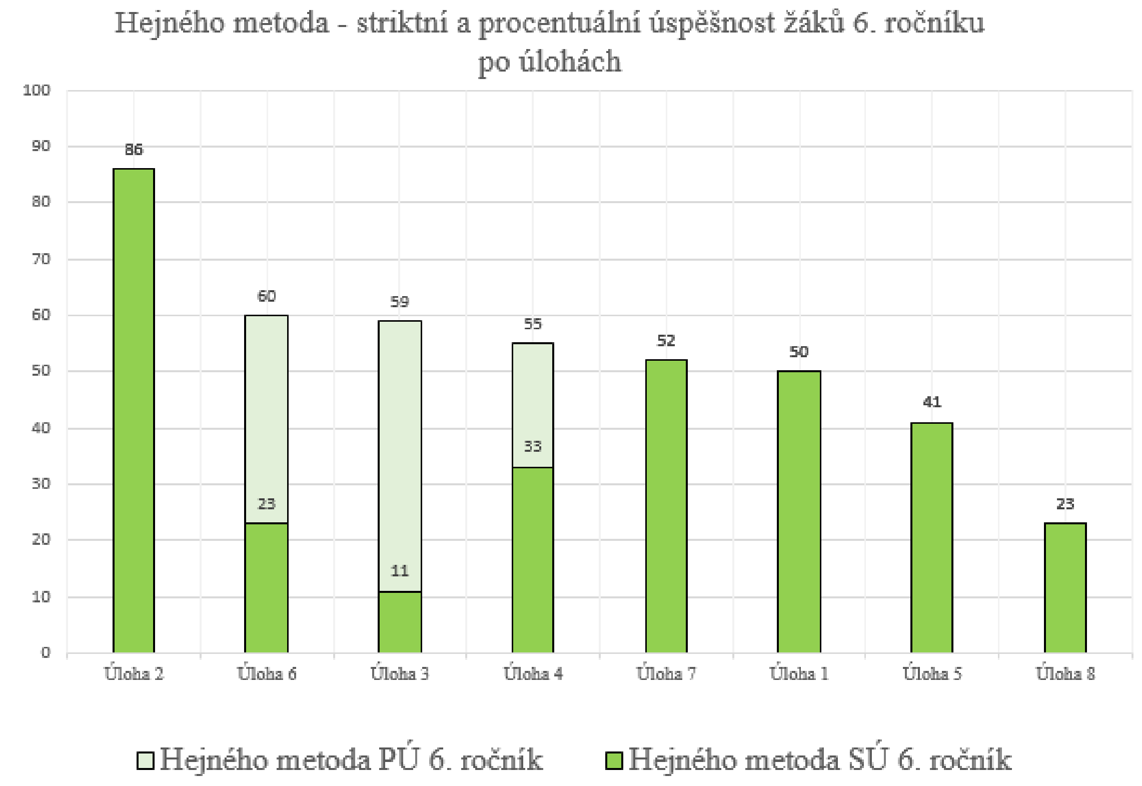
Na obr. 53–60 čtenář nalezne osm grafů, na kterých je zachycena striktní a procentuální úspěšnost v jednotlivých úlohách v rámci jednotlivých skupin rozdělených po ročnících. Úlohy jsou řazeny podle procentuální úspěšnosti a nikoliv podle čísla úlohy jako v předchozích grafech. Toto řazení a grafické zpracování jsem zvolila proto, aby čtenář získal nejen informaci o tom, ve kterých úlohách byla skupina nejúspěšnější a naopak nejméně úspěšná, ale i celkovou charakteristiku rozložení úspěšnosti dané skupiny. Pořadí úloh v jednotlivých skupinách podle procentuální úspěšnosti je z grafů dobře patrné, proto se již k němu vyjadřovat nebudu, v komentářích se soustředím pouze na pořadí úloh podle striktní úspěšnosti.


Tradiční výuka - striktní a procentuální úspěšnost žáků 6. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
68
48
40
5
25
5
21
17
0
16
11
Úloha 2
Úloha 1
Úloha 6
Úloha 4
Úloha 7
Úloha 3
Úloha 5
Úloha 8
Tradiční výuka PÚ 6. ročník
Tradiční výuka SÚ 6. ročník

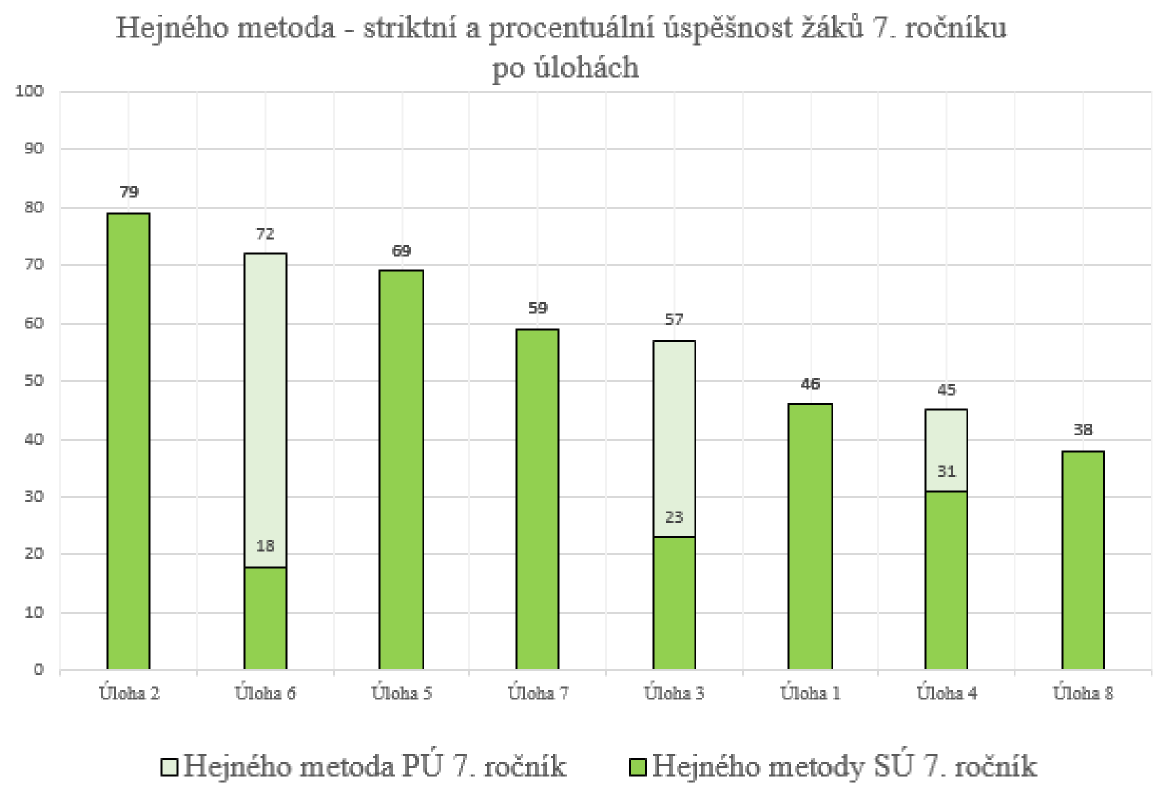
Obr. 53


Tradiční výuka - striktní a procentuální úspěšnost žáků 7. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
74
59
13
54
48
18
46
43
34
16
21
Úloha 2
Úloha 6
Úloha 7
Úloha 3
Úloha 1
Úloha 5
Úloha 4
Úloha 8
Tradiční výuka PÚ 7. ročník
Tradiční výuka SÚ 7. ročník

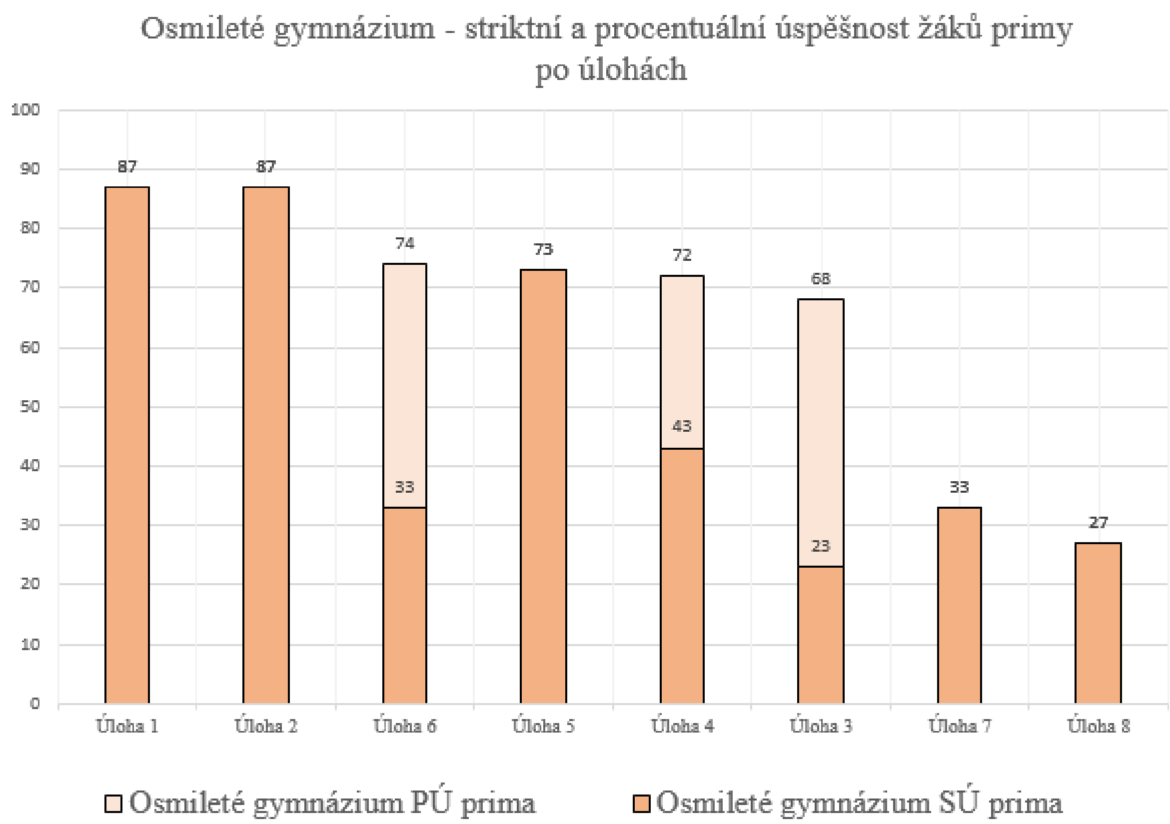
Obr. 54


Hejného metoda - striktní a procentuální úspěšnost žáků 6. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
86
60
23
59
11
55
33
52
50
41
23
Úloha 2
Úloha 6
Úloha 3
Úloha 4
Úloha 7
Úloha 1
Úloha 5
Úloha 8
Hejného metoda PÚ 6. ročník
Hejného metoda SÚ 6. ročník

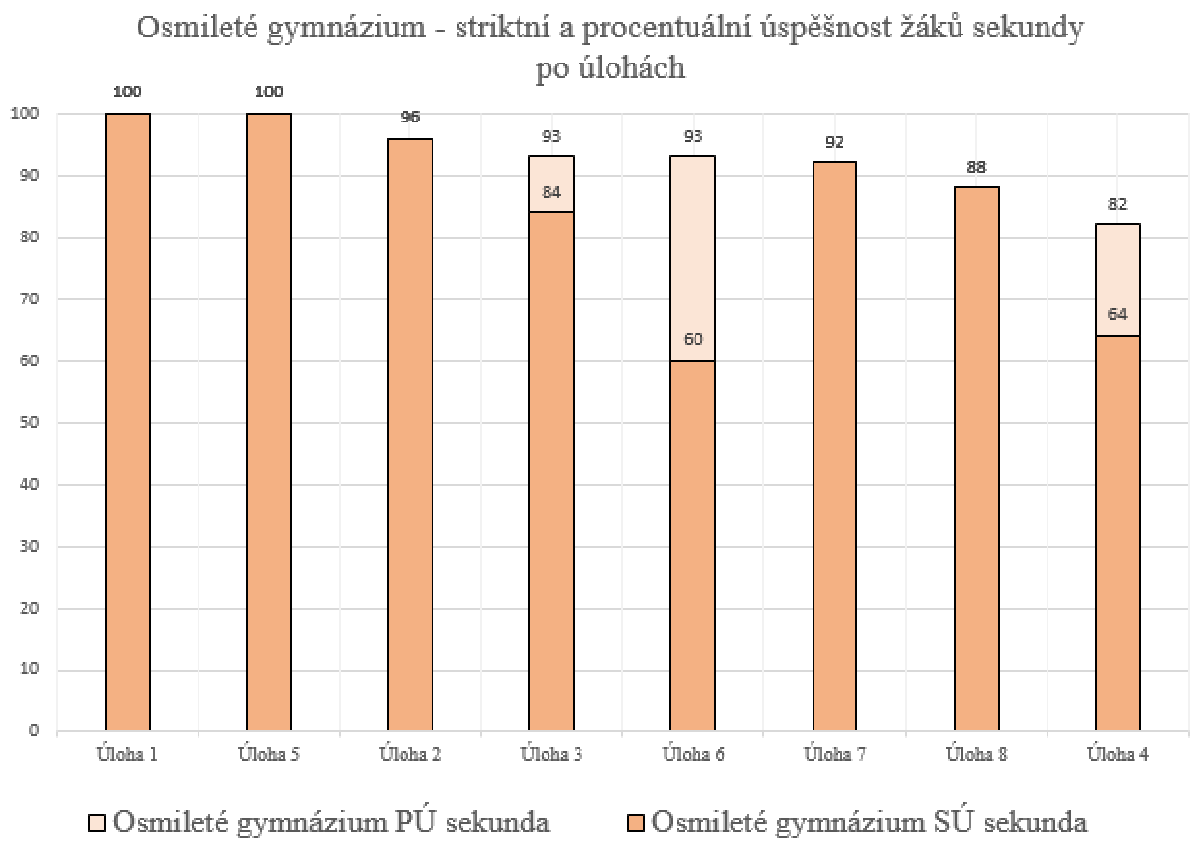
Obr. 55


Hejného metoda - striktní a procentuální úspěšnost žáků 7. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
79
72
18
69
59
57
23
46
45
31
38
Úloha 2
Úloha 6
Úloha 5
Úloha 7
Úloha 3
Úloha 1
Úloha 4
Úloha 8
Hejného metoda PÚ 7. ročník
Hejného metody SÚ 7. ročník

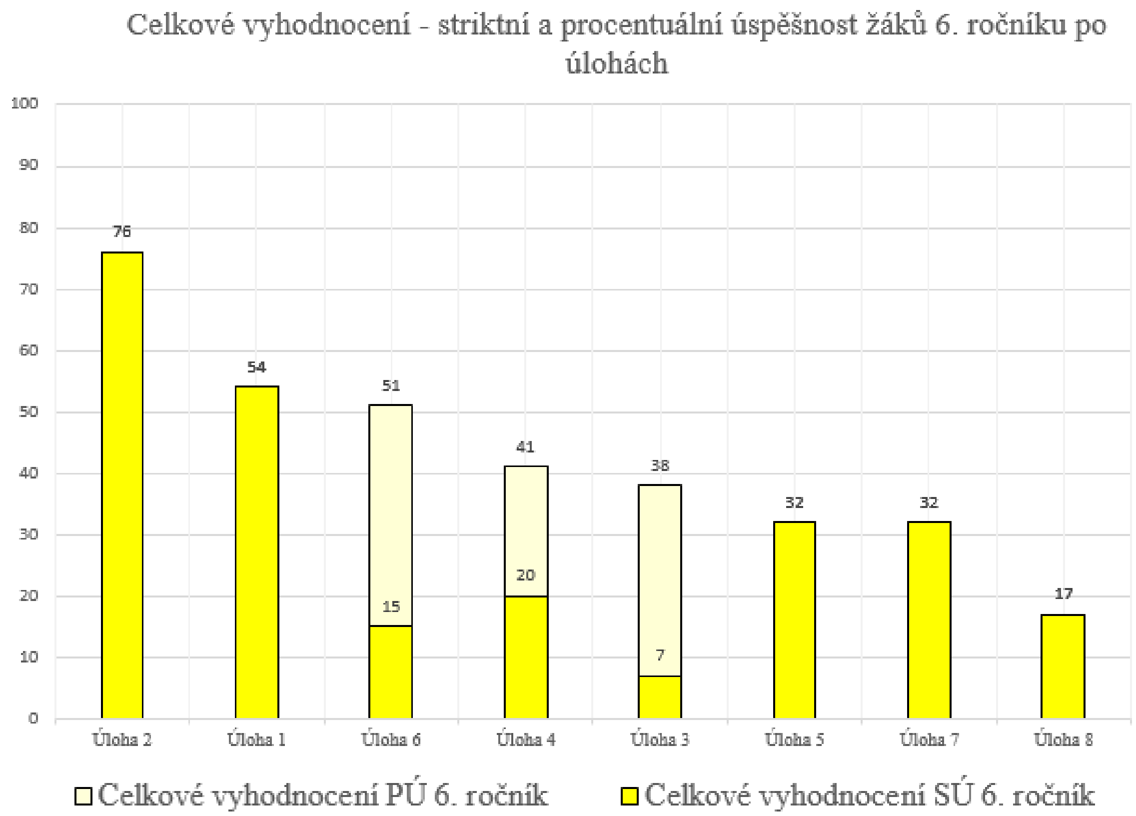
Obr. 56


Osmileté gymnázium - striktní a procentuální úspěšnost žáků primy po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
87
87
74
33
73
72
43
68
23
33
27
Úloha 1
Úloha 2
Úloha 6
Úloha 5
Úloha 4
Úloha 3
Úloha 7
Úloha 8
Osmileté gymnázium PÚ prima
Osmileté gymnázium SÚ prima

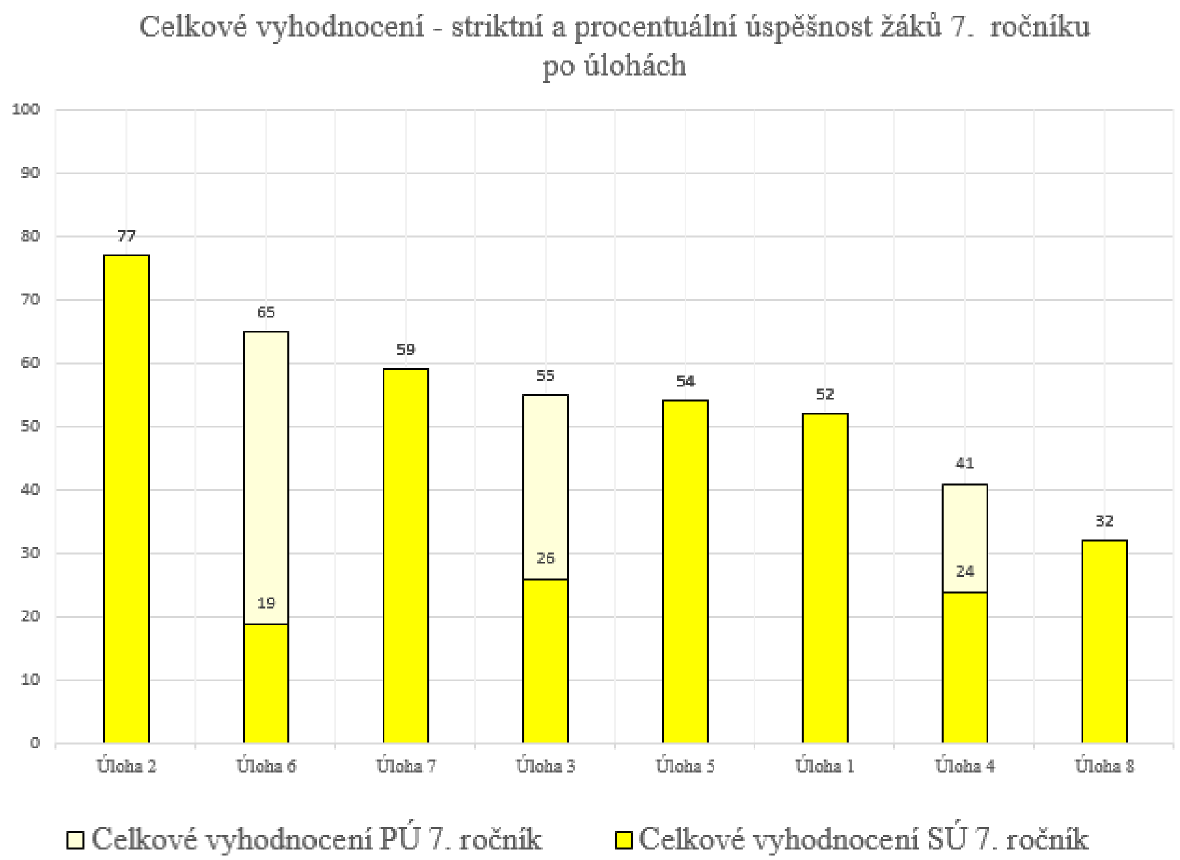
Obr. 57


Osmileté gymnázium - striktní a procentuální úspěšnost žáků sekundy po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
100
100
96
93
84
93
60
92
88
82
64
Úloha 1
Úloha 5
Úloha 2
Úloha 3
Úloha 6
Úloha 7
Úloha 8
Úloha 4
Osmileté gymnázium PÚ sekunda
Osmileté gymnázium SÚ sekunda

Obr. 58


Celkové vyhodnocení - striktní a procentuální úspěšnost žáků 6. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
76
54
51
41
38
32
32
17
15
20
7
Úloha 2
Úloha 1
Úloha 6
Úloha 4
Úloha 3
Úloha 5
Úloha 7
Úloha 8
Celkové vyhodnocení PÚ 6. ročník
Celkové vyhodnocení SÚ 6. ročník

Obr. 59


Celkové vyhodnocení - striktní a procentuální úspěšnost žáků 7. ročníku po úlohách
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
77
65
59
55
54
52
41
32
19
26
24
Úloha 2
Úloha 6
Úloha 7
Úloha 3
Úloha 5
Úloha 1
Úloha 4
Úloha 8
Celkové vyhodnocení PÚ 7. ročník
Celkové vyhodnocení SÚ 7. ročník

Obr. 60

Celkové vyhodnocení

Z hlediska striktní úspěšnosti si šesťáci vedli nejlépe v řešení úloh 2, 1, 5 a 7 v tomto pořadí sestupně, kdy se jejich úspěšnost pohybovala mezi 76 a 32 %. Největší úspěšnost tedy měli žáci 6. ročníku v řešení úlohy 2, která byla velmi jednoduchá a šla řešit bez znalostí z dělitelnosti. Druhá úloha s nejvyšší úspěšností byla úloha 1, která nebyla typicky školská, a žáci v ní měli za úloh rozhodnout, zda součet dvou a tří lichých čísel je sudé nebo liché číslo. V úlohách 5 a 7 již úspěšnost šesťáků nepřesáhla 35 %. Úloha 5 vyžadovala hlubší porozumění dělení se zbytkem a úloha 7 ověřovala schopnost určení společného násobku dvou čísel. Naopak v řešení úloh 3, 6 a 8, v tomto pořadí vzestupně, si šesťáci vedli nejméně úspěšně, jejich striktní úspěšnost nepřesáhla 18 %. V řešení úlohy 3, jejíž úspěšné řešení předpokládalo využití kritérií dělitelnosti, byli žáci 6. ročníku nejméně úspěšní, jejich úspěšnost byla pouhých 7 %. Úloha 6 testovala hledání dělitelů čísla složeného a prvočísla. V úloze 8 žáci hledali NSD dvou čísel.

Ve čtyřech z osmi úloh byla striktní úspěšnost sedmáků vyšší než 50 %, a to konkrétně v úlohách 2, 7, 5 a 1 v tomto pořadí sestupně. Druhou úlohou s nejvyšší úspěšností byla překvapivě úloha 7. Naopak nejmenší striktní úspěšnost měli sedmáci při řešení úloh 6, 4 a 3 v tomto pořadí vzestupně. Úloha 4 byla slovní úloha na hledání násobků sedmi z daného intervalu a v úloze 3 žáci doplňovali do čísel chybějící cifru tak, aby číslo bylo dělitelné daným číslem. Společným rysem těchto úloh je, že mají víceprvkovou množinu řešení. Z uvedených výsledků je zřejmé, že velmi záleží na tom, zda při vyhodnocování testu bereme v potaz pouze úlohy správné a úplné nebo bodově hodnotíme i částečné odpovědi.

Žáci vyučovaní tradičním způsobem

Výrazně nejvíce se šesťákům učeným tradičním způsobem dařilo v řešení úlohy 2 a 1. V úlohách 7, 5 a 8 se jejich striktní úspěšnost pohybovala mezi 10 a 25 % a v úlohách 3, 4 a 6 byla striktní úspěšnost žáků 6. ročníku vyučovaných tradičním způsobem nižší než 6 %. Sedmáci byli z hlediska striktní úspěšnosti nejlepší při řešení úloh 2, 7 a 1, kdy jejich striktní úspěšnost byla větší než 45 %. Naopak nejméně úspěšní byli v řešení úloh 6, 4 a 3, kdy jejich striktní úspěšnost nepřesáhla 20 %.

Žáci vyučovaní Hejného metodou

Šesťáci učení Hejného metodou měli nejvyšší striktní úspěšnost v úlohách 2, 7 a 1, kde jejich úspěšnost byla vyšší než 50 %. V řešení úloh 3, 6 a 8 se šesťákům dařilo nejméně. Sedmáci učení Hejného metodou byli nejúspěšnější v řešení úloh 2, 5 a 7 v tomto pořadí sestupně. Na rozdíl od celkových výsledků sedmáků v této skupině byla druhá úloha s nejvyšší úspěšností úloha 5 a ne 7. V úlohách 6, 3 a 4 měli sedmáci nižší striktní úspěšnost než 32 %, což je překvapivé zejména u úlohy 4, která byla ze sbírky úloh prof. Hejného, a u úlohy 6, kterou jsem považovala za spíše snadnou.

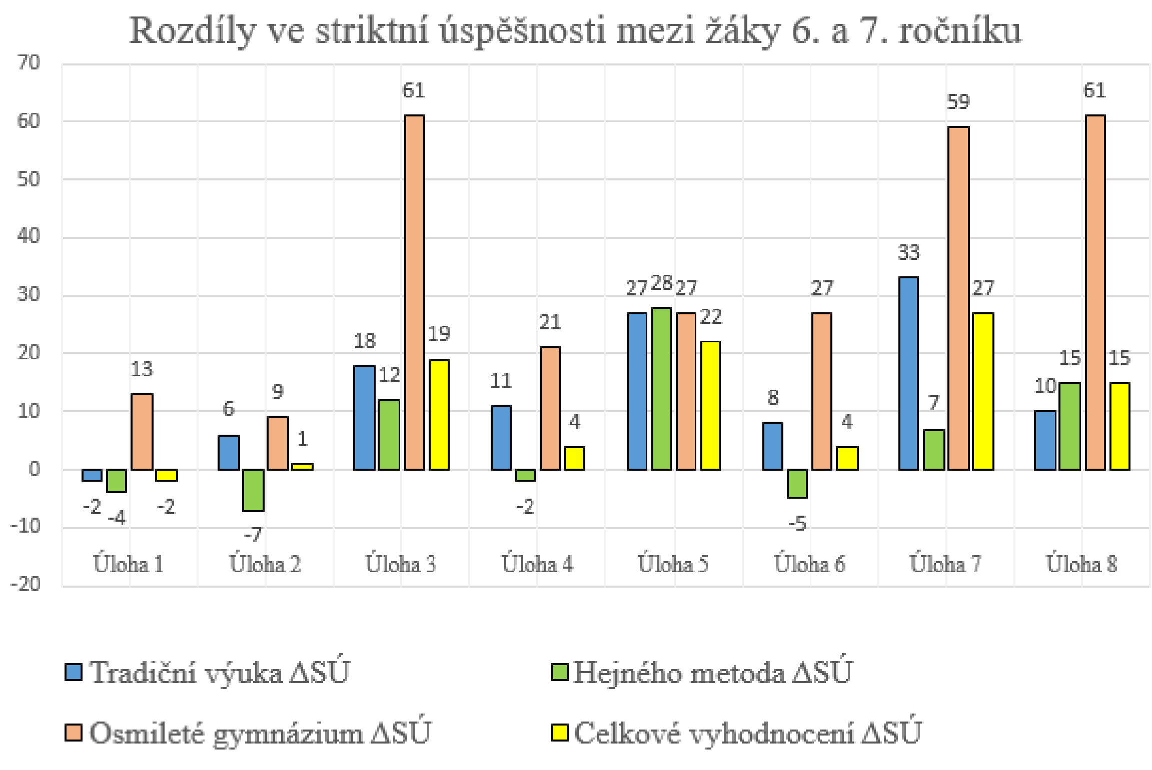
Žáci osmiletého gymnázia

Skupina žáků osmiletého gymnázia dosáhla v testu nejlepších výsledků. Nejlépe se žákům primy dařilo v řešení úloh 1, 2 a 5, méně úspěšní byli v řešení úloh 3, 8, 6 a 7, kdy se jejich striktní úspěšnost pohybovala mezi 23 a 34 %. Žáci sekundy si nejlépe vedli v řešení úloh 1, 5 a 2, kdy jejich striktní i procentuální úspěšnost neklesla pod 95 %. Nejhůře si vedli v řešení úloh 6 a 4, kdy se jejich striktní úspěšnost pohybovala okolo 60 %. V ostatních případech jejich procentuální ani striktní úspěšnost neklesla pod 80 %.

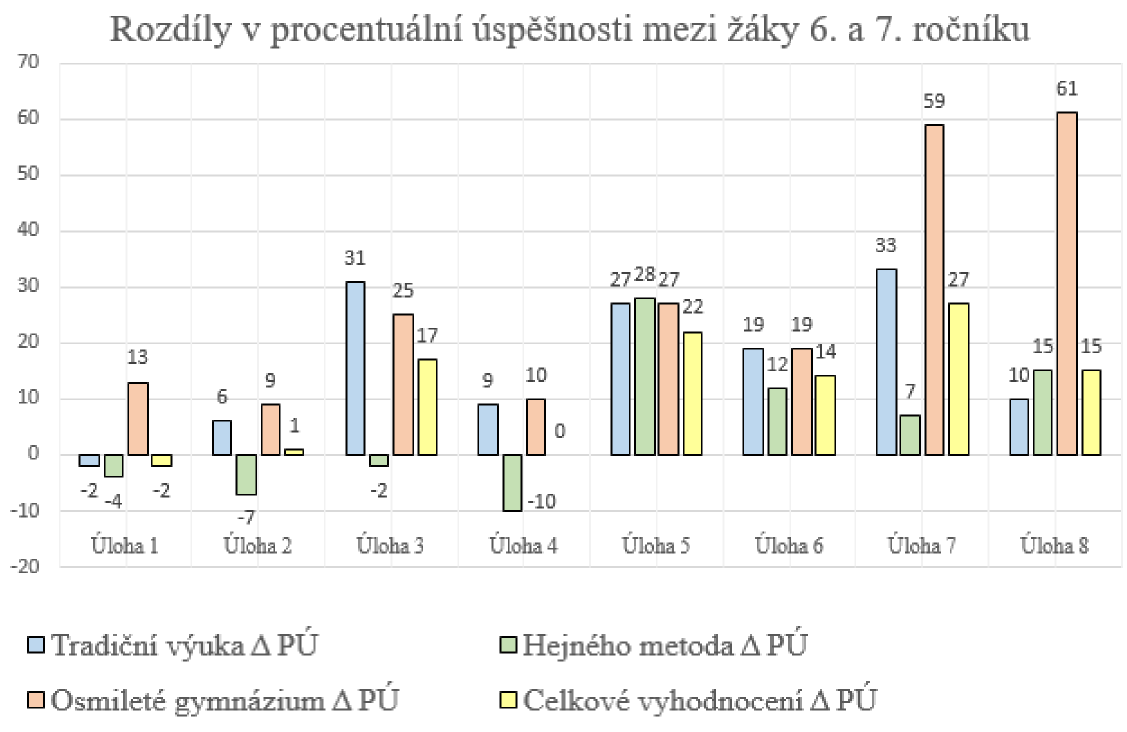
Rozdíly úspěšností

Grafy na obr. 61 a 62 znázorňují rozdíly striktní a procentuální úspěšnosti mezi 7. a 6. ročníkem. Rozdíly striktních a procentuálních úspěšností mezi sedmáky a šesťáky jsou mnohem různorodějším souborem dat než úspěšnost skupin v jednotlivých úlohách. Překvapivě u některých skupin v některých úlohách nebyla úspěšnost 7. ročníku vyšší než úspěšnost 6. ročníku, nebo byla dokonce i nižší. Nižší úspěšnost 7. ročníku vzhledem k úspěšnosti 6. ročníku je statisticky významná pouze u skupiny učené Hejného metodou. Tento jev vysvětluji odlišností šesťáků a sedmáků v rámci této skupiny, jak byla popsána v oddíle 3.3.

Vzhledem k definicím striktní a procentuální úspěšnosti jsou hodnoty, a tudíž i rozdíly úspěšností mezi 7. a 6. ročníkem v úlohách 1, 2, 5, 7 a 8 shodné. V obou grafech je uvádím pro pohodlí čtenáře, který by chtěl sledovat pouze striktní nebo pouze procentuální úspěšnost.



Obr. 61



Obr. 62

Stejně jak v předchozím oddílu dále analyzuji rozdíly po skupinách. V celkových grafech stojí za povšimnutí odlišnost úlohy 5, u níž jsou rozdíly ve všech skupinách velmi vyrovnané na rozdíl od ostatních úloh, kde se dramaticky liší.

Celkové vyhodnocení rozdílů v úspěšnosti

Žáci 7. ročníku byli při řešení testu průměrně o 11 procentních bodů úspěšnější než žáci 6. ročníku z hlediska striktní i procentuální úspěšnosti. Rozdíl ve striktní úspěšnosti mezi sedmáky a šesťáky byl největší v řešení úloh 7, 5, 3 a 8, kdy se pohyboval mezi 15 a 30 procentními body. Rozdíl v úspěšnostech v řešení úloh 4, 6, 1 a 2 byl menší než 5 procentních bodů. Pouze v řešení úlohy 1 byli šesťáci úspěšnější než sedmáci o 2 procentní body. Rozdíl v procentuálních úspěšnostech v úlohách 3, 4 a 6 byl 17, 0 a 14 procentních bodů, tzn. že rozdíl ve striktní úspěšnosti mezi 6. a 7. ročníkem byl nepatrně vyšší než rozdíl v procentuální úspěšnosti u úloh 3 a 4, naopak u úlohy 6 byl rozdíl ve striktní úspěšnosti o 10 procentních bodů nižší než v procentuální úspěšnosti.

Žáci vyučovaní tradičním způsobem

Rozdíly v úspěšnosti mezi sedmáky a šesťáky vyučovanými tradičním způsobem byly 14 procentních bodů ve striktní úspěšnosti a 15 procentních bodů v procentuální úspěšnosti. Rozdíl ve striktní úspěšnosti byl nejvyšší u úloh 7, 5 a 3 a pohyboval se mezi 18 a 34 procentními body. V úlohách 1, 2 a 6 je rozdíl ve striktních úspěšnostech nejmenší, konkrétně byl u všech třech úloh menší než 9 procentních bodů. V úloze 2 byli šesťáci o dva procentní body úspěšnější než sedmáci. Rozdíl v procentuální úspěšnosti v úlohách 3 a 6 oproti striktní úspěšnosti vzrostl o více než 10 procentních bodů. Hodnoty rozdílů striktní a procentuální úspěšnosti v úloze 4 se liší o méně než 2 procentní body.

Žáci vyučovaní Hejného metodou

Skupina žáků vyučovaných Hejného metodou se vyznačovala nejmenšími rozdíly mezi úspěšností žáků 6. a 7. ročníku, které pouze ve dvou úlohách přesáhly 15 procentních bodů ve prospěch sedmáků z hlediska striktní i procentuální úspěšnosti, a největším počtem úloh, ve kterých měli šesťáci vyšší úspěšnost než sedmáci. V této skupině byl největší rozdíl v úspěšnosti mezi 7. a 6. ročníkem patrný u úloh 5 a 8 a pohyboval se mezi 15 a 30 procentními body. Naopak v řešení úloh 1, 2, 4, 6 a 7 byl rozdíl mezi striktní úspěšností šesťáků a sedmáků malý, činil méně než 8 procentních bodů. V řešení úloh 1, 2, 4 a 6 byli z hlediska striktní úspěšnosti šesťáci úspěšnější než sedmáci, i když ne více než o 8 procentních bodů. Procentuální úspěšnosti v řešení úloh

3 a 4 měli vyšší šesťáci a v řešení úlohy 6 byli z hlediska procentuální úspěšnosti lepší sedmáci o 12 procentních bodů.

Žáci osmiletého gymnázia

V úspěšnosti v řešení úloh mezi žáky osmiletého gymnázia byl patrný velký rozdíl ve prospěch žáků sekundy. Žáci sekundy byli v řešení všech úloh úspěšnější než žáci primy a průměrný rozdíl ve striktní úspěšnosti byl 35 procentních bodů a v procentuální úspěšnosti 28 procentních bodů. Rozdíly ve striktní úspěšnosti mezi žáky sekundy a primy byly nejvyšší u úloh 3, 7 a 8, kdy se pohybovaly okolo 60 procentních bodů. Naopak nejmenší rozdíl ve striktní úspěšnosti byl u úloh 1 a 2 a pohyboval se okolo 10 procentních bodů. Úloha 2 přitom byla jednou z nejlehčích a k jejímu řešení pravděpodobně stačily pouze formální znalosti. V úlohách 3, 4 a 6 se rozdíly v procentuálních úspěšnostech pohybovaly mezi 10 a 30 procentními body.

3.8 Výskyt významných jevů

Při vyhodnocování testů jsem pozorovala některé významné jevy. Mezi tyto jevy patří zejména způsoby použitého řešení v jednotlivých úlohách. Rozlišovala jsem řešení výpočtem, zdůvodnění výsledku, použití modelu (ve všech úlohách kromě úloh 2 a 3), řešení s využitím ciferného součtu (v úlohách 2 a 3), „tečka" (v úloze 6) a rozkladu na součin prvočinitelů (v úlohách 7 a 8). Zmíněné jevy jsem s výjimkou modelů zachycovala kvantitativně. Vždy jsem si zaznamenala, zda se konkrétní jev v žákovském řešení vyskytl, a nerozlišovala jsem, zda vedl ke správnému řešení, či nikoliv. Není vyloučeno, že se v žákovském řešení mohly vyskytnout dva nebo více zmíněných jevů. Řešení pomocí modelu se budu věnovat v samostatné podkapitole.

Tab. 33–40 zachycují výsledky po jednotlivých úlohách. Výsledky podúloh jsou uvedeny v tabulkách v příloze B. Všechny údaje jsou uvedeny v procentech.

Za výpočet jsem považovala jakýkoliv zápis žákům známých početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení), ať již se správným či chybným výsledkem. Řešení pomocí výpočtu bylo žáky nejpreferovanějším způsobem řešení v úlohách 2, 3, 4, 5, 6 a 8, přičemž k řešení úloh 2, 3 a 4 využilo výpočtu více než 40 % žáků 6. i 7. ročníků. Pokud se respondenti rozhodli řešit úlohu výpočtem, dalo se předpokládat, že jejich způsob řešení bude úspěšný. V některých případech, kdy už si žáci měli možnost osvojit efektivnější způsob řešení, je možné řešení výpočtem pokládat za neznalost tohoto postupu. Příkladem tohoto jevu jsou řešení úlohy 2, k řešení této úlohy využilo 44 % žáků po výuce dělitelnosti písemné dělení místo toho, aby prokázali znalost kritéria dělitelnosti třemi a použili ciferného součtu.

Za zdůvodnění jsem považovala jakýkoliv pokus o slovní vysvětlení výsledku úlohy nebo podúlohy, i když nebylo úplně korektní či srozumitelné. Žáci 6. ročníku nejčastěji uvedli zdůvodnění v řešení úloh 1, 3 a 6 a žáci 7. ročníku nejčastěji použili zdůvodnění v řešení úloh 1 a 6.

U úloh, které se řeší pomocí běžně vyučovaných algoritmů, jsem zkoumala výskyt použití těchto metod. Konkrétně u úlohy 2 a 3 to byl ciferný součet, u úlohy 6 „téčko“ a u úloh 7 a 8 určení nsn a NSD pomocí rozkladu na prvočinitele.

6. ročník tradiční výuka	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	48		6	7	11			
Úloha 2	68		58		0	0		
Úloha 3	0	17	52		2	0		
Úloha 4	5	25	28	11	0			
Úloha 5	16		21	10	0			
Úloha 6	5	40	26	4	4		0	
Úloha 7	21		10	8	0			0
Úloha 8	11		18	2	0			0

Tab. 33

6. ročník Hejného metoda	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	50		13	23	22			
Úloha 2	86		84		0	0		
Úloha 3	11	59	84		16	0		
Úloha 4	33	55	64	14	0			
Úloha 5	41		44	9	9			
Úloha 6	23	60	46	6	13		0	
Úloha 7	52		25	44	0			0
Úloha 8	23		31	20	0			0

Tab. 34

prima osmiletého gymnázia	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	87		30	23	13			
Úloha 2	87		80		0	0		
Úloha 3	23	68	67		17	0		
Úloha 4	43	72	60	33	7			
Úloha 5	73		63	30	0			
Úloha 6	37	74	40	0	7		0	
Úloha 7	33		7	57	0			0
Úloha 8	27		47	7	3			0

Tab. 35

6. ročník celkové vyhodnocení	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	54		12	15	15			
Úloha 2	76		69		0	0		
Úloha 3	7	38	64		8	0		
Úloha 4	20	41	44	15	1			
Úloha 5	32		35	33	3			
Úloha 6	15	51	34	2	7		0	
Úloha 7	32		14	26	0			0
Úloha 8	17		26	8	0			0

Tab. 36

7. ročník tradiční výuka	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	46		3	16	15			
Úloha 2	74		41		0	1		
Úloha 3	18	48	41		3	2		
Úloha 4	16	34	44	15	0			
Úloha 5	43		25	14	8			
Úloha 6	13	59	15	4	10		0	
Úloha 7	54		12	20	4			3
Úloha 8	21		29	6	1			3

Tab. 37

7. ročník Hejného metoda	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	46		3	15	13			
Úloha 2	79		38		0	3		
Úloha 3	23	57	41		0	3		
Úloha 4	31	45	38	13	0			
Úloha 5	69		26	26	10			
Úloha 6	18	72	26	4	5		3	
Úloha 7	59		12	60	0			0
Úloha 8	38		31	5	3			0

Tab. 38

sekunda osmiletého gymnázia	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	100	0	12	24	12			
Úloha 2	96	0	68		0	0		
Úloha 3	84	93	36		0	0		
Úloha 4	64	82	76	24	8			
Úloha 5	100		36	28	4			
Úloha 6	60	93	8	0	28		0	
Úloha 7	92		12	60	4			20
Úloha 8	88		72	4	0			28

Tab. 39

7. ročník celkové vyhodnocení	striktní úspěšnost	procentuální úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	52		4	17	14			
Úloha 2	77		44		0	1		
Úloha 3	26	55	41		2	2		
Úloha 4	24	41	47	15	1			
Úloha 5	54		26	18	8			
Úloha 6	19	65	16	4	11		1	
Úloha 7	59		11	26	3			4
Úloha 8	32		34	6	1			5

Tab. 40

3.8.1 Model

Řešení slovních úloh je složitý proces, jehož jednotlivé etapy jsou znázorněny na obr. 1 v oddíle 1.6. Žák nejprve přechází z reálné situace, která je popsána v zadání, k matematizaci této situace a následně k řešení matematické úlohy. Právě při matematizaci vytvářejí někteří řešitelé model, který vhodným způsobem zjednodušuje reálnou situaci při současném zachování informací podstatných pro úspěšné řešení dané úlohy. Modelem tedy budeme rozumět takovou reprezentaci situace dané slovní úlohy (nejčastěji grafickou, ale může být i např. činnostní), která zanedbává skutečnosti nepodstatné a zachycuje jevy podstatné pro hledání řešení. V této práci bude model ztotožněn s jeho grafickou reprezentací, protože ta je jediným zdokumentovatelným důkazem užití modelu[10].

Tato souvislost je v obecné rovině nejednoznačná, protože existují situace, kdy použití modelu může znamenat nižší, ale i vyšší úspěšnost. První z těchto případů reprezentuje situace, kdy žáci řeší úlohy, pro které ještě nemohou mít osvojen formalizovaný postup. Model je pak prakticky jediným způsobem, jak úlohu vyřešit. V druhém případě, kdy žáci

[10] V literatuře je konstrukt, který nazývám modelem, označován různými názvy, např. v (Novotná, 2000) je použit termín „legenda“. Termín model však považuji za bližší jeho běžnému významu v tom smyslu, v jakém je např. fyzikální teorie modelem reality.

formalizovaný postup osvojen mít mohou, pak znamená použití modelu spíše neznalost tohoto postupu a očekávaná úspěšnost řešení při jeho použití je nižší. Vzhledem k tomu, že úlohy v testu lze z hlediska respondentů považovat za nestandardní, předpokládala jsem spíše pozitivní vliv přítomnosti modelu na úspěšnost.

V testu se vyskytly modely při řešení úloh 1, 4, 5, 6, 7 a 8. S výjimkou úlohy 6 bylo řešení pomocí modelu vhodné. V řešení úlohy 6 použití grafického modelu efektivní nebylo, jednoznačně bylo pro žáky 2. stupně výhodnější využití početního řešení, kterého by vzhledem k úrovni svých znalostí měli být schopni. Využití modelu by v řešení této úlohy bylo výhodné při činnostním způsobu řešení, kdy by žáci měli k dispozici 24 předmětů znázorňujících žáky a mohli řešit úlohu manipulací s těmito předměty. Bohužel časový limit stanovený na řešení test tento způsob řešení nepředpokládal. Žáci, kteří se rozhodli pro řešení s využitím grafického modelu, nebyli v této úloze úspěšní hlavně kvůli tomu, že podúloha a) měla 6 řešení a žáci nebyli schopni dostatečné systematičnosti pro nalezení všech. Podúloha b) naproti tomu neměla žádné řešení a k prokázání neexistence řešení se grafický model neosvědčil.

6. ročník	Úloha 1	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 7	Úloha 8	průměrná úspěšnost
úspěšnost žáků v řešení pomocí modelu	77	26	54	61	61	56
úspěšnost žáků v řešení jiným způsobem	50	18	29	22	22	28

Tab. 41 Celkové vyhodnocení výskytu modelů v jednotlivých úlohách v procentech

7. ročník	Úloha 1	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 7	Úloha 8	průměrná úspěšnost
úspěšnost žáků v řešení pomocí modelu	59	41	74	82	62	64
úspěšnost žáků v řešení jiným způsobem	51	21	49	51	30	40

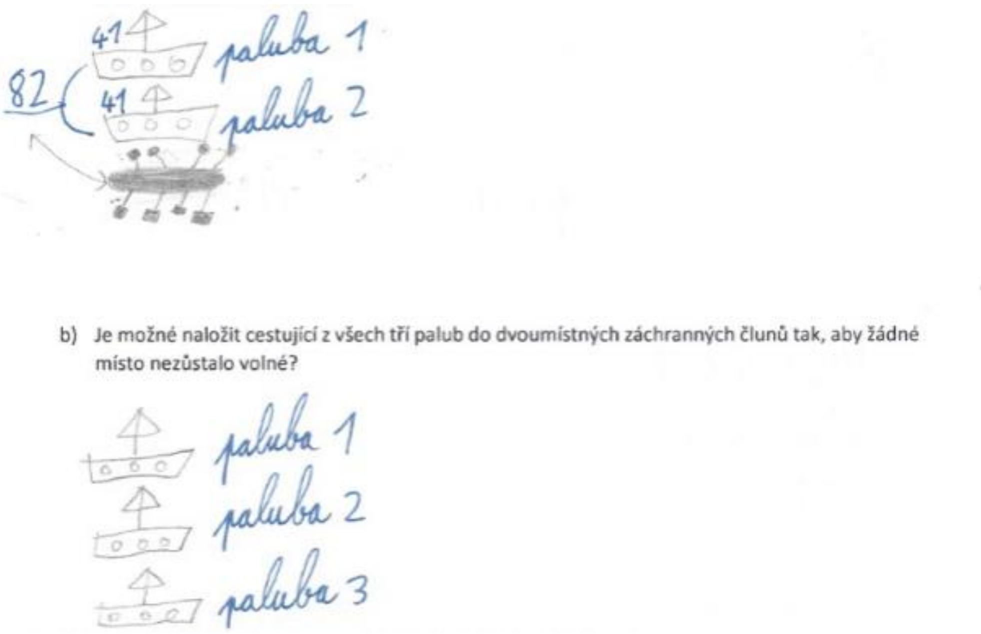
Tab. 42 Celkové vyhodnocení výskytu modelů v jednotlivých úlohách v procentech

Využití modelů k řešení úloh 1, 4, 5, 7 a 8 jednotlivými skupinami je možné zjistit z údajů v tab. 33–40 na začátku tohoto oddílu. Pokud se respondenti rozhodli pro řešení pomocí modelu, byli v řešení úlohy úspěšnější než respondenti, kteří řešili úlohu jiným způsobem, což lze potvrdit údaji z tab. 41 a 42. Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu s využitím modelu, se pohybuje od 26 % do 86 % a je vyšší než úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu jiným způsobem, jejichž úspěšnost se pohybuje od 18 % do 51 %.

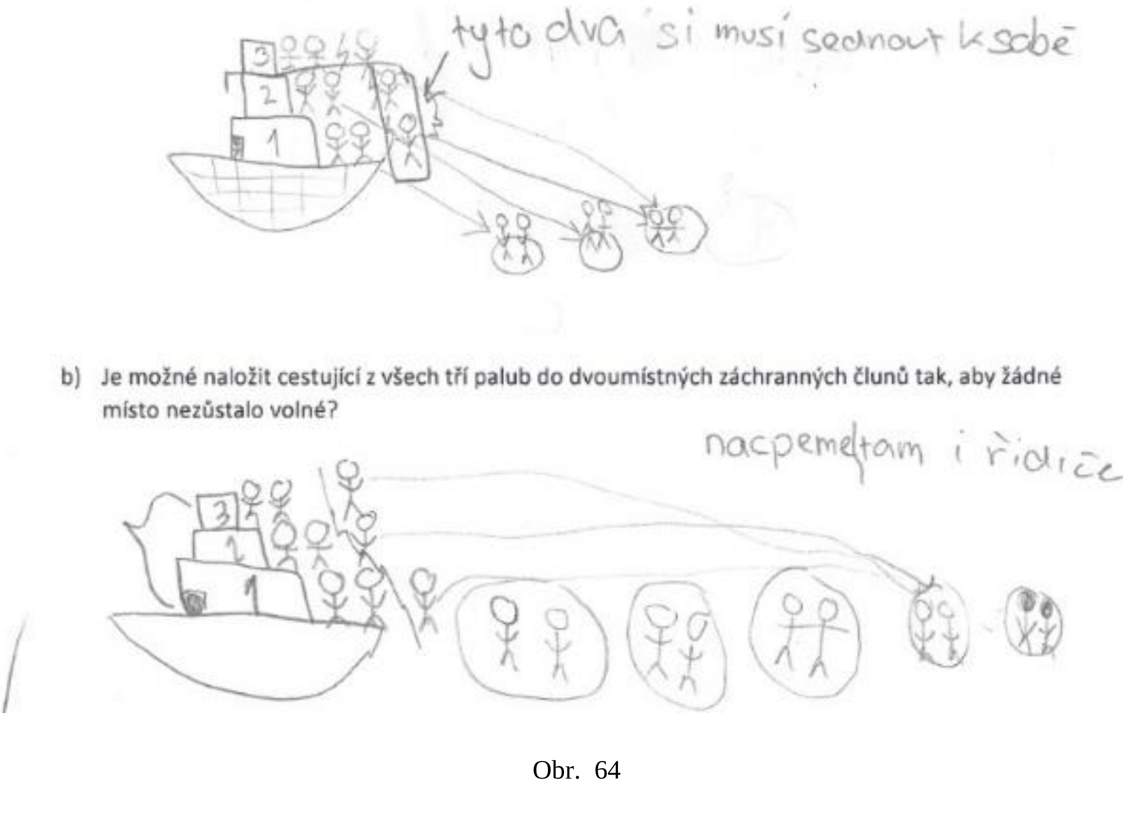
Zřejmě tedy existuje pozitivní souvislost mezi úspěšností řešení a použitím modelu, protože lze očekávat, že žáci, kteří jsou schopni vytvořit matematický model reálné situace, budou schopni řešit danou slovní úlohu.

Pokud bychom chtěli zkoumat závislost úspěšnosti na modelu přesněji, je třeba vzít v úvahu přesnější informace o daném modelu, především míru jeho abstrakce. Míra abstrakce modelů ukazuje na schopnost respondenta abstrahovat od irelevantních informací, a naopak zachovat jevy nutné k nalezení správného řešení.

Různou míru abstrakce jednotlivých řešení dokládá následující série modelů. Na obr. 63 je vidět model, který ke správnému řešení nevedl. Žák nebyl schopen potlačit informace nepodstatné pro řešení úlohy, které vystupují do popředí, a skutečnosti zásadní jsou naopak potlačeny na úroveň okrajových informací. Z toho důvodu žák není schopen určit podle svého modelu správný výsledek. Obr. 64 zachycuje o něco málo abstraktnější model, z něhož je možné určit správné řešení podúlohy a). V řešení podúlohy b) ale žák selhává, protože je ovlivněn reálným kontextem úlohy a do člunu „cpe řidiče“, zřejmě proto, aby využil prázdné místo. Model z obr. 65 vykazuje vyšší míru abstrakce než předešlé modely, protože tento žák pochopil, že pro řešení je podstatný počet cestujících, které znázornil kresbami postav a lodě přitom zanedbal. Na obr. 66 už žák pracuje pouze s počtem teček, které nahradily kreslené postavičky. Poslední model na obr. 67 je nejabstraktnější ze všech použitých modelů, protože počet cestujících, které lze rozdělit po dvojicích, je zde znázorněn čárou a žák pracuje pouze s jednotlivci, kteří z palub 1–3 zbydou. Ačkoliv v modelu na obr. 67 jsou použita konkrétní čísla a v modelu na obr. 66 ne, nelze se domnívat, že model z obr 66 je abstraktnější, protože i v něm jsou obsažena čísla skrytě v počtu teček. Model z obr. 67 je abstraktnější, protože libovolný sudý počet cestujících je nahrazen přímkou. Tento model je jednoznačně abstraktnější a univerzálnější.


41
paluba 1
82
41
paluba 2
b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?
paluba 1
paluba 2
paluba 3

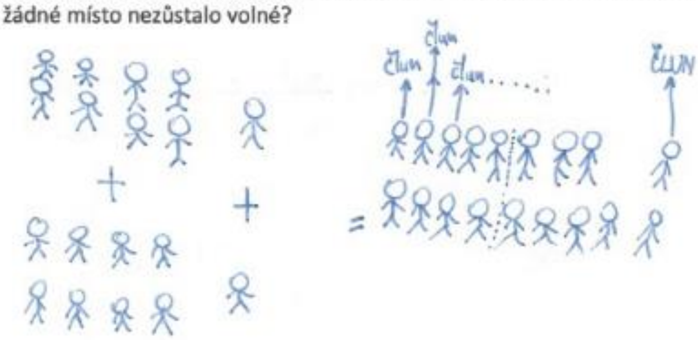
Obr. 63


tyto dva si musí sednout k sobě
3
2
1
b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?
nacpeme tam i řidiče
3
2
1

Obr. 64

1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.

   a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?



ANO

   b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

Když se sečtou všichni cestující vyjde nám liché číslo → jedno místo zůstane volné

NE

Obr. 65

1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.

   a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

např.:

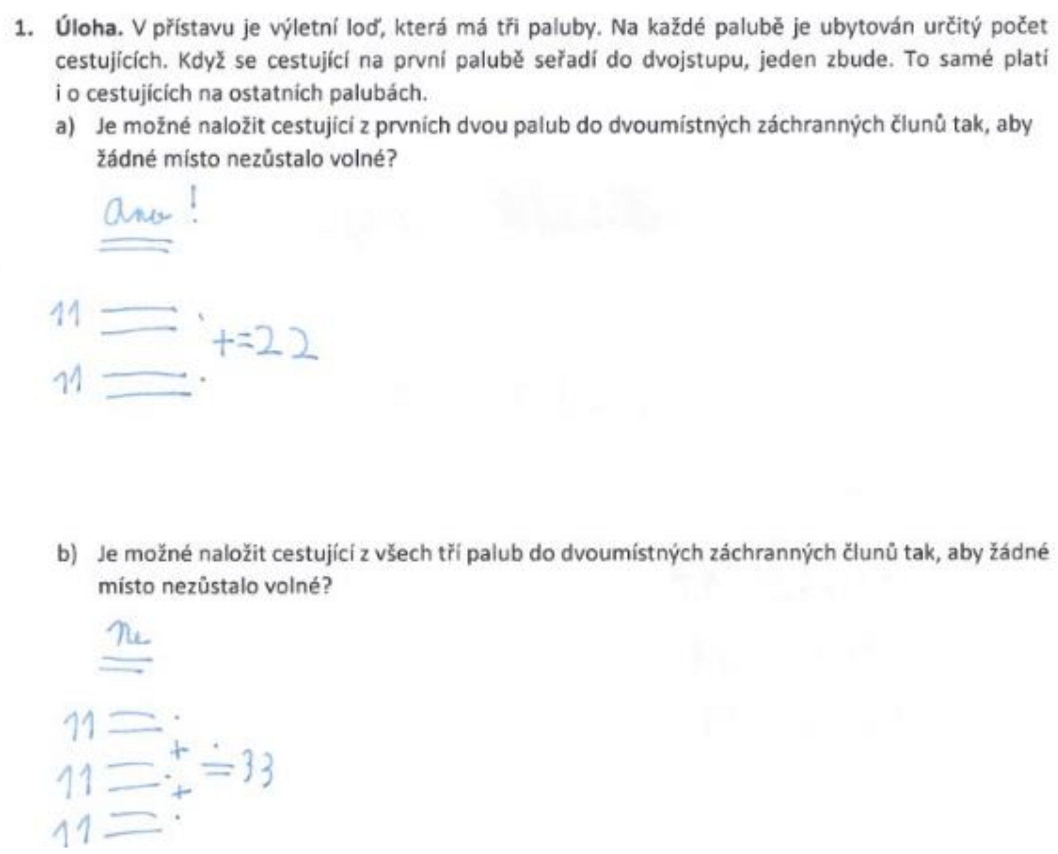
ano. Protože na každé palubě přebývá 1 cestující.

   b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

ne. Protože by jeden cestující přebýval.

např.:

Obr. 66



1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.
   a) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

   ano !

   11 + = 22
   11

   b) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

   ne

   11
   11 + + = 33
   11

Obr. 67

Metodologie mého výzkumu je kvantitativní. V této podkapitole jsem se zabývala jevy, které svou podstatou patří spíše do kvalitativního popisu řešitelských strategií, zkoumám je ovšem opět kvantitativním způsobem (pomocí četností výskytu). Výjimkou je jen závěrečná kvalitativní analýza úrovně abstrakce modelů. Více moje data sebraná za účelem kvantitativní analýzy prakticky ani neumožňují. Hlubší zkoumání uvedených jevů by tedy vyžadovalo speciální výzkum s odlišnými výzkumnými nástroji a metodologií.

3.9 Vlastnosti testu a jeho reflexe

V této podkapitole se zabývám některými vlastnostmi testu použitého jako výzkumný nástroj, souvislostí výsledků respondentů s jejich výsledky v matematice a též metodologickou reflexí především znění úloh.

3.9.1 Konzistence testu

Jedním z důležitých parametrů, které se posuzují u testů používaných jako výzkumné nástroje, je jejich vnitřní konzistence a reliabilita. Nejčastěji používaným konstruktem kvantifikujícím konzistenci je tzv. Cronbachovo alfa. To nabývá hodnot z intervalu

$\langle 0; 1 \rangle$, přičemž vyšší hodnota znamená vyšší konzistenci testu v tom smyslu, že testované otázky měří stejný faktor (Tavakol, Dennick, 2011).

U testů, jejichž cílem je měřit jeden faktor, se za prahovou hodnotu, od níž lze mluvit o vysoké konzistenci, zpravidla považuje hodnota 0,7 (Tavakol, Dennick, 2011, str 54). Můj test nebyl konstruován s tímto záměrem. Cílem bylo pokrýt téma dělitelnosti, což může zahrnovat testování více nezávislých faktorů (dovedností). Jak se však ukázalo, konzistence testu na testovaném vzorku respondentů je poměrně vysoká, Cronbachovo alfa má hodnotu 0,67. Test lze tedy vzhledem k okolnostem považovat za dosti konzistentní a je též pravděpodobné, že o úspěšnosti dominantně rozhodoval jeden faktor (dovednost).

3.9.2 Souvislost úspěšnosti v testu s výsledky v matematice

Při realizaci výzkumu jsem se snažila zjistit u všech žáků jejich známku z matematiky na posledním vysvědčení. Známky jsem zjistila u všech žáků osmiletého gymnázia i u všech žáků ZŠ, kteří jsou vyučováni Hejného metodou. U žáků ZŠ, kteří jsou učeni tradičním způsobem výuky, jsem zjistila známku z matematiky u 78 z 113 žáků 6. ročníku a u 71 z 157 žáků 7. ročníku. Následující tab. 43 obsahuje srovnání úspěšností celé skupiny žáků ZŠ učených tradičním způsobem s výběrem žáků z této skupiny, u nichž jsem zjistila známku z matematiky. Při bližším prozkoumání je patrné, že vybraný soubor žáků se známkou na vysvědčení má výsledky srovnatelné s celým souborem všech žáků, kteří jsou učeni tradičním způsobem. Z toho důvodu je možné žáky se známkou z matematiky pro účely této kapitoly považovat za reprezentativní vzorek skupiny všech žáků ZŠ, kteří jsou učeni tradičním způsobem.

Tradiční výuka	6. ročník				7. ročník			
	SÚ (procenta)		PÚ (procenta)		SÚ (procenta)		PÚ (procenta)	
	bez známky	se známkou	bez známky	se známkou	bez známky	se známkou	bez známky	se známkou
Úloha 1	48	57			46	46		
Úloha 2	68	67			74	76		
Úloha 3	0	0	17	18	18	20	48	50
Úloha 4	5	3	25	27	16	15	34	32
Úloha 5	16	16			43	35		
Úloha 6	5	5	40	42	13	16	59	64
Úloha 7	21	29			54	51		
Úloha 8	11	13			21	17		
Celkem	22	24	31	34	36	35	46	47

Tab. 43

Vysvětlivky k této tabulce čtenář najde na začátku oddílu 3.5.

Známky na vysvědčení považuji pouze za pomocný ukazatel, protože mohou být ovlivněny mnoha faktory. Známky na vysvědčení jsou hodnocením za celé pololetí, a proto se do nich promítne hodnocení všech probraných témat, nejen dělitelnosti. Samozřejmě by bylo více vypovídající, kdyby se zkoumal vztah úspěšnosti v testu k hodnocení výsledků v tématu dělitelnost. Takové údaje by se ale zjišťovaly mnohem obtížněji. Dalším faktorem je styl hodnocení konkrétního učitele matematiky. Styly hodnocení mohou být velmi rozdílné. Rovněž i styl výuky se do hodnocení promítne, někteří učitelé se zaměřují spíše na rozsah znalostí a kvalitou těchto znalostí se nezabývají, jiní považují za podstatné, zda jsou znalosti formální či neformální. Další faktor, který bych ráda zmínila, má spíše psychosociální charakter, ale do známek se může výrazně promítnout: ve známkách v matematiky se totiž můžou odrazit i přirozené změny chování, ke kterým dochází u žáků mezi 12. a 15. rokem, kdy nastupující puberta může snížit předpoklady pro dlouhodobou a systematickou práci v předmětu (tomu by nasvědčoval i podstatně horší průměr sedmáků), aniž by snížila schopnost řešit bezkontextový test zaměřený na neformální poznatky.

Vztah mezi úspěšností v testu a známkou z matematiky na posledním vysvědčení jsem vyjádřila pomocí korelačního koeficientu. Pro každou skupinu žáků jsem počítala dvě hodnoty korelace, a to korelaci striktní úspěšnosti se známkou z matematiky a korelaci procentuální úspěšnosti se známkou z matematiky. Dvě hodnoty korelačního koeficientu pro každou se sledovaných skupin žáků udávají tab. 44 a 45. Závislost striktní úspěšnosti a známek na vysvědčení udává korelace S a závislost procentuální úspěšnosti a známek na vysvědčení udává korelace P. Hodnoty korelačního koeficientu vycházejí ve všech zkoumaných skupinách kladné, i když poměrně nízké. Pohybují se od 0,16 do 0,59. Přesto ve všech skupinách kromě obou skupin gymnazistů jsou hodnoty korelace S a P na hladině pravděpodobnosti 0,05 statisticky významné, jak je patrné z tab. 44 a 45. U skupin, kde korelace významné jsou, jsou významné dokonce i na hladině 0,001.

Statistická nevýznamnost korelace u gymnazistů je dána specifičností dat, která mají malou rozlišovací schopnost. V primě osmiletého gymnázia je tato specifičnost na straně známek z matematiky, kdy 28 žáků je hodnoceno známkou 1 a zbylí dva žáci známkou 2. Rozlišovací schopnost takovéhoto hodnocení je velmi nízká a neumožňuje vysokou korelaci s mnohem více rozlišující hodnotou úspěšnosti v testu. Sekunda osmiletého gymnázia má naopak specifické výsledky úspěšnosti v testu. Celková průměrná úspěšnost je 86 % (SÚ) resp. 93 % (PÚ). Nízkou rozlišovací schopnost má tedy v tomto případě právě úspěšnost (neboť takřka perfektních výsledků dosáhli všichni včetně relativně slabých žáků).

Nejvyšší hodnoty korelací vycházejí u žáků, kteří jsou učeni Hejného metodou, o něco nižší hodnoty jsou u žáků s tradičním způsobem výuky. U žáků 6. ročníků je rozdíl v korelaci mezi těmito dvěma skupinami zanedbatelný, u žáků 7. ročníků je rozdíl větší. Zatímco u žáků, kteří jsou učeni tradiční metodou, mají dvě zmíněné korelace hodnotu 0,41 a 0,42, u žáků, kteří jsou učeni Hejného metodou, má korelace hodnotu 0,54 a 0,59. Domnívám se, že hodnoty korelace v této skupině jsou nejvyšší, protože hodnocení v těchto třídách je více založeno na kritériích, které byly ověřovány mým testem z dělitelnosti.

Ve všech případech, kdy jsou korelace statisticky významné, vyšla korelace P vyšší než korelace S (ovšem až na skupinu 6. ročníku ZŠ s tradiční výukou ne statisticky významně). Nabízející se interpretaci, tedy, že žáci s lepší známkou z matematiky jsou relativně lepší v nalezení některých řešení než v nalezení úplného řešení, by bylo nutné podpořit zvláštním výzkumem.

6. ročník	Známka z M	Striktní / Procentuální	Úspěšnost (procenta)	Korelace	T	$t_{0,05}$
Tradiční výuka	2,22	S	24	0,43	4,15	1,99
		P	34	0,53	5,45	1,99
Hejného metoda	1,66	S	40	0,45	3,97	2,00
		P	53	0,46	4,08	2,00
Osmileté gymnázium	1,37	S	51	0,16	0,86	2,05
		P	65	0,17	0,91	2,05
Celkové vyhodnocení	1,87	S	34	0,49	7,33	1,97
		P	47	0,55	8,59	1,97

Tab. 44

Vysvětlivky:

SÚ – striktní úspěšnost

PÚ – procentuální úspěšnost

Známka z M – průměrná známka z matematiky na posledním vysvědčení

Korelace S – korelace striktní úspěšnosti a známky z matematiky na vysvědčení

Korelace P – korelace procentuální úspěšnosti a známky z matematiky na vysvědčení

T – testovací kritérium

$t_{0,05}$ – kritická hodnota pro hladinu pravděpodobnosti 0,05

7. ročník	Známka z M	Striktní / Procentuální	Úspěšnost (procenta)	Korelace	T	$t_{0,05}$
Tradiční výuka	2,51	S	35	0,41	3,73	1,99
		P	46	0,42	3,87	1,99
Hejného metoda	2,51	S	46	0,54	3,85	2,03
		P	58	0,59	4,44	2,03
Osmileté gymnázium	2,24	S	86	0,32	1,63	2,07
		P	93	0,29	1,47	2,07
Celkové vyhodnocení	2,48	S	47	0,40	5,11	1,98
		P	58	0,43	5,50	1,98

Tab. 45

3.9.3 Reflexe provedení testu a znění úloh

Test jsem doručila buďto osobně nebo v elektronické podobě i s podrobnými instrukcemi k zadávání testu do všech škol, které se zúčastnily výzkumu. Nejlépe se mi osvědčilo osobní jednání, které však nebylo vzhledem k rozsahu výzkumu vždy možné. Drobné nejasnosti, které vznikly při administraci testu, se mi ve všech případech podařilo odstranit. Výsledky všech jednotlivých úloh byly v rámci skupin konzistentní, nepředpokládám tedy, že by partikulární okolnosti administrace významně ovlivnily výsledky testu.

Test byl primárně určen pro žáky 7. ročníků základních škol, nikoliv žáky víceletých gymnázií. To také potvrdily obě dvě skupiny žáků 7. ročníku ZŠ učené tradičním způsobem a Hejného metodou, jejichž celková striktní úspěšnost v testu byla 36 a 47 %. Ve dvou případech došlo k oříznutí výsledků z obou stran, v případě šesťáků učených tradičním způsobem zdola ve striktní úspěšnosti v úloze 3 a u žáků sekundy osmiletého gymnázia shora v úlohách 1 a 5. Nepokládám však toto oříznutí za významný nedostatek testu, protože nulový bodový zisk získali šesťáci učeni tradičním způsobem pouze ve striktní úspěšnosti, jejich procentuální úspěšnost nulová nebyla. Naopak pro žáky sekundy osmiletého gymnázia byl test pravděpodobně příliš snadný, ale zvýšením jeho obtížnosti bychom přišli o zajímavé výsledky, které přineslo řešení testu žáky základních škol. Z mého pohledu byl test pro cílové skupiny optimálně vyladěný a skutečně testoval znalosti žáků z dělitelnosti. Bylo by obtížné vyladit test lépe vzhledem v různorodosti skupin.

Při realizaci experimentu jsem získala některé cenné zkušenosti, které pro mě byly podnětem pro navržení některých úprav v zadání testu. Těchto nedostatků jsem si při tvorbě testu nebyla vědoma, vyplynuly až z vyhodnocování testu. Tyto drobné nedostatky buď způsobovaly nejednoznačnost zadání, v důsledku něhož mohlo dojít k jeho špatnému pochopení respondenty, nebo ztěžovaly vyhodnocení testu, protože např. nebylo možné zjistit, jakého druhu chyby se respondent dopustil.

Úloha 1

Tato úloha v testu splnila účel, pro který byla vytvořena. Vyhovuje potřebám mého testu. Navrhuji ale znění úlohy pozměnit tak, aby do ní mohla být zahrnuta podúloha c) z úlohy 5, protože tato podúloha spíše testuje znalosti a dovednosti ověřované v úloze 1 než ty, které jsou potřeba k úspěšnému řešení v podúlohách a) a b) v úloze 5.

Zadání úlohy 1 bych modifikovala takto:

V přístavu je výletní loď, která má čtyři paluby. Paluby jsou označeny čísly 1 až 4. Na každé z nich je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na každé z palub 1, 2 a 3 seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To neplatí o cestujících z paluby 4.

a) Je možné naložit cestující z palub 1 a 2 do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?
b) Je možné naložit cestující z palub 1, 2 a 3 do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?
c) Je možné naložit cestující z palub 1 a 4 do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

Dále bych změnila pořadí úloh 1 a 2, protože obtížnost úlohy 2 nižší než obtížnost úlohy 1.

Úloha 2

Z důvodu větší přesnosti zadání bych znění této úlohy přeformulovala takto: „Čísla, která jsou beze zbytku dělitelná třemi, zakroužkuj a čísla, která nejsou dělitelná třemi, označ křížkem.“ Pak by totiž bylo možné rozlišit, zda žák neodpovídal nebo zda si myslí, že číslo třemi beze zbytku dělit nelze.

Úloha 3

Vzhledem k výsledkům šesťáků učených tradičním způsobem bych snížila náročnost úlohy. I když se zdá, že úloha by měla být jednoduchá a pro žáky po výuce dělitelnosti bez problémů řešitelná, není tomu tak. Je to patrně způsobeno existencí více správných řešení v podúlohách a) a c) a neexistencí řešení v podúloze b). Obtížnost úlohy bych snížila např. touto změnou v zadání:

Doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem:

a) pěti 77_ ______________________

b) dvěma 3_1 ______________________

c) devíti 4_6 ______________________

Úloha 4
Tato úloha splnila účel, pro který byla do testu zařazena, a proto bych ji neměnila.

Úloha 5
V této úloze jsem se nevyhnula překlepu v zadání, který ale neměl vliv na matematickou správnost ani srozumitelnost. Úloha splnila svůj účel a je pro účely testu vhodná. Přesto navrhuji úlohu zkrátit o podúlohu c). Tato změna se mi zdá výhodná, protože zjednodušuje vyhodnocování testu. Již není třeba zjišťovat závislost podúlohy c) na podúlohách a) a b), jak je uvedeno v oddílu 3.7.2.1. Podúloha c) se dá bez větších obtíží začlenit do úlohy 1.

Úloha 6
Ačkoliv se tato úloha vyskytuje v tradičních učebnicích, pro žáky byla nečekaně obtížná obzvlášť z hlediska úplnosti zadání. V zadání této úlohy bych upřesnila, že skupina je dvou a vícečlenné seskupení žáků a že celá třída není rozdělení do skupin.

Úloha 7
Zadání této úlohy bych pozměnila tak, aby k jejímu řešení bylo třeba nalezení nsn dvou čísel, nikoliv jen jakéhokoliv společného násobku těchto čísel. Znění úlohy by bylo následující:

Z letiště vylétají letadla na lince A každý šestý den a letadla na lince B každý osmý den. Dnes odlétají obě letadla. Za kolik dní nejdříve budou letadla opět odlétat z letiště společně?

Předpokládám, že by se tím náročnost úlohy zvýšila, protože prosté vynásobení čísel 6 a 8 by nevedlo ke správnému řešení.

Úloha 8
Tato úloha splnila účel, pro který byla do testu zařazena. Neměnila bych ji.

Domnívám se, že mnou sestavený test, coby výzkumný nástroj, splnil svou funkci, protože skutečně testoval to, co jsem od něho očekávala.

3.10 Diskuse

Znalosti žáků z dělitelnosti v nižších ročnících 2. stupně nejsou v dostupné literatuře domácí ani zahraniční zkoumány. Materiály věnující se dělitelnosti na ZŠ jsou prakticky výhradně metodického charakteru (Ficek, 2015; Šeráková, 2011). Zjištěné výsledky není přímo s čím porovnat, proto je tato diskuze spíše souhrnem základních výsledků než porovnáváním s dosavadními poznatky a jejich rozvinutím.

Zkoumala jsem znalosti žáků 6. a 7. ročníku písemným testem. Protože mým cílem bylo zkoumat především znalosti neformální, byla převážná většina úloh v testu nesignálního charakteru (viz poznámka na str. 82). Zjistila jsem, že vliv výuky dělitelnosti na neformální znalosti je poměrně malý, neboť průměrná úspěšnost žáků po výuce nebyla výrazně vyšší než úspěšnost žáků před výukou. 1. testovanou hypotézu tedy považuji za splněnou.

Porovnání úspěšnosti skupin

Výsledky testu odhalily rozdíly v úspěšnostech mezi jednotlivými skupinami, které se účastnily výzkumu. Ve skupinách žáků 6. i 7. ročníku měli v testu nejvyšší celkovou úspěšnost žáci osmiletého gymnázia, druhou nejvyšší žáci základních škol vyučovaní Hejného metodou a nejslabších výsledků v testu dosáhli žáci základních škol vyučovaní tradičním způsobem. To potvrzuje první část mé 2. výzkumné hypotézy a 3. výzkumnou hypotézu. Stejné pořadí úspěšnosti bylo i v jednotlivých úlohách v obou ročnících s výjimkou jedné úlohy v 6. ročníku, kde žáci vyučovaní Hejného metodou předstihli i gymnazisty. Obecně byla úspěšnost žáků vyučovaných Hejného metodou v 6. ročníku bližší úspěšnosti žáků gymnázia, v 7. ročníku blíže k žákům ZŠ vyučovaných tradičním způsobem. Tyto výsledky jsou však ovlivněny odlišnou relativní úrovní žáků 6. a 7. tříd vyučovaných Hejného metodou, kteří se zúčastnili výzkumu (viz kap. 3.3). Žáci sekundy osmiletého gymnázia dosáhli výrazně nejvyšší úspěšnosti ze všech sledovaných skupin.

Porovnání rozdílů úspěšnosti 6. a 7. ročníků

V celkovém vyhodnocení dopadli žáci 7. ročníku lépe než žáci 6. ročníku ve všech skupinách. Rozdíl byl nejvýraznější u žáků osmiletého gymnázia, následovaný rozdílem u žáků učených tradičním způsobem. Nejmenší rozdíl v celkové úspěšnosti byl mezi šesťáky a sedmáky vyučovanými Hejného metodou; sedmáci byli úspěšnější pouze v řešení čtyř z osmi testových úloh.

Obecně výsledky testů potvrdily, že úspěšnost při řešení úloh byla u žáků 7. ročníku výrazně vyšší v těch úlohách, při jejichž řešení mohli sedmáci využít předchozích znalostí z dělitelnosti, ať již formálních nebo neformálních. Úspěšnost naopak byla jen o málo (či vůbec) vyšší u úloh, které mohli šesťáci úspěšně řešit i jinými, jim známými algoritmy, než jsou probírány v tématu dělitelnosti. Rozdíl v úspěšnosti mezi šesťáky a sedmáky byl rovněž zanedbatelný v řešení úloh, kde dělitelnost nebyla nijak signalizována, nebo se žáci s těmito úlohami neměli možnost setkat v rámci tradiční výuky na ZŠ.

Kvalitativní výsledky – použití modelů

Při řešení úloh respondenti využívali velké množství různých typů modelů, které se od sebe významně lišily obzvlášť mírou abstrakce. Obecně můžeme tvrdit, že respondenti, kteří využili ke svému řešení úlohy model, byli úspěšnější než respondenti, kteří model nevyužili. Modely vytvářeli jak šesťáci, tak sedmáci, v míře abstrakce těchto modelů jsem nezaznamenala žádné podstatné rozdíly. Modely se výrazně více objevovaly v řešení žáků osmiletého gymnázia a skupiny žáků vyučovaných Hejného metodou, což potvrzuje druhou část 2. výzkumné hypotézy. Četnost výskytu modelů v rámci těchto skupin se výrazně lišila u jednotlivých úloh.

Vlastnosti testu, korelace se známkami

Test, přestože nebyl koncipován za tímto účelem, vykázal poměrně vysokou míru konzistence (Cronbachovo alfa 0,67).

Úspěšnost v testu pozitivně koreluje se známkami z matematiky, a to ve všech sledovaných skupinách. Ve skupině žáků vyučovaných Hejného metodou u žáků 7. ročníku je korelace se známkami nejvyšší. Naopak nejnižší korelaci úspěšnosti v testu se známkou z matematiky mají obě skupiny žáků osmiletého gymnázia. Zde korelace nedosahuje ani hranice statistické významnosti.

Použitelnost metody

Na základě předpokladu, že znalosti žáků vyučovaných tradičně jsou přinejmenším stejně formální jako znalosti žáků vyučovaných Hejného metodou, jsem učinila závěr, že mnou sestavený test se nedá použít k ověření formálnosti a neformálnosti poznatků pouhým porovnáním úspěšnosti žáků před a po výuce dělitelnosti. Na úspěšnost žáků v testu pravděpodobně měly vliv i jiné faktory (např. vyšší úroveň obecných kognitivních schopností u žáků 7. ročníku) než pouze formálnost a neformálnost jejich poznatků. Test je ovšem použitelný k testování znalostí žáků 6. a 7. ročníku z dělitelnosti i k porovnávání skupin z různých typů škol a vyučovaných různými metodami, protože prokázal schopnost rozlišovat jak mezi skupinami, tak uvnitř skupin.

Závěr

Mým záměrem bylo zachytit co nejšířeji výuku dělitelnosti v České republice, což je samozřejmě velmi rozsáhlý cíl. Svůj výzkum jsem proto zúžila na dva hlavní cíle se samostatnou metodologií, výsledky a diskuzí.

Mým prvním výzkumným cílem bylo zmapování učebnic z hlediska propedeutiky a výuky dělitelnosti. Nejprve jsem si vybrala reprezentativní vzorek učebnic, ve kterých se objevovala propedeutika dělitelnosti a zkoumala jsem, v kterých fázích výuky se žáci na základní škole v matematice setkávají s propedeutikou dělitelnosti. Učebnice jsem rozdělila do dvou skupin, na tradiční učebnice a učebnice pro výuku Hejného metodou. Jak totiž vyplynulo z porovnávání učebnic učebnice pro konstruktivistický styl výuky se zásadně liší od všech ostatních učebnic, naproti tomu učebnice pro tradiční styl výuky jsou si více méně podobné, odlišují se jen některými detaily, což jsem se snažila zachytit v tabulce v příloze A, která shrnuje výsledky mého výzkumu zabývajícího se výzkumem učebnic. Dále jsem mapovala všechny učebnice schválené MŠMT, které obsahují výuku dělitelnosti, což bylo 10 tradičních učebnici pro 2. stupeň a 3 učebnice pro výuku Hejného metodou z toho 2 učebnice pro 1. a jedna pro 2. stupeň. Pro doplnění mého výzkumu jsem se rozhodla udělat ještě rozhovory s učiteli, abych přesněji vykreslila obraz školské reality výuky dělitelnosti. Uvědomuji si totiž, že učebnice vypovídají mnohé o výuce ve školách, ale nejsou schopny zachytit realitu zcela přesně, protože každý učitel si může znění učebnic přizpůsobit podle potřeb svých a potřeb svých žáků.

Ve svém druhém výzkumu jsem zjišťovala znalosti žáků z dělitelnosti se zvláštním zřetelem na formálnost. Formálnost a neformálnost znalostí mě zajímala, protože si uvědomuji, že pouhé ověřování znalostí bezprostředně po probrání daného tématu v kontextu známých úloh může naši představu o přetrvávajících znalostech a dovednostech žáků zkreslovat. V testech, které jsem k ověřování znalostí sestavila, jsem se proto soustředila nejen na to, zda žáci ověřované vědomosti mají, ale i na to, zda je dokáží použít ve vhodné situaci mimo napovídající kontext. Test proto obsahuje z převážné části nesignální úlohy, určené k ověřené formálnosti a neformálnosti poznatků, a nevyskytují se v něm termíny typické pro téma dělitelnost. Vynechání pojmů z teorie dělitelnosti mělo ještě jeden důležitý důvod: úlohy formulované bez nich bylo možné kromě žáků 7. tříd po výuce dělitelnosti zadat i žákům 6. tříd před touto výukou a zjistit tak její přínos.

Také mě napadlo rozdělit sledované skupiny žáků na žáky ZŠ vyučované tradičním způsobem, žáky ZŠ vyučované Hejného metodou a žáky osmiletého gymnázia. Získané výsledky jsem pak mohla vyhodnocovat z několika hledisek. Dále jsem též zjišťovala, zda je použitá metoda vhodná pro diagnostiku formálních a neformálních znalostí.

Vzhledem k rozsáhlosti vzorku respondentů, kteří se zúčastnili výzkumu, považuji své závěry za validní a hodnotné. Na moji práci je možné různými způsoby navázat. Rozšířením mého výzkumu by mohl být např. kvalitativní výzkum znalostí žáků, zaměřený na tvorbu modelů, protože právě schopnost vytvoření modelu se často ukázala být zásadní pro úspěšnost při řešení úlohy. Pokračováním mého výzkumu učebnic by pak mohl být výzkum přístupu učitelů k výuce dělitelnosti. Jejich přístup by bylo nutné zjišťovat přímým výzkumem průběhu výuky a její kvality.

Seznam použité literatury

Bradis, M. V. (1953). *Metodika vyučování matematice na střední škole*. Praha: SPN.

Fontana, D., (1997). *Psychologie ve školní praxi*. Praha: Portál.

Fridman, L., M., (1977). *Logiko-psychologičeskij analiz školnych učebnich zadač.* Moskva: Pedagogika,

Hejný, M., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Hrdina, L., Repáš, V., & Vantuch, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2,* Bratislava: SPN.

Hejný, M., & Kuřina F. (2009). *Dítě, škola, matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. vyd. Praha: Portál.

Hejný, M. (2014). Vyučování matematice orientovaná na budování schémat: aritmetika 1. stupně. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2001). Pedagogický slovník. Praha: Portál.

Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). Číselné představy dětí. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Novotná, J., (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Tavakol, M., & Dennick, R. (2011). Making sense of Cronbach´s alpha. *Internation journal of MedicalEeducation*, 2, 53–55

Vyšín, J., (1962). *Metodika řešení matematických úloh*. Praha: SPN.

Učebnice pro 1. stupeň

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J., & Michnová, J. (2009). *Matematika učebnice pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J., & Michnová, J. (2009). *Matematika příručka pro učitele pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D., & Bomerová, E. (2010). *Matematika učebnice pro 4. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D., Bomerová, E., & Michnová, J. (2011). *Matematika učebnice pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus.

Učebnice pro 2. stupeň

Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2007). *Matematika 6 učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika*. Plzeň: Fraus.

Cihlář, J., & Zelenka, M. (1997) *Matematika 6*, Praha: Pythagoras Publishing a. s.

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Lávička, M., & Potůček J. (2008). *Matematika 6 pro 6. ročník základní školy*. Praha: Fortuna.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2003). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Dělitelnost*. Praha: Prometheus.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Bomerová, E. (2015). *Matematika A, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, Praha: H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A., (2015). *Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, Praha: H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., Jirotková, D., & Sukniak, A., (2015). *Matematika AB, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, Praha: H-mat.

Jedličková, M., Krupka, P., & Nechvátalová J. (2013). *Matematika: Dělitelnost*. Brno: Nová škola.

Molnár, J., Kopecký, J., Lišková, H., Novák, B., & Slouka, J. (1998). *Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (1997*). Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl: Desetinná čísla, dělitelnost*. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (1998*). Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 6. ročník základní školy*. Praha: Prometheus.

Půlpán, Z., & Čihák, M. (2007). *Matematika 6 pro základní školy: Aritmetika*. Praha: SPN.

Rosecká, Z. & Čuvajová, V. (1997). *Aritmetika učebnice pro 6. ročník*. Brno: Nová škola.

Šarounová, A., Mareš, J., Růžičková, J., & Väterová, V. (1999). *Matematika 7, 1. díl*. Praha: Prometheus, spol. s r. o.

Elektronické zdroje

Ficek, T. (2015) *Teorie čísel ve výuce matematiky na ZŠ*. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. dostupné z: http://is.muni.cz/th/252914/pedf_m_a2/

Hejný, M. (2004). Mechanismus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (eds.). Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl, (23–42). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta dostupné z: http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/25KapitolZDM.pdf

Hrbáčková, K. (2006). Aspekty konstruktivismu ve vzdělání. In Nezvalová, D. (Ed) Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání: Úvodní studie, (7–17). Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědná fakulta, dostupné z: http://www.science.upol.cz/uvodni_studie.pdf

Šeráková, A. (2011) *Dělitelnost v oboru přirozených čísel*. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, dostupné z: http://is.muni.cz/th/185758/pedf_m/Diplomova_prace.pdf

Šíma, F. (2013). *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*. Disertační práce. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědná fakulta, dostupné z: https://theses.cz/id/cjesg3/00175150-959273041.pdf

Vondrová, N. (2014). *Úvod do didaktiky matematiky*, Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, dostupné z: http://vzdelavani-dvpp.eu/download/opory/18vondrova68.kn.bl.TISK.pdf

Přílohy

Seznam příloh:

Příloha A – Podrobná tabulka výsledků výzkumu věnovaného rešerším učebnic obsahujících výklad tématu dělitelnost.

Příloha B – Souhrnné tabulky kvantitativních i kvalitativních výsledků v testu jednotlivých skupin a celku po úlohách. Všechny údaje v tabulkách jsou v procentech**.**

Příloha C – Plné znění testu administrovaného respondentům.

Příloha A

Obsah této přílohy je kvůli formátu zpracování přiložen v souboru Excel (Příloha A přehledová tabulka učebnic) a též je přiložen k tištění verzi práce na listu velikosti A2.

Příloha B

6. ročník tradiční výuka		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	70	62	54	54			48	6	7	11			
	úloha 1 b)	67	57	50	50									
Úloha 2		89	88	68	68			68	58		0	0		
Úloha 3	uloha 3 a)	77	69	53	2	11	17	0	52		2	0		
	uloha 3 b)	56	42	14	14	15								
	uloha 3 c)	64	62	50	2	27								
Úloha 4		81	75	44	5	25	25	5	28	11	0			
Úloha 5	úloha 5 a)	70	62	27	27			16	21	10	0			
	úloha 5 b)	69	64	24	24									
	úloha 5 c)	67	61	36	36									
Úloha 6	úloha 6 a)	72	70	69	10	42	40	5	26	4	4		0	
	úloha 6 b)	56	47	24	21	23								
Úloha 7		57	45	20	20			21	10	8	0			0
Úloha 8		60	48	11	11			11	18	2	0			0

6. ročník Hejného metoda		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	69	61	58	58			50	13	23	22			
	úloha 1 b)	70	63	53	55									
Úloha 2		98	98	86	86			86	84		0	0		
Úloha 3	uloha 3 a)	97	94	89	39	50	59	11	84		16	0		
	uloha 3 b)	95	88	70	70	70								
	uloha 3 c)	97	92	83	19	52								
Úloha 4		92	88	78	31	55	55	33	64	14	0			
Úloha 5	úloha 5 a)	77	77	66	66			41	44	9	9			
	úloha 5 b)	69	69	52	53									
	úloha 5 c)	67	66	47	47									
Úloha 6	úloha 6 a)	89	89	85	36	63	60	23	46	6	13		0	
	úloha 6 b)	79	71	47	43	48								
Úloha 7		83	72	52	52			52	25	44	0			0
Úloha 8		77	59	23	23			23	31	20	0			0

prima osmiletého gymnázia		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	93	93	90	90			87	30	23	13			
	úloha 1 b)	97	97	90	90									
Úloha 2		100	100	87	87			87	80		0	0		
Úloha 3	uloha 3 a)	90	93	90	60	59	68	23	67		17	0		
	uloha 3 b)	83	77	63	63	63								
	uloha 3 c)	93	93	93	33	60								
Úloha 4		100	100	87	50	72	72	43	60	33	7			
Úloha 5	úloha 5 a)	97	97	87	87			73	63	30	0			
	úloha 5 b)	93	93	73	73									
	úloha 5 c)	90	90	87	87									
Úloha 6	úloha 6 a)	90	90	87	57	78	74	33	40	0	7		0	
	úloha 6 b)	77	70	60	50	55								
Úloha 7		77	73	33	33			33	7	57	0			0
Úloha 8		77	67	27	27			27	47	7	3			0

6. ročník celkové vyhodnocení		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	73	66	60	60			54	12	15	15			
	úloha 1 b)	72	64	57	57									
Úloha 2		94	93	76	76			76	69		0	0		
Úloha 3	uloha 3 a)	85	80	70	22	31	38	7	64		8	0		
	uloha 3 b)	72	61	39	39	40								
	uloha 3 c)	79	76	67	12	40								
Úloha 4		87	82	61	20	41	41	20	44	15	1			
Úloha 5	úloha 5 a)	76	71	48	48			32	35	33	3			
	úloha 5 b)	72	69	40	41									
	úloha 5 c)	70	67	47	47									
Úloha 6	úloha 6 a)	80	79	77	25	54	51	15	34	2	7		0	
	úloha 6 b)	66	58	37	32	35								
Úloha 7		68	58	32	32			32	14	26	0			0
Úloha 8		68	54	17	17			17	26	8	0			0

7. ročník tradiční výuka		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	71	61	52	52			46	3	16	15			
	úloha 1 b)	62	60	54	54									
Úloha 2		97	96	74	74			74	41		0	1		
Úloha 3	uloha 3 a)	91	89	82	26	48	48	18	41		3	2		
	uloha 3 b)	74	68	46	46	45								
	uloha 3 c)	88	83	71	19	49								
Úloha 4		86	78	51	16	34	34	16	44	15	0			
Úloha 5	úloha 5 a)	81	78	56	56			43	25	14	8			
	úloha 5 b)	81	78	50	50									
	úloha 5 c)	77	71	54	54									
Úloha 6	úloha 6 a)	90	87	80	33	62	59	13	15	4	10		0	
	úloha 6 b)	81	69	39	31	36								
Úloha 7		78	71	54	54			54	12	20	4			3
Úloha 8		68	55	21	21			21	29	6	1			3

7. ročník Hejného metoda		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	59	56	46	46			46	3	15	13			
	úloha 1 b)	62	56	51	51									
Úloha 2		95	90	79	79			79	38		0	3		
Úloha 3	uloha 3 a)	90	90	87	41	59	57	23	41		0	3		
	uloha 3 b)	79	79	69	69	69								
	uloha 3 c)	87	85	64	26	46								
Úloha 4		77	74	59	31	45	45	31	38	13	0			
Úloha 5	úloha 5 a)	92	90	79	79			69	26	26	10			
	úloha 5 b)	90	87	72	72									
	úloha 5 c)	85	85	79	79									
Úloha 6	úloha 6 a)	92	92	85	41	76	72	18	26	4	5		3	
	úloha 6 b)	77	77	54	44	49								
Úloha 7		77	77	59	59			59	12	60	0			0
Úloha 8		74	67	38	38			38	31	5	3			0

sekunda osmiletého gymnázia		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	100	100	100	100			100	12	24	12			
	úloha 1 b)	100	100	100	100									
Úloha 2		100	100	96	96			96	68		0	0		
Úloha 3	uloha 3 a)	100	100	100	88	95	93	84	36		0	0		
	uloha 3 b)	100	100	100	100	100								
	uloha 3 c)	100	96	96	72	84								
Úloha 4		100	100	88	68	82	82	64	76	24	8			
Úloha 5	úloha 5 a)	100	100	100	100			100	36	28	4			
	úloha 5 b)	100	100	100	100									
	úloha 5 c)	100	100	100	100									
Úloha 6	úloha 6 a)	100	100	100	68	93	93	60	8	0	28		0	
	úloha 6 b)	100	100	92	88	86								
Úloha 7		100	100	92	92			92	12	60	4			20
Úloha 8		100	100	88	88			88	72	4	0			28

7. ročník celkové vyhodnocení		řešeno	odpověď	správnost	úplnost	procentuální úspěšnost	procentuální úspěšnost	striktní úspěšnost	výpočet	model	zdůvodnění	ciferný součet	"téčko"	součin prvočinitelů
Úloha 1	úloha 1 a)	72	64	57	57			52	4	17	14			
	úloha 1 b)	67	64	59	59									
Úloha 2		97	95	77	77			77	44		0	1		
Úloha 3	uloha 3 a)	92	90	85	36	55	55	26	41		2	2		
	uloha 3 b)	78	73	56	56	56								
	uloha 3 c)	89	85	72	26	52								
Úloha 4		86	80	57	24	41	41	24	47	15	1			
Úloha 5	úloha 5 a)	85	83	65	65			54	26	18	8			
	úloha 5 b)	85	82	60	60									
	úloha 5 c)	81	76	64	64									
Úloha 6	úloha 6 a)	91	90	83	38	68	65	19	16	4	11		1	
	úloha 6 b)	82	74	48	40	44								
Úloha 7		81	75	59	59			59	11	26	3			4
Úloha 8		72	62	32	32			32	34	6	1			5

Příloha C

VŠECHNY VÝPOČTY PROVÁDĚJ NA TENTO PAPÍR!

1. **Úloha.** V přístavu je výletní loď, která má tři paluby. Na každé palubě je ubytován určitý počet cestujících. Když se cestující na první palubě seřadí do dvojstupu, jeden zbude. To samé platí i o cestujících na ostatních palubách.
   c) Je možné naložit cestující z prvních dvou palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

   d) Je možné naložit cestující z všech tří palub do dvoumístných záchranných člunů tak, aby žádné místo nezůstalo volné?

2. **Úloha.** Zakroužkuj čísla, která po dělení číslem 3 dávají zbytek nula.

147 253

3. Úloha. Doplň v daných číslech vynechanou číslici tak, aby se dalo beze zbytku dělit následujícím číslem:

d) dvěma 77_ ___________________________

e) pěti 3_6 ___________________________

f) devíti 45_ ___________________________

Najdi všechna řešení.

4. Úloha. Petr zaplatil v obchodě pouze dvoukorunami a pětikorunami a víme, že dvoukorun bylo stejně jako pětikorun. Kolik zaplatil v obchodě za nákup, jestliže platil více než 40 Kč a méně než 50 Kč?

5. **Úloha.** Víme, že v 6. A i 6. B je mezi 25 a 35 žáky. Když se žáci v 6. A postaví do dvojstupu a nebo do pětistupu, žádný nezbyde. Když se žáci 6. B seřadí do dvojstupu, zbyde jeden, a když se seřadí do pětistupu, zbydou dva.
   d) Kolik je žáků v 6. A?

   e) Kolik je žáků v 6. B?

   f) Když jsou žáci 6. B a 6. A pohromadě, mohou utvořit dvojstup tak, aby nikdo nezbyl?

6. **Úloha.** 24 žáků ze třídy 6. A jelo na výlet. Žáci se mají rozdělit do skupin se stejným počtem členů tak, aby nikdo nezbyl.
   c) Vypiš všechny možnosti, do kolika stejných skupin po kolika členech se mohou žáci rozdělit.

   d) Jak by se mohli žáci rozdělit do skupin, kdyby jeden z nich onemocněl a na výlet nejel?

7. **Úloha.** Z letiště vylétají letadla na lince A každý šestý den a letadla na lince B každý osmý den. Dnes odlétají obě letadla. Za kolik dní budou letadla opět odlétat z letiště společně?

8. **Úloha.** Ze dvou stuh délky 24 cm a 40 cm je třeba nastříhat co nejdelší stejně dlouhé stužky, aby nezůstaly žádné zbytky. Stužky je nutné stříhat po celých centimetrech. Jak dlouhé budou tyto stužky?