

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modely Lobačevského geometrie

a možnosti jejich využití na střední škole

Models of Lobachevskij's geometry

and possibilities of their use at secondary school

Bc. Jan Kosina

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů
pro základní školy a střední školy – matematika

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Modely Lobačevského geometrie a možnosti jejich využití na střední škole* vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 5. 12. 2016

.....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Dr. za podporu a cenné rady při vedení diplomové práce. Dále bych pak chtěl poděkovat vedení I. Slovanského gymnázia a jazykové školy s právem státní jazykové zkoušky za poskytnutí možnosti realizovat výzkum a poskytnutí technické podpory při něm. Chtěl bych také poděkovat všem žákům, kteří se aktivně zapojili do výzkumu.

ABSTRAKT

Diplomová práce *Modely Lobačevského geometrie a možnosti jejich využití na střední škole* se zabývá jednou z neeukleidovských geometrií, Bolyai – Lobačevského geometrií. V první kapitole popisuje historický vývoj neeukleidovských geometrií, ukazuje nepřístupnost jedné z publikací věnovaných této problematice současnému žákovi střední školy a stručně nastiňuje vybrané směry v didaktice matematiky, zejména konstruktivismus. Druhá kapitola je věnována základním pojmům projektivní geometrie, Bolyai – Lobačevského geometrie a ukazuje její základní modely. Dále rozebírá specifika této geometrie v Beltrami – Kleinovu modelu, především vzájemnou polohu přímek. Tato teorie je doplněna sérií gradovaných úloh. Třetí kapitola je věnována experimentu, při kterém s touto teorií byli seznámeni žáci střední školy, kteří řešili související úlohy. Žákovská řešení byla zapsána a následně analyzována z hlediska konstruktivismu v didaktice matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA

Bolyai – Lobačevského geometrie, rovnoběžky, polára bodu ke kuželosečce, úlohy

ABSTRACT

This thesis *Models of Lobachevskij's geometry and the possibilities of their use at secondary school* focuses on one kind of non-Euclidean geometries, the Bolyai – Lobachevskij's geometry. The first chapter describes the history of non-Euclidean geometry, shows difficulties of understanding of one publication dedicated to these problems by current students of secondary schools and shows some chosen methods in the didactics of mathematics, especially the constructivist method. The second chapter is dedicated to elemental concepts of projective geometry, Bolyai – Lobachevskij's geometry and it shows its basic models. It further analyses the specific features of this kind of geometry in Beltrami – Klein's model, especially mutual positions of straight lines. This theses further contains a set of gradual tasks. The third chapter is dedicated to the description of a didactical experiment. In this experiment were students of secondary school acquainted with this theory and tasks, which they solved. Student's solution were written down and than analysed in the constructivist methodology term in the didactics of mathematics.

KEY WORDS

Bolyai – Lobachevskij's geometry, parallel lines, a polar line to a point to conic, tasks

Obsah

Úvod	7
1 TEORETICKÁ ČÁST	9
1.1 HISTORICKÝ VÝVOJ NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE	9
1.2 GATIAL A HEJNÝ: STAVBA LOBAČEVSKÉHO PLANIMETRIE	12
1.3 VYBRANÉ SMĚRY V DIDAKTICE MATEMATIKY	14
1.3.1 Základní přístupy k vyučování	14
1.3.2 Konstruktivismus ve výuce matematiky	16
1.3.3 Mechanismus poznávacího procesu podle Hejného	16
2 MATEMATICKÁ ČÁST	19
2.1 ZÁKLADNÍ POJMY PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE	19
2.1.1 Desarguova věta	19
2.1.2 Dualita a nevlastní body	20
2.1.3 Projektivní invarianty – incidence a dvojpoměr	22
2.1.4 Harmonická čtveřice bodů a její konstrukce	25
2.1.5 Polára bodu ke kuželosečce	28
2.2 ZÁKLADNÍ POJMY BOLYAI – LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE	29
2.2.1 Polokulový model	30
2.2.2 Poincarého kruhový model	30
2.2.3 Poincarého polorovinový model	31
2.2.4 Beltrami – Kleinův model	32
2.3 BOLYAI – LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE V BELTRAMI – KLEINOVU MODELU	33
2.3.1 Vzájemná poloha přímek	35
2.4 ŘEŠENÍ ÚLOH	39
3 DIDAKTICKÁ ČÁST	48
3.1 PROJEKTIVNÍ A BOLYAI – LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE V UČEBNÍCÍCH	48
3.2 NÁVRH EXPERIMENTÁLNÍ VÝUKY GEOMETRIE	49
3.3 PRŮBĚH EXPERIMENTU	49
3.4 VYHODNOCENÍ EXPERIMENTU	75
Závěr	77
Použitá literatura	79
Seznam obrázků	81

Úvod

„Je třeba, aby se každý učitel matematiky na střední škole seznámil se základními pojmy a fakty Lobačevského geometrie; vždyť teprve ve světle neeukleidovské geometrie se mu objasní logická struktura geometrie Eukleidovské, které se vyučuje na střední škole. Také žák střední školy budou principy Lobačevského geometrie nejen zajímat, ale mohou mu být i velmi užitečné.“ (Kutuzov, 1953, s. 5).

Poznání jiných geometrických světů, než Eukleidovského, se mi dostalo až v průběhu magisterského studia. Velmi mě zaujala tvrzení a závěry, které protiřečí tomu, co chápeme jako normální a správné. v průběhu studia se mi pak dostala do rukou knížka Milana Hejného a Jána Gatiala, *Stavba Lobačevského planimetrie*. Tato kniha byla určena řešitelům matematické olympiády a na svých více než sto stranách postupně zasvěcuje čitatele do geometrického světa, který se od toho našeho, Eukleidovského, velmi odlišuje. Milan Hejný je sice jedním z autorů konstruktivistického přístupu k vyučování matematiky, ale kniha *Stavba Lobačevského planimetrie* je pro současné žáky střední školy nepřístupná.

Kniha autorů Gatial a Hejný sestává ze tří kapitol, první z nich obsahuje velké množství teorie a úloh, které mají průpravný charakter, nicméně se ještě nevztahují k Bolyai – Lobačevského geometrii. Ve druhé kapitole je čtenáři přiblížen historický vývoj geometrie. Ve třetí kapitole jsou pak čtenáři představeny, pomocí definic, vět a gradované série úloh, dva modely Bolyai – Lobačevského geometrie. Kniha předkládá čitateli hotové znalosti, se spoustou odborné terminologie, která se v některých okamžicích stává nepřehlednou. v mnoha místech je krok mezi úlohami velmi výrazný a k jeho pochopení je tedy potřeba delšího zamyšlení a studia další literatury.

Při čtení knihy Gatiala a Hejného jsem došel k závěru, že v současné době je tato publikace pro středoškoláka nesrozumitelná. Proto bych se chtěl v této práci pokusit o přiblížení Bolyai – Lobačevského geometrie středoškolákům, a nejen jim, pomocí série gradovaných úloh a teorie, kterou by již měli ovládat, rozšířené o několik málo nových pojmů. Práce má tři cíle:

1. Doplnit matematické „skoky“ v publikaci Gatiala a Hejného, především v teorii dvojpoměru a poláry.
2. Vytvořit sérii gradovaných úloh, která by takto doplněný výklad umožnila žákům samostatně objevit.
3. Vyzkoušet tuto teorii spolu se sérií gradovaných úloh v praxi.

První kapitola této práce přibližuje historický vývoj neeukleidovských geometrií, přináší také několik úryvků z knížky Hejného a Gátiala, *Stavba Lobačevského planimetrie*. Dále se zabývá vybranými didaktickými směry a přístupy k výuce, především matematiky.

Druhá kapitola této práce je věnována základním pojmům projektivní a Bolyai – Lobačevského geometrie. Dále se věnuje Beltrami – Kleinovu modelu. Celou druhou kapitolu prostupuje gradovaná série úloh, jejichž řešení je nastíněno v jejím závěru.

Třetí kapitolu této práce tvoří didaktická část nastiňující realizaci, průběh a vyhodnocení experimentu.

1 Teoretická část

První kapitola této práce pojednává o vývoji geometrického vědění, o přechodu od popisu a dokazování konkrétních a zřejmých jevů k abstraktnímu, teoretickému poznávání nových geometrických světů. Přibližuje obtížnost studia knihy Gátiala a Hejného (1969).

1.1 Historický vývoj neeukleidovské geometrie

Eukleidés již tři sta let před naším letopočtem sepsal dílo *Základy*, jehož jeden z prvních českých překladů přinesl František Servít, 1907. Eukleidés v tomto díle utřídil veškeré dosavadní znalosti o geometrii, teorii čísel, teorii proporcí spolu s jejich důkazy. Toto dílo začíná třiatvaceti definicemi, pěti postuláty a devíti axiomy¹. Axiom je tvrzení, které je pokládáno za platné, a proto se nedokazuje.

Znění Eukleidových postulátů (překlad Servít, 1907, s. 2):

- I. *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.*
- II. *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*
- III. *A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovat kruh.*
- IV. *A že všechny pravé úhly sobě rovný jsou.*
- V. *A když přímka protíná dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší než dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsou do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

Záměrně jsem využil překlad z počátku minulého století, protože je svým stářím blíže době, kdy teorie, která bude v této práci popisována, zaznamenala největší rozkvět, tedy devatenáctému století. v současnosti většinou nepoužíváme pátý postulát v původním Eukleidově znění, ale některé tvrzení, které je s ním ekvivalentní, například v Playfairově znění: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést v rovině určené přímkou p a bodem P právě jednu rovnoběžku.*“

Jak je na první pohled zřejmé, je pátý postulát, nebo také „*postulát rovnoběžnosti*“, oproti ostatním formulován složitěji. Mnoha matematikům připadalo, že je s pátým postulátem něco v nepořádku. Rozhořely se proto úvahy, zda je Eukleidův systém axiomů nezávislý, tedy jestli by nešlo pátý postulát odvodit pomocí ostatních postulátů a axiomů.

¹ v některé literatuře jsou postuláty zahrnovány mezi axiomy.

Více než dva tisíce let se matematikové snažili dokázat pátý Eukleidův postulát, nicméně neúspěšně. První významný průlom při dokazování pátého postulátu přinesl italský matematik Giorolamo Saccheri (1667 – 1733), který se jej snažil dokázat sporem. Tedy dokázat, že neplatí výrok, který vznikne negací původního výroku. Negace výše uvedeného tvrzení zní: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést v rovině určené přímkou p a bodem P aspoň dvě nebo žádnou rovnoběžku.*“

Saccheri ve svém důkazu napřed úspěšně přivedl ke sporu možnost, že by žádná rovnoběžka neexistovala a poté se snažil dovést ke sporu tu část negace, ve které lze k dané přímce vést daným bodem aspoň dvě rovnoběžky. Tímto tvrzením nahradil pátý postulát, začal obezřetně budovat nový geometrický svět a čekal, až se zhroutí. V té chvíli by tedy dokázal, že neplatí negace, proto musí platit původní výrok.

Podle Petra Vopěnky prohlásil Saccheri tento svět za zničený již při prvních náznacích hroucení, načež publikoval spis *Eukleides vši poskvrny zbavený*. Ve svých závěrech se ovšem unáhlil, nicméně svou myšlenkou důkazu sporem položil základ objevu neeukleidovské geometrie (Vopěnka, 2001, 840). Saccheriho myšlenka podněcovala další matematiky ubírat se stejným směrem. Největší objev učinili v první polovině devatenáctého století nezávisle na sobě německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) maďarský matematik János Bolyai (1802 – 1860) a ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevský (1792 – 1856).

Bolyai v roce 1825 dokončil spis, který vyšel roku 1832 jako dodatek ke knize jeho otce, pod názvem *Appendix*. v Kazani, kolem roku 1826 dochází ke stejným závěrům Lobačevský a v letech 1829 – 1830 v univerzitním časopisu publikuje po částech svou práci o *načalach geometrii*. v těchto pracích již ovšem nejde o důkaz správnosti pátého Eukleidova postulátu, ale o konstrukci naprosto nového geometrického světa, ve kterém je pátý postulát nahrazen právě tvrzením, že: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést v rovině určené přímkou p a bodem P aspoň dvě rovnoběžky.*“ Bolyai i Lobačevský ve svých pracích vystavěli stejným způsobem jako Eukleides geometrické světy, které se nezhroutí. Při své práci postupně došli k závěru, že teorie, které ověřovali, jsou bezesporné a později si plně uvědomovali, že tvoří novou geometrii.

Také významný německý matematik Carl Friedrich Gauss se touto myšlenkou zabýval a došel ke stejným závěrům jako Bolyai a Lobačevský a to zřejmě dokonce dříve. Z jeho korespondence s mnoha evropskými matematiky vyplývá, že Bolyai a Lobačevský nebyli

zdaleka jediní, kteří přišli se stejnými závěry, nicméně ostatní své výzkumy nepublikovali, nejspíše z obavy, aby neztratili na serióznosti.

První reakce a posudky na nově objevený geometrický svět byly více než odmítavé, v posudku z roku 1834 stálo: „*Proč nenapsat místo titulu o načalach geometrii například Satira na geometrii, Karikatura na geometrii nebo něco podobného? Potom by každý viděl, o jakou knihu jde, a autor by byl ušetřen mnoha nepřiznivých úsudků a mínění... Na konci posudku akademika Ostrogradského stojí: z toho jsem učinil závěr, že kniha pana Lobačevského je poskvrněná chybou, a nezasluhuje tudíž pozornost akademie*“ (Vopěnka, 1995, s. 64). Takovýchto posudků bylo mnoho, Lobačevský ale vytrvale bránil a obhajoval své dílo, zatímco Bolyai od dalšího zkoumání upustil po té, když zjistil, že jej předešel Gauss, který se k dění okolo nijak nevyjadřoval.

Nejen proto tuto geometrii v současnosti nazýváme Bolyai – Lobačevského geometrií, která ovšem není jedinou neeukleidovskou geometrií. Ve druhé polovině devatenáctého století objevil Bernhard Riemann (1826 – 1866), svými „*diferenciálně geometrickými úvahami, obecnou metrickou geometrii, jež zahrnovala tři typy geometrií: vedle Eukleidovy a Lobačevského to byla geometrie, jež později byla nazvána jménem Riemannovým,*“ (Pavlíček, 1953, s. 18). v Riemannově geometrii neexistují rovnoběžky, místo Eukleidova pátého postulátu zde tedy platí věta: „*K žádné přímce p nelze žádným bodem P , který na ní neleží, vést v rovině určené přímkou p a bodem P rovnoběžku.*“ Další zajímavostí je, že přímky vypadají jako uzavřené čáry konečné délky. Riemannova geometrie má s Eukleidovou geometrií mnohem méně společných tvrzení, než ta Bolyai – Lobačevského. Neplatí zde například ani první postulát, protože dvěma různými body není vždy jednoznačně zadána právě jedna přímka.

Ještě v devatenáctém století byly obě tyto neeukleidovské geometrie potvrzeny pomocí modelů v projektivní geometrii. Projektivní geometrie pracuje s množinami nevlastních bodů a zabývá se vlastnostmi geometrických útvarů, které se zachovávají při projekci. Zpočátku nepracovala s metrickými vlastnostmi, jako jsou délky úseček nebo velikosti úhlů. „*Roku 1872 ukázal Felix Klein², že projektivně lze zavést metriku v podstatě trojím způsobem, a obdržel tak vedle Eukleidovy a Lobačevského také geometrii Riemannovu,*“ (Pavlíček, 1953, s. 19). Klein zavedl pojmenování pro všechny tři druhy geometrie. Eukleidovská geometrie je nazývána *parabolická*, Lobačevského *hyperbolická* a Riemannova *eliptická* (Hlavatý, 1949,

² Celým jménem Felix Christian Klein (1849 – 1925), německý matematik.

s. 24). Lze vybudovat fragment geometrie bez použití pátého postulátu, taková geometrie se pak nazývá *absolutní geometrie*. Její tvrzení tedy platí ve všech třech klasických geometriích.

Objev neeukleidovské geometrie má obrovský význam hned z několika důvodů. Podává jasný důkaz, že pátý Eukleidův postulát dokázat nelze, tudíž je mezi postuláty zařazen správně a Eukleidův systém axiomů je tedy nezávislý. Dalším jeho nesporným přínosem je, že bylo osvětleno mnoho doposud nevyjasněných pojmů geometrie a dokázáno mnoho ekvivalentních tvrzení k pátému postulátu, kterými jej lze nahradit. Například: „*Existují podobné trojúhelníky*“, nebo „*Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým*“.

1.2 Gatial a Hejný: *Stavba Lobačevského planimetrie*

V české literatuře existuje několik publikací věnujících se neeukleidovským geometriím, jako například Hlavatý, *Úvod do neeuklidovské geometrie*, 1949, nebo Pavlíček, *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, 1953. Tyto publikace ovšem nejsou příliš přístupné žákovi střední školy. Významné místo mezi takovými publikacemi zaujímá kniha autorů Gatial a Hejný, *Stavba Lobačevského planimetrie*, 1969, kterou vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta. Sami autoři v úvodu říkají: „*Čitateľovi predkladáme knižku, ktorá sa svojim zameraním mierne líši od ostatných publikácií edície MO. Spracovaná látka – Lobačevského geometria – nezapadá vôbec do rámca stredoškolskej výuky. Situácie, s ktorými čitateľa oboznámime, budú sa niekedy pravdepodobne zdať až paradoxné.*“

V této kapitole bych chtěl, pomocí přepisu několika úryvků textu a poznámek k němu, názorně ukázat, jak náročné je orientovat se v terminologii a systému pojmů Gatiala a Hejného (1969). Veškeré značení úloh, kapitol, podkapitol, atd. je převzato z této publikace a nekoresponduje se značením oddílů předkládané práce.

„*Model B (Beltrami – Klein)*“³

V ďalšom texte budeme pracovať v euklidovskej rovine tj. v teórii E a budeme tu modelovať teóriu L. Tak väčšina geometrických pojmov nadobudne dva rôzne významy, pretože sa vyskytnú ako v teórii E, tak aj v modeli teórie L. Napríklad body v zmysle L budú len niektoré z bodov v zmysle E. Bolo by zdlhové písať „bod v zmysle L“, „kolmica v zmysle E“ a pod., preto budeme písať stručne „l-bod“⁴, „e-kolmica“ a pod. Termín, ktorého význam

³ První úryvek je přepis textu ze stran 32 – 34, kde je postupně zaváděna nová terminologie, která je pak používána v kapitolách věnujících se Beltrami – Kleinovu modelu.

⁴ Volba malého l místo L je poněkud matoucí a vede k záměně za číslici 1.

je ten istý v zmysle L , jako v zmysle E budeme písať jako doteraz bez predsymbolu l -, či e -. Napríklad „ l -medzi“ a „ e -medzi“ je to isté, preto píšeme proste „medzi“.

Podáme popis modelu B (pozri model S_2 z príkladu 1.2.). Všetky úvahy sú prevádzané v e -rovine.

Dohovor 1. Nech je v e -rovine daná e -kružnica h . Označme symbolom λ množinu všetkých vnútorných a symbolom μ množinu všetkých jej vonkajších e -bodov. Táto symbolika je záväzná pre celý článok 3.2., 3.3. a 3.4.

Definícia 1. e -Bod X nazveme⁵

$$\left. \begin{array}{l} l - \text{bodom} \\ a - \text{bodom} \\ i - \text{bodom} \end{array} \right\} \text{ práve keď je } \left\{ \begin{array}{l} X \in \lambda \\ X \in h \\ X \in \mu \end{array} \right.$$

Množinu λ všetkých l -bodov nazveme l -rovinou, množinu všetkých a -bodov resp. i -bodov nazveme absolutom resp. ideálom l -roviny λ .

Poznámka 1. v definícii 1. sme zaviedli 6 pojmov. Ku pojmom l -bod a l -rovina, ktoré majú analogické pojmy v E teórii, pristupujú pojmy a -bod, i -bod, absolut a ideál l -roviny. Posledné štyri pojmy v E teórii nemajú obdobu a aj my by sme sa bez nich vedeli zaobiť. Zavedenie uvedených pojmov nám značne uľahčí vyjadrovanie.

Definícia 2. Nech $U \not\equiv V$ sú dva ľubovoľné a -body. Potom otvorenú e -úsečku UV nazveme l -priamkou. Okrem l -priamok takto popísaných žiadne iné neexistujú.

Dohovor 2. L -Priamky budeme označovať dvojakým spôsobom a to alebo malým latinským písmenom a, b, c, x, \dots (tak značíme aj e -priamky), alebo dvojicou veľkých latinských písmien AB, UX, YZ, \dots pokiaľ tieto písmená označujú dva rôzne e -body, ktorých e -spojnica pretína e -kružnicu h ... Ak x je l -priamka, potom symbolom \bar{x} označíme e -priamku, pre ktorú $x \subset \bar{x}$ a symbolom x' množinu $\bar{x} \cap h$.“

„Kolmost' v modeli B “⁶

Odteraz až do odvolania predpokladáme, že všetky objekty sú euklidovské a preto upúšťame od písania predsymbolov e - či l -; symboly S resp. r v ďalšom značia stred resp. polomer kružnice h .

⁵ Velikosti jednotlivých písmen jsou zachovány stejné, jako v původním textu.

⁶ Druhý úryvek je přepisem textu ze strany 37. Jedná se o zavedení kolmosti v Beltrami – Kleinovu modelu pomocí zobrazení.

Trochu neobvyklým způsobem budeme definovat množinu s , které prvky značíme velkými latinskými písmeny – ako body. Symbolmi $\bar{\pi}$ resp. π označíme množinu všech priamok resp. bodov. o zobrazení hovoríme v dodatku A.

Definícia 5. Nech s je množina daná zobrazením $\sigma: \bar{\pi} \rightarrow s$ s následujícími dvěma vlastnostmi:

- (a) ku každému $X \in s$ existuje alespoň jedna priamka $y \in \bar{\pi}$ tak, že $\sigma(y) = X$,
- (b) pre ľubovoľné priamky $x \neq y$ platí $\sigma(x) \equiv \sigma(y) \Leftrightarrow x \parallel y$. Potom množinu s nazývame množina smerov a jej prvky nazývame smery. Smer $\sigma(x)$ pre $x \in \bar{\pi}$ nazývame smerom priamky x , alebo smerom incidentným s priamkou x .

1.3 Vybrané směry v didaktice matematiky

Slovo didaktika je odvozeno od řeckého *didaskhein*, které znamená učit, vyučovat, poučovat, jasně vykládat, dokazovat (Skalková, 2007, s. 13).

V historickém kontextu lze pojem didaktika chápat také jako umění vyučovat (J. A. Komenský 1592 – 1670), teorii vyučování (J. F. Herbart 1776 – 1841) nebo teorii vzdělávání (O. Willman 1839 – 1920). V současnosti chápeme obecnou didaktiku jako teorii vzdělávání a vyučování. Z obecné didaktiky se pak vymezuje školní didaktika jako teoretický základ výuky realizované přímo ve škole (Kalhous, Obst a kol., 1995, s. 9).

1.3.1 Základní přístupy k vyučování

Pasch M. a kol. (1998, s. 194 – 195) rozděluje přístup k výuce do tří kategorií: *deduktivní, induktivní a sociální*. Při *deduktivním vyučování*, nebo také přímé výuce, je žák neustále pod přímým vedením učitele, kdy jsou na začátku vyučování sděleny cíle, žáci jsou poté seznámeni s novými pojmy, které učitel vysvětluje a předvádí na příkladech, kdy ukazuje provázanost učiva s předchozím. Následně poskytne žákům sérii úloh k procvičení, které mohou posléze sloužit k hodnocení žáků. Oproti tomu *induktivní vyučování* má formu bádání a objevování nových pojmů a jejich zobecňování, kdy jsou nejprve navozeny badatelské činnosti, pomocí nichž se snaží žáci sami objevit souvislosti a definovat nový pojem. Ověření správnosti objevených souvislostí probíhá taktéž na sérii úloh, které jsou pak podkladem pro vyhodnocení míry dosažení cílů. *Sociální forma vyučování* pak je taková forma, kdy se žáci učí společně a učitel je zde pouze moderátorem usměrňujícím informace vycházející přímo od žáků. Učitel se tedy pohybuje mezi skupinkami žáků a sleduje vývoj a pokrok jejich teorií.

Vališová a Kasíková (2011, s. 122) vymezují dva základní, protichůdné pohledy na školní vyučování. Jedná se o *transmisivní a konstruktivní vyučování*. Stejně rozdělení používá také Stehlíková (2004). *Transmisivní forma vyučování* v podstatě koresponduje s deduktivním vyučováním nebo přímou formou výuky. Při transmisivním vyučování se tedy předpokládá, že žák nemá žádné znalosti, jejichž výhradním nositelem je učitel. Ve výuce převládá výklad učitele, který je nezpochybnitelnou autoritou, a pasivní příjem již hotových znalostí žákem, který si musí všechny přijaté informace ukládat do paměti bez důrazu na vzájemné propojení a jakoukoliv návaznost na předchozí znalosti. Jak již bylo naznačeno, opačný protipól k transmisivnímu vyučování tvoří *konstruktivistický přístup k vyučování*. Konstruktivismus jako takový je psychologický směr rozvíjený především ve druhé polovině dvacátého století. Klade důraz na aktivní zapojení žáka při výuce, na jeho vnitřní předpoklady, interakci s prostředím a společností. (Hartl, Hartlová, 2000, s. 271). Konstruktivismus je rozdělován do tří základních proudů, na tzv. *radikální, kognitivní a sociální konstruktivismus*. Metody konstruktivistického vyučování jsou známé již minimálně dva tisíce let, kdy je při diskuzích se svými žáky používal již Sókratés, když se je návodnými otázkami snažil dovést k odpovědím na diskutované problémy. Při tomto vedeném objevování využíval žákových dřívějších zkušeností a poznatků, ze kterých ho nechával vyvozovat nové závěry.

Z pohledu *radikálního konstruktivismu* se člověk může učit pouze z vlastních zkušeností, čímž si utváří subjektivní obraz světa. Objektivní obraz světa je jakousi společenskou úmluvou, kterou tedy jedinec není schopen nazřít. „*Sociální konstruktivismus vychází z prací o sociální dimenzi učení (A. Bandura, L. S. Vygotskij aj.) a zdůrazňuje nezastupitelnou roli sociální interakce a kultury v procesu konstrukce poznání. v didaktice se jeho zásady realizují zejména v kooperativním učení.*“ (Průcha, Walterová, Mareš, 2001, s. 106). *Kognitivní konstruktivismus* je založen na spojování částí poznatků do větších celků, které jsou poté používány při řešeních problémů přiměřených stupni kognitivního vývoje žáka. v praxi se pak většinou využívá propojení sociálního a kognitivního konstruktivismu. Při výuce jsou řešeny úlohy založené na problémech ze života, je využíváno tvořivé myšlení a skupinová forma výuky.

Pamětní učení a memorování je odsuzováno, protože přináší především formální poznatky a nenutí žáka dostatečně přemýšlet nad problémem a snažit se přijít s vlastním řešením. Vede ho k aplikování již známých řešení nebo jejich vzorců a jakéhosi algoritického řešení problémů. Jelikož při konstruktivistickém vyučování nejsou žákům předkládány hotové znalosti, je třeba, aby žáci vymysleli vlastní postup, jak problém vyřešit.

Tímto procesem vznikají mnohem kvalitnější paměťové stopy, které jsou dlouhodobější, a proto vyvolání informací, které tyto stopy nesou, je poté mnohem snazší.

1.3.2 Konstruktivismus ve výuce matematiky

Konstruktivismus ve výuce matematiky se vyznačuje navozením zvýšené míry vnitřní motivace žáka, která je stimulována zvnějšku otázkami nebo problémy budovanými na reálném základu, které mu učitel předkládá. Bez dostatečné míry vnitřní motivace nelze od žáka očekávat přílišnou aktivitu. Stehlíková (2004, s. 13) předkládá deset zjednodušených zásad přístupu k vyučování matematice, jak je formulovali M. Hejný a F. Kuřina:

- 1. „Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.*
- 2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.*
- 3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.*
- 4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.*
- 5. Základem matematického vzdělání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.*
- 6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.*
- 7. Důležité je použití různých druhů prezentace a strukturální budování matematického světa.*
- 8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.*
- 9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.*
- 10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.“*

Přestože v předchozích odstavcích není příliš zmiňována osoba učitele, je jeho úloha zásadní a nepostradatelná. Pouze na něm závisí, jakým způsobem bude výuka vedena. On je moderátorem všech situací, otázek a problémů, které jsou žákovi předkládány.

1.3.3 Mechanismus poznávacího procesu podle Hejného

Milan Hejný zasvětil výzkumu věnujícímu se problematice mechanismu poznávacího procesu většinu svého, nejen profesního, života. Již v roce 1975 započal s dlouhodobým experimentem, který si kladl za cíl zkvalitnit proces výuky matematiky, především oslabit formalismus při její výuce. Při výzkumu navazoval na myšlenky svého otce V. Hejného, který

byl také pedagogem. Jednou z těchto myšlenek, která prostupuje celou jeho prací je pak myšlenka, že „kvalitní poznání nemůže učitel žákovi předat, ale žák se k němu musí dobrat samostatně,“ Již na počátku výzkumu zjistil, že každý žák uvažuje rozdílně, každý je na jiné úrovni matematického poznání, ale jedno mají společné. Tím je „náhlé uzření pravdy, nabytí vzhledu do několika do té doby nepropojených žakových zkušeností,“ (Hejný, 2004, s 23).

Po několika letech výzkumu Hejný a jeho kolegové dospěli k modelu poznávacího procesu, který byl využíván při rozboru myšlenkových procesů jednotlivých žáků, při diagnostice příčin chyb žáků a jejich reedukaci způsobem, který se snaží předejít vzniku formálních poznatků. Při svém výzkumu se snažili najít odpovědi na několik zásadních otázek: „*Jak se člověk zmocňuje matematického poznatku? Které faktory jsou pro zrod nového poznatku rozhodující? Které faktory naopak takovému procesu brání?*“ (Hejný, 2004, s 23). Samotný mechanismus poznávacího procesu je pak rozčleněn na několik hladin, které mezi sebou plynule přechází.

1. Hladina motivace

Pro účelné vyučování je nutné, aby našel žák vnitřní motivaci a chtěl se vzdělávat. Pokud bude chápat výuku jako něco, co dělat musí, vypěstuje si k ní pravděpodobně spíše odpor, který povede pouze k povrchnímu, formálnímu poznání.

2. Hladina separovaných modelů

Na této hladině dochází k získávání zkušeností s konkrétními případy budoucího poznání. Kvalita následného poznání koresponduje s množstvím takto nabitých jednotlivých modelů. Velmi důležité jsou následující modely: **Překvapivé modely** „Číslo $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ se tváří jako iracionální, ale je to číslo 2,“ (Hejný, 2004, s 28). **Zdánlivé modely** Jedná se o modely, které vypadají jako modely daného objektu, ale ve skutečnosti jimi nejsou. „*Například čtverec, jehož úhlopříčky jsou ve svislé a vodorovné poloze, se jeví mnoha žákům jako kosočtverec,*“ (Hejný, 2004, s 28). **Ne-modely** Pokud při zavádění nějakého pojmu předvedeme i příklad pojmu, který jím není. „*Například při zavedení pojmu konvexní útvar ukážeme i útvar, který není konvexní,*“ (Hejný, 2004, s 28).

3. Zobecnění

Na této hladině začnou se jednotlivé separované modely seskupovat a organizovat, až utvoří ucelenou strukturu. Tím dojde k hlubšímu nazření dosavadních poznatků. Obvykle tento proces není nikterak dlouhý. Nově vzniklou strukturu nazýváme generický model.

4. Hladina generických modelů

„Generický model je prototypem buď všech, nebo jisté skupiny separovaných modelů. Může zastupovat kterýkoli ze separovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent. Generickým modelem pro počítání předmětů jsou zejména prsty a počítadlo. Pro poznávací proces, v jehož jisté etapě se objeví více generických modelů, je důležité jejich vzájemné uspořádání,“ (Hejný, 2004, s 28).

5. Abstrakční zdvih

„Soubor separovaných a generických modelů je restrukturován a nový vhléd má abstraktnější charakter – je často provázen symbolickým záznamem, který novou strukturu reprezentuje,“ (Hejný, 2004, s 28).

6. Hladina krystalizace

„Nové poznání se propojuje na předchozí vědomosti. Nejdříve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Obvykle jde o dlouhodobý proces,“ (Hejný, 2004, s 29).

Poznávací proces obvykle probíhá v tomto pořadí, ale jednotlivé hladiny jsou provázány a prolínají se. Nová zkušenost se „otiskuje“ do několika hladin najednou. Pouze první hladina, tedy hladina hladina motivace, prostupuje s různou intenzitou celým poznávacím procesem.

2 Matematická část

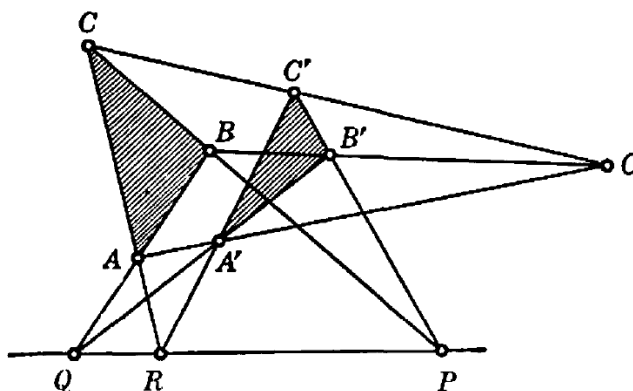
2.1 Základní pojmy projektivní geometrie

Pro snadnější porozumění Bolyai – Lobačevského geometrii je nutné si nejprve osvojit některé principy projektivní geometrie, které s ní úzce souvisejí. Jak již název napovídá, zabývá se projektivní geometrie zkoumáním projekcí, tedy rovnoběžných nebo středových promítání různých geometrických útvarů. Především se však projektivní geometrie zabývá studiem projektivních invariantů, tedy toho, co zůstává zachováno při projekci. Kořeny projektivní geometrie sahají hluboko do minulosti, ale její rozmach je spojen s obdobím renesance, tedy zhruba od konce čtrnáctého století. Projektivní geometrie přináší mnoho nových, zajímavých poznatků, které se zpočátku mohou zdát zřejmé a neinovativní. Při jejich delším rozboru dochází k hlubšímu poznání a porozumění triviálním geometrickým jevům, dochází k náhledu doposud dogmaticky uznávaných tvrzení z jiného úhlu pohledu.

2.1.1 Desarguova věta

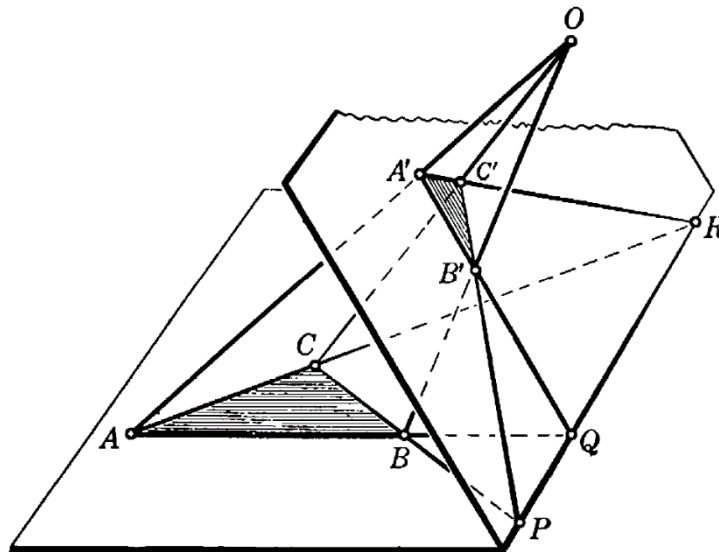
Francouzský matematik Girard Desargues (1591 – 1661) již roku 1639 dokázal jedno z prvních tvrzení projektivní geometrie, jež je v dnešní době známo jako Desarguova věta. Tato věta je platná jak v rovině, tak v prostoru. Zajímavostí je, že Desargues toto tvrzení sám nepublikoval, až v roce 1648 jej uveřejnil jeho přítel Abraham Bosse (Trkovská, 2014, s. 26).

Desarguova věta v rovině: „*Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, pro které platí, že přímky AA' , BB' a CC' se protínají v jediném bodě O . Označme průsečíky přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ pořadě P , Q , R . Potom body P , Q , R jsou kolineární,*“



Obrázek 1: Desarguova věta v rovině

Desarguova věta v prostoru: „Jestliže trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ leží ve dvou různoběžných rovinách a přímky AA' , BB' a CC' se protínají v jediném bodě O , pak přímky AB a $A'B'$ leží v jedné rovině a protínají se v bodě Q , přímky AC a $A'C'$ leží v jedné rovině a protínají se v bodě R také přímky BC a $B'C'$ leží v jedné rovině a protínají se v bodě P . Bod O je pak průsečík rovin $AA'B$, $AA'C$ a $BB'C$ (viz obrázek 2).“



Obrázek 2: Desarguesova věta v prostoru

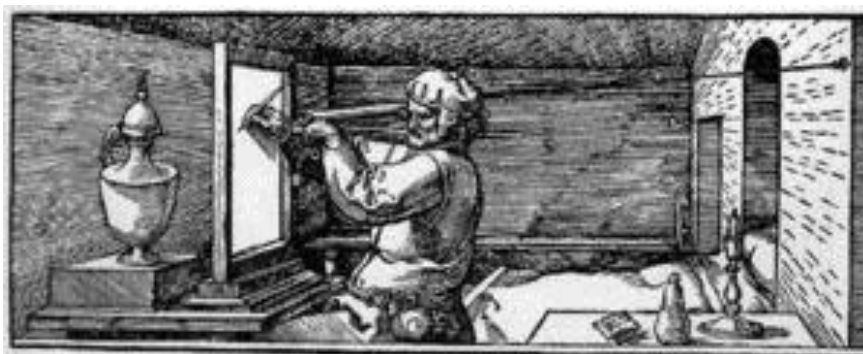
2.1.2 Dualita a nevlastní body

V projektivní geometrii existují takzvaná duální tvrzení, která vznikají jednoduchou záměnou výrazů ve větách, ale mají dalekosáhlé důsledky. v těchto tvrzeních dochází k záměně dvojic pojmů *bod*, *přímka* a *spojovat*, *protínat*. Pro příklad je možno uvést jedno ze znění prvního Eukleidova postulátu: „Jsou-li A, B dva libovolné různé body, pak existuje právě jedna přímka, která je spojuje.“ k němu duální tvrzení: „Jsou-li a, b , dvě libovolné různé přímky, pak existuje právě jeden bod, ve kterém se protnou.“ Na první pohled nemusí být zřejmé, zda vůbec vznikl nějaký nový pojem, protože si automaticky představíme dvě různoběžné přímky, pro které takové tvrzení samozřejmě platí. Pokud ovšem touto dvojicí různých přímek budou rovnoběžky, pak se dostáváme do sporu s všeobecnou představou, že se rovnoběžné přímky nikdy neprotnou.

V projektivní geometrii tedy platí, že se rovnoběžné různé přímky protínají v jednom bodě, ten pak nazýváme *nevlastní bod* (respektive *směr*) těchto přímek. Ve zbytku této práce

budu užívat pojem nevlastní bod, protože lépe koresponduje s představou průsečíku dvou přímek. Vystává otázka, kolik takových nevlastních bodů existuje. Vezmeme-li v úvahu dvě dvojice rovnoběžných přímek (jejich části ohraničují rovnoběžník), pak pokud by existoval jeden nevlastní bod, musely by být všechny čtyři přímky rovnoběžné, což zřejmě nejsou. Musí tedy existovat pro každý směr jeden nevlastní bod. Aby platil první Eukleidův postulát i pro nevlastní body, musí také existovat nevlastní přímka. Aby platil také duální postulát k prvnímu Eukleidovu postulátu, protne každá přímka nevlastní přímku v právě jednom bodě, svém nevlastním bodě.

Sjednocením klasické eukleidovské roviny s nevlastní přímkou zavádíme pojem projektivní rovina nebo také rozšířená eukleidovská rovina. Tyto pojmy a tvrzení se zdají být velice abstraktní a bez reálného využití. Opak je pravdou, například v malířství je projektivní geometrie využívána již od vzniku potřeby perspektivy, kterou k dokonalosti dovedli takoví velicí jako Leonardo da Vinci (1452 – 1519) nebo Albrecht Dürer (1471 – 1528).



Obrázek 3: Albrecht Dürer – využití projekce v malířství

Obrázek 3⁷ ukazuje, jakým způsobem Albrecht Dürer využíval k věrnému zachycení malovaného předmětu středové promítání, jehož středem je háček na zdi. Podobně pak na obrázku 4 je zachycen další způsob, kterým Albrecht Dürer tvořil svá mistrovská díla.

⁷ Obrázky 3 a 4 dostupné z <http://laperspective.canalblog.com/archives/2009/02/20/12635500.html> 16.4.2016.



Obrázek 4: Albrecht Dürer – využití projekce v malířství (střed projekce – oko)

Jedná se opět o středové promítání, tentokrát je ovšem středem promítání oko umělce. Při takovéto malbě samozřejmě dochází ke zkreslení délek úseček i velikostí úhlů. Toto zkreslení závisí na pozici a vzdálenosti daného objektu vůči malíři. Přesto je namalovaný objekt pro lidský mozek natolik věrohodný a velmi dobře rozpoznatelný, protože existují jisté zákonitosti, které zůstávají zachovány i při projekci. Tyto zákonitosti se nazývají projektivní invarianty (Courant a Robbins, 1996, s. 167).

Jako první pracoval přímo s nevlastními body astronom a matematik Johannes Kepler (1571 – 1630) v knize *Astronomiae pars optica* publikované roku 1604, v kapitole o *kuželosečkách*, kde kladl druhé ohnisko paraboly do nekonečna (Trkovská, 2014, s. 21). Současný náhled na kuželosečky pohledem projektivní geometrie podal významný francouzský matematik Girard Desargues. Za zakladatele projektivní geometrie je ovšem považován Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), který svou práci *Traité des propriétés projectives des figures* napsal roku 1813 v ruském zajetí. V devatenáctém století se stala projektivní geometrie jedním z hlavních směrů matematického výzkumu.

2.1.3 Projektivní invarianty – incidence a dvojpoměr

Základním projektivním invariantem je *incidence* bodu a přímky. Pokud bod A leží na přímce p , pak i jeho obraz A' bude ležet na obrazu této přímky p' . Mezi třemi kolineárními body lze zavést algebraický vztah, který se nazývá dělicí poměr (jednoho bodu vůči zbylým dvěma). Aby jej bylo možné zavést, je třeba nejprve zavést pojem orientovaná přímka. Tento pojem by měl být všem známý, protože je instinktivně využíván již od prvního stupně základní školy, kde je využíván při zavádění čísel a operací s nimi, jako číselná osa.

Na orientované přímce p je pak analogicky zaveden pojem orientovaná úsečka AB . u takové úsečky rozlišujeme počáteční bod A a koncový bod B . Pokud je úsečka orientována směrem shodným jako přímka, pak má kladnou délku ($|AB| = d$), pokud je orientována

opačným směrem, pak má zápornou délku ($|AB| = -d$). Tyto délky se pak nazývají orientovaná vzdálenost bodů. Platí tedy $|AB| = -|BA|$.

Mějme tři kolineární body A, B, C . *Dělicí poměr* (ABC) pak dává do vztahu délky orientovaných úseček AC, BC . Zapisujeme $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}$. v literatuře je možné setkat se s různými druhy zápisů: $(ABC), (A, B; C), (AB, C)$ a podobně.

Úloha 1: Necht' je bod C středem orientované úsečky AB . Spočítejte hodnoty dělicích poměrů $(ABC), (BAC), (CAB), (CBA), (ACB), (BCA)$.

Úloha 2: Na čem závisí znaménko dělicího poměru?

Úloha 3: Necht' jsou na orientované úsečce dány body A, B . Najděte bod C tak, aby platilo $(ABC) = 3, (BCA) = 3$.

Dělicí poměr se zachovává při rovnoběžném promítání, ale ne při středovém. Nejedná se tedy o projektivní invariant obecně. Již Pappos z Alexandrie (asi 290 – 350) v sedmé knize svého díla *Synagoge mathematike*, ve kterém navazoval na Eukleidovo ztracené dílo *Porismata*, vyložil projektivní invariant, *dvojpoměr* čtyř kolineárních bodů (Trkovská, 2014, s 17). Pappos si byl vědom toho, že dvojpoměr zůstává při promítání zachován, že je tedy projektivním invariantem (Havlíček, 1956, s. 20).

Mějme čtyři kolineární body A, B, C, D , pak, jak již název napovídá, dává dvojpoměr těchto čtyř kolineárních bodů do poměru dva dělicí poměry (ABC) a (ABD) . Ve zbytku textu bude pojmem dvojpoměr označován dvojpoměr čtyř různých kolineárních bodů, pokud

nebude uvedeno jinak. Zapisujeme $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{|AC|}{|BC|}}{\frac{|AD|}{|BD|}} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|}$.

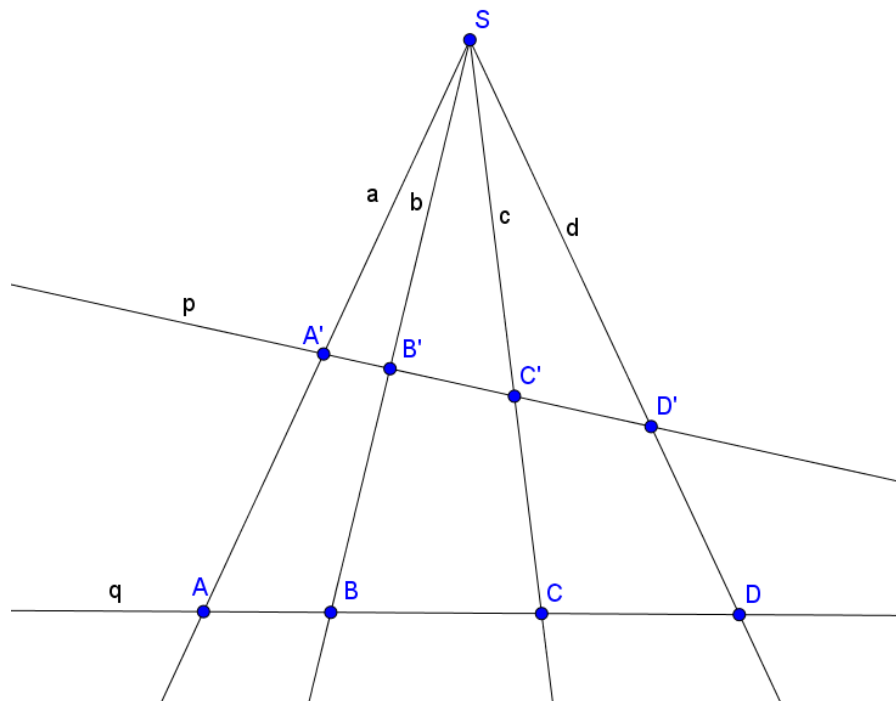
Zápisy $|AC|, |BC|, |AD|, |BD|$ v tomto vzorci znamenají vzdálenost bodů v příslušné absolutní hodnotě, tedy délku úsečky jimi určené.

K důkazu jeho invariantnosti je využito vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníka:

$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v$, kde z je délka libovolné strany trojúhelníka a v výška příslušející této straně,

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$, kde a, b jsou délky stran trojúhelníka a γ úhel jimi sevřený.

Obrázek 5 ukazuje, že trojúhelníky ACV, BCV, ADV, BDV mají shodnou výšku v .



Obrázek 5: Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Důkaz invariantnosti dvojpoměru:

$$\begin{aligned}
 (ABCD) &= \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{|AC|}{|BC|}}{\frac{|AD|}{|BD|}} = \frac{|AC|}{|BC|} \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v}{\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot v} \frac{\frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot v}{\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot v} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot |AV| \cdot |CV| \cdot \sin|\sphericalangle AVC|}{\frac{1}{2} \cdot |BV| \cdot |CV| \cdot \sin|\sphericalangle BVC|} \frac{\frac{1}{2} \cdot |BV| \cdot |DV| \cdot \sin|\sphericalangle BVD|}{\frac{1}{2} \cdot |AV| \cdot |DV| \cdot \sin|\sphericalangle AVD|} = \\
 &= \frac{\sin|\sphericalangle AVC|}{\sin|\sphericalangle BVC|} \frac{\sin|\sphericalangle BVD|}{\sin|\sphericalangle AVD|}
 \end{aligned}$$

Z uvedených úprav je zřejmé, že dvojpoměr kolineárních bodů A, B, C, D není závislý na délkách jednotlivých úseček, ale pouze na úhlech při středu promítání S , které samozřejmě korespondují s jednotlivými úsečkami. Proto musí platit vztah

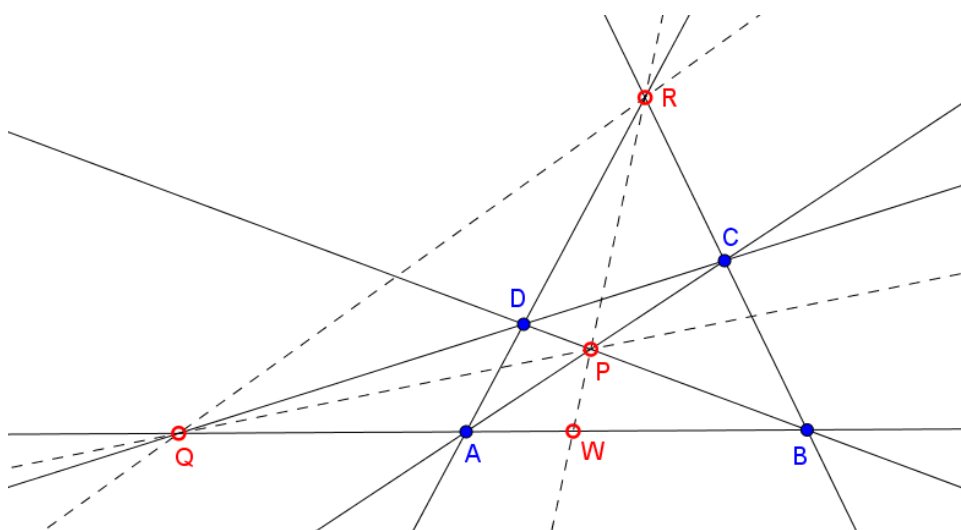
$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Jelikož pracujeme v projektivní rovině, existuje také duální vztah, tedy dvojpoměr přímek $(abcd)$. Přímky a, b, c, d jsou různoběžné přímky procházející vlastním bodem V a dvojpoměr $(abcd)$ definujeme jako dvojpoměr bodů A, B, C, D , které jsou průsečíky přímek a, b, c, d s vlastní přímkou q , která neprochází bodem V (viz obrázek 5).

2.1.4 Harmonická čtveřice bodů a její konstrukce

Platí-li vztah $(ABCD) = -1$, říkáme, že body A, B, C, D tvoří **harmonickou čtveřici** nebo také, že bod D je harmonicky sdružen s bodem C vzhledem k bodům A, B nebo také, že body C, D dělí harmonicky body A, B .

Množina bodů A, B, C, D projektivní roviny, z nichž žádné tři nejsou kolineární, se nazývá **úplný čtyřroh** $ABCD$. Body A, B, C, D se nazývají *vrcholy* úplného čtyřrohu a přímky spojující tyto vrcholy se nazývají jeho *strany*. Průsečík stran AC, BD je bod P , průsečík stran AB, CD je bod Q , průsečík stran AD, BC je bod R , průsečík strany AB a přímky PR je bod W . Pak $(ABWQ) = -1$. Body P, Q, R se nazývají *diagonální body* úplného čtyřrohu a tvoří vrcholy *diagonálního trojúhelníku*. Strany diagonálního trojúhelníku se nazývají *diagonální strany* úplného čtyřrohu $ABCD$.

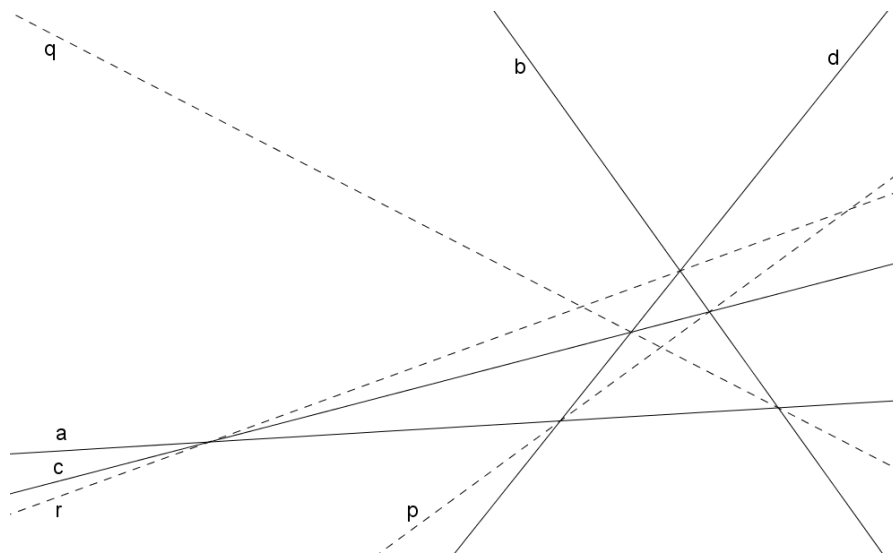


Obrázek 6: Úplný čtyřroh

Množina čtyř přímek a, b, c, d projektivní roviny, z nichž se žádné tři neprotínají v jediném bodě, tvoří **úplný čtyřstran** $abcd$. Přímky a, b, c, d se nazývají strany úplného čtyřstranu, šest bodů, ve kterých se protínají, se nazývá *vrcholy* úplného čtyřstranu.

Dvojice vrcholů lze spojit dalšími třemi přímkami p, q, r , které se nazývají *diagonální strany* úplného čtyřstranu, trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* úplného

čtyřstranu $abcd$. Vrcholy diagonálního trojúhelníka se nazývají *diagonální vrcholy* úplného čtyřstranu $abcd$.



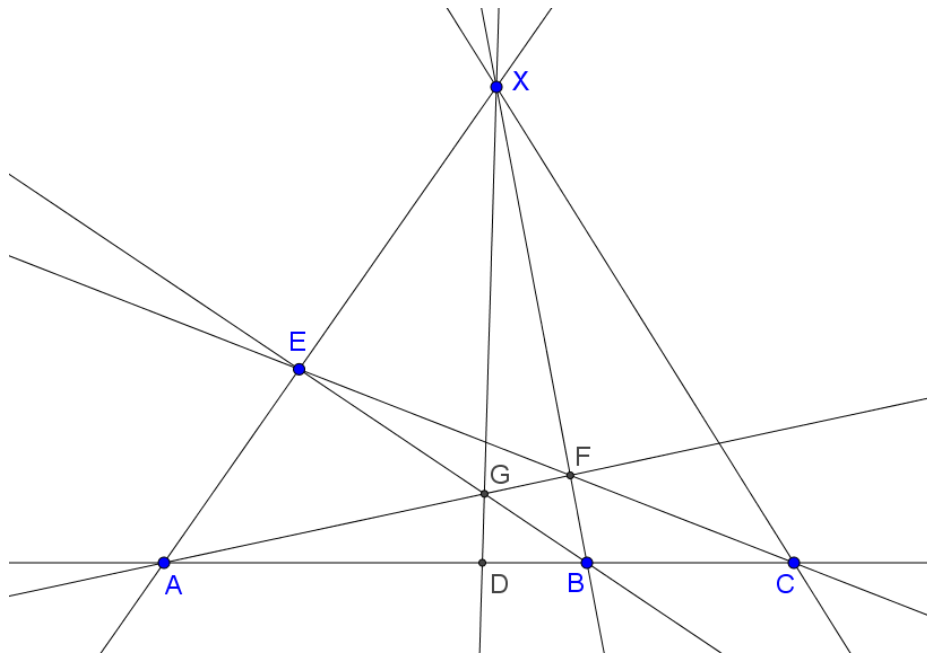
Obrázek 7“ Úplný čtyřstran

Dvě strany úplného čtyřrohu nazýváme *protější*, pokud jedna z nich prochází vrcholy, kterými neprochází ta druhá. Dva vrcholy úplného čtyřstranu nazýváme *protější*, pokud jeden z nich leží na stranách, na nichž neleží druhý.

Jak uvádí Havlíček (1956, s. 33), na každé straně úplného čtyřrohu tvoří jeho vrcholy spolu s diagonálním bodem a bodem, který je průsečíkem s protější diagonální stranou, harmonickou čtveřicí bodů. Podobně: „V každém vrcholu úplného čtyřstranu tvoří obě jeho strany a pár přímek, z nichž jedna je diagonální strana a druhá je incidentní s jejím protějším diagonálním vrcholem, dvě dvojice přímek, jež se navzájem oddělují harmonicky,“ (Havlíček 1956, s. 33).

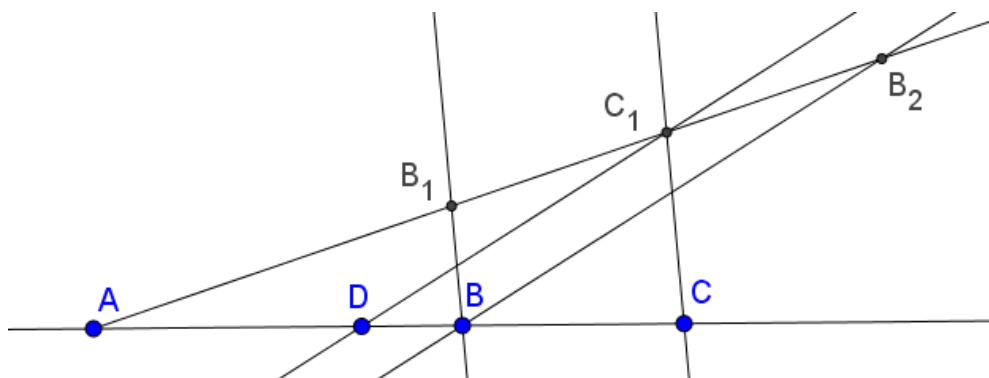
Předchozí dvojice duálních tvrzení dávají nástroje ke konstrukci čtveřice harmonicky sdružených bodů, respektive k nalezení čtvrtého bodu, harmonicky sdruženého, s trojicí kolineárních bodů. Existuje několik způsobů, jak zkonstruovat harmonickou čtveřici bodů $(ABCD) = -1$, zde budou předvedeny dva z nich.

První způsob využívá ke konstrukci úplný čtyřroh (viz obrázek 8). Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Zvolíme bod X , neležící na přímce AB , který spojíme přímkami s body A, B, C . Na úsečce AX zvolíme bod E , který spojíme s body B, C . Průsečík BX a EC označíme F . Průsečík AF a EB označíme G . Pak průsečík AB a XG je hledaný bod D .



Obrázek 8: Konstrukce harmonické čtveřice bodů pomocí úplného čtyřrohu

Druhý způsob využívá podobnosti trojúhelníků (viz obrázek 9). Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Narýsujeme polopřímku s počátečním bodem A , na ní zvolíme bod B_1 . Sestrojíme přímku BB_1 a s ní rovnoběžnou přímku bodem C , tato přímka protne polopřímku AB_1 v bodě C_1 . Bod B_2 vznikne zobrazením bodu B_1 se středem C_1 a koeficientem $\kappa = -1$. Body BB_2 vedeme přímku, k ní sestrojíme rovnoběžku bodem C_1 . Její průsečík s přímkou AB je hledaný bod D .



Obrázek 9: Konstrukce harmonické čtveřice bodů pomocí podobných trojúhelníků

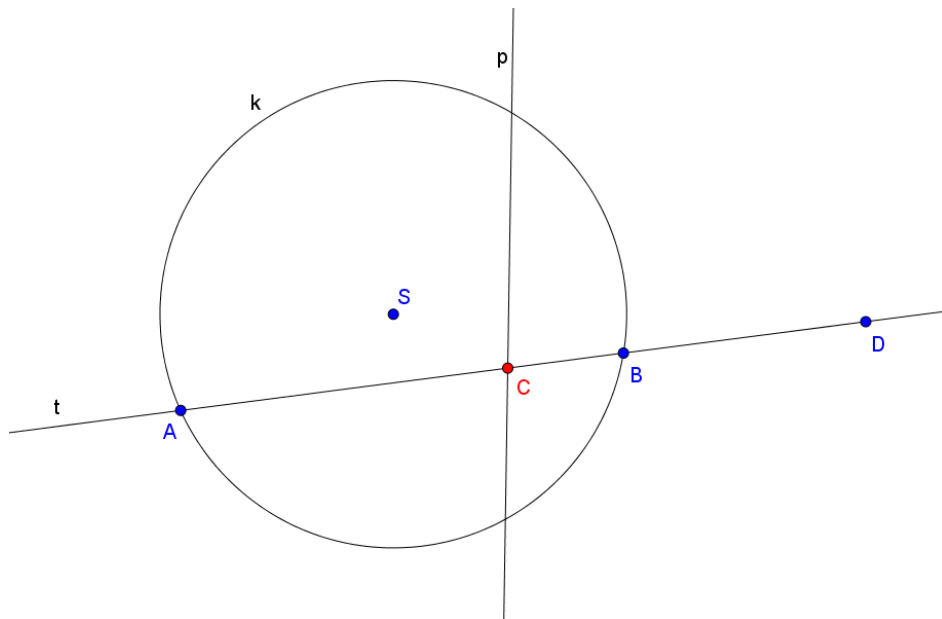
Následující úlohy lze vyřešit poměrně jednoduše druhým způsobem, tedy pomocí podobných trojúhelníků.

Úloha 4: Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Zkonstruujte bod D tak, aby platilo $(ABCD) = -3$.

Úloha 5: Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Zkonstruuje bod D tak, aby platilo $(ABCD) = \frac{5}{3}$.

2.1.5 Polára bodu ke kuželosečce

Při studiu kuželoseček hledal Girard Desargues množinu všech bodů C , které jsou harmonicky sdružené s pevně zvoleným bodem D vzhledem k bodům A, B , ve kterých sečna t vedená bodem D protíná kuželosečku k (viz obrázek 10). Desargues došel ke zjištění, že množina takových bodů tvoří přímku p , kterou dnes nazýváme *polárou* bodu D ke kuželosečce k , bod D nazýváme *pólem* této přímky. Toto pojmenování ovšem nezavedl Desargues, ale nezávisle na sobě o téměř dvě století později francouzští matematici François Joseph Servois (1767 – 1847) a Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859) (Trkovská, 2014, s. 26).



Obrázek 10: Polára bodu ke kružnici

Úloha 6: Co se stane, jestliže sečna t přejde do krajní polohy a stane se z ní tečna kružnice k ? Co z toho plyne pro konstrukci poláry?

Úloha 7: Narýsujte poláru p bodu P , který leží vně kruhu určeného k . Jaká je vzájemná poloha poláry p a přímky SP ?

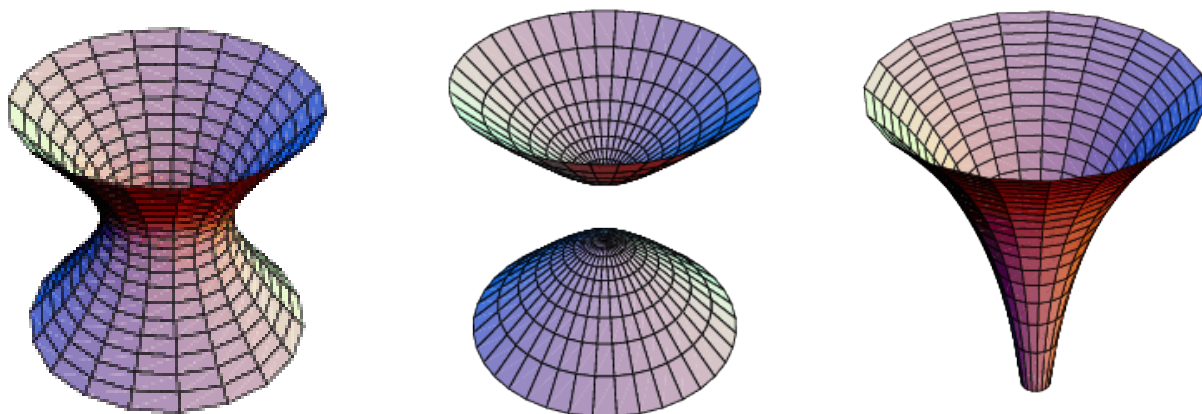
Úloha 8a: Lze najít poláru p bodu P , který leží uvnitř kruhu určeného k ? (Řešte pomocí dvou přímek procházejících bodem P).

Úloha 8b: Lze najít poláru p bodu P , který leží uvnitř kruhu určeného k ? (Řešte pomocí znalostí o přímce SP a poláře p .)

2.2 Základní pojmy Bolyai – Lobačevského geometrie

Jak již bylo popsáno, je Bolyai – Lobačevského geometrie něčím novým, neobvyklým a jen velmi těžko představitelným. Jedná se o geometrii, kterou lze zkoumat na obrovských prostorech vesmíru. Poloměr Země je stále ještě velmi malé měřítko, čehož si byl vědom i Gauss. Sám Lobačevský si byl vědom, že v pozemských podmínkách nelze novou geometrii dostatečně dobře zkoumat. Proto zkoumal důsledky své teorie na trojúhelníku tvořeném hvězdami Riegel – Sirius – 29Eridani. Jeho měření potvrzovalo správnost teorie, ale odchylky i v takto obrovském trojúhelníku byly tak nepatrné, že by mohly být způsobeny nepřesností měření (Pavliček, 1953, s. 182).

Jelikož se tato práce zabývá Bolyai – Lobačevského geometrií, je potřeba názorně ukázat, jak v ní vypadají rovinné útvary jako přímky, úhly, trojúhelníky, atp. k tomuto účelu bylo vystavěno mnoho modelů. Některé z nich, spolu s jejich vznikem, budou v této kapitole představeny. Bolyai – Lobačevského geometrie se nazývá též hyperbolická. Její modely je možné zkonstruovat na jednodílném nebo dvojdílném hyperboloidu (viz obrázek 11). Tyto modely však nemají konstantní křivost plochy. Konstantní kladnou křivost má například sféra. Konstantní zápornou křivost má Beltramiova pseudosféra (viz obrázek 11)⁸, která je tedy nejvhodnějším modelem (Thurston, 1997, s. 47).



Obrázek 11: Jednodílný hyperboloid, dvojdílný hyperboloid, pseudosféra

Po jisté idealizaci lze model reprezentovaný dvojdílným hyperboloidem zaměnit za polokulový model, kvůli lepší možnosti představit si jej. Pro lepší názornost se však mnohem

⁸ Obrázek 11 dostupný z <http://mathworld.wolfram.com> 10.4.2016.

více využívají modely, které vznikly projekcí některého z těchto trojrozměrných modelů do roviny. Nejznámějšími a zároveň nejvíce využívanými modely jsou:

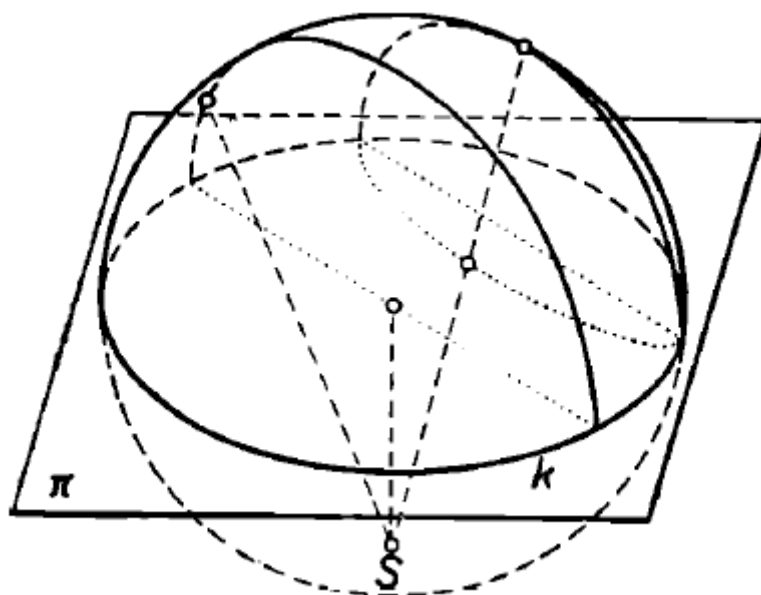
1. Poincarého kruhový model
2. Poincarého polorovinový model
3. Beltrami – Kleinův model

2.2.1 Polokulový model

Protne-li sféru rovina π procházející středem sféry, vzniknou dvě polosféry. Polokulový model vychází právě z jedné z těchto polosfér bez hraniční (hlavní) kružnice k . Přímkou se zde rozumí průnik polosféry s rovinou kolmou k rovině π , jedná se tedy o polokružnici bez krajních bodů. Poměrně jednoduše lze nazřít, že lze najít dvě různoběžné přímky, které ovšem neprotnou nějakou třetí přímkou (Pavlíček, 1953, s. 90).

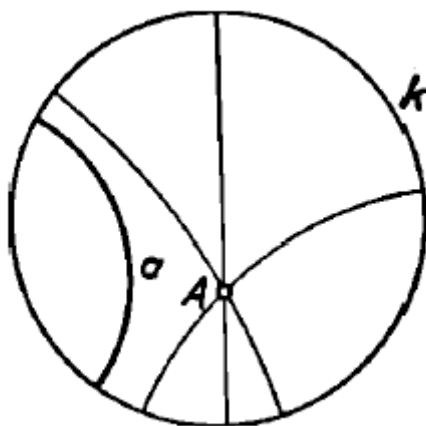
2.2.2 Poincarého kruhový model

Tento model vznikl projekcí polokulového modelu do roviny π se středem promítání v bodě S , který je pólem opačné polosféry (viz obrázek 12). Z obrázku 13⁹ je zřejmé, že přímky v tomto modelu vypadají buď jako eukleidovské úsečky bez krajních bodů nebo jako kružnicové oblouky bez krajních bodů (Pavlíček, 1953, s. 90 – 91).



Obrázek 12: Vznik Poincarého kruhového modelu

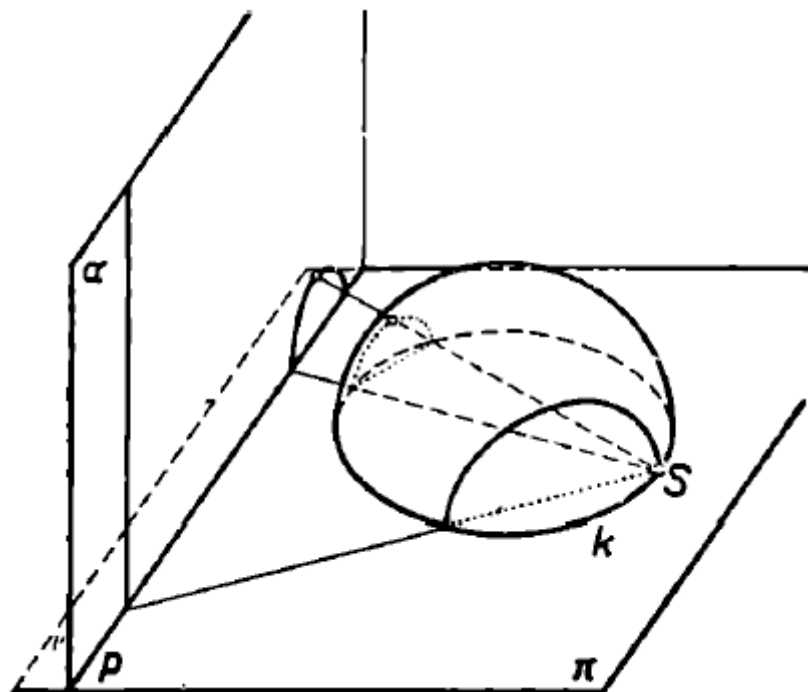
⁹ Obrázky 12 – 17 jsou převzaty z Pavlíček, 1953, s. 91.



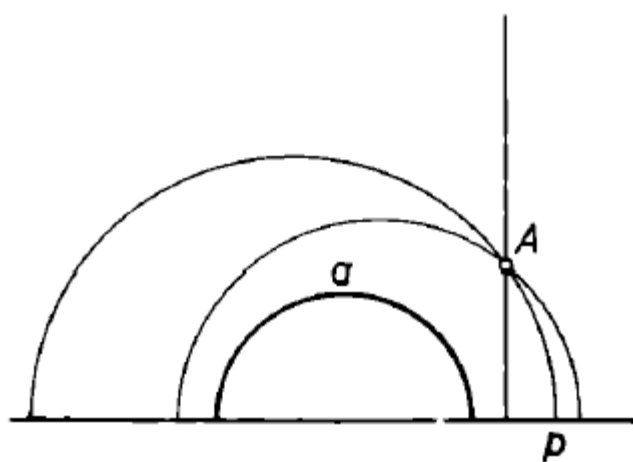
Obrázek 13: Poincarého kruhový model

2.2.3 Poincarého polorovinový model

Projekcí polokulového modelu do roviny α kolmé k rovině π , která polosféru neprotíná, se středem promítání v bodě S, který je vzdálenějším bodem průměru kružnice k , kolmému k rovině α (viz obrázek 14), vznikne Poincarého polorovinový model. Z obrázku 15 je zřejmé, že přímky v tomto modelu jsou buď polopřímky kolmé k průsečnici p rovin α a π , bez počátečního bodu, nebo půlkružnice bez krajních bodů (Pavlíček, 1953, s. 90 – 91).



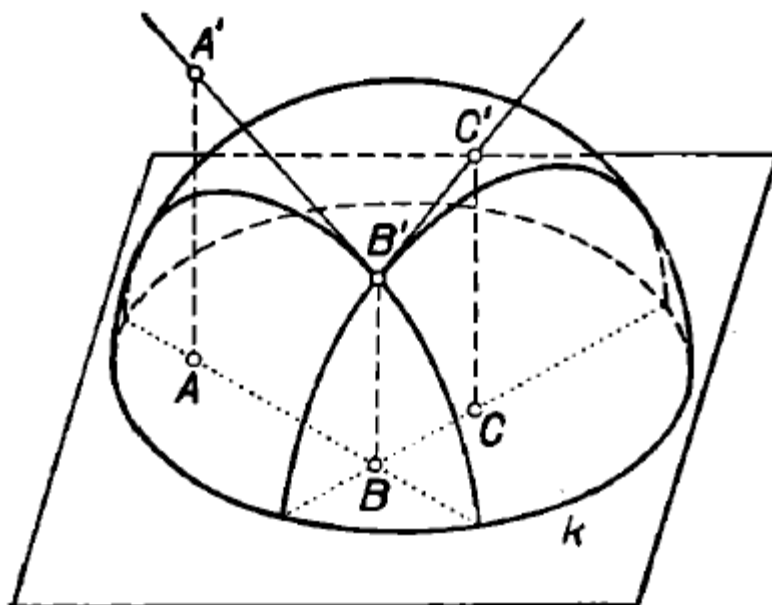
Obrázek 14: Vznik Poincarého polorovinového modelu



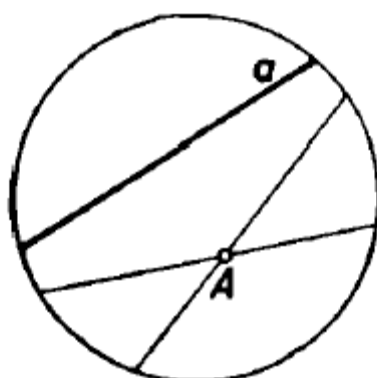
Obrázek 15: Poincarého polorovinový model

2.2.4 Beltrami – Kleinův model

Tento model je opět kruhový, vznikl projekcí polokulového modelu kolmo do roviny π (viz obrázek 16). Z obrázku 17 je zřejmé, že přímky v tomto modelu vypadají jako tětivy kružnice k , bez krajních bodů (Pavlíček, 1953, s. 90).



Obrázek 16: Vznik Beltrami – Kleinova modelu



Obrázek 17: Beltrami – Kleinův model

2.3 Bolyai – Lobačevského geometrie v Beltrami – Kleinovu modelu

Tato práce se bude dále zabírat pouze Beltrami – Kleinovým modelem, protože se mi zdá být nejvhodnější pro první seznámení s Lobačevského geometrií. Pro žáky by pravděpodobně bylo velmi složité představit si, jak vypadají přímky na hyperboloidu. Proto je možné jim názorně ukázat, že projekcí do roviny vznikne Beltrami – Kleinův model, který pak lze v pozemských podmínkách přiblížit například tak, že si představí rozhled do kraje z vysoké věže, rozhledny nebo z balónu ukotveného pevně nad krajinou. Pokud by byla krajina okolo minimálně zvlněná, pak by ze své pozorovatelnosti viděli kruhovou plochu. Vše,

co vidí, je „náš svět“, který se rozkládá uvnitř kruhu. Vše, co se nachází na jeho hranici nebo za ní, vně kruhu, již do „našeho světa“ nepatří.

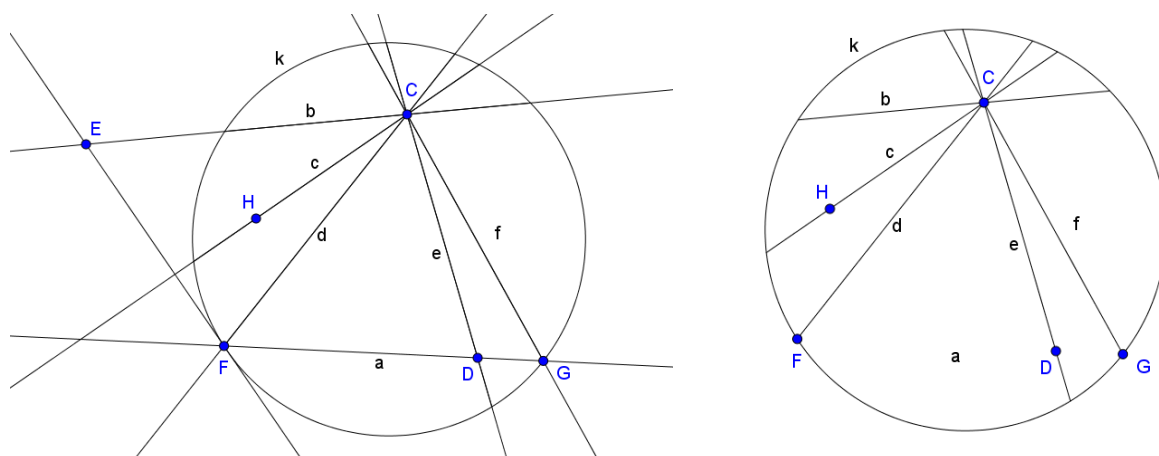
Nyní lze přistoupit k samotnému Beltrami – Kleinovu modelu. Veškeré konstrukce probíhají klasickým, eukleidovským způsobem. Dalo by se říci, že pomocí objektů eukleidovského světa jako jsou papír, tužka nebo naše oči popisujeme „nový svět“. Jak bylo řečeno výše, pouze objekty nacházející se uvnitř kruhu jsou lobačevské objekty. Všechny body ležící na jeho hranici, tedy na kružnici k nebo vně, jsou zvláštními případy nevlastních bodů. Lze je využívat při řešení problémů pomocí klasických eukleidovských konstrukcí, nicméně nejsou součástí výsledného řešení.

Úloha 9: Vyslovte negaci pátého Eukleidova postulátu: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku.*“

Jelikož je negace pátého eukleidova postulátu složený výrok, zvolíme nyní právě tu část negace, která vede k lobačevské geometrii. Na základě znalostí planimetrie a projektivní geometrie uvedených výše by měl být žák nyní schopen rozpoznat, jak vypadají rovnoběžky v lobačevské geometrii.

Úloha 10: V Beltrami – Kleinovu modelu je dána přímka p a bod P , který na ní neleží. Narýsujte aspoň tři rovnoběžky k přímce p bodem P .

Obrázek 18 ukazuje rozdíl mezi eukleidovskou a Lobačevského rovinou v Beltrami – Kleinovu modelu. Na levém obrázku je vidět kružnice k , body C, D, E, F, G, H a přímky a, b, c, d, e, f, g tak, jak vypadají v eukleidovské rovině. Na obrázku vlevo je vyobrazeno, jak vypadají body a přímky v Lobačevské rovině, přičemž body C, D, H do této roviny patří, ale body F, G již ne. Body C, D, H tedy budeme nazývat *vlastní body* a body F, G *nevlastní body* Lobačevské roviny.



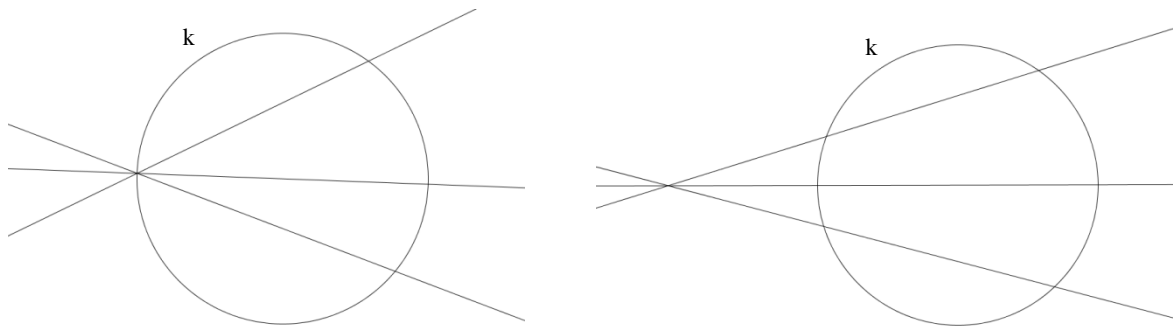
Obrázek 18: Body a přímky v eukleidovské a Lobačevského rovině

Úloha 11: Obrázek 18 ukazuje šest přímek v Lobačevského rovině. Vypište všechny rovnoběžky s přímkou a bodem C .

Také v Lobačevského geometrii existují části přímek. Proto naprosto intuitivně zavedeme pojmy *polopřímka* a *úsečka* stejně jako v eukleidovské geometrii. *Polopřímka* DF pak tedy bude množina všech bodů ležících mezi zvoleným vlastním bodem D přímky a a jejím nevlastním bodem F (viz obrázek 18). *Úsečkou* CH pak budeme nazývat průnik polopřímek CH a HC .

2.3.1 Vzájemná poloha přímek

Stejně jako v eukleidovské rovině, tak i v lobačevského rovině existují tři vzájemné polohy dvou přímek: *totožné*, *rovnoběžné* (někdy také *rovnoběžné totožné*, *rovnoběžné různé*) a *různoběžné*. Nicméně z Obrázek 19 je zřejmé, že v Lobačevského rovině lze nalézt dva druhy rovnoběžných přímek. k přímce a zde lze nalézt dvojice rovnoběžných přímek d, f a b, c . Každá z přímek d, f se s přímkou a protne v nevlastním bodě ležícím na kružnici k , takové rovnoběžky nazýváme *souběžky*. Analogicky s tím se každá z přímek b, c s přímkou a protne v nevlastním bodě ležícím vně kružnice k , takové rovnoběžky nazýváme *rozběžky* (viz obrázek 19).



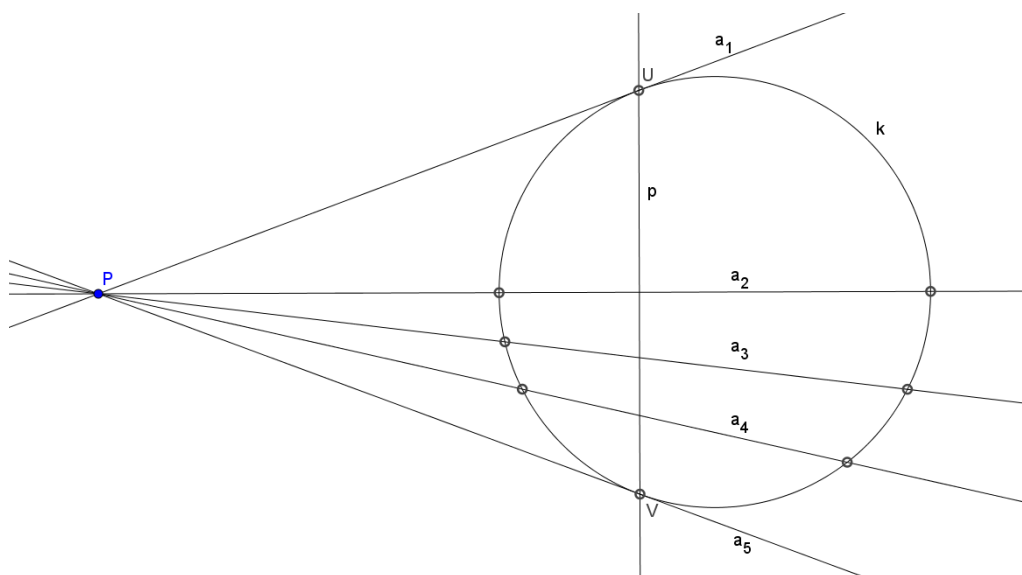
Obrázek 19: Souběžky a rozběžky

Na obrázku 18 je také vyobrazena přímka různoběžná s přímkou a . Jedná se o přímkou e . Jejich průsečík leží uvnitř kruhu určeného kružnicí k , proto se jedná o bod Lobačevského roviny.

- Úloha 12:** Necht' je dáno n různých přímek a_1, a_2, \dots, a_n , pak vždy existuje přímka p rovnoběžná se všemi z nich. Dokažte.
- Úloha 13:** Přímky a, b jsou rovnoběžné, pak existuje přímka p rovnoběžná s oběma z nich.
- Úloha 14:** Narýsujte rovnoběžné přímky a, b, c takové, že žádná přímka p neprotne všechny tři.
- Úloha 15:** Přímky a, b jsou rovnoběžné, na kružnici k najděte množinu dvojic bodů, jimiž lze vést přímku rovnoběžnou s a a zároveň různoběžnou s b .
- Úloha 16:** Narýsujte tři různé, po dvou souběžné přímky a, b, c .
- Úloha 17:** Narýsujte tři různé, po dvou souběžné přímky a, b, c tak, že a prochází středem kružnice k .
- Úloha 18:** Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C , dále najděte body D, E tak, aby platilo: $D \in AC, |AD|:|DC| = 3:1$, $E \in BC, |BE|:|EC| = 1:3$. Body D, E, C také tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Nad přeponami obou trojúhelníků zkonstruujte Thaletovy kružnice. Mají tyto kružnice nějaký společný bod? Jaký?

Úloha 19: Necht' A, B, C jsou tři různé body, přičemž A je střed kružnice k . Zkonstruujte přímky a, b, c tak, aby každé dvě z nich byly souběžky a navíc platilo $A \in a, B \in b, C \in c$. Proved'te rozbor a diskuzi.¹⁰

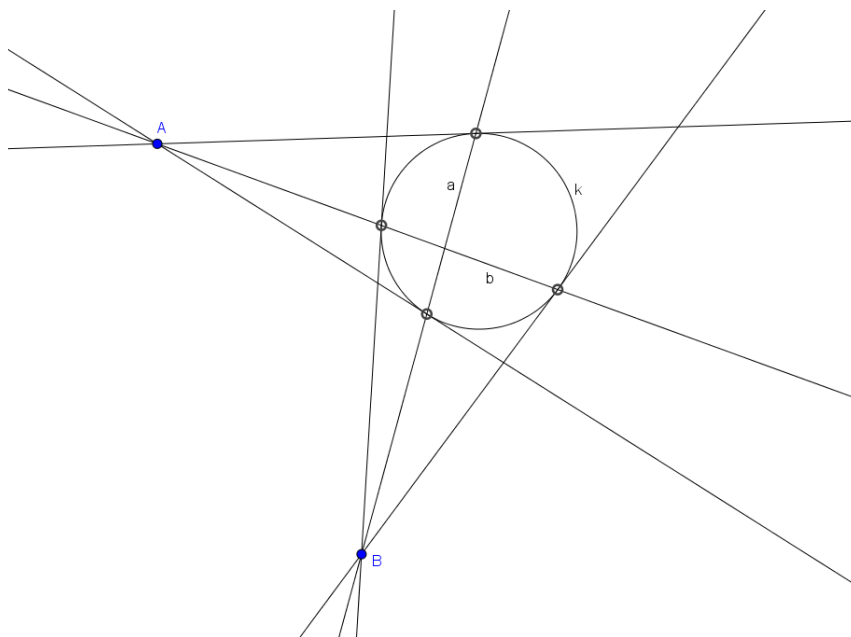
Zvláštním a velmi důležitým případem různoběžných přímek jsou kolmé přímky nebo také kolmice. Jelikož nebyl definován pojem úhel, nemůže být tedy využit při definování kolmých přímek. Mechanismus nalezení kolmých přímek lze nicméně odvodit z jiných znalostí, které o nich již máme. K dané přímce p existuje nekonečně mnoho kolmic a_1, a_2, \dots, a_n . Všechny tyto přímky jsou navzájem rovnoběžné. Předpokládejme, že se jedná o rozběžky procházející nevlastním bodem P . Kolmice přímky p v nevlastních bodech $U, V \in k$ jsou tečny kružnice k , které se protnou opět v bodě P . Pak je přímka p polárou bodu P vzhledem ke kružnici k .



Obrázek 20: Kolmice k přímce p v Beltrami – Kleinovu modelu

V Lobačevského rovině tedy řekneme, že jsou přímky a, b navzájem kolmé právě tehdy, když pól A přímky a leží na přímce b a zároveň pól B přímky b leží na přímce a .

¹⁰ Úlohy 12, 13, 14 a 18 jsou převzaty z Gatial a Hejný (1969).



Obrázek 21: Kolmice k přímce daným bodem

- Úloha 20:** Jak vypadají kolmice k přímce p , která prochází středem kružnice k ?
- Úloha 21:** Kolik společných kolmic mají dvě různé přímky?
- Úloha 22:** Dokažte, že neexistuje čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé.
- Úloha 23:** Necht' jsou přímky m, n souběžky a každá z nich je rozběžná s přímkou q . Zjistěte vzájemnou polohu přímek a, b definovaných vztahy $m \perp a \perp q \perp b \perp n$.¹¹

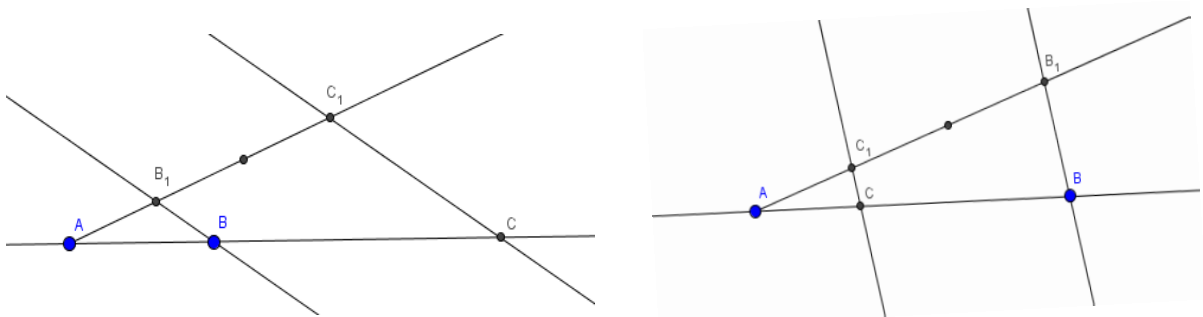
¹¹ Úlohy 20, 21, 22 a 23 jsou převzaty z Gatial a Hejný (1969) v původním znění, jsou pouze přeloženy ze slovenského do českého jazyka.

2.4 Řešení úloh

Úloha 1: $(ABC) = -1, (BAC) = -1, (CAB) = \frac{1}{2}, (CBA) = \frac{1}{2}, (ACB) = 2, (BCA) = 2.$

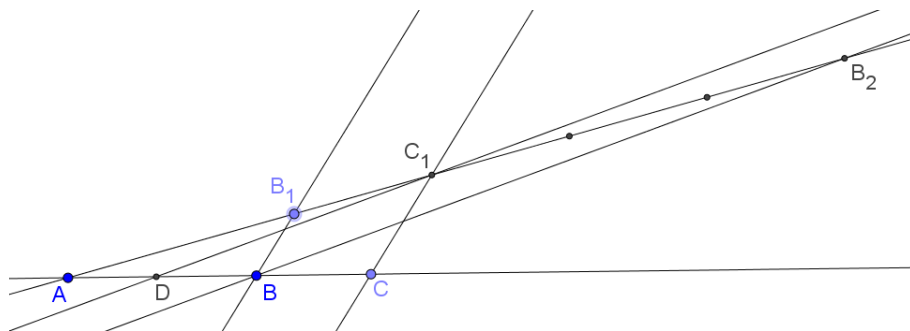
Úloha 2: Pokud bod C leží na úsečce AB , pak má dělicí poměr (ABC) zápornou hodnotu.

Úloha 3: Využitím podobných trojúhelníků viz obrázek 22.



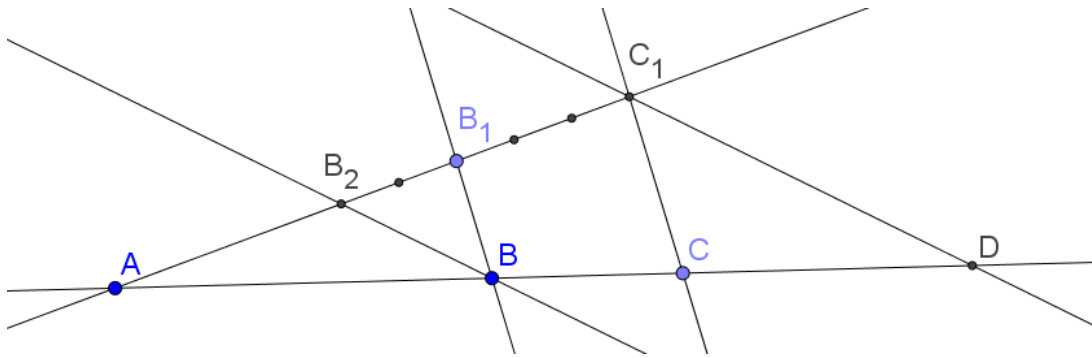
Obrázek 22: Konstrukce dělicích poměrů $(ABC) = 3, (BCA) = 3$

Úloha 4: Bod B_2 je obrazem bodu B_1 ve stejnolehlosti se středem v bodě C_1 a koeficientem podobnosti $\kappa = -3$ (viz obrázek 23).



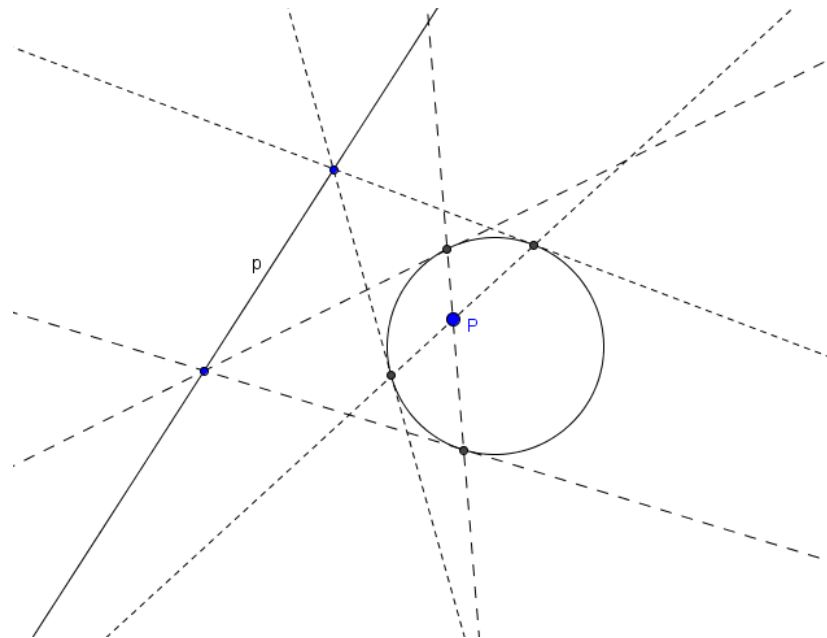
Obrázek 23: Konstrukce harmonické čtveřice bodů $(ABCD) = -3$

Úloha 5: Bod B_2 je obrazem bodu B_1 ve stejnolehlosti se středem v bodě C_1 a koeficientem podobnosti $\kappa = \frac{5}{3}$ (viz obrázek 24).



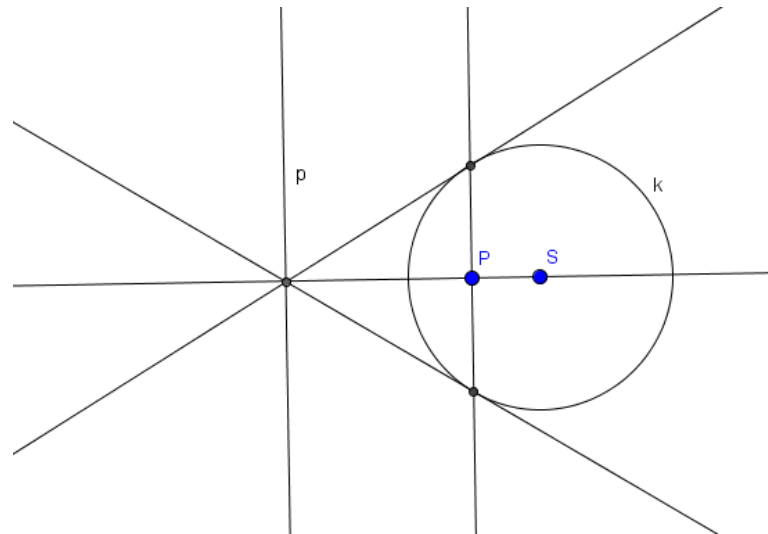
Obrázek 24: Konstrukce harmonické čtveřice bodů $(ABCD) = \frac{5}{3}$

- Úloha 6:** Body A, B, C splynou v jeden bod, bod dotyku tečny a kružnice. Poláru pak lze narýsovat jako spojnici bodů dotyku tečen vedených bodem P neležícím na kružnici k .
- Úloha 7:** Pomocí Thaletovy kružnice zkonstruujte body dotyku tečen, kterými je určena polára. Přímka SP a polára p jsou navzájem kolmé.
- Úloha 8a:** Bodem P vedeme dvě poláry, jejichž póly musí ležet na poláře p bodu P (viz obrázek 25).



Obrázek 25: Konstrukce poláry k bodu ležícímu uvnitř kruhu určeného kružnicí k pomocí dvou přímek

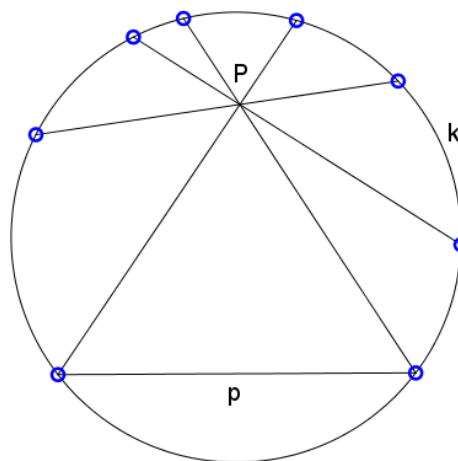
Úloha 8b: Bodem P sestrojíme jinou poláru, kolmou k přímce SP , jejíž pól musí ležet na poláře bodu P . Jelikož je tato polára kolmá k přímce SP , musí tento pól ležet rovněž této přímce.



Obrázek 26: Konstrukce poláry k bodu ležícímu uvnitř kruhu určeného kružnicí k pomocí kolmice k přímce SP

Úloha 9: „K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést aspoň dvě nebo žádnou rovnoběžku.“

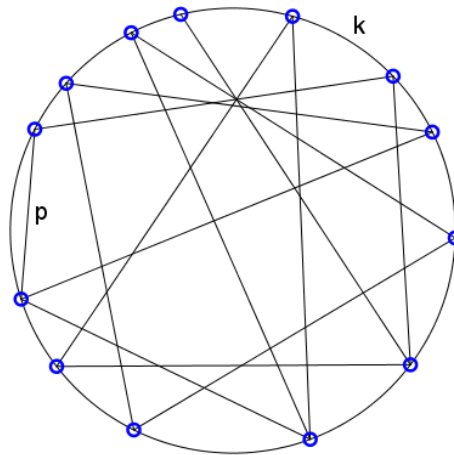
Úloha 10: Viz obrázek 27.



Obrázek 27: Příklady rovnoběžek s přímkou p bodem P

Úloha 11: Jsou to přímky b, c, d, f .

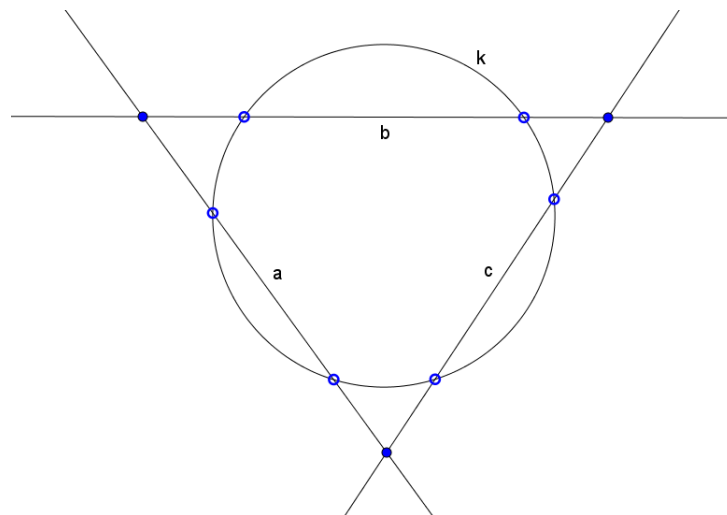
Úloha 12: Přímka p je rovnoběžná se všemi ostatními (viz obrázek 28).



Obrázek 28: Řešení úlohy 12

Úloha 13: Řešením je jakákoliv přímka, která se s a ani b neprotíná v žádném vlastním bodě.

Úloha 14: Řešením jsou souběžky, či rozběžky tvořící eukleidovský trojúhelník (viz obrázek 29).

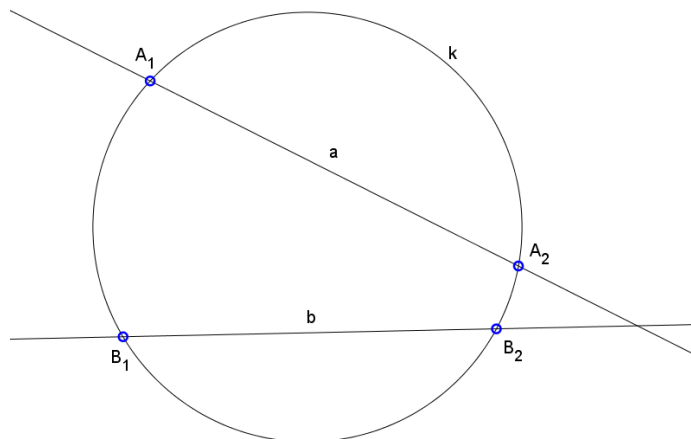


Obrázek 29: Řešení úlohy 14

Úloha 15: Přímky a a b jsou rozběžky, viz obrázek 30. Přímka $p = \{P_1P_2\}$.

Pak P_1 leží na menším oblouku A_1B_1 bez krajních bodů nebo je to bod A_1 a zároveň bod P_2 leží na menším oblouku B_1B_2 bez krajních bodů.

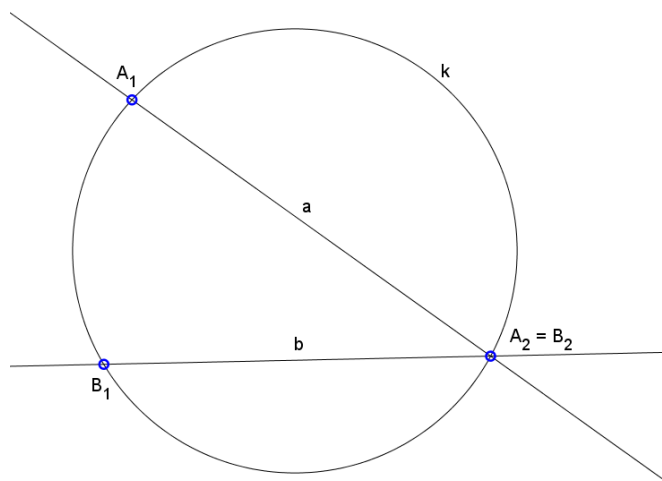
Nebo P_1 leží na menším oblouku A_2B_2 nebo je to bod A_2 a zároveň bod P_2 leží na menším oblouku B_1B_2 bez krajních bodů.



Obrázek 30: Řešení úlohy 15 – rozběžky

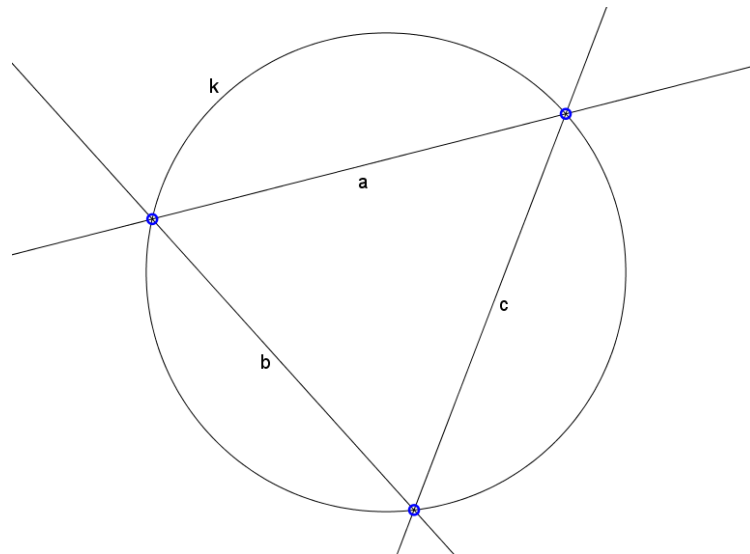
Přímky a a b jsou souběžky, viz obrázek 31. Přímka $p = \{P_1P_2\}$.

Pak P_1 leží na menším oblouku A_1B_1 bez krajních bodů nebo je to bod A_1 a zároveň bod P_2 leží na menším oblouku B_1B_2 bez krajních bodů.



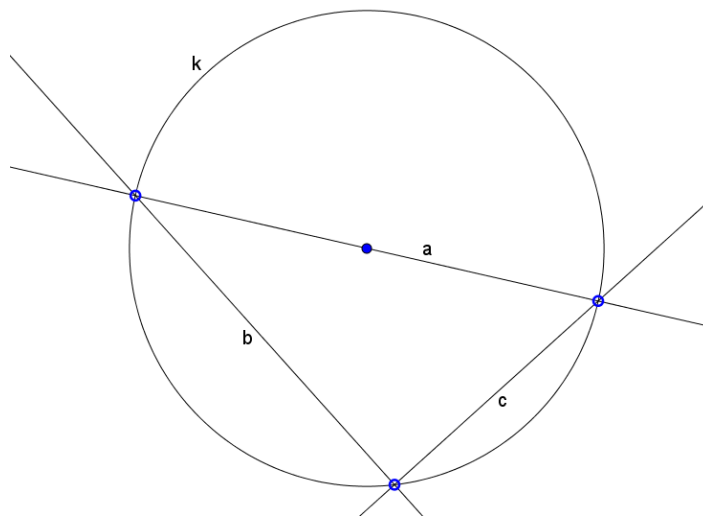
Obrázek 31: Řešení úlohy 15 – souběžky

Úloha 16: Viz obrázek 32.



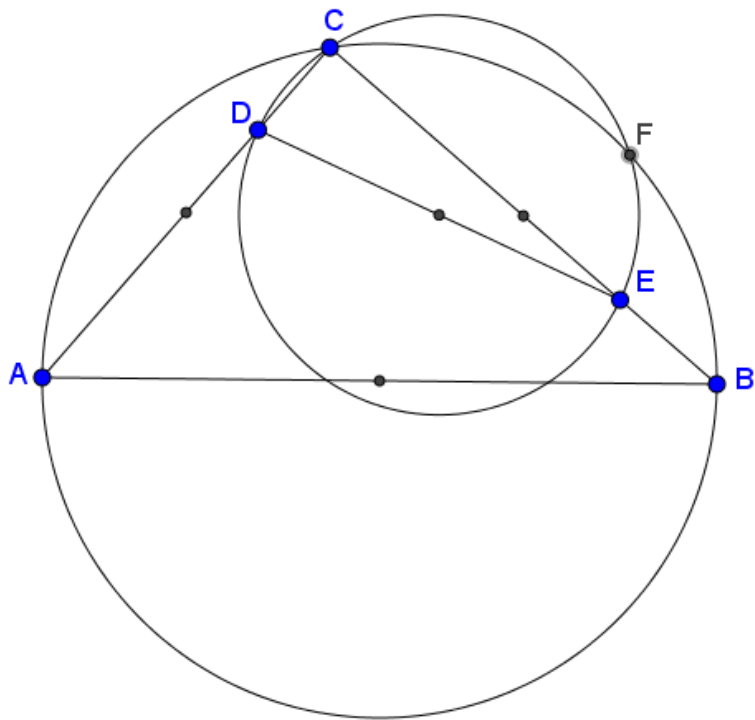
Obrázek 32: Řešení úlohy 16

Úloha 17: Viz obrázek 33.



Obrázek 33: Řešení úlohy 17

Úloha 18: V tomto případě se kružnice protínají ve dvou bodech, kterými jsou C a F (viz obrázek 34).

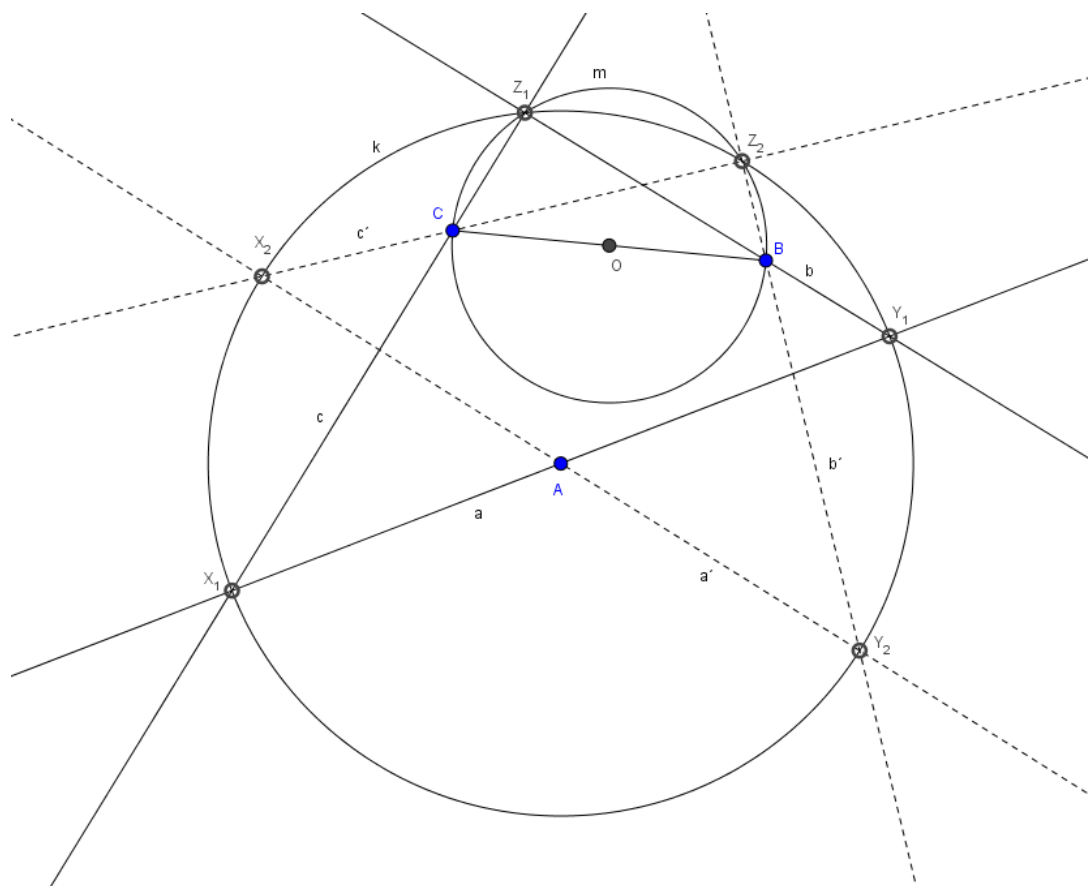


Obrázek 34: Řešení úlohy 18

Úloha 19: Necht' jsou přímky a, b, c , $a = \{X, Y\}, b = \{Y, Z\}, c = \{X, Z\}$, $X, Y, Z \in k$. Potom jsou body X, Y, Z vrcholy eukleidovského pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu Z . Stejně tak body B, C, Z tvoří vrcholy eukleidovského pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu Z .

Pokud tedy nad průměrem B, C sestrojíme Thaletovu kružnici $m(O, |BO|)$, $O = S_{BC}$, pak $m \cap k = Z$ (viz obrázek 35).

$$\text{Počet řešení } \begin{cases} m \cap k = \emptyset \\ m \cap k = Z \\ m \cap k = \{Z_1, Z_2\} \end{cases}$$



Obrázek 35: Řešení úlohy 19

Úloha 20: Všechny kolmice k takové přímce jsou k ní dokonce eukleidovsky kolmé, takže jsou také navzájem eukleidovsky rovnoběžné.

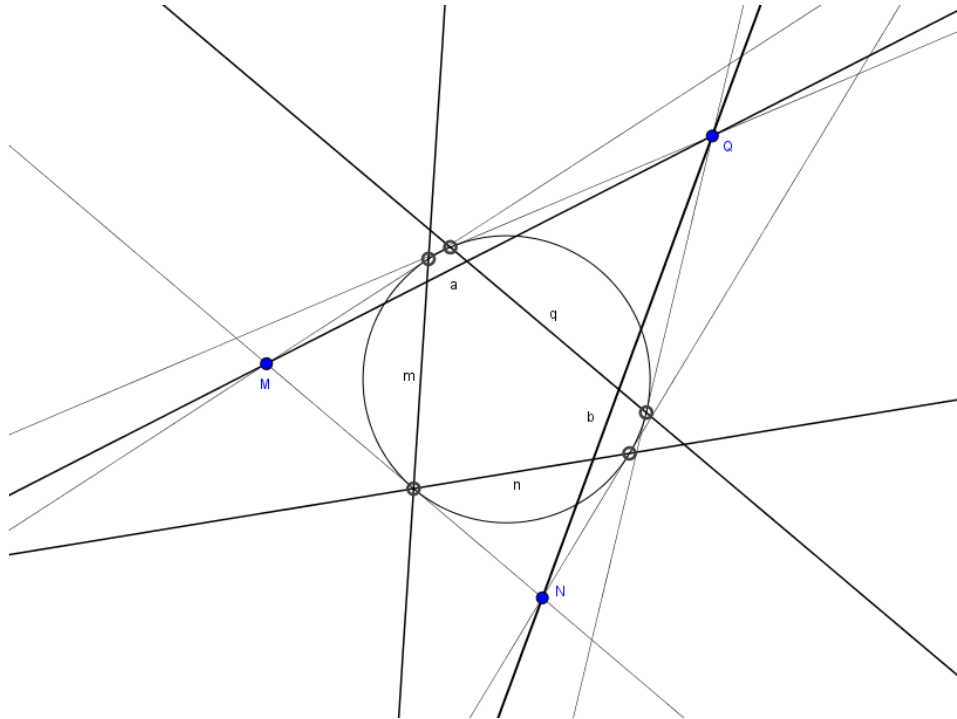
Úloha 21: Dvě rozběžky mají právě jednu společnou kolmici, kterou je polára jejich průsečíku (nevlastní bod).

Dvě souběžky nemají společnou kolmici, protože jejich průsečík leží na kružnici k a polára k němu je tedy tečnou kružnice k v tomto bodě.

Dvě různoběžky nemají společnou kolmici, protože polára jejich průsečíku je vnější přímkou kružnice k .

Úloha 22: Dvě rozběžky a, b mají právě jednu společnou kolmici c , na nich tedy mohou ležet tři strany zamýšleného čtyřúhelníku. Neexistuje další společná kolmice a, b , proto neexistuje ani tento čtyřúhelník.

Úloha 23: Přímka a prochází póly přímek m a q , přímka b prochází póly přímek n a q . Protože přímky a, b prochází pólem přímky q , což je nevlastní bod, musí být rozběžné (viz obrázek 36).



Obrázek 36: Řešení úlohy 23

3 Didaktická část

Tato kapitola je věnována průzkumu vybraných středoškolských učebnic geometrie, dále pak objasňuje, jakým způsobem byl připravován a realizován experiment. Závěrečná část této kapitoly přináší vyhodnocení experimentu.

3.1 Projektivní a Bolyai – Lobačevského geometrie v učebnicích

Jelikož jsem se s Bolyai – Lobačevského geometrií setkal poprvé až na vysoké škole, zajímalo mě, z jakého důvodu tomu bylo tak pozdě. Proto jsem se snažil zjistit, kolik prostoru je věnováno tomuto tématu v nejběžněji používaných učebnicích geometrie na českých středních školách, z tohoto důvodu jsem prostudoval především učebnice z řady Matematika pro gymnázia vydavatelství Prometheus.

Matematika pro gymnázia – Planimetrie (Pomykalová)

Tato učebnice je pravděpodobně nejčastěji používanou středoškolskou učebnicí planimetrie u nás. Jedná se o učebnici eukleidovské geometrie, nicméně se v ní, stejně jako v dalších učebnicích z řady Matematika pro gymnázia, nachází řada poznámek. v této knize se nazývají „Výlety do historie geometrie“. v těchto poznámkách je žákovi přiblížena motivace rozvoje planimetrie, historický vývoj, klasické úlohy antické matematiky a další zajímavosti. V poznámce „Třetí výlet do historie geometrie“ je odstavec věnovaný hyperbolické geometrii, ve kterém je stručně shrnuta motivace objevu, jsou jmenováni jeho autoři, Lobačevský, Bolyai a Gauss a je řečeno, že Eukleidův pátý postulát nahradili jednou z jeho negací, kde bodem neležícím na dané přímce prochází v rovině více přímek, které s danou přímkou nemají společný bod.

Matematika pro gymnázia – Stereometrie (Pomykalová)

Další velmi využívaná učebnice geometrie, se zabývá eukleidovskou geometrií. Opět se v ní nachází pět poznámek „Výlet do historie geometrie“, ale v žádné z nich již není žádná zmínka o hyperbolické geometrie, potažmo o jakékoliv jiné neeukleidovské geometrii. V úvodu této učebnice je podkapitola věnovaná volnému rovnoběžnému promítání. Po zavedení metriky je také využíváno pravoúhlého průmětu bodu, nebo přímky do roviny.

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie (Kočandrle, Boček)

V této učebnici je podle mě velmi zdařile a přehledně vyložena analytická geometrie. Jelikož je tato učebnice jedinou učebnicí z řady matematika pro gymnázia, která se zabývá

kuželosečkami a jejich vzájemnými polohami s přímkou, očekával jsem, že se v ní bude pojednávat o poláře bodu vzhledem ke kuželosečce. Pojem polára bodu ke kuželosečce se zde ovšem využívá pouze jako nástroj k nalezení tečen kružnice bodem, který na ní neleží. Pojem polára je redukován na proud logických argumentů vedoucích k rovnici, o níž je řečeno: „Přímka daná rovnicí (3) se nazývá polára bodu X_1 vzhledem ke kružnici k . Leží na ní body dotyku tečen vedených bodem X_1 ke kružnici k .“ (Kočandrle, Boček, 2008, s. 152).

3.2 Návrh experimentální výuky geometrie

Experiment byl prováděn na soukromém čtyřletém gymnáziu v Praze, kde působím čtvrtým rokem jako učitel matematiky. Na gymnáziu studuje vysoké procento žáků cizinců, přičemž nejvyšší zastoupení cizinců je ve čtvrtém ročníku a postupně se snižuje směrem k nižším ročníkům. Výuka ovšem probíhá zcela v českém jazyce. Experiment neprobíhal ve standardních hodinách matematiky, ale ve volných hodinách jako doplňkové, rozšiřující učivo. Účast žáků na experimentu byla dobrovolná, nebyla podmíněná jakýmkoliv benefity promítajícími se do výuky, natožpak klasifikace, matematiky. S dobrovolností a s tím, že se jednalo, v podstatě, o volnočasovou aktivitu také souvisela účast jednotlivých žáků. Protože se v současné době věnují téměř všichni žáci nějakým volnočasovým aktivitám, ať už se jedná o sport, umělecky orientované kroužky nebo jiné aktivity, z tohoto důvodu nebylo snadné najít kompromis při stanovení časového harmonogramu experimentu tak, aby vyhovoval většině žáků, kteří projeví zájem se ho zúčastnit.

3.3 Průběh experimentu

V hodinách matematiky, zejména na konci školního roku, kdy je již látka probraná a známky uzavřené, jsem byl několikrát žáky osloven, jestli bychom mohli věnovat hodinu nějaké „nestandardní, zajímavé matematice“. v první chvíli jsem byl zaskočen, protože tato žádost většinou vyšla z úst žáků, kteří na hodinách nikdy neoplývali přílišnou aktivitou, čemuž odpovídaly také jejich studijní výsledky. Improvizoval jsem tedy tuto hodinu na téma neeukleidovské geometrie. Seznámil jsem žáky s Eukleidovými postuláty, nechal jsem je vyslovit negaci pátého postulátu a sdělil jim, že existují geometrické světy, v nichž je využívána jedna nebo druhá část negace namísto pátého Eukleidova postulátu. Poté jsem nastínil některé důsledky těchto tvrzení v „nově vzniklých“ geometrických světech, zejména pak tvrzení týkající se součtu vnitřních úhlů v trojúhelnících. Tato tvrzení většinou zaujala většinu třídy, takže jsem po zbytek hodiny odpovídal na dotazy a ukazoval příklady. Tímto jsem v podstatě motivoval žáky k účasti na pozdějším experimentu.

Samotný experiment probíhal formou série sedmi přednášek po dobu čtyř týdnů, každé pondělí a čtvrtek mezi 27. říjnem a 21. listopadem 2016. Na přednáškách byla žákům promítána prezentace doprovázená výkladem. Rozsah každé přednášky odpovídal rozsahem jedné vyučovací hodiny, tedy zhruba 45 minut. Úkolem žáků bylo reagovat na podnětné otázky, řešit samostatně nebo v menších skupinkách gradovanou sérii úloh související s výkladem a následně doprovodit své řešení komentářem. Číslování úloh přímo korespondovalo s jejich číslováním v této práci.

Experimentu se zúčastnilo 25 žáků (12 chlapců a 13 dívek) prvního (14 žáků) a čtvrtého ročníku (11 žáků). Původní záměr byl realizovat experiment především se žáky třetího a čtvrtého ročníku, protože již v průběhu svého středoškolského studia absolvovali výuku planimetrie. Nicméně bylo velmi zajímavé, že se experimentu účastnila poměrně početná skupina žáků prvního ročníku, jejichž náhled na problematiku a ochota sdílet své postoje a názory byly velmi přínosné. Dále bylo záměrem realizovat experiment na rozmanité skupině ve smyslu dosahovaných studijních výsledků a s tím související očekávané úrovni znalostí. To se podařilo jednak díky dobrovolné účasti žáků v experimentu, tak díky rozdílnému věku, respektive ročníkové příslušnosti, jednotlivých žáků.

Jak bylo popsáno výše, někteří žáci se z různých důvodů nemohli účastnit každé přednášky. Tento fakt jsem se snažil kompenzovat stručným zopakováním posledního probíraného tématu a závěrů, ke kterým jsme společně dospěli, vždy v úvodu následující přednášky. Z přednášek byl pořizován audio záznam pomocí diktafonu s externím mikrofonom. Tento záznam byl ještě tentýž den přepsán. V následujícím textu o sobě, kvůli zachování jistého odstupu při přepisu rozhovorů mezi mnou a žáky, mluvím jako o učiteli. Křestní jména žáků užívaná v následujícím textu jsou smyšlená a nekorespondují se skutečnými jmény žáků účastnících se experimentu.

a) Objev neeukleidovské geometrie (27. 10. 2016, 20 žáků)

Na první přednášce byli žáci seznámeni s výstavbou eukleidovské geometrie, jak ji přinesl Eukleidés ve svých *Základech*. Dále se věnovala historickému vývoji problému pátého postulátu. Poté, co dospěla přednáška k důkazu Giorolama Saccheriho, měli žáci za úkol vyslovit negaci pátého Eukleidova postulátu: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést v rovině určené přímkou p a bodem P právě jednu rovnoběžku.*“

Přepis komunikace učitele a žáků:

Ivča (1. ročník): „*K libovolné přímce p nelze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést žádnou rovnoběžku.*“

Žáci prvního ročníku týden poslední hodiny před touto přednáškou probírali jednoduché výroky a jejich negace.

Učitel: „*To je pravda, ale vzpomínáš si, jak jsme si říkali, že negace nějakého výroku musí být úplný opak? Že nesmí zbyť žádná jiná možnost, ani se nemůže stát, že se nějaká část vyskytne v původním výroku i v negaci?*“

Ivča: „*Ano.*“

Učitel: „*Co tedy znamená právě jednu rovnoběžku?*“

Ivča: „*No, jako že přesně jednu.*“

Učitel: „*Výborně.*“ Píše na tabuli $V = 1$, komentuje: „ *V původním výroku se tedy říká, že existuje přesně jedna rovnoběžka. Ty jsi vyslovila negaci, kde platí,*“ píše na tabuli $\neg V = 0$, „*jedná se tedy o negaci původního výroku?*“

Lukáš (1. ročník), Nikolai (4. ročník): „*Ne... Dvě a více rovnoběžek...*“

Učitel: „*Správně, kluci. Ivčo, chápeš jak, jak to kluci mysleli? Dokázala bys teď vyslovit celou negaci tohoto výroku?*“ ukazuje na zeď, kde je právě promítán původní výrok.

Ivča: „*K libovolné přímce p nelze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést žádnou rovnoběžku, nebo existují dvě a více rovnoběžek.*“

Komentář

Na předchozích hodinách matematiky Ivča bez potíží negovala výroky kvantifikované pomocí „aspoň a nejvýše“, navíc nemá problém prezentovat své postoje a názory před ostatními, zřejmě i proto se ujala slova a pokusila se negovat pátý postulát. Zřejmě si hned neuvědomila, co znamená „právě jedna rovnoběžka“. Po návodných otázkách učitele a reakci spolužáků si již vše uvědomila a byla schopna sestavit kompletní negaci.

Poté byli žáci seznámeni s principem Saccheriho důkazu a objevem, se kterým v podstatě současně přišli Bolyai a Lobačevský. Zároveň s tím byli seznámeni, že tito dva matematici nebyli jediní, kteří si byli jistí, že takováto geometrie může existovat a že později byly Felixem Kleinem potvrzeny tři druhy geometrie. Na závěr proběhla diskuze o přínosu objevu neeukleidovských geometrií, kdy žáci sami přišli na několik důležitých přínosů, třeba

na objasnění některých, do té doby nevyjasněných pojmů geometrie. Žáky především zaujala tvrzení o rozdílném součtu vnitřních úhlů v trojúhelnících, nebo o neexistenci podobných trojúhelníků v neeukleidovských geometriích.

b) Základní pojmy projektivní geometrie (31. 10. 2016, 20 žáků)

Následující tři přednášky byly věnovány seznámení žáků se základními pojmy projektivní geometrie. Nejprve bylo vysvětleno, co si mají žáci představit pod pojmem projekce a že se s ní běžně setkávají. Byl objasněn pojem projektivní invariant, který je předmětem zkoumání projektivní geometrie, jako něco, co zůstává při projekci zachováno. Jako příklad projektivní věty byla žákům předložena Desarguova věta. Poté byli žáci seznámeni s pojmem dualita pouze jako s pojmem, který zaměňuje dvojice pojmů bod, přímka a spojovat, protínat. Bez větších problémů vytvořili žáci k prvnímu Eukleidovu postulátu: „*Jsou-li A, B dva libovolné různé body, pak existuje právě jedna přímka, která je spojuje,*“ duální tvrzení: „*Jsou-li a, b , dvě libovolné různé přímky, pak existuje právě jeden bod, ve kterém se protnou.*“

Poté následovala učitelem navozená a moderovaná diskuze.

Učitel: „*Jedná se vůbec o něco nového nebo je to jen hraní se slovy?*“

Radek, Lukáš (1. ročník) se mezi sebou radí a pak prohlásí: „*Třeba dvě totožné přímky se přece neprotnou v jednom bodě...*“

Učitel: (ukazuje do prezentace) „*Jedná se o dvě různé přímky.*“

Věra (1. ročník): „*Rovnoběžky se nikdy neprotnou!*“

Učitel: „*Výborně. Do teď jsme se učili, že dvě různé rovnoběžné přímky se neprotnou. v projektivní geometrii ovšem platí dualita, proto se i rovnoběžné přímky protnou. Takový bod budeme nazývat nevlastní bod těchto rovnoběžek a budeme ho značit ∞ .*“

Následuje další slide prezentace s nadpisem „Nevlastní body“, na kterém je fotka zdánlivě se sbíhajících kolejí a otázka: „*Kolik jich je?*“

Učitel opakuje otázku: „*Kolik těch nevlastních bodů asi bude?*“

Radek a několik dalších žáků: „*Nekonečně mnoho.*“

Učitel: „*Zkus nám vysvětlit, proč by jich mělo být nekonečně mnoho?*“

Radek: „Protože když vezmu dvě rovnoběžky, tak se protnou v jednom nekonečnu, teda nevlastním bodu... Když přidám další rovnoběžku, tak se protnou v dalším nevlastním bodu atd.“

Učitel: „Takže když budu přidávat rovnoběžky, tak budu dostávat nové nevlastní body?“

Ivča: „Ano, protože můžou být od sebe různě daleko, takže se pak protnou v různých vzdálenostech.“

Učitel črtá navrhované řešení na tabuli: čtyři „rovnoběžky“ různě vzdálené od sebe, protínající se v různých nevlastních bodech.

Olina (1. ročník): „Já si myslím, že se všechny tyhle rovnoběžky protnou v jednom bodě.“

Učitel: „Proč?“

Olina: „Protože jsou všechny nekonečné, takže se prostě všechny protnou tam někde v tom jednom nekonečnu.“

Ostatní žáci přijímají její argument a souhlasí. Učitel potvrzuje, že se všechny rovnoběžky načrtnuté na tabuli protínají v jednom nevlastním bodě. Nicméně znovu vysloví otázku: „Kolik tedy existuje nevlastních bodů?“

Vanda (1. ročník): „No přece jeden, teď jsme to řekli.“

Učitel odkrývá další odrážku „rovnoběžník“ a ptá se: „Co je to rovnoběžník?“

Nikolai: „Čtyřúhelník, který má rovnoběžné protější strany.“

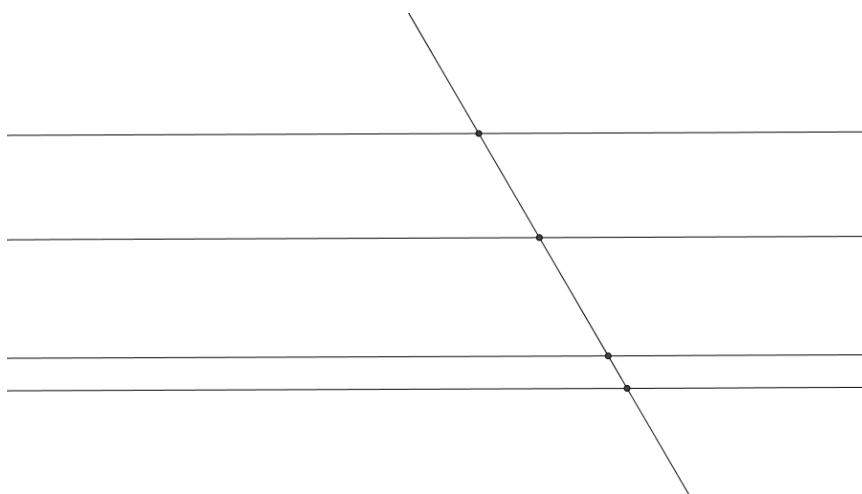
Učitel využívá náčrtu na tabuli a črtá další dvě rovnoběžky jiným směrem, než původní. a přitom se ptá: „Takže tyto dvě strany, když je prodloužím, tak se protnou ve stejném nevlastním bodě jako tyhle ostatní rovnoběžky?“

Radek: „Je jich nekonečně mnoho, pro každé jinak natočené rovnoběžky je jeden.“

Komentář

V první části této přednášky je zřejmé, že si Radek spolu s Lukášem neuvědomili význam slova *různé* v kontextu. Naopak Věra, možná i s přispěním omylu chlapců, se zamyslela nad dalšími vzájemnými polohami dvou přímk v rovině a došla k závěru, že přínos bude v oblasti rovnoběžných přímk.

Ve druhé části bylo zajímavé, jak Radkova nahlas pronesená hypotéza ovlivnila zbytek žáků. Většina mlčela, a buď dál přemýšlela nad svou teorií anebo se rychle přiklonili k Radkovu názoru, zejména žáci prvního ročníku. Dále pak hypotéza Ivči, která zřejmě koresponduje s představou několika navzájem rovnoběžných přímek prořezaných s nimi různoběžnou přímkou, kde vzdálenosti mezi průsečíky skutečně korespondují se vzdáleností rovnoběžek (viz obrázek 37). Toto si vysvětlují z důvodu nižší schopnosti abstrakce a odhlédnutí od dosavadních znalostí týkajících se výhradně eukleidovské geometrie. Oproti tomu Olina ukázala, že jí nečiní problém oprostít se od znalostí, které do té doby považovala za běžné a samozřejmé. Možná, že ji utvrdilo také, jak reagoval učitel, když črtal na tabuli navrhované hypotézy a žádnou z nich stále nepotvrdil jako správnou.



Obrázek 37: Vzdálenost rovnoběžek a jejich průsečíků s přímkou s nimi různoběžnou

V závěrečné části pak bylo třeba, aby žáci viděli problém na tabuli, až pak byli schopni správně zodpovědět prostou, ale složitou otázku.

c) Dělicí poměr (3. 11. 2016, 18 žáků)

Druhá přednáška týkající se projektivní geometrie se již zabývala projektivními invarianty. Nejdříve byli žáci obeznámeni se zřejmě nejjednodušším invariantem, incidencí. Následně byl zaveden pojem orientovaná přímka a orientovaná úsečka. Pro žáky čtvrtého ročníku se nejednalo o úplně nový pojem, protože již absolvovali výuku analytické geometrie. Nicméně žáci prvního ročníku také neměli žádný problém pochopit, zvláště když jim bylo připomenuto, že s orientovanou přímkou již dávno pracují, protože jednu z jejích forem, číselnou osu, používají snad již od první třídy. Zavedení pojmů délka orientované úsečky a její znaménko byly doprovázeny náčrtem na tabuli. Následně byl zaveden pojem dělicí

poměr jako algebraický vztah mezi délkami orientovaných úseček. Poté přišly na řadu první tři úlohy.

Úloha 1: Necht' je bod C středem orientované úsečky AB . Spočítejte hodnoty dělicích poměrů (ABC) , (BAC) , (CAB) , (CBA) , (ACB) , (BCA) .

Na žácích byly patrné rozpaky, nesnažili se mezi sebou konzultovat své postupy a řešení, zřejmě se projevil také rychlý sled nových informací a proto si s úlohou nevěděli rady, z toho důvodu byl první dělicí poměr (ABC) rozebrán s žáky, kdy napovídali učiteli, jaké hodnoty by měl dosazovat. Po úvodních rozpacích stanovili všichni žáci hodnoty zbylých dělicích poměrů během necelých pěti minut bez obtíží. Jen Erik (4. ročník) při kontrole již prvního samostatně řešeného dělicího poměru zjistil, že špatně sestavil poměr úseček z předpisu, proto mu všechny dělicí poměry vyšly špatně. Svou chybu si uvědomil ihned a princip pochopil bez problému.

Po několika dnech od této přednášky přišel Vašek (4. ročník) a svěřil se: „*Pane učiteli, já jsem měl všechny ty dělicí poměry taky špatně. Já to chápu, ale jak jsem ten dis – všechno, tak se mi to popletlo a špatně jsem sestavil ten dělicí poměr. Nechtěl jsem to říkat ve třídě, aby si o mě neříkali... Vždyť víte...*“ O této diagnóze vím, protože jej učím a také vím, že jeho forma zápisu má do ideálu velmi daleko, mnohdy se jedná prostě o výpočty rozesté po stránce, využívání stejného symbolu při substituci (například substitute: $\sqrt{x-2} = x$). Ale zároveň je znát, že nad každou úlohou uvažuje jinak než většina jeho spolužáků, nesnaží se hledat v řešení pouze algoritmy, pomocí nichž by bylo možné použít vzorec, ale snaží se pochopit principy. Je vidět, že jako jeden z mála žáků je skutečně schopen abstrakce a pozdější krystalizace tak, jak tyto pojmy zavádí Hejný. Toho, že se mi svěřil, si vážím i z hlediska morálního, protože to znamená, že ve mně má dostatek důvěry, aby mi svěřil i takto osobní a důvěrné pocity.

Úloha 2: Na čem závisí znaménko dělicího poměru?

Po chvíli ticha se žáci osmělili a začali prezentovat své nápady.

Erik: „*Na rozmístění těch bodů.*“

Ivča: „*Na těch úsečkách.*“

Učitel: „*Řekněme, že ty dvě úsečky již jsou pevně dané.*“

Lukáš: „Záporný znamínko mají, když jedna má stejný směr jako přímka a druhá opačný směr. A kladný znamínko má, když mají obě úsečky stejný směr jako přímka, ne, bude to fungovat i když mají obě opačný směr.“

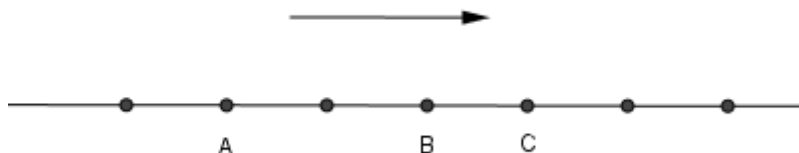
Komentář

Na Erikově reakci je zřejmé, že řekl nahlas první rozumně vypadající myšlenku. Měl svým způsobem samozřejmě pravdu, nicméně Lukáš byl ve svých úvahách rychlejší a nedal mu již prostor myšlenku rozvinout. Stejně tak Ivča by nejspíš došla ke správné odpovědi. Nicméně Lukáš byl první, kdo dosáhl abstrakce a propojil pojmy poměr délek orientovaných úseček a dřívější znalosti ohledně podílu dvou nenulových celých čísel.

Úloha 3: Necht' jsou na orientované úsečce dány body A, B . Najděte bod C tak, aby platilo $(ABC) = 3$, $(BCA) = 3$.

Žáci dostali asi tři minuty na rozmyšlenou, poté opět napovídali učiteli, který zaznamenával jejich řešení na tabuli. Na tabuli byla připravená orientovaná přímka AB , žáci museli popsat, na kolik částí je třeba rozdělit úsečku AB a dále popsat, jaké je přesná poloha bodu C vůči pevně zvoleným bodům A, B .

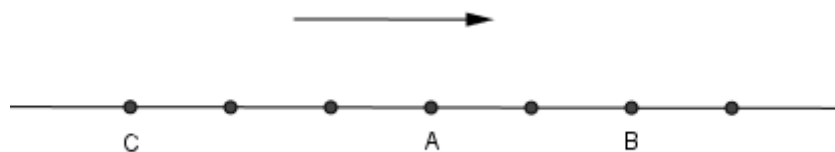
Jako první prezentovala své řešení Olina a bylo naprosto správné (viz obrázek 38).



Obrázek 38: Žákovské řešení úlohy 3 (Olina 1)

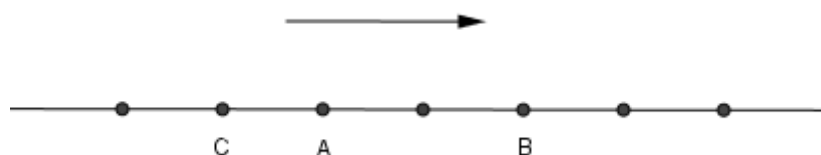
Aby prezentovali svá řešení také ostatní žáci, vznesl učitel dotaz: „Je to jediné řešení?“

Nikolai poté prezentoval své řešení, nicméně již v průběhu prezentace došel k závěru, že nemůže být správné (viz obrázek 39). Byl tedy požádán, aby i ostatním sdělil, proč je jeho úvaha špatně. Rozebral tedy, že se jedná o dělicí poměr $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$.



Obrázek 39: Žákovské řešení úlohy 3 (Nikolai)

Poté prezentovala Olina ještě jedno řešení, kterým si ovšem nebyla již tak jistá jako tím prvním, které našla (viz obrázek 40).

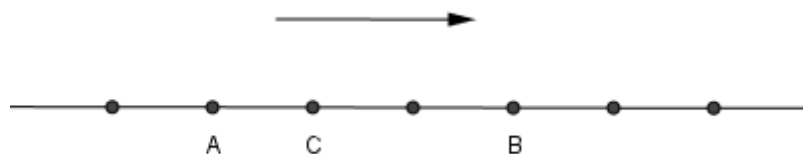


Obrázek 40: Žákovské řešení úlohy 3 (Olina 2)

Komentář

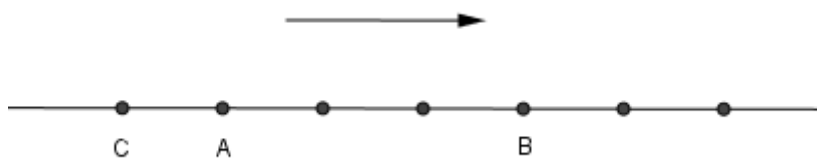
Olina si byla dobře vědoma, že pokud bod C bude ležet mimo úsečku AB , bude mít hledaný dělicí poměr stále kladné znaménko. Také si správně uvědomila, že absolutní délky úseček budou 3 a 1, ale pozdě si uvědomila, že v tomto případě bude mít dělicí poměr tvar $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$. Zajímavé bylo také pozorovat, jak i ostatní žáci postupně získávají vzhled do problematiky a reagují zpočátku souhlasně na návrhy Nikolaje a Oliny, ale postupně si uvědomují chyby, kterých se ve svých úvahách dopustili a správně argumentují proti těmto návrhům řešení.

Při řešení druhé části této úlohy projevilo svou invenci a ochotu prezentovat své řešení více žáků. Jako první své řešení prezentovala Líza (4. ročník). Toto řešení bylo opět správné (viz obrázek 41).



Obrázek 41: Žákovské řešení úlohy 3 (Líza)

Nikolai hlásil, že má stejné řešení, ale že našel ještě jedno (viz obrázek 42). Hned, jak se toto řešení objevilo na tabuli, začali Lukáš s Radkem bouřlivě debatovat, pak přišli se závěrem, že to není správné řešení, protože vychází $(BCA) = \frac{|BA|}{|CA|} = \frac{-3}{1} = -3$.

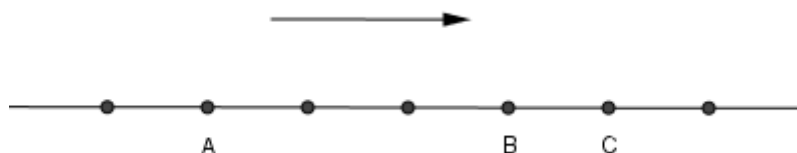


Obrázek 42: Žákovské řešení úlohy 3 (Nikolai)

Komentář

Při tomto řešení si Nikolai neuvědomil, že úsečky BA a CA mají opačnou orientaci, která zapříčiní záporné znaménko výsledného dělicího poměru.

Poslední řešení nabídla Beata (4. ročník). Již při jeho prezentaci (viz obrázek 43) zněla velmi nejistě, proto byla vyzvána, aby zkusila prověřit, jestli je její řešení správné. Zkusila tedy dosadit a přes několik zaváhání dospěla k řešení $(BCA) = \frac{|BA|}{|CA|} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$. To pak komentovala slovy: „*Já se v tom pořád nějak špatně orientuji, v těch směrech.*“



Obrázek 43: Žákovské řešení úlohy 3 (Beata)

Komentář

V úvaze Beata nastalo několik chyb. První z nich byla, že si neuvědomila, že v této úloze se nepracuje s úsečkou BC . Tou druhou by byla, jak sama okomentovala, opačná orientace úsečky BC vůči úsečce BA , která by zapříčinila záporné znaménko výsledného dělicího poměru.

d) Dvojpoměr (7. 11. 2016, 10 žáků)

Následující přednáška byla zcela věnována dvojpoměru. Na úvod bylo žákům vysvětleno, že dělicí poměr zůstává zachován pouze při rovnoběžném promítání, proto je důležité najít invariant, který bude zachován obecně. Žáci byli také seznámeni s tím, že

dvojpoměr znal již Pappos z Alexandrie (asi 290 – 350), takže se nejedná o objev moderní doby. Následně byl žákům předložen dvojpoměr jako algebraický vztah, poměr, dvou dělicích poměrů

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{|AC|}{|BC|}}{\frac{|AD|}{|BD|}} = \frac{|AC| |BD|}{|BC| |AD|}$$

Po předložení důkazu invariantnosti dvojpoměru byli žáci seznámeni s pojmy harmonická čtveřice bodů a úplný čtyřroh, který jim byl představen jako možný způsob konstrukce harmonické čtveřice bodů. Byli seznámeni také s duálním pojmem k úplnému čtyřrohu, tedy úplným čtyřstranem. Následně byl žákům představen další způsob konstrukce harmonické čtveřice bodů využívající stejnolehlosti. Popis konstrukce byl několikrát zopakován a žáci provedli konstrukci samostatně do sešitů.

Poté bylo přistoupeno k řešení úloh.

Úloha 4: Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Zkonstruuje bod D tak, aby platilo $(ABCD) = -3$.

Jelikož žáci tápali a nebyli si jistí, jak postupovat, snažil se je učitel vést k řešení.

Učitel: „Začátek je stejný, jako když jste před chvilkou rýsovali harmonickou čtveřici. Narýsujeme polopřímku s počátečním bodem v A , zvolíme bod B_1 a najdeme bod C_1 .“

Jelikož i v tomto bodě následovalo tápání a nikdo nerýsoval, ani nechtěl prezentovat své nápady, musel učitel pokračovat s nápovědou.

Učitel: „Jestliže jsme při hledání harmonické čtveřice zobrazovali bod B_1 ve stejnolehlosti se středem C_1 a koeficientem $\kappa = -1$, jak to bude vypadat v této úloze?“

Beata: „Ted' budeme mít koeficient $\kappa = -3$.“

Učitel: „Ano, přesně tak. Jak tedy bude vypadat řešení?“

Beata: „Bod B_1 se zobrazí za bod C_1 třikrát dál.“

Učitel: „Ano, správně.“

Komentář

Tato přednáška byla velmi ovlivněna tím, že na ní byli přítomní převážně žáci prvního ročníku a čtvrtý ročník zastupovala pouze Beata. Jelikož se žáci prvního ročníku doposud se stejnolehlostí nesetkali, bylo pro ně v podstatě nemožné vyřešit tuto úlohu.

Úloha 5: Necht' jsou dány tři kolineární body A, B, C . Zkonstruuje bod D tak, aby platilo $(ABCD) = \frac{5}{3}$.

Bohužel řešení této úlohy velmi připomínalo řešení předchozí. Protože jediný, kdo byl schopen se aktivně zapojit do řešení, byla Beata. Vzápětí poté dorazilo z oběda několik žáků čtvrtého ročníku, právě včas pro zavedení pojmu polára bodu ke kružnici. Žákům byl vysvětlen historický vývoj pojmu, kdy Girard Desargues hledal množinu všech harmonicky sdružených bodů C s bodem neležícím na kuželosečce D vzhledem k průsečíkům A, B přímky procházející tímto bodem s kuželosečkou. Pro lepší představu byla celá situace ilustrována v předem připravené konstrukci v programu Geogebra. Zároveň zde byl v tabulce napočítán příslušný dvojpoměr, aby žáci viděli, že se skutečně nemění při „rozpohybování“ celé konstrukce. Následoval dotaz učitele: „*Jak vypadá množina všech bodů C ?*“

Líza a několik dalších šeptem: „*Přímka.*“

Po zapnutí stopy bodu C již všichni nahlas hlásili, že se jedná o přímku. Poté byla v Geogebře zobrazena polára, která byla do té doby skrytá. Žákům byla sdělena také zajímavost, že Desargues nezavedl pojmenování, které bylo zavedeno o asi dvě stě let později. Žákům čtvrtého ročníku bylo rovněž připomenuto, že se s pojmem polára bodu ke kuželosečce setkali již v analytické geometrii, kdy pomocí ní hledali tečny ke kuželosečce vedené bodem ležícím mimo ni.

Následovala opět série úloh.

Úloha 6: Co se stane, jestliže sečna t přejde do krajní polohy a stane se z ní tečna kružnice k ? Co z toho plyne pro konstrukci poláry?

Pro lepší představu byl opět využit ilustrační příklad v programu Geogebra, i proto přišla odpověď okamžitě a téměř sborově: „*Splynou v jeden bod.*“

Následovalo několik doplňujících otázek učitele: „*O jaký bod se jedná, z hlediska přímky t a kružnice k ?*“

Po chvíli reaguje Vašek: „*Bod dotyku tečny.*“

Učitel: „Dobře. Dokážeme zkonstruovat tečny ke kružnici k bodem ležícím mimo ni a kruh jí určený?“

Vašek: „Sestrojíš kružnici procházející středem s kružnice k.“

Učitel: „A kde by byl střed té nové kružnice?“

Vašek: „V bodě D.“

Líza: „Ne, ...“

Učitel: „To by nefungovalo.“

Vašek: „Tak uprostřed mezi S a D.“

Líza: „To bude kružnice... Thaletova kružnice.“ Následně byla učitelem za doplňování žáky shrnuta úloha 6.

Komentář

Nově přichozí žáci čtvrtého ročníku byli značným přínosem pro hodinu. Z jejich odpovědí bylo zřejmé, že si vzpomínají na mnohé pojmy. Vašek cítil, že má správné řešení na dosah, i proto se zřejmě snažil prezentovat všechny své myšlenky. Oproti tomu Líza čekala se svou odpovědí, až do chvíle, kdy si vzpomene na ten správný pojem a bude si jistá, že odpoví správně.

Úloha 7: Narýsujte poláru p bodu P , který leží vně kruhu určeného k . Jaká je vzájemná poloha poláry p a přímky SP ?

Po zadání úlohy dostali žáci prostor na rozmyšlenou a provedení náčrtů. Poté byli požádáni, aby opět prezentovali své myšlenky. Jelikož všichni jevíli značné rozpaky a nikdo sám prezentovat nechtěl, byl zvolen přístup, kdy učitel v programu Geogebra rýsoval řešení podle žákovských návrhů a poznámek. Při tomto způsobu prezentace se zapojila většina žáků, protože cítili větší bezpečí a jistou anonymitu v rámci skupiny. Odpověď na otázku pak již nečinila žádný problém. Žáci byli schopni v řešení objevit podobné pravoúhlé trojúhelníky a s jejich pomocí okomentovat, že: „Polára p a přímka SP jsou navzájem kolmé.“

Následně byli žáci postavení před dvě úlohy, které mají stejné zadání, ale jinou „nápovědu“, tudíž jiný očekávaný postup řešení.

Úloha 8a: Lze najít poláru p bodu P , který leží uvnitř kruhu určeného k ? (Řešte pomocí dvou přímek procházejících bodem P).

Úloha 8b: Lze najít poláru p bodu P , který leží uvnitř kruhu určeného k ? (Řešte pomocí znalostí o přímce SP a poláře p .)

Jelikož byly opět znát rozpaky a nikdo se neodhodlal pustit se do řešení, bylo třeba klást opět otázky.

Učitel: „*Kterou z těchto úloh byste chtěli začít? Obě jsou podobně náročné.*“

Žáci se shodli, že by chtěli začít úlohou 8b.

Učitel: „*Dobře, tady v té závorce vidíte, jaké znalosti byste při řešení měli využívat, tak si pojďme připomenout, co už víme o přímce SP a o poláře p bodu P , který leží vně kruhu určeného kružnicí k .*“

Erik: „*Jsou na sebe kolmé.*“

Učitel opět rýsuje zadání v programu Geogebra.

Učitel: „*Dobře. Zřejmě předpokládáme, že když budeme hledat poláru p bodu P , který leží uvnitř kruhu určeného k , tak pro ni platit to samé, tedy že bude kolmá k přímce SP .*“

Žáci souhlasí, nicméně stále nevyvíjí vlastní aktivitu a invenci.

Učitel: „*Co kdybychom vedli bodem P přímkou q kolmou k SP a řekli, že je to polára nějakého jiného bodu Q . Dokázali bychom najít ten bod?*“

Vašek: „*No, asi dokázali.*“

Učitel: „*Tak to zkuste.*“

Zatímco žáci črtají do sešitů možné postupy řešení, rýsuje učitel do zadání přímkou SP a q . Když žáci začali konzultovat mezi sebou, byli požádáni, aby prezentovali svá řešení.

Vašek: „*V průsečících přímkou q s tou kružnicí k sestrojíme tečny a tam, kde se protnou je bod Q .*“

Učitel: „*Je potřeba rýsovat obě tečny?*“

Líza: „*Ne.*“

Učitel: „*Proč ne?*“

Líza: „*No protože ten bod Q bude ležet zase na přímce SP .*“

Učitel: „*Výborně, dokázala bys říct, proč leží právě na SP?*“

Líza: „*Protože když jsem si načrtla obě tečny, tak to tak vyšlo. A každý bod je průsečík dvou přímek a tady se protínají tři, v bodě Q.*“

Učitel: „*To je pravda. Dokázal by někdo najít ještě jiné vysvětlení?*“

Vašek: „*Mně připadá, že když je q kolmá k SP , tak by měl její pól ležet taky na SP .*“

Učitel: „*Výborně, v tom případě získáváme nějakou souvislost mezi polárou q , na které leží bod P a zřejmě i polárou p , když bod Q leží na přímce SP .*“

Vašek: „*V tom případě by bod Q měl ležet na poláře p .*“

Učitel: „*Ano, je to přesně tak.*“ Učitel dorýsoval přímku p a shrnul spolu s pomocí obrázku: „*Pokud přímka q prochází pólem P přímky p , pak i pól Q přímky q leží na přímce p .*“

Komentář

Podle očekávání byli aktivní opět především žáci čtvrtého ročníku. Reagovali podle očekávání až do reakce Lízy, kdy komentovala, proč by měl bod Q ležet na přímce SP . Očekával jsem, že je její reakce zapříčiněna hlubším vhladem do problematiky, nicméně její zdůvodnění bylo samozřejmě pravdivé. Vašek pak již reagoval tak, jak jsem očekával a přinesl správné řešení.

Při řešení úlohy 8a dostali žáci opět nejprve čas na rozmyšlenou, poté byli vyzváni k prezentaci návrhů řešení.

Líza: „*Když ty dvě přímky procházejí bodem P , tak jejich póly musí ležet na poláře bodu P . a protože potřebujeme znát dva body, abychom mohli narýsovat přímku, tak polára p prochází póly těch dvou přímek.*“

Po tomto komentáři odkrývá učitel slide s řešením úlohy 8a a pomocí něj potvrzuje správnost řešení, které prezentovala Líza.

Učitel: „*Přesně tak, pokud bodem prochází dvě přímky, pak polára tohoto bodu musí procházet póly obou těchto přímek.*“

e) **Lobačevského geometrie – motivace (10. 11. 2016, 17 žáků)**

Závěrečné tři přednášky byly věnovány Lobačevského geometrii. První z nich přiblížila, na jak obrovských prostorech lze tuto geometrii aplikovat, kdy si všichni její objevitelé byli vědomi, že i poloměr Země by byl stále ještě velmi malou jednotkou. Žáci byli také seznámeni s problémem, který vyvstával při snaze dokázat experimentálně správnost teoretických závěrů. Kdy Lobačevský měřil velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku tvořeného hvězdami Riegel – Sirius – 29Eridani.

Následně byli žáci obeznámeni s prostorovými modely a modely, které vznikly jejich projekcí do roviny. Byly jim tedy postupně představeny Poincarého kruhový model, Poincarého polorovinový model a Beltrami – Kleinův model. Pro žáky bylo velmi problematické přeorientovat se z eukleidovského vnímání pojmu přímka jak v prostorových modelech, tak zejména v Poincarého modelech, kde díky projekci může být přímka reprezentována eukleidovským kružnicovým obloukem nebo eukleidovskou polopřímkou. Tyto dva reprezentanty bychom mohli považovat za překvapivé modely podle Hejného.

f) **Beltrami – Kleinův model – vzájemná poloha přímek (14. 11. 2016, 18 žáků)**

Na začátku druhé přednášky byl připomenut vznik jednotlivých rovinných modelů. Poté byl namotivován Beltrami – Kleinův model. K tomu bylo využito představy velmi vysoké věže, nebo horkovzdušného balónu ukotveného vysoko nad mírně zvlněnou krajinou, ze které se by žáci mohli pozorovat kruhovou plochu. Tato plocha byla nazvána „Náš svět“, do kterého patří pouze to, co lze vidět z tohoto vyvýšeného místa. Vše, co se naopak nachází na horizontu nebo za ním, je již mimo „Náš svět“, jedná se tedy o jakési nevlastní body. Tyto body lze využívat při konstrukcích, ale nepatří do výsledného řešení. Žákům bylo sděleno, že pomocí objektů eukleidovského světa, jako jsou papír, tužka, naše oči, se budeme snažit popisovat „Náš svět“, potažmo Lobačevského rovinu.

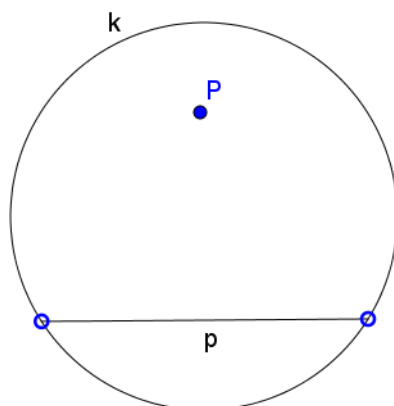
První úloha této přednášky, úloha 9, byla v podstatě opakováním, protože ji žáci řešili již na první přednášce. Z tohoto důvodu nebyl problém ji vyřešit.

Úloha 9: Vyslovte negaci pátého Eukleidova postulátu ve znění: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku.*“

Lukáš: „*K libovolné přímce p lze libovolným bodem P , který na ní neleží, vést buď dvě a více rovnoběžek anebo žádnou.*“

Úloha 10: V Beltrami – Kleinovu modelu je dána přímka p a bod P , který na ní neleží. Narýsujte aspoň tři rovnoběžky k přímce p bodem P .

Na tabuli byla načrtnuta kružnice, v ní přímka p a bod P , který na ní neleží (viz obrázek 44).



Obrázek 44: Zadání úlohy 10

Žáci opět dostali čas na rozmyšlenou, po jehož vypršení mohli přijít k tabuli prezentovat své řešení. První se osmělil Sláva (4. ročník), který načrtl přímku, tětivu kružnice k bez krajních bodů, eukleidovsky rovnoběžnou s přímkou p . Když se opět posadil, byli vyzváni další žáci, aby přišli načrtnout nějakou další rovnoběžku.

Líza: „*Vždyť tam už rovnoběžka je.*“

Učitel: „*Kolik společných bodů mají dvě rovnoběžné přímky?*“

Líza: „*Žádný.*“

Učitel: „*Dokážeme tady v tom „Našem světě“ najít nějaké další přímky, které procházejí bodem P a neprotnou přímku p ?*“

K tabuli přišel Nikolai a načrtl další dvě přímky, které se s přímkou p neprotnou ani na kružnici.

Učitel: „*Výborně, kolik takových přímek bychom dokázali najít?*“

Lukáš: „*Nekonečně mnoho.*“

Učitel: „*Přesně tak. Ale já tvrdím, že bychom mezi nimi mohli najít dvě takové trochu speciální, které na tabuli ještě nemáme nakreslené. Dokážete je najít?*“

Po chvilce přemýšlení přišel k tabuli Vašek a načrtl dvě přímkou, které měly s přímkou p společný bod ležící na kružnici.

Další úloha byla promítnuta spolu s příslušným obrázkem.

Úloha 11: Obrázek níže ukazuje šest přímek v Lobačevského rovině. Vypište všechny rovnoběžky s přímkou a bodem C .

S řešením úlohy 11 neměli žáci nejmenší potíže. Téměř okamžitě po jejím promítnutí se přihlásila Ivča.

Ivča: „*Jsou to přímky c, d, f a ještě b .*“

Líza: „*Všechny kromě e , ta se s a protíná v D .*“

Komentář

V úvodu měli žáci problém oprostít se od eukleidovského vnímání rovnoběžnosti, což bylo patrné z přímkou, kterou načrtl Sláva, tak i z reakce Líza. Po prolomení této bariéry již byli všichni schopni řešit ostatní úlohy samostatně.

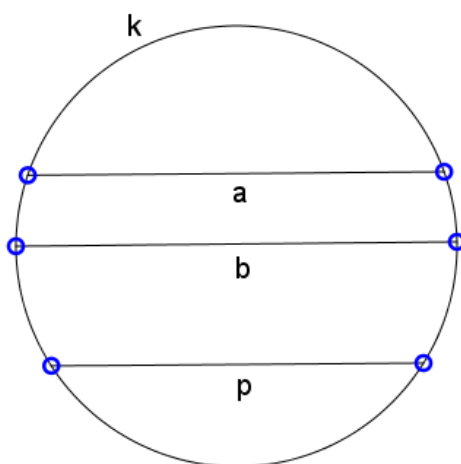
Pomocí obrázku na tabuli byla klasifikována vzájemná poloha přímek v Lobačevského rovině a zavedeny pojmy souběžky a rozběžky.

Úloha 12: Necht' je dáno n různých přímek a_1, a_2, \dots, a_n , pak vždy existuje přímka p rovnoběžná se všemi z nich. Dokažte.

Žáci opět řešili samostatně nebo ve dvojicích. Při procházení třídou a nahlížení do sešitů bylo zjištěno, že všichni žáci po chvíli nacházejí stejné, správné řešení. To bylo posléze načrtnuto na tabuli.

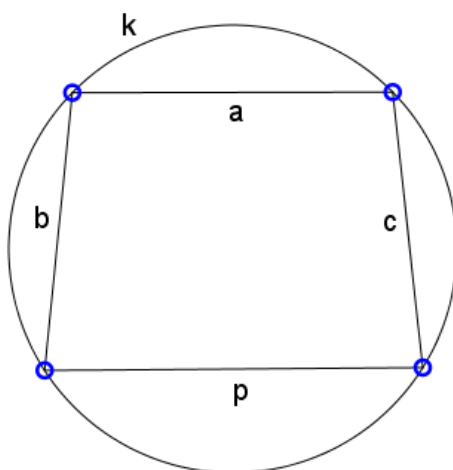
Úloha 13: Přímky a, b jsou rovnoběžné, pak existuje přímka p rovnoběžná s oběma z nich.

Při řešení této úlohy se mezi žáky objevovala velmi často dvě řešení. V prvním z nich se žáci stále ještě nedokázali oprostít od eukleidovské rovnoběžnosti, protože všechny přímky a, b, p byly načrtnuty právě jako eukleidovské rovnoběžky, viz obrázek 45.



Obrázek 45: Žákovské řešení úlohy 13

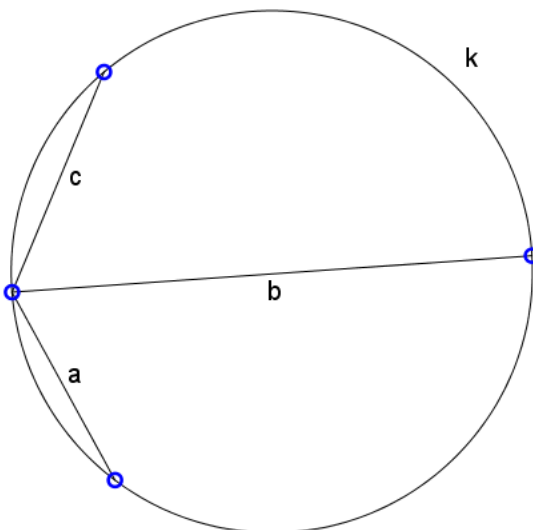
Druhé řešení bylo zřejmě částečně ovlivněno řešením předchozí úlohy. Několikrát se vyskytlo především mezi žáky prvního ročníku. Toto řešení představovalo několik po dvou souběžných přímek, výrazně připomínajících lichoběžník, viz obrázek 46. Tito žáci měli zřejmě stále ještě problém odlišit od sebe pojmy přímka v Beltrami – Kleinovu modelu a eukleidovská úsečka. Navíc je z obrázku 46 patrné, že také u této skupiny žáků přetrvávalo eukleidovské vnímání rovnoběžnosti, na přímkách a, p . Na druhou stranu si byli vědomi, že všechny přímky, které narýsovali, jsou rovnoběžné.



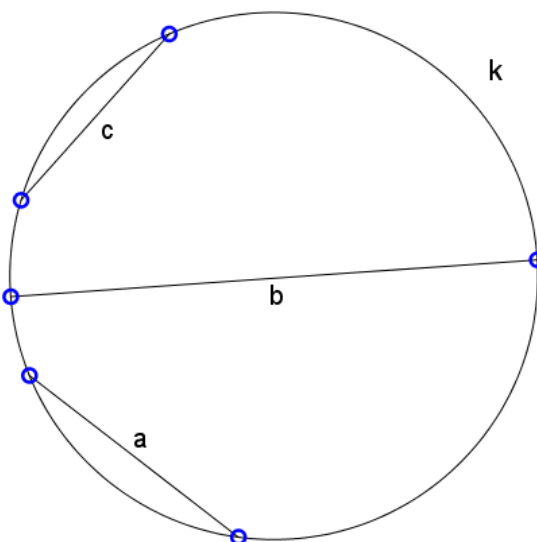
Obrázek 46: Žákovské řešení úlohy 13

Úloha 14: Existují rovnoběžné přímky a, b, c takové, že žádná přímka p neprotne všechny tři.

Asi polovina žáků vyřešila tuto úlohu správně, u druhé poloviny žáků se vyskytla dvě chybná řešení, našli buď tři souběžky, viz obrázek 47 (Ivča, Standa – 1. ročník), nebo rozběžky, viz obrázek 48 (Polina). v průběhu řešení byli žáci, u kterých se vyskytly tyto chyby, upozorněni a bylo jim zároveň názorně ilustrováno, že pro jejich řešení existuje přímka, která protne všechny tři jimi načrtnuté.

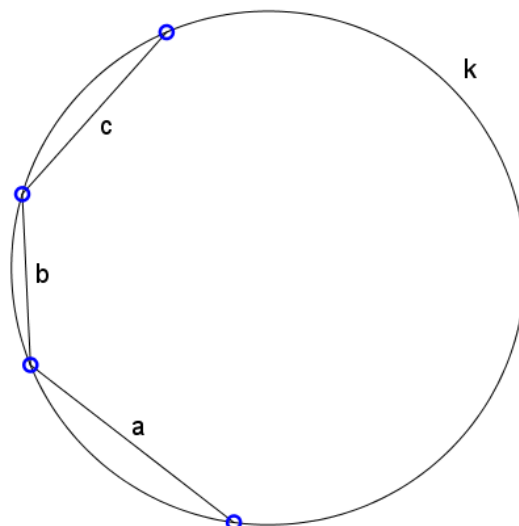


Obrázek 47: Chybné řešení úlohy 14 – Ivča, Standa



Obrázek 48: Chybné řešení úlohy 14 – Polina

Poté, co byli žáci upozorněni na nesprávné řešení, našli správné řešení téměř okamžitě. Zaujalo mě ovšem řešení Poliny, které se odlišovalo od všech ostatních, viz obrázek 49.



Obrázek 49: Správné řešení úlohy 14 – Polina

Běla (1. ročník) nesprávně pochopila zadání a načrtla tři eukleidovsky rovnoběžné přímky. Po upozornění, že tyto tři přímky lze najednou protnout jednou přímkou, již našla správné řešení. Toto řešení nepovažuji za chybu, ale za neporozumění zadání, proto nefigurovala mezi ostatními.

Pro potřeby řešení následujícího úlohy bylo na tabuli načrtnuto zadání, žáci poté měli za úkol barevně označit správné řešení.

Úloha 15: Přímky a, b jsou rovnoběžné, na kružnici k najděte množinu dvojic bodů, jimiž lze vést přímku rovnoběžnou s a a zároveň různoběžnou s b .

Bez větších problémů označili žáci vnitřní body správných kružnicových oblouků, ale někteří z nich měli problém nahlédnout, že součástí řešení jsou také některé krajní body příslušných oblouků.

Úloha 16: Narýsujte tři různé, po dvou souběžné přímky a, b, c .

Standa: „*Pane učiteli, co to znamená po dvou souběžné?*“

Učitel: „*Jedná se o dvojice souběžných přímek.*“

Při kontrole žákovských řešení se ukázalo, že Standa byl jediný, komu dotaz nestačil k určení správného řešení. Jeho řešení vypadalo stejně jako již v úloze 14 (viz obrázek 47).

g) Kolmost v Beltrami – Kleinovu modelu (21. 11. 2016, 10 žáků)

Na poslední přednášce byli přítomni pouze žáci čtvrtého ročníku. Na úvod přednášky bylo stručně zopakováno, čemu se věnovala ta předchozí, a bylo také zopakováno řešení úlohy 16, poté byl žákům předložen k vyřešení následující úloha.

Úloha 17: Narýsujte tři různé, po dvou souběžné přímky a, b, c tak, že a prochází středem kružnice k .

Líza: „*To je to samé, jako 16, jen ta přímka a prochází středem kružnice k .*“

Učitel: „*Ano, máš naprostou pravdu.*“

Ostatní žáci s Lízou souhlasili, proto nebylo třeba úlohu déle rozebírat.

Úloha 18: Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C , dále najděte body D, E tak, aby platilo: $D \in AC$, $|AD|:|DC| = 3:1$, $E \in BC$, $|BE|:|EC| = 1:3$. Body D, E, C také tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Nad přeponami obou trojúhelníků zkonstruujte Thaletovy kružnice. Mají tyto kružnice nějaký společný bod? Jaký?

Žáci si řešení úlohy načrtli do sešitů, na tabuli s nimi byl poté celý postup realizován znovu, kdy komentovali své kroky.

Odpověď formulovala Líza: „*Mají společný bod C a ještě tamten jeden.*“

Učitel: „*Dobře, můžeme mu říkat třeba F . Toto řešení budeme využívat při řešení následující úlohy, proto ho nechám radši tady na tabuli, ať ho máme na očích.*“

Úloha 19: Necht' A, B, C jsou tři různé body, přičemž A je střed kružnice k . Zkonstruujte přímky a, b, c tak, aby každé dvě z nich byly souběžky a navíc platilo $A \in a, B \in b, C \in c$. Proveďte rozbor a diskuzi.

Žáci opět dostali čas na rozmyšlenou a rozbor úlohy. Poté měli prezentovat svá řešení, ale pouze Líza prezentovala náčrt výsledku, nicméně bez konstrukce nebo rozboru s komentářem: „*To bude jako v úloze 17.*“

Učitel načrtl zadání na tabuli: „*Takže to bude vypadat nějak takhle,*“ při těchto slovech načrtl na tabuli velmi hrubé řešení tak, jak ho Líza navrhovala. Záměrně začal přímkou a , aby nenaznačil chronologii kroků.

Líza: „*Ano.*“

Učitel: „*A jak poznáme, že má přímka a procházet právě těmito body?*“

Pro názornou ilustraci bylo využito opět programu Geogebra. Poté již všichni pochopili, že toto řešení bylo poněkud naivní a bude potřeba vymyslet nějaký sofistikovanější postup.

Učitel: „*Bude potřeba udělat rozbor spolu s náčrtem. Říkal jsem, že se budeme snažit k řešení využít řešení předchozí úlohy, které máme před sebou na tabuli. Mohlo by nám významně pomoci.*“

Poté dostali další prostor na rozmyšlenou.

Vašek: „*Takže bysme tam měli hledat ty Thaletovy kružnice...*“

Učitel: „*A nad kterými úsečkami bychom je měli hledat?*“

Vašek: „*Nad přímkou a,*“ a ukazuje na náčrt řešení na tabuli.

Učitel: „*Tam už přece jedna je.*“

Vašek: „*Tak nad těmi úsečkami b, c.*“

Učitel: „*Myslím, že bychom měli přestat hádat a měli bychom se pokusit hledat spojení mezi řešením úlohy 18 a touto úlohou.*“

Líza: „*Pokud je ten trojúhelník ABC z úlohy 18 tady ten náš, který má strany a, b, c, tak ta Thaletova kružnice by byla vlastně kružnice k.*“

Vašek: „*Ale vždyť by pak ta druhá kružnice už neležela celá tady v tom „Našem světě“, to můžeme?*“

Učitel: „*Při konstrukci můžeme využívat klasických eukleidovských konstrukcí, všechny objekty považujeme za eukleidovské, ale výsledkem je pak skutečně, jak jsi správně řekl, pouze to, co leží v „Našem světě“.*“

Vašek: „*Takže střed té druhé kružnice bude uprostřed mezi B a C.*“

Učitel: „*Výborně, co jsme tedy právě získali?*“

Líza: „*Ty body C a F.*“

Učitel: „*A proč pro nás bylo tak důležité najít právě tyto body?*“

Vašek: „*Protože tudy prochází přímky a, b.*“

Učitel: „*To je ono,*“ dorýsuje řešení v programu Geogebra. „*Kolik jsme tedy našli řešení?*“

Líza: „*No dvě.*“

Učitel: „*Ano, přesně tak. Na čem tedy závisí jejich počet?*“

Po chvíli váhání odpovídá Beata: „*Na těch bodech B, C.*“

Učitel: „*To je pravda. A jak konkrétně na těchto bodech?*“

Vašek: „*Na tom, jak daleko jsou od kružnice k.*“

Učitel: „*V podstatě je to pravda,*“ pohybuje bodem C blíže k bodu B, čímž se mění poloměr Thaletovy kružnice a tím také počet průsečíků s kružnicí k. Žáci okamžitě reagují a upravují svá tvrzení: „*Záleží na počtu průsečíků těch dvou kružnic, takže můžeme mít dvě, jedno nebo žádné řešení.*“

Komentář

Moderovat řešení této úlohy bylo náročné, abych žákům pomohl, ale zároveň jim nenapověděl příliš. Z počátečních odpovědí bylo zřejmé, že žáci poměrně dlouho tápali a snažili se úlohu řešit metodou „pokus, omyl“. Původně jsem předpokládal, že pomocí předchozí úlohy, jejíž řešení jsem záměrně nechal na tabuli, bude řešení této úlohy mnohem rychlejší a přímočařejší. v průběhu řešení se objevil problém, kdy se Vašek ptal, jestli můžeme při konstrukci využívat nevlastní body. Myslím, že právě zde byl problém, který brzdil také ostatní při hledání správného řešení. *Protože si neuvědomili, že k vyřešení úlohy je možné používat libovolné eukleidovské konstrukce a nahlížet na všechny objekty jako na eukleidovské.* Po vyřešení tohoto dilematu již řešení nabralo správný směr i spád. Při závěrečné diskuzi si žáci nejdříve nebyli úplně jistí, na co se jich ptám, ale nakonec, i pomocí rozpohybování řešení v programu Geogebra, pochopili a rychle zareagovali.

Druhá polovina této přednášky byla věnována kolmosti přímk v Beltrami – Kleinovu modelu. Kolmost byla motivována pomocí nekonečně mnoha kolmic k jedné přímce.

Učitel: „*Jaká je vzájemná poloha všech kolmic k jedné přímce?*“

Vadim (4. ročník): „*Jsou rovnoběžné.*“

Učitel: „*Přesně tak,*“ črtá na tabuli kružnici k a její sečnu p , jejich průsečíky značí U, V . „*Z projektivní geometrie víme, že se všechny rovnoběžky protnou v jednom nevlastním bodě. Řekněme, že všechny kolmice k přímce p budou rozběžky a protnou se v bodě P ,*“ črtá několik rozběžek, procházejících bodem P . „*Jaká bude vzájemná poloha kolmic přímky p v nevlastních bodech U, V* “

Vašek: „*Jsou to tečny ke kružnici k.*“

Líza: „*Přímka p je polára toho bodu P.*“

Učitel: „*Výborně, to znamená, že když si vzpomeneme na to, co již víme o poláře, budeme mít mnohem méně práce při konstrukci kolmic.*“

Jelikož jsme v jedné z předchozích přednášek věnovali poláře bodu vzhledem ke kružnici dostatek času, nebylo složité namotivovat, že kolmice q k přímce p musí procházet pólem přímky p a naopak.

V tomto bodě se ukázalo, že je možné namotivovat kolmost v Beltrami – Kleinovu modelu pomocí základních pojmů projektivní geometrie, které jsou středoškolákům přístupné, a není třeba je exaktně definovat pomocí složitých, nepřístupných zobrazení.

Úloha 20: Jak vypadají kolmice k přímce p , která prochází středem kružnice k ?

Okamžitě reagoval Vašek: „*Neexistují.*“

Učitel: „*Hmmm, můžeš to trochu rozvést, proč neexistují?*“

Vašek: „*Protože když povedeme tečny ke kružnici k v těch průsečících s přímkou p, tak se nikde neprotnou.*“

Líza: „*Ale vždyť se protnou někde v nekonečnu.*“

Vašek: „*No jo, já jsem zase zapomněl, že provádíme ty normální konstrukce...*“

Učitel: „*Takže jak budou vypadat ty kolmice?*“ črtá je na tabuli.

Líza: „*Budou rovnoběžné.*“

Učitel: „*Ano, budou dokonce eukleidovsky rovnoběžné.*“

Úloha 21: Kolik společných kolmic mají dvě různé přímky?

Líza: „*A jsou to rovnoběžky?*“

Učitel: „*Správný dotaz. Zřejmě budeme muset vyzkoumat, jak to bude vypadat pro každou vzájemnou polohu, tedy pro souběžky, rozběžky i různoběžky.*“

Jelikož žáci opět tápali a nebyli si jistí, jak by měli tuto úlohu začít řešit, ujal se slova opět učitel.

Učitel: „*Kolika body je jednoznačně zadaná přímka?*“

Všichni: „*Dvěma.*“

Učitel: „*Správně. Jestliže víme, že hledaná přímka má být kolmá k oběma z nich...*“

Vašek: „*Tak musí procházet póly obou těch přímek.*“

Učitel: „*Výborně. Zkuste si tedy načrtnout do sešitů, jak by taková situace vypadala pro jednotlivé vzájemné polohy.*“

Poté, co Vašek nazřel řešení, bylo již pro všechny jednoduché dojít ke správnému řešení a uvědomit si, že jednu jedinou společnou kolmicí mohou mít pouze rozběžky.

Úloha 22: Dokažte, že neexistuje čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé.

Vašek: „*Tak když budou dvě protější strany rozběžky, tak mají jen jednu společnou kolmicí, to jsme teď dokázali.*“

Učitel: „*Přesně tak. Pochopili všichni, jak to Vašek myslel?*“

Následovala velice nasmělá odezva, proto byl Vašek požádán, aby své myšlenky načrtl na tabuli a vysvětlil je ostatním. Po názorné prezentaci již bylo vidět, že všichni žáci pochopili, proč takový čtyřúhelník nemůže existovat.

Úloha 23: Necht' jsou přímky m , n souběžky a každá z nich je rozběžná s přímkou q . Zjistěte vzájemnou polohu přímek a , b definovaných vztahy $m \perp a \perp q \perp b \perp n$.

Žáci dostali jako vždy čas na rozmyšlenou, v jehož průběhu si načrtlí první část zadání, pak si ovšem nevěděli rady, jak se postavit k podivnému zápisu $m \perp a \perp q \perp b \perp n$ ¹². Proto byl přeformulován do tvaru $(m \perp a) \wedge (a \perp q) \wedge (q \perp b) \wedge (b \perp n)$.

Učitel: „*Máme najít přímky a , b . Přitom a má být kolmá k m a zároveň ke q , přímka b má být kolmá k n a zároveň ke q .*“

Po tomto upozornění se již žáci pustili samostatně do práce a všichni úlohu byli schopni vyřešit.

Komentář

Při řešení této úlohy bylo nejsložitější se nejprve zorientovat v zadání a posléze v množství pomocných konstrukcí. Pokud žáci zůstali koncentrovaní, nenastal problém úlohu vyřešit. Jeden z žáků se při řešení „ztratil“, protože nedostatečně důsledně značil póly

¹² Tento zápis byl přejat z Gatial a Hejný, 1969.

jednotlivých přímek. Po chvíli, kdy postupně prošel kroky, které již podnikl, se zorientoval a úlohu úspěšně vyřešil.

3.4 Vyhodnocení experimentu

V průběhu experimentu jsem se setkal s mnoha překvapivými a nečekanými situacemi, které mě přiměly se pro příště pokusit jim předejít respektive se připravit natolik, abych již nemohl být překvapen. Snažil jsem se důkladně rozmyslet si odpovědi na mnoho rozličných variant dotazů, nicméně se vždy našel nějaký, který se vymykal. Tyto situace i ve své běžné praxi považuji za výzvy, jejichž překonání mi pomáhá zdokonalovat se při čelení podobným výzvám v budoucnu. v každé odpovědi, byť se zdá být špatná, se snažím rozklíčovat myšlenkové pochody žáka, které ho dovedly právě k této odpovědi.

Několikrát nastala situace, kdy již padla správná odpověď, ale jednoduchá otázka s fatálními důsledky: „Proč?“ odhalila, že se nejednalo o odpověď promyšlenou, ale spíše o hádání. Proto bylo poté potřeba doplnit konstrukci myšlenkového pochodu tak, aby všichni pochopili, z jakého důvodu byla tato odpověď správná.

Nesprávné odpovědi, respektive chyby, které se v průběhu experimentu opakovaly při řešení úloh, bych rozdělil podle jejich příčiny do několika skupin:

- 1) neznalost předchozí látky,
- 2) nedostatečně zpevněná nová látka,
- 3) neporozumění probírané látce,
- 4) nepozornost při čtení zadání.

Při přechodu k Bolyai – Lobačevského geometrii se vyskytlo několik problémů. Podle předpokladu měli žáci problém nazřít přímku v Poincarého modelech, protože se výrazně odlišuje od toho, co dosud vnímali pod pojmem přímka. Proto hodnotím jako prozíravý krok zabývat se právě Beltrami – Kleinovým modelem.

Dále bylo pro žáky velmi obtížné přeorientovávat se při konstrukcích prováděných v Beltrami – Kleinovu modelu mezi Bolyai – Lobačevského a eukleidovskou geometrií, protože pro vyšetřování polohových úloh v Bolyai – Lobačevského geometrii jsou využívány standardní eukleidovské konstrukce. Proto je například na hraniční kružnici nahlíženo jako na množinu nevlastních bodů, ale zároveň jako na eukleidovskou kružnici.

Tato práce obsahuje sérii *dvaceti čtyř* gradovaných úloh. Tyto úlohy lze podle obtížnosti rozdělit do tří kategorií:

- a) úlohy, které byli žáci schopni vyřešit bez mé pomoci (*třináct* úloh 2, 3, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23),
- b) úlohy, které byli žáci schopni vyřešit s drobnou nápovědou (*šest* úloh: 1, 7, 10, 15, 20, 21),
- c) úlohy, které by žáci bez mé pomoci zřejmě nevyřešili (*pět* úloh: 4, 5, 8a, 8b, 19).

Závěr

Tato diplomová práce vznikala v několika fázích. V první z nich jsem studoval publikaci Gatiala a Hejného *Stavba Lobačevského planimetrie* a řešil úlohy, které zde autoři předkládají. Ve druhé fázi jsem se snažil formulovat a doplnit některé pasáže ve výstavbě Bolyai – Lobačevského geometrie tak, aby byly přístupné současnému žákovi střední školy a zároveň mu dovolily poznání aktivně konstruovat, nikoliv pouze přijímat celistvé informace, jak je popisováno ve druhé kapitole mé diplomové práce. Ve třetí fázi jsem pak tento celek vyzkoušel v praxi na svých žácích v experimentu, kterému je věnována třetí kapitola této práce.

V této diplomové práci byly vytyčeny tři cíle:

1. Doplnit matematické „skoky“ v publikaci Gatiala a Hejného, především v teorii dvojpoměru a poláry.
2. Vytvořit sérii gradovaných úloh, která by takto doplněný výklad umožnila žákům samostatně objevit.
3. Vyzkoušet tuto teorii spolu se sérií gradovaných úloh v praxi.

První z cílů je rozebírán ve druhé kapitole této práce, která přibližuje některé základní pojmy projektivní geometrie a pomocí nich postupně navozuje pojmy dvojpoměr a polára bodu vzhledem ke kuželosečce. Tímto způsobem byly doplněny matematické „skoky“ v publikaci Gatiala a Hejného. Problematika, jíž se věnuje tato práce na *dvaceti stranách*, je v publikaci Gatiala a Hejného popsána na *osmi*.

Druhý cíl je rovněž rozebírán ve druhé kapitole, kterou prostupuje série gradovaných úloh doplňující teorii. Některé z těchto úloh byly převzaty z publikace Gatiala a Hejného, ty pak byly doplněny dalšími, které opět zjemňují „skoky“, které se v této publikaci vyskytují.

Třetí cíl byl realizován pomocí experimentu, kterému je věnována třetí kapitola této práce. Série úloh byla úspěšně odzkoušena *na dvaceti pěti žácích, čtrnácti z prvního ročníku a jedenácti ze čtvrtého*. Z těchto žáků prošlo *sedm* kurzem více, méně soběstačně, další *pět až šest* žáků se aktivně podílelo na práci kolektivu a v zásadě rozumělo probírané látce, jen asi *jeden až dva* žáci nebyli schopni porozumět problematice. V průběhu experimentu bohužel *jedenáct* žáků, z různých důvodů, nepokračovalo až do konce.

Při realizaci experimentu se ukázalo, že již žáci prvního ročníku mají dostatečné matematické znalosti, na které je možné navázat při studiu projektivní geometrie a poté Bolyai – Lobačevského geometrie. Dále se ukázalo, že by bylo vhodné sérii gradovaných úloh

doplnit v oblasti poláry bodu vzhledem ke kuželosečce, protože právě v této oblasti žáci tápali při řešení úloh zřejmě nejvíce.

Za úspěch experimentu lze považovat, že žáci objevili způsob zavedení kolmosti v Beltrami – Kleinovu modelu pomocí vztahu pólů a polár vzhledem ke kružnici.

Dalším úspěchem je, že si žáci osvojili práci v tomto modelu, což je velice náročná abstrakce, kterou určitě využijí v jiných oblastech matematiky (například v oblasti komplexních čísel). Tato abstrakce je náročná především v nutnosti změny náhledu na objekty, s nimiž žáci pracují. Pro jednotlivé konstrukce je možné tyto objekty nazírat jako klasické eukleidovské, nicméně řešení již je třeba nazít z pohledu Bolyai – Lobačevského geometrie.

Z reakcí žáků a jejich aktivního zapojování v průběhu experimentu usuzuji, že je problematika Bolyai – Lobačevského geometrie zaujala. Tento můj dojem je umocněn také jejich reakcemi po jeho skončení, kdy se dotazovali, zda do budoucna chystám něco podobného. Jelikož jsem zároveň třídním učitelem žáků prvního ročníku, kteří se účastnili tohoto experimentu, mám tyto informace podloženy i reakcemi jejich rodičů. Tento experiment hodnotím jako zdařilý i z důvodu, že v žácích vzbudil větší zájem o matematiku a přinesl jim větší rozhled po matematických disciplínách.

Použitá literatura

CHODOROVÁ, Marie. *Projektivní geometrie*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-4000-2.

COURANT, Richard, ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics?* 2. vydání. New York: Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-510519-2.

GATIAL, Jan, HEJNÝ, Milan. *Stavba Lobačevského planimetrie*. Praha: Mladá fronta, 1969.

HARTL, Pavel, HARTLOVÁ, Helena. *Psychologický slovník*. Praha: Portál, 2000. ISBN 80-7178-303-X.

HAVLÍČEK, Karel. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1956.

HEJNÝ, Milan. Mechanismus poznávacího procesu In: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3. Kapitola 2, s. 11 – 21.

HLAVATÝ, Václav. *Úvod do neeuklidovské geometrie*. 2. vydání. Praha: Nakladatelství jednoty československých matematiků, 1949.

KALHOUS, Zdeněk. *Základy školní didaktiky*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995. ISBN 80-7067-546-2.

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 220 s. ISBN 978-80-7196-163-5.

KUTUZOV, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1953.

KŘÍŽOVÁ, Kristýna. *Neeuklidovská geometrie*. Brno, 2010. Diplomová práce.

PAVLÍČEK, Jan, B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953. Kruh.

PASCH, Marvin, a kol. *Od vzdělávacího programu k vyučovací hodině: jak pracovat s kurikulem*. Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-127-4.

POMYKALOVÁ, Eva, *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 5. Vydání. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-358-5.

POMYKALOVÁ, Eva, *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. 4. Vydání. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-389-9.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška, MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 3., rozšířené a aktualizované vydání. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-579-2.

SERVÍT, František. *Základy*. Praha: Jednota českých matematiků, 1907.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika*. 2., rozšířené a aktualizované vyd. Praha: Grada, 2007. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1821-7.

STEHLÍKOVÁ, Nad'a. Konstruktivistické přístupy vyučování matematice In: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3. Kapitola 1, s. 23 – 42.

THURSTON, William P. *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1997. ISBN 06-910-8304-5.

TRKOVSKÁ, Dana. *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha, 2014. Disertační práce. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.

VALIŠOVÁ, Alena, KASÍKOVÁ, Hana (eds.). *Pedagogika pro učitele*. 2., rozšířené a aktualizované vydání. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

VOPĚNKA, Petr. *Rozpravy s geometrií: otevření neeukleidovských geometrických světů*. Praha: Vesmír, 1995. Medusa. ISBN 80-85977-03-6.

VOPĚNKA, Petr. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci: souborné vydání Rozprav s geometrií*. Druhé vydání. Praha: Práh, 2001. ISBN 80-725-2022-9.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Desarguova věta v rovině	19
Obrázek 2: Desarguesova věta v prostoru	20
Obrázek 3: Albrecht Dürer – využití projekce v malířství	21
Obrázek 4: Albrecht Dürer – využití projekce v malířství (střed projekce – oko)	22
Obrázek 5: Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů.....	24
Obrázek 6: Úplný čtyřroh	25
Obrázek 7“ Úplný čtyřstran	26
Obrázek 8: Konstrukce harmonické čtveřice bodů pomocí úplného čtyřrohu	27
Obrázek 9: Konstrukce harmonické čtveřice bodů pomocí podobných trojúhelníků	27
Obrázek 10: Polára bodu ke kružnici	28
Obrázek 11: Jednodílný hyperboloid, dvojdílný hyperboloid, pseudosféra	29
Obrázek 12: Vznik Poincarého kruhového modelu	30
Obrázek 13: Poincarého kruhový model	31
Obrázek 14: Vznik Poincarého polorovinového modelu	32
Obrázek 15: Poincarého polorovinový model	32
Obrázek 16: Vznik Beltrami – Kleinova modelu.....	33
Obrázek 17: Beltrami – Kleinův model.....	33
Obrázek 18: Body a přímky v eukleidovské a Lobačevského rovině	35
Obrázek 19: Souběžky a rozběžky	36
Obrázek 20: Kolmice k přímce p v Beltrami – Kleinovu modelu	37
Obrázek 21: Kolmice k přímce daným bodem	38
Obrázek 22: Konstrukce dělicích poměrů $ABC = 3, BCA = 3$	39
Obrázek 23: Konstrukce harmonické čtveřice bodů $ABCD = -3$	39
Obrázek 24: Konstrukce harmonické čtveřice bodů $ABCD = 53$	40
Obrázek 25: Konstrukce poláry k bodu ležícímu uvnitř kruhu určeného kružnicí k pomocí dvou přímek.....	40
Obrázek 26: Konstrukce poláry k bodu ležícímu uvnitř kruhu určeného kružnicí k pomocí kolmice k přímce SP	41
Obrázek 27: Příklady rovnoběžek s přímkou p bodem P	41
Obrázek 28: Řešení úlohy 12	42
Obrázek 29: Řešení úlohy 14	42
Obrázek 30: Řešení úlohy 15 – rozběžky	43

Obrázek 31: Řešení úlohy 15 – souběžky.....	43
Obrázek 32: Řešení úlohy 16.....	44
Obrázek 33: Řešení úlohy 17.....	44
Obrázek 34: Řešení úlohy 18.....	45
Obrázek 35: Řešení úlohy 19.....	46
Obrázek 36: Řešení úlohy 23.....	47
Obrázek 37: Vzdálenost rovnoběžek a jejich průsečíků s přímkou s nimi různoběžnou	54
Obrázek 38: Žákovské řešení úlohy 3 (Olina 1).....	56
Obrázek 39: Žákovské řešení úlohy 3 (Nikolai).....	57
Obrázek 40: Žákovské řešení úlohy 3 (Olina 2).....	57
Obrázek 41: Žákovské řešení úlohy 3 (Líza).....	57
Obrázek 42: Žákovské řešení úlohy 3 (Nikolai).....	58
Obrázek 43: Žákovské řešení úlohy 3 (Beata).....	58
Obrázek 44: Zadání úlohy 10.....	65
Obrázek 45: Žákovské řešení úlohy 13.....	67
Obrázek 46: Žákovské řešení úlohy 13.....	67
Obrázek 47: Chybné řešení úlohy 14 – Ivča, Standa.....	68
Obrázek 48: Chybné řešení úlohy 14 – Polina.....	68
Obrázek 49: Správné řešení úlohy 14 – Polina.....	69