



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁRSKA PRÁCA

Mária Vronková

Znáhodnené experimenty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D.

Študijný program: Matematika

Študijný odbor: Obecná matematika

Praha 2021

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov. Táto práca nebola využitá k získaniu iného alebo rovnakého titulu.

Beriem na vedomie, že se na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V dňa

Podpis autora

Chcela by som sa poďakovať vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Zdeňkovi Hlávkovi, Ph.D., za odbornú pomoc, konzultácie, trpezlivosť a usmerňovanie pri písaní práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať mojej rodine a kamarátom, ktorí ma počas celého štúdia podporovali a pomáhali mi.

Názov práce: Znáhodnené experimenty

Autor: Mária Vronková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Štatistické experimenty sa využívajú na zisťovanie vplyvu určitých faktorov na premenné. Pri posudzovaní vplyvu sa často používa metóda s názvom Analýza rozptylu. Pri vizualizácii vzťahov medzi faktormi vystupujúcimi v experimente a zostavení tabuľky Analýzy rozptylu nám môžu pomôcť Hasseho diagramy. V úvode sa táto práca sa zaoberá základnými návrhmi experimentov a s nimi spojenou Analýzou rozptylu. Následne sa zaoberá tvorbou príslušných Hasseho diagramov. Pomocou Hasseho diagramov sa za určitých predpokladov dajú jednoducho vypočítať stupne voľnosti. Taktiež sa na základe diagramov zostaví kostra tabuľky Analýzy rozptylu. Na záver sú tieto poznatky aplikované na niekoľko rôznych návrhov experimentu.

Kľúčové slová: Analýza rozptylu, ANOVA, Hasseho diagramy, návrh experimentu, stupne voľnosti

Title: Randomized experiments

Author: Mária Vronková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Statistical experiments are used to determine the effect of factors on variables. To make a decision about effect we often use method called Analysis of variance. Hasse diagrams can help to show the relationships between factors occurring in the experiment and to compute the skeleton of Analysis of variance table. The first part of this thesis is focused on design of experiments and Analysis of variance connected with analysis of experiments. The second part is focused on drawing Hasse diagrams. Using Hasse diagrams, under some assumptions we can easily calculate degrees of freedom. Also we can build skeleton of Analysis of variance table. Finally, use of Hasse diagrams is shown on a few practical examples.

Keywords: Analysis of variance, ANOVA, Hasse diagrams, design of experiment, degrees of freedom

Obsah

Úvod	2
1 Analýza rozptylu	3
1.1 Analýza rozptylu jednoduchého triedenia	3
1.2 Analýza rozptylu dvojného triedenia	5
1.2.1 Analýza rozptylu dvojného triedenia bez interakcií	5
1.2.2 Analýza rozptylu dvojného triedenia s interakciami	7
1.3 Dizajn experimentu	7
2 Kalkulus faktorov	11
2.1 Vzťahy medzi faktormi	12
2.2 Hasseho diagramy	13
2.2.1 Podpriestory definované faktormi	14
2.2.2 Stupne volnosti	16
2.2.3 Vytváranie ANOVA tabuliek	18
3 Praktické použitie	19
3.1 Základné návrhy	19
3.2 Split-plot	20
3.3 Strip-plot	22
3.4 Faktoriálny experiment	24
Záver	25
Zoznam použitej literatúry	26
Zoznam obrázkov	27

Úvod

Táto práca sa zaoberá štatistickou metódou nazývanou Analýza rozptylu, skrátene ANOVA, ktorá slúži na porovnanie stredných hodnôt väčšieho počtu náhodných výberov - skupín, do ktorých sú hodnoty náhodných veličín rozdelené podľa pôsobenia určitých faktorov. Ďalej sú popísané základné štatistické experimenty, ktoré túto metódu využívajú na vyhodnocovanie výsledkov. Následne je ukázaná tvorba Hasseho diagramov, ktoré slúžia ako grafický pohľad na experimenty. Hasseho diagramy môžu pomôcť pri vizualizácii vzťahov medzi faktormi a skúmanými veličinami vystupujúcimi v experimente. Pomocou Hasseho diagramov sa pri určitých predpokladoch jednoducho dajú vypočítať niektoré údaje, slúžiace pri výpočtoch Analýzy rozptylu. Taktiež sa pomocou nich dá zostaviť tabuľka Analýzy rozptylu. Práca sa venuje najmä výpočtu stupňov voľnosti a následnému zostavovaniu kostry ANOVA tabuľky.

V prvej kapitole je predstavená Analýza rozptylu jednoduchého a dvojného triedenia. Následne sú stručne zavedené pojmy, ktoré sú využívané pri štatistických experimentoch. Na konci kapitoly sú predstavené základné štatistické experimenty a je popísaný ich vzťah s Analýzou rozptylu.

V druhej kapitole sa popisujú vzťahy medzi rôznymi faktormi vystupujúcimi v týchto experimentoch a zavádzajú sa pojmy s nimi spojené. Na základe týchto vzťahov je uvedený postup zostavovania Hasseho diagramov. Zvyšok kapitoly sa venuje výpočtom na diagramoch a zostavovaniu kostry tabuľky Analýzy rozptylu.

Na záver je spracovaných niekoľko praktických príkladov štatistických experimentov. Ku každému experimentu sú vytvorené Hasseho diagramy s vypočítanými stupňami voľnosti. K zložitejším experimentom je zostavená kostra tabuľky. V poslednom príklade je poukázané na problém, s ktorým sa môžeme stretnúť pri zostavovaní štatistických modelov.

Pri tejto práci sa predpokladá znalosť základných pojmov z matematickej štatistiky, ako aj základná znalosť princípov testovania hypotéz.

1. Analýza rozptylu

V tejto kapitole predstavíme štatistickú metódu s názvom analýza rozptylu. Začneme od najjednoduchšieho prípadu, a to jednofaktorovej analýzy rozptylu. Následne sa posunieme k dvom faktorom. Na záver kapitoly si ukážeme využitie tohto testu pri navrhovaní experimentov, kde taktiež zavedieme základné pojmy súvisiace so štatistickými experimentami a metódy ich plánovania.

Uvažujme $K \geq 2$ nezávislých náhodných výberov Y_1, \dots, Y_K ktoré sú z rozdelení F_1, \dots, F_K . Náhodný výber Y_i je tvorený náhodnými veličinami Y_{i1}, \dots, Y_{in_i} , kde n_i je rozsah i -tého výberu. Tieto náhodné výbery budeme označovať ako skupiny. Každú skupinu charakterizuje jej priemer, ktorý slúži ako odhad strednej hodnoty. Nás zaujíma, či sú medzi skupinami nejaké rozdiely, konkrétne či sa medzi sebou líšia ich stredné hodnoty. Na testovanie zhody stredných hodnôt týchto náhodných výberov nám posluží štatistický test nazývaný Analýza rozptylu, skrátene ANOVA.

Pri analýze rozptylu je potrebné predpokladať, že všetky náhodné výbery sú navzájom nezávislé a majú normálne rozdelenie s rovnakým rozptylom. Označme $\mu_i = E Y_{ij}$ strednú hodnotu i -tej skupiny a σ_i^2 rozptyl i -tej skupiny $\text{var}(Y_{ij})$. Podľa predpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_K^2 = \sigma^2$. Takže rozdelenia našich náhodných veličín pochádzajú z modelu

$$\mathcal{F} = \{F_i \in N(\mu_i, \sigma^2), \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}. \quad (1.1)$$

Zaujíma nás, či sa rovnajú stredné hodnoty náhodných výberov. Preto testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_K$$

proti alternatíve H_1 že aspoň dve stredné hodnoty sú navzájom rôzne

$$H_1 : \exists l \neq k : \mu_l \neq \mu_k.$$

Analýza rozptylu v podstate skúma závislosť premennej na jednom alebo viacerých faktoroch. Ak ide o jeden faktor, hovoríme o analýze rozptylu jednoduchého triedenia, v prípade dvoch faktorov ide o analýzu rozptylu dvojného triedenia. Najskôr sa zameriame na analýzu rozptylu pri jednom faktore. Definičné, vety a príslušné dôkazy z častí venujúcich sa analýze rozptylu môžeme nájsť v Omelka (2021) a Anděl (2007).

1.1 Analýza rozptylu jednoduchého triedenia

Majme situáciu, ktorá bola opísaná na začiatku kapitoly, teda $K \geq 2$ navzájom nezávislých náhodných výberov Y_1, \dots, Y_K ktoré sú z rozdelení F_1, \dots, F_K , pochádzajúcich z modelu (1.1). Ďalej označme

$$Y_i = Y_{i1} + \dots + Y_{in_i} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad \bar{Y}_i = \frac{Y_i}{n_i}, \quad i = 1, \dots, K$$
$$Y_{..} = Y_{1.} + \dots + Y_{K.} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad \bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{N},$$

kde $N = n_1 + \dots + n_K$.

Definícia 1. Súčet štvorcov skupín definujeme ako $SS_A = \sum_{i=1}^K n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$. Ďalej definujeme celkový súčet štvorcov $SS_T = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$ a reziduálny súčet štvorcov ako $SS_e = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$.

Súčet štvorcov skupín nám hovorí, ako veľmi sa od seba líšia jednotlivé skupiny. Reziduálny súčet štvorcov vyjadruje odlišnosti vnútri skupín a celkový súčet štvorcov potom porovnáva celkové rozdiely medzi veličinami. Medzi týmito súčtami platí vzťah $SS_E = SS_T - SS_A$.

Veta 1. Nech platí model \mathcal{F} . Potom

- i. $E SS_e = (N - K)\sigma^2$ a $\frac{SS_e}{\sigma^2} \sim \chi_{N-K}^2$,
- ii. za platnosti nulovej hypotézy H_0 platí $E SS_A = (K - 1)\sigma^2$ a $\frac{SS_A}{\sigma^2} \sim \chi_{K-1}^2$,
- iii. SS_A a SS_e sú nezávislé.

Dôkaz. Jednotlivé body sú dokázané v práci Omelka (2021). □

Takže za H_0 sú $SS_A/(K - 1)$ a $SS_e/(N - K)$ nestranné odhady rozptylu σ^2 . Podľa predchádzajúcich vzťahov sa bude testová štatistika počítať ako podiel týchto nestranných odhadov, teda

$$F_A = \frac{SS_A/(K - 1)}{SS_e/(N - K)}.$$

V testovej štatistike porovnáваме súčet štvorcov skupín SS_A a reziduálny súčet štvorcov SS_e . Ak bude SS_A príliš veľké v porovnaní s SS_e , tak sú jednotlivé skupiny rozdielne. Takže hypotézu H_0 budeme zamietť pre príliš veľké hodnoty testovej štatistiky.

Veta 2. Za platnosti modelu \mathcal{F} a hypotézy H_0 platí $F_A \sim F_{K-1, N-K}$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v diele Omelka (2021) na strane 161. □

$F_{K-1, N-K}$ značí Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie s $K - 1$ a $N - K$ stupňami voľnosti, inak nazývané aj *F-rozdelenie*. Ako už bolo spomínané, hypotézu zamietame pre veľké hodnoty testovej štatistiky F_A . Aby sme dosiahli hladinu α , kritický obor bude mať tvar

$$\text{zamietame } H_0 \Leftrightarrow F_A \geq F_{K-1, N-K}(1 - \alpha),$$

kde $F_{K-1, N-K}(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -tý kvantil *F-rozdelenia* s $K - 1$ a $N - K$ stupňami voľnosti.

Pozrime sa na analýzu rozptylu jednoduchého triedenia ešte z jednej strany. Model analýzy rozptylu, ak na skupiny vplýva len jeden faktor, sa dá zapísať aj ako

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \tag{1.2}$$

kde y_{ij} je j -tá položka i -teho výberu. α_i predstavuje zmenu hodnoty, ktorá je spôsobená daným faktorom a ϵ_{ij} je chyba, pre ktorú platí $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$. Teraz namiesto strednej hodnoty μ_i pre výber i máme $\mu + \alpha_i$. Pridali sme jeden parameter. Aby model nebol preparametrizovaný, predpokladajme ešte, že platí $\sum_{i=1}^K n_i \alpha_i = 0$. Potom hypotézu H_0 môžeme formulovať ako

$$H_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0.$$

To znamená, že faktor nemá žiadny vplyv na skúmanú náhodnú veličinu. Alternatíva je v tomto prípade

$$H_1' : \exists i \in \{1, \dots, K\} : \alpha_i \neq 0,$$

teda faktor na náhodnú veličinu nejakým spôsobom vplyva. Využitie tohto modelu uvidíme v podkapitole 1.3. Nakoniec sa dajú výsledky analýzy rozptylu zapísať do tabuľky:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne volnosti	Podiel	Testová štatistika
Medzi skupinami	SS_A	$K - 1$	$SS_A / (K - 1)$	$\frac{SS_A / (K - 1)}{SS_e / (N - K)}$
Reziduálny	SS_e	$N - K$	$SS_e / (N - K)$	
Celkový	SS_T	$N - 1$		

1.2 Analýza rozptylu dvojného triedenia

Teraz uvažujme, že na meranú veličinu vplyva viacero faktorov. Najčastejšie ide o dva faktory, ktoré spolu navyše môžu, ale nemusia interagovať. V prípade dvoch faktorov sa model analýzy rozptylu dá všeobecne zapísať ako

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijp}, \quad (1.3)$$

kde α_i , β_j a γ_{ij} sú neznáme parametre, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, $p = 1, \dots, n_{ij}$ a pre jednoduchosť predpokladajme, že n_{ij} sa rovnajú nejakému číslu P . ϵ_{ijp} je člen predstavujúci náhodnú chybu, ktorého rozdelenie je $N(0, \sigma^2)$. α_i predstavuje vplyv prvého faktoru, inak nazývaného aj riadkový. β_j je účinok pôsobenia druhého, stĺpcového faktoru. γ_{ij} označuje interakciu medzi faktormi, ktorá sa nemusí vyskytovať vo všetkých modeloch. Najskôr sa bližšie pozrieme na dvojfaktorový model bez interakcií.

1.2.1 Analýza rozptylu dvojného triedenia bez interakcií

V tomto prípade uvažujme, že medzi dvoma faktormi nedochádza k interakciám, $\gamma_{ij} = 0$ a rovnica (1.3) sa zjednoduší na

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijp}. \quad (1.4)$$

Aby nebol model preparametrizovaný, pridáme podmienky (reparametrizačné rovnice) $\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^J \beta_j = 0$. Hypotézu, že prvý, respektíve druhý faktor nemá vplyv na náhodnú veličinu môžeme formulovať ako

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0, \quad H_0' : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0.$$

Alternatíva je

$$H_1 : \exists i \in \{1, \dots, I\} : \alpha_i \neq 0, \quad H'_1 : \exists j \in \{1, \dots, J\} : \beta_j \neq 0.$$

Nech $n = IJP$ a označme

$$\begin{aligned} Y_{ij\cdot} &= \sum_{p=1}^P Y_{ijp}, & \bar{Y}_{ij\cdot} &= \frac{1}{P} Y_{ij\cdot}, \\ Y_{i\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P Y_{ijp}, & \bar{Y}_{i\cdot\cdot} &= \frac{1}{JP} Y_{i\cdot\cdot}, \\ Y_{\cdot\cdot\cdot} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P Y_{ijp}, & \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot} &= \frac{1}{n} Y_{\cdot\cdot\cdot} \end{aligned}$$

Analogicky aj pre ďalšie indexy. Ako aj v jednofaktorovom prípade, definujeme súčty štvorcov skupín ako

$$SS_A = JP \sum_{i=1}^I \bar{Y}_{i\cdot\cdot}^2 - \frac{1}{n} Y_{\cdot\cdot\cdot}^2 \quad SS_B = IP \sum_{j=1}^J \bar{Y}_{\cdot j\cdot}^2 - \frac{1}{n} Y_{\cdot\cdot\cdot}^2, \quad (1.5)$$

a celkový a reziduálny súčet štvorcov

$$SS_T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P Y_{ijp}^2 - \frac{1}{n} Y_{\cdot\cdot\cdot}^2 \quad SS_e = SS_T - SS_A - SS_B.$$

Pri platnosti hypotézy $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$ bude platiť podmodel $y_{ijp} = \mu + \beta_j + \epsilon_{ijp}$, ktorý zodpovedá modelu analýzy rozptylu jednoduchého triedenia. Na základe toho dostaneme testovú štatistiku $F_A = \frac{SS_A/(I-1)}{SS_e/(n-I-J-1)}$. Kritický obor bude v tvare

$$\text{zamietame } H_0 \Leftrightarrow F_A \geq F_{I-1, n-I-J-1}(1-\alpha).$$

Podobne, pri platnosti hypotézy $H'_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J$ dostaneme podmodel $y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ijp}$. Testová štatistika bude $F_B = \frac{SS_B/J-1}{SS_e/n-I-J-1}$ s kritickým oborom

$$\text{zamietame } H'_0 \Leftrightarrow F_B \geq F_{J-1, n-I-J-1}(1-\alpha).$$

Opäť sa výsledky analýzy dajú zapísať do tabuľky:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Podiel	Testová štatistika
Riadky	SS_A	$I - 1$	$\frac{SS_A}{I-1}$	F_A
Stĺpce	SS_B	$J - 1$	$\frac{SS_B}{J-1}$	F_B
Reziduálny	SS_e	$n - I - J - 1$	$\frac{SS_e}{n-I-J-1}$	
Celkový	SS_T	$n - 1$		

1.2.2 Analýza rozptylu dvojného triedenia s interakciami

Teraz predpokladajme, že medzi faktormi dochádza k určitej interakcii. V našom modeli sa to prejaví pridaním nenulového člena γ_{ij} , ktorý bude predstavovať danú interakciu. Model teda bude

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijp},$$

s rovnakými podmienkami ako v (1.3). V tomto prípade predpokladáme $P \geq 2$. Reparametrizačné rovnice sú $\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^J \beta_j = 0$, $\sum_{i=1}^I \gamma_{ij} = 0 \forall j \in J$ a $\sum_{j=1}^J \gamma_{ij} = 0 \forall i \in I$. K hypotézam H_0 , H'_0 pribudne H''_0 :

$$H''_0 : \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i \in I, j \in J.$$

Ďalší postup je podobný ako v prípade bez interakcií. Majme súčty štvorcov SS_A , SS_B a SS_T ako v (1.4). Ďalej zavedme

$$SS_e = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P Y_{ijp}^2 - P \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{ij}^2 \quad SS_{AB} = SS_T - SS_A - SS_B - SS_e.$$

K testovým štatistikám F_A a F_B pribudne $F_{AB} = \frac{SS_{AB}/(I-1)(J-1)}{SS_e/(n-I-J-1)}$ a kritický obor

$$\text{zamietame } H''_0 \Leftrightarrow F_{AB} \geq F_{(I-1)(J-1), n-I-J-1}(1-\alpha).$$

Nakoniec výsledky zapíšeme do tabuľky:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Podiel	Testová štatistika
Riadky	SS_A	$I - 1$	$\frac{SS_A}{I-1}$	F_A
Stĺpce	SS_B	$J - 1$	$\frac{SS_B}{J-1}$	F_B
Interakcie	SS_{AB}	$(I - 1)(J - 1)$	$\frac{SS_{AB}}{(I-1)(J-1)}$	F_{AB}
Reziduálny	SS_e	$n - IJ$	$\frac{SS_e}{n-IJ}$	
Celkový	SS_T	$n - 1$		

1.3 Dizajn experimentu

V tejto podkapitole zavedieme základné pojmy spojené so štatistickými experimentami, ktoré na vyhodnotenie využívajú analýzu rozptylu. Potom si predstavíme základné návrhy týchto experimentov. Kapitola bude vychádzať z kníh Jarošová (2007) a Milliken a Johnson (2004).

Pri štatistických testoch často chceme preskúmať vplyv faktorov na premenné a rozhodnúť, ktoré z faktorov majú významný vplyv. Aby sme to dokázali spraviť čo najefektívnejšie, musíme takéto experimenty vhodne naplánovať. Pri plánovaní experimentu chceme dostať čo najviac informácií zo zdrojov, ktoré máme k dispozícii. Cieľom experimentu je zistiť, ktoré premenné majú vplyv na zmeny hodnôt výstupných veličín, a aký je tento vplyv. Na začiatok sa musia určiť jednotlivé rušivé faktory, ktoré by mohli vplývať na pozorované veličiny. Potom sa podľa plánu experimentu kontrolovane menia hodnoty vstupných veličín a sleduje sa odozva výstupných veličín na tieto zmeny. Následne sa experiment vyhodnotí, najčastejšie pomocou analýzy rozptylu, ktorej sme sa venovali doteraz.

Plánovanie experimentu

Na začiatok si zavedieme niekoľko pojmov, ktoré budeme používať. **Skúmané faktory** sú vstupné veličiny, ktorých hodnoty počas experimentu kontrolujeme. Môžu byť kategoriálne alebo kvantitatívne. Hodnoty faktorov nazývame **úrovne** alebo **ošetrenia**. **Odozva** je výstupná veličina, ktorej zmeny pozorujeme. Pôsobia na ňu skúmané faktory a **náhodné vplyvy**. Zmena odozvy vzhľadom na zmenu úrovne faktoru sa nazýva **efekt faktoru**. **Experimentálna jednotka** je najmenšia jednotka, na ktorú pôsobia faktory a ktorej odozvu sledujeme. Pri experimente na experimentálne jednotky pôsobia okrem skúmaných faktorov aj náhodné a systematické vplyvy. Ide o vstupné veličiny, ktorých vplyvy nedokážeme kontrolovať tak ako pri kontrolovaných faktoroch, preto sa nazývajú aj rušivé faktory. **Náhodné vplyvy** pozorujeme pri opakovaní skúšok za rovnakých podmienok tak, že výsledky skúšok majú určitú variabilitu. **Systematické vplyvy** sa prejavujú ako trend v nameraných hodnotách a môžu byť ťažko odhaliteľné. Tieto vplyvy chceme odhaliť a oddeliť ich od pôsobenia skúmaných faktorov, prípadne ich chceme minimalizovať. Plánovanie experimentu nám slúži na to, aby sme minimalizovali rozdielnosť podmienok pri experimente. Techniku volíme podľa informácií o experimentálnych jednotkách. Základné techniky návrhu experimentu sú znáhodnenie, usporiadanie do blokov a replikácia. Tieto techniky sa môžu ľubovoľne kombinovať.

- **Znáhodnenie** - úrovne faktorov, alebo ich kombinácie sa k experimentálnym jednotkám priradujú náhodne. Cieľom je zabrániť miešaniu vplyvov skúmaných faktorov a náhodných chýb. Znáhodnenie tiež znižuje veľkosť systematických chýb.
- **Replikácia** - ide o opakovanie skúšok experimentu pri rovnakých úrovniach faktorov. Sleduje sa vplyv faktorov na rozdielne experimentálne jednotky, nejde teda o opakované meranie odozvy tej istej jednotky. Vďaka replikáciám sme schopný zmerať variabilitu náhodných zložiek a teda odhadnúť chybu experimentu.
- **Usporiadanie do blokov** - často sa môže stať, že experimentálne jednotky nie sú homogénne. V tom prípade môžeme jednotky usporiadať do niekoľkých blokov tak, aby jednotky v rámci jedného bloku boli čo najpodobnejšie. Jeden blok potom môže byť považovaný za jednu replikáciu experimentu. Takto sa zmenší variabilita medzi jednotkami v bloku. Pôsobenie bloku sa môže zahrnúť do pôsobenia náhodnej chyby. Často sa však efekt pôsobenia bloku vyjadruje blokovým faktorom.

Experimenty s jedným faktorom

V tejto časti budeme predpokladať, že pozorujeme pôsobenie jedného faktora, ktorý má dva alebo viac úrovní. Ďalšia možnosť je, že síce skúmame pôsobenie viacerých faktorov, ale ich vplyv berieme ako pôsobenie jedného faktora. Skúmame vplyv tohto faktora na experimentálne jednotky a sledujeme odozvu. Využíva sa znáhodnenie, teda k experimentálnym jednotkám sa náhodne priraduje úroveň faktora. Snažíme sa, aby počet meraní úrovne faktora bol rovnaký, a aby sme každú úroveň merali aspoň raz. Následne namerané hodnoty rozdelíme do skupín

podľa úrovne. Pri zisťovaní vplyvu úrovne faktora chceme porovnať stredné hodnoty odozvy pre jednotlivé úrovne. Ide teda o jednofaktorovú analýzu rozptylu, ktorej data sa riadia modelom (1.2). Index i nám hovorí o úrovni faktoru, a index j predstavuje o ktoré pozorovanie v rámci úrovne ide. Takže j -té pozorovanie úrovne i je v tvare

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij},$$

kde μ je stredná hodnota odozvy, α_i je zmena hodnoty spôsobená vplyvom i -tej úrovne a ϵ_{ij} predstavuje pôsobenie náhodných, prípadne systematických vplyvov. Pôsobenie ϵ_{ij} je nezávislé na danej úrovni ošetrenia. Na zníženie náhodných chýb sa využíva usporiadanie do blokov.

Experimenty s dvoma faktormi

Predpokladajme, že máme dva faktory, ktoré chceme testovať. Nech s je počet úrovní na ktorých testujeme prvý faktor, a t je počet úrovní druhého faktora. Potom máme st kombiací úrovní, ktoré chceme otestovať. Na znáhodnený experiment potrebujeme aspoň st experimentálnych jednotiek, ktorým náhodne priradíme jednotlivé kombinácie úrovní. Pokiaľ každú kombináciu ošetrení priradíme rovnakému počtu prvkov, hovoríme o vyváženom experimente. Ide o dvojfaktorovú analýzu rozptylu s modelom (1.3), teda

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijp},$$

predstavuje experimentálnu jednotku, na ktorú pôsobí i -tá úroveň prvého faktoru, j -tá úroveň druhého faktoru a ide o p -té pozorovanie kombinácie týchto ošetrení. α_i je efekt prvého faktoru, β_j efekt druhého faktoru a γ_{ij} predstavuje efekt interakcie medzi týmito faktormi. Pokiaľ nepredpokladáme, že by medzi faktormi mohlo dôjsť k interakciám, tak sa γ_{ij} v modeli vyskytovať nemusí. ϵ_{ijp} je náhodná chyba, nezávislá na pôsobení uvažovaných faktorov. Prípadné systematické vplyvy zmeňujeme znáhodnením. Ak podmienky na testovanie nie sú rovnaké, alebo sú experimentálne jednotky príliš odlišné, je dobré využiť rozdelenie do blokov.

Znáhodnené bloky

Ako už bolo spomínané, často sa stáva, že experimentálne jednotky a podmienky nebývajú homogénne. Ak chceme kontrolovať a znížiť variabilitu experimentálnych jednotiek, môžeme ich usporiadať do blokov. Jednotky sa rozdelia do blokov tak, aby v jednom bloku boli jednotky s čo najpodobnejšími vlastnosťami. Ak máme t ošetrení a v každom bloku sa nachádza aspoň t jednotiek a ošetrenia vnútri bloku sú priradované náhodne, hovorí sa o **úplných znáhodnených blokoch**. Na prvok pôsobí efekt daného kontrolovaného faktora, blokový efekt a náhodné vplyvy. Nepredpokladáme, že by nastala interakcia medzi pôsobením faktoru a bloku. Data sa preto riadia modelom (1.4) dvojfaktorovej analýzy rozptylu bez interakcií, takže

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijp}.$$

α_i je efekt pôsobenia úrovne i a β_j je chyba spôsobená pôsobením bloku j . ϵ_{ijp} je efekt ostatných náhodných vplyvov, ktoré nezávisia na pôsobení faktoru ani

bloku. Môže sa stať, že počet ošetrení je väčší ako počet experimentálnych jednotiek v blokoch. V takom prípade sa nedá aplikovať každé z ošetrení v každom bloku. Ide o **neúplné bloky**. Ak su ošetrenia priradené k blokum tak, že sa každá dvojica ošetrení vyskytuje v bloku rovnako často, ide o **vyvážené neúplné bloky**. Data sa analyzujú rovnako ako pri úplných blokoch, pretože opäť ide o dvojfaktorovú analýzu rozptylu bez interakcií, teda model (1.4).

Viacfaktorové experimenty

Pri experimentoch s väčším množstvom faktorov a ich úrovni rýchlo narastá počet potrebných skúšok. Ak je k počet faktorov s počtom úrovní s_1, \dots, s_k , potom počet ošetrení je $s_1 \times \dots \times s_k$. Preto sa často uvažujú len dve úrovne pri každom faktore. Ak má každý z k faktorov dve úrovne, tak počet možných kombinácií je 2^k , preto sa takéto experimenty nazývajú 2^k -faktorové. Pomocou nich vieme rozlíšiť dôležité faktory s významným vplyvom. Takéto experimenty môžu byť **úplné** alebo **čiasťočné**. Pri čiasťočných experimentoch sa experiment skrúti, najčastejšie na polovičný alebo štvrtinový. Pri polovičnom ide o skrútenie na 2^{k-1} , teda z celkového počtu možných ošetrení vyberieme polovicu. Pri štvrtinovom sa experiment skrúti na 2^{k-2} . Vo všeobecnosti sa skrútenia dajú napísať ako experimenty 2^{k-p} . Analýza týchto experimentov býva náročnejšia a je bližšie popísaná v Jarošová (2007).

Latinské štvorce

Pri Latinských štvorcach uvažujeme dva blokové faktory. Ide o usporiadanie do blokov v dvoch smeroch. Ak máme t ošetrení, tak t^2 experimentálnych jednotiek usporiadame do štvorca s rozmermi $t \times t$. Stĺpce tvoria stĺpcové bloky a riadky tvoria riadkové bloky. Podmienkou je rovnaký počet úrovní stĺpcového aj riadkového faktora. Ďalej predpokladáme, že neexistuje interakcia medzi faktormi. Každé ošetrenie, teda úroveň hlavného skúmaného faktora sa objaví práve raz v každom stĺpci aj riadku. Data sa riadia modelom

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \epsilon_{ijk},$$

$i, j, k = 1, \dots, t$. α_i predstavuje efekt i -teho riadku, β_j je efekt j -teho stĺpca a γ_k je efekt k -teho ošetrenia. a μ je celkový priemer a ϵ_{ijk} je efekt ostatných vplyvov, teda náhodná veličina s rozdelením $N(0, \sigma^2)$. Na vyhodnotenie experimentu sa opäť používa analýza rozptylu. Celkový súčet štvorcov SS_T sa v tomto prípade rozkladá na štyri zložky: súčet štvorcov SS_R odpovedajúci riadkovému faktoru, stĺpcovému faktoru SS_C , skúmanému faktoru SS_A a reziduálny súčet štvorcov SS_e . Latinské štvorce sa dajú zobecníť aj pre viacero faktorov. Napríklad na vytváranie blokov v troch smeroch sa používajú takzvané Grécko-Latinské štvorce.

2. Kalkulus faktorov

Pri štatistických experimentoch sa často vyskytuje väčšie množstvo faktorov s rôznym počtom úrovní. Zároveň môžu mať tieto faktory medzi sebou určité vzťahy. Tiež sa stáva, že experimentálne jednotky sú rozdelené do blokov, ktoré spolu vytvárajú nejaké úrovne. Napríklad si predstavme situáciu, že chceme testovať dva faktory - postreky a zavlažovanie a sledovať ich pôsobenie na rastliny. Experimentálne jednotky teda môžu byť práve rastliny, tie sú ale väčšinou pestované na väčšom poli, ktoré môže byť ešte rozdelené na niekoľko častí. Takže prvá úroveň by boli samotné rastliny, druhá úroveň by boli nejaké časti poľa - bloky poľa - s určitými vlastnosťami a tretia úroveň by bolo celé pole. Ak budeme zavlažovanie aplikovať na bloky poľa, potom experimentálnou jednotkou pre faktor zavlažovanie bude celý blok.

Aby sme si situáciu pri navrhovaní experimentu vedeli lepšie predstaviť, nám môžu pomôcť Hasseho diagramy. Pomocou nich si nielen dokážeme vizualizovať faktory a usporiadanie prvkov vystupujúcich v experimente, ale aj jednoducho vypočítať stupne volnosti, či zostaviť základnú kosť ANOVA tabuľky. Najskôr si zavedieme niekoľko pojmov, ktoré sa budú vyskytovať v tejto kapitole, ktorá vychádza predovšetkým z knihy Bailey (2008). Tam sa nachádzajú tiež dôkazy viet a tvrdení z tejto kapitoly.

Množinu všetkých experimentálnych jednotiek budeme značiť Ω . Množinu všetkých kombinácií ošetrení, teda kombinácií úrovní skúmaných faktorov, bude značiť \mathcal{T} . Prvkom z množiny Ω priradíme kombinácie ošetrení z množiny \mathcal{T} - ide vlastne o funkciu $T : \Omega \rightarrow \mathcal{T}$. Pôsobenie konkrétnej kombinácie ošetrení na prvok ω bude značiť výraz $T(\omega)$. Ďalej uvažujme faktor F , ktorý pôsobí na množine Ω . Potom $F(\omega)$, označuje úroveň faktoru F , pôsobiacu na jednotku $\omega \in \Omega$. Podobne pre kombináciu ošetrení i z množiny \mathcal{T} bude $F(i)$ vyjadrovať úroveň faktoru pri ošetrení i . Spomeňme ešte blokové faktory. Úrovne týchto faktorov nekontrolujeme, preto nepatria do množiny úrovní kontrolovaných faktorov, avšak tiež pôsobia na experimentálne jednotky. Pre blokový faktor B je $B(\omega)$ blok, v ktorom sa ω nachádza.

Vráťme sa k príkladu z úvodného odstavcu. Množinu Ω tvoria rastliny, na ktorých sledujeme pôsobenie faktorov. Prípadné usporiadanie rastlín do blokov tvorí štruktúru tejto množiny. Nech je pole rozdelené do dvoch blokov, takže uvažujeme pôsobenie blokového faktoru B s úrovňami b_1 a b_2 . Kontrolované faktory sú dva - postrekovanie označme písmenom F a nech máme dva typy postrekovania - f_1 a f_2 . Zavlažovanie označíme písmenom G . Nech testujeme tri úrovne zavlažovania - g_1, g_2 a g_3 . Potom množina \mathcal{T} je tvorená kombináciami týchto úrovní. Obsahuje 6 prvkov - $f_1g_1, f_1g_2, f_1g_3, f_2g_1, f_2g_2, f_2g_3$. Pre prvok f_1g_2 platí $F(f_1g_2) = f_1$ a $G(f_1g_2) = g_2$. Fakt, že rastline ω priradíme túto kombináciu ošetrení, značíme $T(\omega) = f_1g_2$. Navyše ak sa rastlina ω nachádza v bloku b_1 , tak $B(\omega) = b_1$.

Ďalej definujeme faktory U a E . Faktor U , nazývaný aj **univerzálny faktor**, každému prvku priradí 1, takže $U(\alpha) = 1 \forall \alpha \in \Omega$. Faktor E zase každému prvku priradí ten daný prvok, teda $E(\alpha) = \alpha \forall \alpha \in \Omega$.

Ešte si zavedieme **triedy faktorov**. Ide o množiny všetkých prvkov, na ktorých má faktor F rovnakú úroveň. Teda trieda faktoru F obsahujúca prvok $\alpha \in \Omega$ je

množina

$$F[[\alpha]] = \{\omega \in \Omega : F(\omega) = F(\alpha)\}.$$

Ak uvažujeme množinu ošetrení \mathcal{T} , tak trieda faktoru F ktorá obsahuje prvok $i \in \mathcal{T}$ je

$$F[[i]] = \{j \in \mathcal{T} : F(j) = F(i)\}.$$

Pomocou tried faktorov môžeme definovať ďalšie vzťahy medzi faktormi a základné operácie s nimi.

Faktory, ktorých všetky triedy majú rovnakú veľkosť, sa nazývajú **uniformné faktory**. Veľkosť triedy uniformného faktora F budeme označovať k_F a n_F bude značiť počet úrovní faktora F . Napríklad faktor U na Ω má jedinú triedu, a to celé Ω . Takže $n_U = 1$ a k_U sa rovná veľkosti celej množiny Ω . Naopak pri faktore E má každý prvok vlastnú triedu, takže počet tried faktoru E je rovnaký, ako počet jednotiek v Ω . To znamená, že $k_E = 1$ a n_E je rovná veľkosti množiny Ω . Počas nasledujúcich kapitol budeme predpokladať, že všetky uvedené faktory sú uniformné.

2.1 Vzťahy medzi faktormi

Môže sa stať, že dva rôzne faktory majú rovnaké triedy, líšia sa však názvy ich úrovní. V takomto prípade ide o ekvivalenciu faktorov. Napríklad ak sme na množine Ω , potom ekvivalencia faktorov F a G znamená, že $F[[\alpha]] = G[[\alpha]] \forall \alpha \in \Omega$.

Definícia 2. *Nech F a G sú faktory pôsobiace na rovnakej množine. Hovoríme, že faktor F je ekvivalentný s G ($F \equiv G$), ak sa všetky ich triedy rovnajú.*

Taktiež môže nastať situácia, že F nie je ekvivalentný s faktorom G , ale každá jeho trieda je obsiahnutá v triede G . Na množine Ω by to znamenalo, že $F[[\alpha]] \subseteq G[[\alpha]] \forall \alpha \in \Omega$.

Definícia 3. *Nech F a G sú faktory pôsobiace na rovnakej množine a F nie je ekvivalentný s G . Povieme, že faktor F je jemnejší ako faktor G , ak je každá trieda F obsiahnutá v triede faktoru G .*

Takýto vzťah značíme ako $F \prec G$. $F \preceq G$ značí, že F je jemnejší ako G , prípadne je medzi nimi ekvivalencia. Zrejme pre každý faktor F platí, že $E \preceq F \preceq U$. Ďalej ešte zavedieme infimum a supremum faktorov F a G .

Definícia 4. *Infimum faktorov F a G pôsobiacich na rovnakej množine je faktor $F \wedge G$, ktorého triedy sú neprázdne prieniky tried F s triedami faktoru G .*

Napríklad ak uvažujeme množinu Ω , potom úrovne faktoru $F \wedge G$ sú dvojice $(F \wedge G)(\alpha) = (F(\alpha), G(\alpha))$. Trieda tohto faktoru, ktorá obsahuje $\alpha \in \Omega$ bude v tvare $(F \wedge G)[[\alpha]] = \{\omega \in \Omega : F(\omega) = F(\alpha), G(\omega) = G(\alpha)\} = F[[\alpha]] \cap G[[\alpha]]$. Názov infimum vychádza z toho, že $F \wedge G \preceq F$ a $F \wedge G \preceq G$ a navyše pre každý faktor H taký, že $H \preceq F$ a $H \preceq G$ platí $H \preceq F \wedge G$.

Definícia 5. *Supremum faktorov F a G pôsobiacich na rovnakej množine je faktor $F \vee G$, ktorý spĺňa*

i. $F \preceq F \vee G$ a $G \preceq F \vee G$,

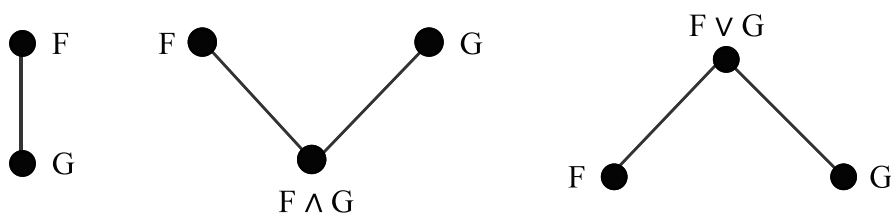
ii. ak pre faktor H platí $F \preceq H$ a $G \preceq H$, potom $F \vee G \preceq H$.

Triedu suprema $F \vee G$ obsahujúcu prvok α vytvoríme tak, že do množiny pridáme všetky prvky, ktoré sú v rovnakej triede F ako α . Následne do množiny pridáme všetky prvky, ktoré sú v rovnakej triede G ako prvky, ktoré sme doteraz zaradili do množiny. Potom k nim pridáme prvky, ktoré sú v rovnakých triedach F ako novo pridané prvky. Takto pokračujeme, pokiaľ je čo pridávať. Napríklad supremum faktorov F a G pri experimente, kde sa vyskytuje každá kombinácia úrovní faktorov F a G , bude celý faktor U , teda $F \vee G = U$. Príkladom takéhoto experimentu sú úplne znáhodnené bloky z kapitoly 1.3. V jednom bloku sa vyskytujú všetky kombinácie úrovní faktorov, takže supremum týchto dvoch faktorov je faktor U . Podobne, ak sa experiment riadi návrhom Latinskej štvorce, tak supremum riadkového a stĺpcového faktora bude celý štvorec, teda platí *stĺpce* \vee *riadky* = *štvorec*.

2.2 Hasseho diagramy

Ako už bolo spomenuté v úvode kapitoly, na vizualizáciu vzťahov medzi faktormi nám môžu slúžiť Hasseho diagramy. V tejto časti si ukážeme, ako sa tieto diagramy konštruujú. Pomocou Hasseho diagramov môžeme znázorňovať nielen štruktúru pôsobiacich faktorov a kombinácií ošetrení, ale aj štruktúru rozdelenia experimentálnych jednotiek. Tie môžu byť rozdelené do rôznych blokov, v rámci ktorých pôsobia rušivé vplyvy. Tiež ich môžeme vnímať ako faktory, len nekontrolované - blokové faktory. Tieto dve štruktúry sa dajú znázorniť v jednom diagrame, kedy použijeme odlišný znak pre kontrolované faktory a iný pre blokové faktory. Pre prehľadnosť sa však často znázorňujú samostatne v dvoch diagramoch zobrazených vedľa seba.

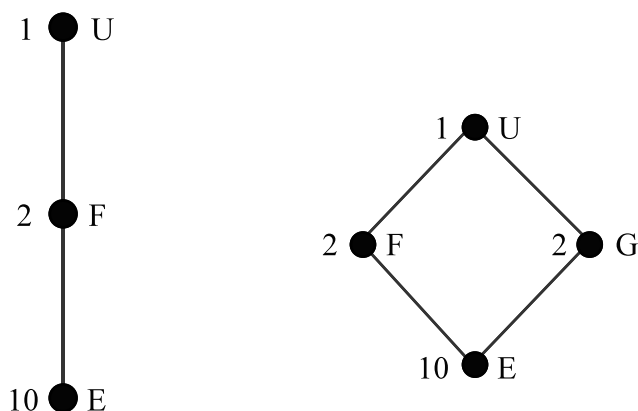
Každá bodka bude predstavovať jeden faktor. Pre vzťah $G \prec F$ nakreslíme jeden faktor nad druhý a spojíme ich čiarou. Pokiaľ medzi nimi takýto vzťah nie je, faktory nakreslíme na približne rovnakej úrovni, a do grafu pridáme faktor $F \vee G$. Taktiež tam zaradíme faktor $F \wedge G$. Obrázok 2.1 slúži ako ukážka týchto troch prípadov.



Obrázok 2.1: Tri príklady základného diagramu - $G \prec F$, $F \wedge G$, $F \vee G$

Z Hasseho diagramov však môžeme zistiť viac ako len vzťahy medzi faktormi. Pre ďalšie informácie pridáme okrem názvu faktora aj jeho počet úrovní. Na Obrázku 2.2 môžeme vidieť dva jednoduché prípady takéhoto Hasseho diagramu, prvý ukazuje prípad s jedným faktorom, ktorý má dve úrovne. Množinu na ktorú

tento faktor pôsobí tvorí 10 prvkov. Druhý znázorňuje experiment s dvoma faktormi, ktorých infimum je faktor E a supremum tvorí celý faktor U . Faktory F aj G majú dve úrovne a množinu na ktorú pôsobia tvorí 10 prvkov.



Obrázok 2.2: Hasseho diagramy s jedným a dvoma faktormi

Pomocou Hasseho diagramov môžeme tiež jednoducho vypočítať stupne voľnosti a zostaviť základ ANOVA tabuľky. Kvôli tomu si najskôr zavedieme vektorové podpriestory definované faktormi.

2.2.1 Podpriestory definované faktormi

Uvažujme množinu experimentálnych jednotiek Ω , a nech Ω obsahuje N prvkov. Vektorový priestor R^Ω bude označovať písmeno V . Jeho prvky sú N -zložkové vektory, kde každá súradnica súvisí s jedným prvkom z množiny Ω . Potom množinu všetkých vektorov $v \in V$, ktorých súradnice, na ktoré pôsobia rovnaké kombinácie ošetrení sa rovnajú, nazývame podpriestor ošetrení a budeme ho značiť V_T . Dimenzia priestoru V_T je celkový počet ošetrení, teda veľkosť množiny \mathcal{T} .

Pripomeňme si model (1.3) z kapitoly 1.2, teda

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijp},$$

Priestor V obsahuje vektory $\mathbf{E} Y$, kde zložky vektora Y sú prvky y_{ijp} . Pokiaľ ide o lineárny model ako v tomto prípade, vektory stredných hodnôt vytvoria vektorový podpriestor priestoru V . Index ijp predstavuje nejaký prvok z množiny Ω , môžeme ho značiť ω . Indexy i a j určujú pôsobenie kombinácie ošetrení z množiny \mathcal{T} , takže pre jednotku $\omega \in \Omega$ platí $T(\omega) = ij$. Konkrétne ide kombináciu pôsobenia i -tej úrovne faktoru F , takže $F(\omega) = i$ a j -tej úrovne faktoru G , teda $G(\omega) = j$.

Potom definujeme vektorový podpriestor V_F ako podpriestor tvorený vektormi $\mathbf{E} Y \in V$, ktorých súradnice sú rovnaké pre všetky jednotky, na ktoré pôsobí rovnaká úroveň faktoru F . Formálne sa to dá formulovať nasledovne:

$$\mathbf{E} Y \in V_F \Leftrightarrow \exists \alpha_i : \mathbf{E} Y_\omega = \alpha_i \quad \forall \omega \in \Omega \text{ také, že } F(\omega) = i.$$

V tomto podpriestore sa nachádzajú stredné hodnoty vektorov, ktorých zložky pochádzajú z modelu uvažujúceho, že na jednotky má efekt len faktor F . Dimenzia takéhoto podpriestoru je počet úrovní faktora F , takže $\dim V_F = n_F$.

Podobne pre faktor G definujeme podpriestor V_G s dimenziou $\dim V_G = n_G$:

$$\mathbf{E} Y \in V_G \Leftrightarrow \exists \beta_j : \mathbf{E} Y_\omega = \beta_j \quad \forall \omega \in \Omega \text{ také, že } G(\omega) = j.$$

Analogicky sa definujú podpriestory blokových faktorov - budú tam patriť tie vektory $\mathbf{E} Y \in V$, ktorých súradnice budú rovnaké pre všetky jednotky, ktoré patria do rovnakého bloku. Súčet podpriestorov V_F a V_G vytvorí podpriestor $V_F + V_G$. Ten tvoria vektory stredných hodnôt, ktorých súradnice pochádzajú z modelu pri ktorom predpokladáme, že na zložky majú efekt oba faktory. Neuvažujeme však ich interakciu. Z vlastností súčtu vektorových podpriestorov platí, že $\dim(V_F + V_G) = \dim V_F + \dim V_G - \dim(V_F \cap V_G)$. Prienik V_F a V_G je vlastne vektorový podpriestor definovaný faktorom $V_{F \vee G}$, ako bude uvedené v Tvrdení 4.

Pre faktory F a G definujeme podpriestor ich infima $F \wedge G$:

$$\mathbf{E} Y \in V_{F \wedge G} \Leftrightarrow \exists \gamma_{ij} : \mathbf{E} Y_\omega = \gamma_{ij} \quad \forall \omega \in \Omega \text{ také, že } F(\omega) = i, G(\omega) = j.$$

Ide o podpriestor stredných hodnôt vektorov, ktorých zložky sú z modelu pri ktorom uvažujeme, že aj interakcia medzi faktormi F a G má efekt na pozorované jednotky. Ak predpokladáme, že na množine Ω pôsobia len faktory F a G a vyskytuje sa tam každá kombinácia ich úrovní, potom $F \wedge G = V_T$. V takomto prípade je dimenzia vektorového podpriestoru rovná počtu kombinácií ošetrení $n_F n_G$. Rovnako definujeme aj podpriestory V_U a V_E . Keďže faktor U priradí všetkým prvkom jednotku, tak do podpriestoru V_U budú patriť tie vektory, ktorých všetky zložky sa rovnajú. Zrejme $\dim(V_U) = 1$. Takže

$$\mathbf{E} Y \in V_U \Leftrightarrow \exists \mu : \mathbf{E} Y_\omega = \mu \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Vektory Y teda pochádzajú z modelu ktorý predpokladá, že žiadne faktory nemajú efekt na experimentálne jednotky.

Posledná zložka z modelu (1.3) je efekt ostatných vplyvov ϵ_{ijp} . Ten môže byť pre každý prvok rôzny. S tým je spojený faktor E . Faktor E každému prvku priradí ten daný prvok, takže priestor V_E budú tvoriť všetky vektory $\mathbf{E} Y \in V$, ktorých zložky sú ľubovoľné konštanty. Ide teda o celý priestor V .

Nasledujúce tvrdenia nám ukážu, ako súvisia vzťahy faktorov so vzťahmi ich podpriestorov. Ich dôkazy sa nachádzajú v diele Bailey (2008). Vzťahy podpriestorov sa dajú znázorniť pomocou Hasseho diagramov, podobne ako vzťahy medzi faktormi. Príklad Hasseho diagramu môžeme vidieť na Obrázku 2.3.

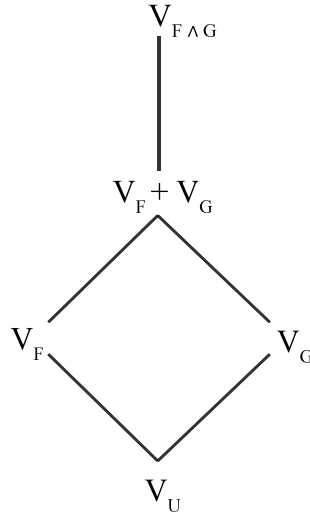
Tvrdenie 3. *Nech pre faktory F a G , definované na rovnakej množine, platí $F \preceq G$. Potom $V_G \subseteq V_F$.*

Tvrdenie 4. *Nech sú faktory F a G definované na rovnakej množine. Potom platí $V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$.*

Pomocou podpriestorov teraz môžeme zdefinovať ortogonalitu medzi faktormi F a G .

Definícia 6. *Povieme, že faktory F a G pôsobiace na rovnakej množine sú navzájom ortogonálne, ak podpriestor $V_F \cap V_{F \vee G}^\perp$ je ortogonálny s podpriestorom $V_G \cap V_{F \vee G}^\perp$.*

$V_{F \vee G}^\perp$ značí ortogonálny doplnok $V_{F \vee G}$. Ekvivalentne stačí, aby podpriestor $V_F \cap V_{F \vee G}^\perp$ bol ortogonálny s podpriestorom V_G . Z predchádzajúceho tvrdenia navyše platí $V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$, takže $V_{F \vee G}^\perp = (V_F \cap V_G)^\perp$. Ortogonalita, rovnako ako aj podpriestory zavedené v tejto kapitole nám poslúžia na výpočet stupňov voľnosti.



Obrázok 2.3: Hasseho diagram pre faktorové podpriestory

2.2.2 Stupne voľnosti

Pri výpočtoch spojených s analýzou rozptylu potrebujeme poznať stupne voľnosti. Ide vlastne o počet prvkov, ktorých hodnoty sa môžu voľne líšiť. Pomocou podpriestoru vektorového priestoru V sa dajú definovať nasledovne:

Definícia 7. *Bud W ľubovoľný podpriestor vektorového priestoru V . Potom dimenziu vektorového podpriestoru W nazývame stupne voľnosti W a značíme d_W .*

Nasledujúca veta nám dá návod na výpočet stupňov voľnosti pre jednotlivé faktory. Definujeme v nej podpriestory W priestorov V . Tieto podpriestory chceme definovať tak, aby pre dva rozdielne faktory F a G boli priestory W_F a W_G navzájom ortogonálne. To môžeme spraviť nasledovne: podľa Tvrdenia 3, pre faktory F a G také, že $F \prec G$, platí $V_G \subset V_F$. Chceme teda, aby priestor W_F bol obsiahnutý v priestore V_F . Zároveň však chceme, aby bol ortogonálny so všetkými priestormi V_G takými, že $F \prec G$. Takže dostávame, že podpriestor W_F musí byť ortogonálny s priestorom $\sum_{F \prec G} V_G$, teda $W_F = V_F \cap (\sum_{F \prec G} V_G)^\perp$. Počet stupňov voľnosti pre faktor F je potom dimenzia W_F .

Veta 5. *Bud \mathcal{F} množina faktorov pôsobiacich na rovnakej množine, kde žiadne dva nie sú navzájom ekvivalentné. Predpokladajme, že pre \mathcal{F} platí:*

- (a) ak $F \in \mathcal{F}$ a $G \in \mathcal{F}$, potom $F \vee G \in \mathcal{F}$
- (b) ak $F \in \mathcal{F}$ a $G \in \mathcal{F}$, potom F a G sú ortogonálne

Definujme podpriestor W_F pre $F \in \mathcal{F}$ ako

$$W_F = V_F \cap \left(\sum_{F \prec G} V_G \right)^\perp$$

a označme $d_F = \dim W_F$. Potom platí

- (i) ak $F \in \mathcal{F}$ a $G \in \mathcal{F}$ sú rozdielne faktory, tak W_F a W_G sú ortogonálne

(ii) ak $F \in \mathcal{F}$, potom V_F je ortogonálny s direktným súčtom podpriestorov W_G pre $G \in \mathcal{F}$, pre ktoré platí $F \preceq G$

(iii) ak $F \in \mathcal{F}$, potom

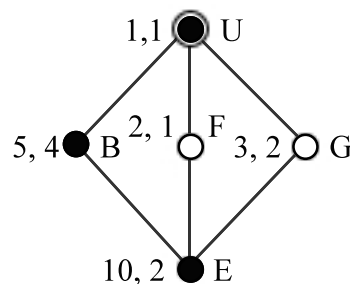
$$d_F = n_F - \sum_{F \prec G} d_G. \quad (2.1)$$

Dôkaz. Dôkaz je popísaný v diele Bailey (2008) na strane 183. □

Pre pripomenutie, n_F značí počet úrovní faktora F . Môžeme vidieť, že počet stupňov voľnosti pre faktor nezávisí len od počtu úrovní, ale aj od ostatných faktorov z množiny \mathcal{F} . Vzorec (2.1) dáva návod na jednoduchý výpočet stupňov voľnosti za pomoci Hasseho diagramov. Poznamenajme, že všetky experimenty spomínané v tejto aj v nasledujúcej kapitole patria medzi ortogonálne experimenty. Predpoklad z predchádzajúcej vety je teda splnený pre všetky uvedené experimenty a výpočty stupňov voľnosti sú korektné.

Začneme na vrchole diagramu, kde sa nachádza faktor U . Keďže neexistuje faktor od ktorého by bol tento faktor jemnejší, tak podľa (2.1) platí $d_U = n_U = 1$. Následne sa posunieme o úroveň nižšie. Pri každom bode odpočítame od počtu úrovní počet stupňov voľnosti všetkých faktorov, ktoré sa v grafe nachádzajú nad ním a sú s daným bodom spojené. Informáciu o stupňoch voľnosti pre daný faktor zapíšeme vedľa informácie o počte úrovní faktora.

Na Obrázku 2.4 môžeme vidieť, ako bude vyzerat výsledný diagram pre nasledujúci prípad: prázdne kruhy predstavujú kontrolované faktory a plné zase náhodné vplyvy. Vystupujú tam dva kontrolované faktory: faktor F s dvoma úrovňami a faktor G , ktorý má tri úrovne. Tieto faktory medzi sebou nemajú žiadny vzťah a nepredpokladáme ani žiadnu interakciu medzi nimi. Pôsobia na množinu 10 prvkov, rozdelenú do 5 blokov - to predstavuje blokový faktor B . Podľa počtu úrovní sú vypočítané stupne voľnosti. Zrejme $d_U = 1$. Faktory F a G sú jemnejšie ako faktor U a platí $n_F = 2, n_G = 3$. Takže $d_F = n_F - d_U = 2 - 1 = 1$, analogicky $d_G = 3 - 1 = 2$. Pre faktor B platí $n_B = 5$ a teda $d_B = 4$. Nakoniec ostáva vypočítať d_E . Faktor E je jemnejší ako faktory F, G, B aj U a $n_E = 10$, takže $d_E = n_E - (d_F + d_G + d_B + d_U) = 10 - (1 + 2 + 4 + 1) = 2$.



Obrázok 2.4: Hasseho diagram pre blokový faktor a dva kontrolované faktory bez interakcie

Môže sa stať, že počet stupňov voľnosti faktoru vyjde 0. Dá sa to interpretovať tak, že príslušný podpriestor W obsahuje len nulové vektory. V tom prípade sú hodnoty súvisiace s faktorom pevne viazané na faktor, ktorý je v grafe vyššie. Často sa preto tieto dva faktory zjednocujú do jedného.

2.2.3 Vytváranie ANOVA tabuliek

Pomocou Hasseho diagramu môžeme vytvoriť základ ANOVA tabuliek, ktorých príklad sme mohli vidieť v kapitole 1. Každý faktor vyskytujúci sa v diagrame bude mať svoj vlastný riadok. Zdroj variability je teda vždy daný faktor. Faktor E , ktorý sa nachádza naspodu Hasseho diagramu, predstavuje reziduál. Do tabuľky vieme doplniť stupne voľnosti podľa postupu z predchádzajúcej časti.

Pri ortogonálnych návrhoch sa na výpočet súčtu štvorcov SS môže použiť podobný algoritmus ako na výpočet stupňov voľnosti. Táto metóda je viac popísaná v Bailey (2008).

Náhodné vplyvy pochádzajúce z rozdelenia experimentálnych jednotiek, ktoré sú zaznamenané v Hasseho diagrame nám poskytnú vrstvy, na ktorých vypočítame jednotlivé chyby, teda reziduály. Tie následne používame na výpočet testovej štatistiky pre daný faktor. Ako príklad si pozrime príklad z predchádzajúcej časti s diagramom na Obrázku 2.4. Vytvoríme s ním spojenú kostru ANOVA tabuľky (viz Tabuľka 2.1). Stratum, inak nazývaná vrstva, tvorí blokový faktor súvisiaci so štruktúrou experimentálnych jednotiek. Do jednej vrstvy patria faktory ležiace nad ňou, ktoré sú s ňou zároveň spojené. V našom prípade teda do vrstvy B nepatrí žiadny kontrolovaný faktor. Následne sa zostaví testová štatistika, kde sa porovnávajú podiel súčtu štvorcov faktora s reziduálnym súčtom štvorcov, kde je reziduál daný vrstvou, v ktorej sa faktor nachádza.

Stratum	Zroj variability	Stupne voľnosti
U	U	1
B	blok	4
E	F	1
	G	2
	reziduál	2
Spolu		10

Tabuľka 2.1: Kostra tabuľky analýzy rozptylu

3. Praktické použitie

Použitie Hasseho diagramov si ukážeme na praktickom príklade, ktorého zadanie pochádza z knihy Milliken a Johnson (2004). Chceme porovnať cupcaky upečené podľa rôznych receptov pri rôznych teplotách. Otestovať chceme tri recepty a dve rôzne teploty pečenia, takže spolu šesť rôznych kombinácií. Z každej kombinácie chceme upiecť tri cupcaky, preto budeme musieť pripraviť 18 cupcakov. Takže máme 18 experimentálnych jednotiek a dva faktory. Experimentálne jednotky tvoria množinu Ω , takže $|\Omega| = 18$. Jeden faktor je použitý recept, ktorý budeme označovať písmenom R . Faktor R má tri úrovne, pretože testujeme tri druhy receptov. Druhý faktor je teplota pečenia, ktorú budeme označovať písmenom P . Cupcaky budeme piecť pri dvoch rôznych teplotách, takže faktor P má dve úrovne. Kombinácie úrovní tvoria množinu \mathcal{T} , ktorá obsahuje šesť prvkov. Každá z týchto kombinácií je náhodne priradená trom experimentálnym jednotkám.

3.1 Základné návrhy

Najjednoduchšia možnosť ako porovnať cupcaky, je spraviť úplne znáhodnený experiment s dvoma faktormi s interakciou, uvedený v kapitole 1.3. Na každý cupcake pripravíme cesto podľa daného receptu samostatne, a následne ich po jednom upečieme. Máme dva nezávislé faktory R a T a uvažujeme aj ich interakciu, ktorú predstavuje faktor $R \wedge T$. Štruktúra takéhoto experimentu je jednoduchá: pre faktory platí $\text{cupcaky}(E) \prec R \prec R \wedge T \prec U$ a $\text{cupcaky}(E) \prec T \prec R \wedge T \prec U$. Model je

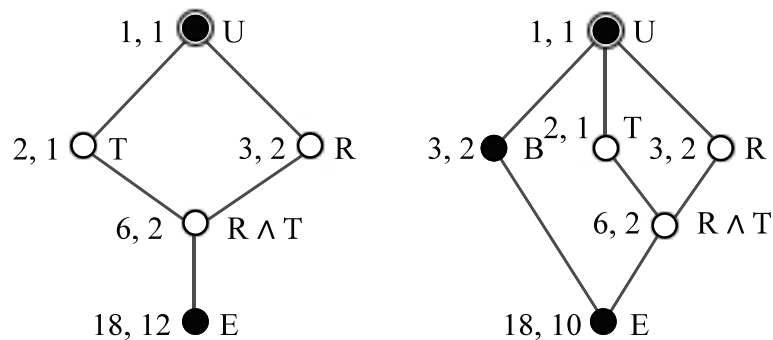
$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + (\rho\tau)_{ij} + \epsilon_{ijk}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2,3,$$

kde τ_i predstavuje efekt rozdielnej teploty pečenia, ρ_j je efekt receptu, $\rho\tau_{ij}$ je ich interakcia a ϵ_{ijk} je náhodná chyba. Grafické znázornenie sa nachádza na Obrázku 3.1 vľavo. Tento experiment je však náročný na proces a čas výroby. Samostatne sa musí 18 krát pripraviť cesto a následne sa samostatne upiecť.

Predpokladajme, že sa dá vyrobiť len 6 cupcakov za deň. Experimentálne jednotky sú teda rozdelené do 3 blokov, kde jeden blok bude predstavovať jeden deň, a každý blok obsahuje 6 jednotiek. Štruktúra množiny experimentálnych jednotiek Ω sa teda trochu skomplikuje. Bude platiť $\text{cupcaky}(E) \prec \text{deň}(B) \prec U$. Náhodné zložky pri výrobe cupcakov sa rozdelia na dve: okrem chyby pri každom cupcaku budeme uvažovať aj blokový efekt. Naďalej úrovne oboch faktorov priradujeme náhodne priamo cupcakom. Model tohto experimentu je podobný ako v predchádzajúcom prípade, pribudne len zložka δ_k predstavujúca efekt dňa, teda blokový efekt.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + (\rho\tau)_{ij} + \delta_k + \epsilon_{ijk}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2,3,$$

Hasseho diagram pre túto situáciu je ukázaný na Obrázku 3.1 vpravo. Do ANOVA tabuľky by pribudla vrstva predstavujúca bloky. Faktory ale stále priradujeme experimentálnym jednotkám cupcake, a preto ich oba stále testujeme na vrstve cupcakov.



Obrázok 3.1: Znáhodnený experiment s dvoma faktormi (vľavo) a znáhodnené bloky (vpravo)

3.2 Split-plot

Doterajší postup je z hľadiska výroby veľmi neefektívny. Aby sme sa vyhli opakovanej prípravy cesta podľa rovnakých receptov a pečeniu cupcakov samostatne 18 krát, môžeme využiť komplikovanejšie návrhy experimentu. Jedným z nich je Split-plot design. Aby sme nemuseli piecť cupcaky samostatne, vytvoríme trojice cupcakov, ktoré sa budú piecť spoločne. Každý z troch cupcakov bude vytvorený podľa iného receptu, takže naďalej bude potrebné samostatne pripraviť 18 cupcakov, avšak počet pečení sa zníži na 6. Faktor T predstavujúci teplotu pečenia sa bude aplikovať na celú rúru, experimentálna jednotka pre faktor T teda bude celá rúra, ktorých je spolu 6. Experimentálne jednotky pre faktor R ostávajú samotné cupcaky, ktoré sú ale rozdelené do 6 blokov po 3 kusoch. Každý z faktorov je teda testovaný na iných experimentálnych jednotkách, takže efekt faktorov bude testovaný na inej vrstve.

Rozdeľme si túto situáciu na dve zložky. Najskôr rozoberieme prípad pre faktor T . Tento faktor má dve úrovne, ktoré náhodne aplikujeme na šesť experimentálnych jednotiek, kedy každá úroveň je priradená trom jednotkám. Ide teda o vyvážený znáhodnený experiment, ktorého zložky sa riadia modelom

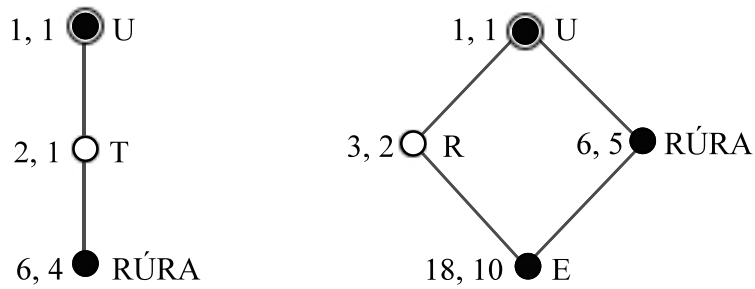
$$y_{ik} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ik}, i = 1,2; k = 1,2,3.$$

τ_i je efekt úrovne i faktora T a ϵ_{ik} predstavuje náhodné efekty vzniknuté pri pečení. Hasseho diagram je znázornený na Obrázku 3.2 vľavo.

Teraz sa pozrieme na faktor R . Tento faktor má tri úrovne, ktoré pôsobia na 18 experimentálnych jednotiek, rozdelených do 6 rovnako veľkých blokov. Ošetrenia sú v každom bloku priradované náhodne, takže ide o znáhodnené bloky, ktorého model je

$$y_{ijk} = \mu + \rho_j + \beta_{ik} + \epsilon_{ijk}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2,3.$$

ρ_j značí efekt faktora R , β_{ik} je blokový efekt a ϵ_{ijk} predstavuje náhodné chyby spojené s každým cupcakom. Bloky v tabulke analýzy rozptylu vytvárajú ďalšiu vrstvu. Faktor R sa ale aplikuje priamo na cupcaky, preto bude tento faktor testovaný na vrstve experimentálnych jednotiek - cupcakov, teda na vrstve E . Hasseho diagram je znázornený na Obrázku 3.2 vpravo.

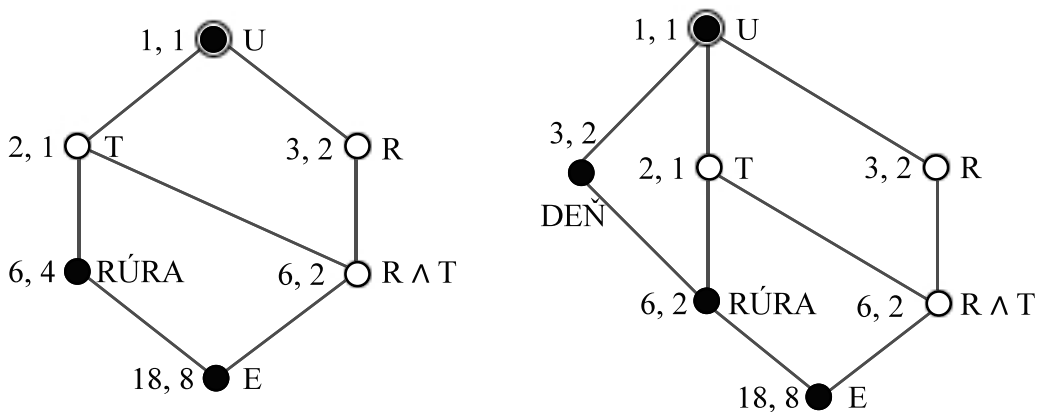


Obrázok 3.2: Hasseho diagramy, ak uvažujeme situáciu pre faktor T (vľavo) a faktor R (vpravo) samostatne

Ak budeme uvažovať len tie bloky, ktorým bola pridelená prvá úroveň faktora T , tak dostaneme ako sa od seba navzájom líšia cupcaky, ak na ne pôsobí rovnaká teplota. Rovnako tak pri druhej úrovni faktora T . Ak bude variácia medzi cupcakami rovnaká pri oboch úrovniach faktora T , môžeme náhodný efekt vzniknutý pri pečení na rôznych úrovniach teploty zjednotiť do jedného blokového náhodného efektu. K tomu ešte pribudne faktor uvažujúci interakciu medzi receptom a teplotou pečenia, teda faktor $T \wedge R$. Zrejme je tento faktor jemnejší ako faktory T a R . Pôsobí priamo na cupcaky a teda nemá žiadny vzťah s blokovým faktorom. Model sa teda rozšíri ešte o parameter $\rho\tau$, predstavujúci interakciu medzi R a T :

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + (\rho\tau)_{ij} + \beta_{ik} + \epsilon_{ijk}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2,3.$$

Spojením doterajších krokov dostávame konečný Hasseho diagram (Obrázok 3.3 vľavo) a kostru tabuľky analýzy rozptylu pre Split-plot návrh tohto experimentu (viz Tabuľka 3.1).



Obrázok 3.3: Hasseho diagramy pre Split-plot návrhy bez (vľavo) a s blokovým faktorom DEŇ (vpravo)

Poznamenajme, že faktor T sa nachádza vo vrstve Rúra, takže testová štatistika pre tento faktor bude v tvare $F_T = \frac{SS_T/1}{SS_{e_1}/4}$, kde SS_T je súčet štvorcov pre faktor T a SS_{e_1} je reziduálny súčet štvorcov pre daný blok.

Stratum	Zroj variability	Stupne volnosti
U	U	1
Rúra	T	1
	reziduál	4
E = Cupcake	R	2
	T \wedge R	2
	reziduál	8
Spolu		18

Tabuľka 3.1: Kostra tabuľky pre Split-plot experiment

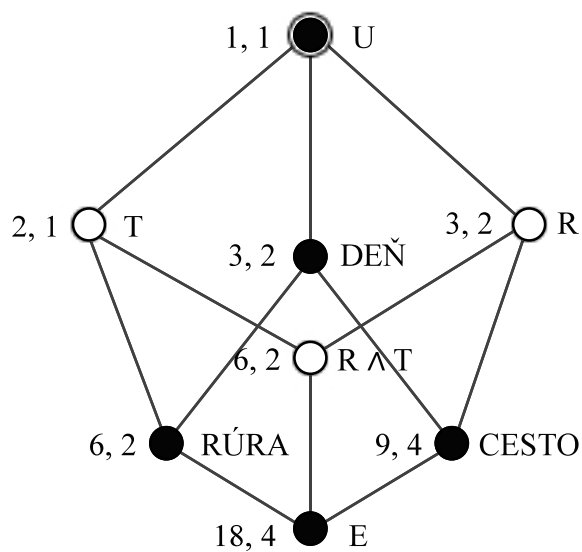
Uvažujme teraz opäť situáciu, kedy za jeden deň môžeme piecť len dvakrát. Teda jednotlivé bloky, ktoré sme doteraz mali vytvoriť ešte väčšie bloky, kde jeden blok bude jeden deň, ktorý obsahuje tri podbloky — jednotlivé pečenia v rúre — a v každom z nich sú ešte tri experimentálne jednotky, čiže cupcaky. Štruktúra množiny experimentálnych jednotiek je teda *cupcaky (E)* \prec *rúra* \prec *deň* \prec *U*. Bloky ktoré tvorí daný deň do tabuľky pridajú ďalšiu vrstvu. Teplota pečenia a recept sa priradujú k daným dňom náhodne, takže nie sú v žiadnom vzťahu s daným dňom. Diagram pre tento návrh môžeme vidieť na Obrázku 3.3 vpravo.

3.3 Strip-plot

Oproti návrhom uvedeným na začiatku sa počet pečení znížil o tretinu, avšak cesto sa stále musí pripraviť 18 krát. Na zníženie tohto počtu o tretinu sa môže využiť Strip-plot design. Pri Strip-plot návrhu sa experimentálne jednotky usporiadajú do troch blokov - obdĺžnikov, každý obdĺžnik predstavuje jeden deň. Obdĺžnik bude mať tri stĺpce, teda podbloky, a každý stĺpec predstavuje jeden recept, podľa ktorého vyrobíme cesto na dva cupcaky upečené v jeden deň. Pre vzťah medzi týmito blokmi platí *cupcaky (E)* \prec *cesto* \prec *deň* \prec *U*. Experimentálna jednotka pre recept teda už nebude cupcake, ale samotné cesto, ktorému náhodne priradujeme recept. Ak neberieme do úvahy faktor *T*, tak ide o znáhodnený experiment s jedným faktorom. Keďže sa zmenila experimentálna jednotka pre faktor *R*, zmení sa aj vrstva pre testovanie faktora. Dva riadky obdĺžnika — taktiež podbloky dňa — predstavujú teplotu pečenia, teda jednu rúru. Ako v predchádzajúcom prípade, rúra je experimentálna jednotka pre faktor *T* a platí *cupcaky (E)* \prec *rúra* \prec *deň* \prec *U*. Rúra a cesto medzi sebou nemajú žiadny vzťah. Interakcia medzi faktormi *R* a *T* naďalej pôsobí až na samotné cupcaky. V experimente vystupujú spolu až tri druhy experimentálnych jednotiek. Model popísaného návrhu je

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + \rho\tau_{ij} + \delta_k + \beta_{ik} + \gamma_{jk} + \epsilon_{ijk}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2,3,$$

kde δ_k predstavuje efekt bloku dňa, γ_{jk} je efekt podbloku cesto a β_{ik} je efekt podbloku rúra. Hasseho diagram je znázornený na Obrázku 3.4 vľavo. K nemu je zostrojená príslušná kostra ANOVA tabuľky (viz Tabuľka 3.2).



Obrázok 3.4: Hasseho diagram pre Strip-plot návrh

Stratum	Zroj variability	Stupne voľnosti
U	U	1
Deň	Deň	2
Rúra	T reziduál	1 2
Cesto	R reziduál	2 4
E = Cupcake	T ∧ R reziduál	2 4
Spolu		18

Tabuľka 3.2: Kostra tabuľky pre Strip-plot experiment

3.4 Faktoriálny experiment

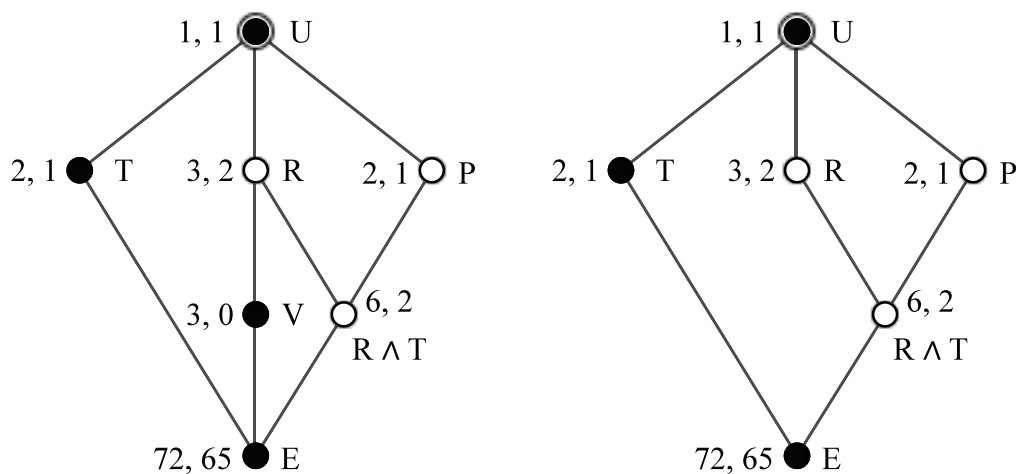
Na záver rozoberieme ešte jeden experiment, ktorý bol prakticky vykonaný študentami MFF UK. Bližšia dokumentácia experimentu vrátane vyhodnotenia experimentu sa nachádza v práci Hrochová a kol. (2016). Primárnym cieľom experimentu bolo porovnať vplyv dvoch kypriacích práškov na cupcaky. Popri tom sa testovali tri rôzne recepty a ich vplyv na chuť. Do úvahy sa tiež brala interakcia medzi kypriacim práškom a receptami. Takže sa testovali dva faktory: kypriaci prášok, ktorý budeme označovať ako P , s úrovňami $P1$ a $P2$ a faktor R , teda recept s úrovňami $R1$, $R2$ a $R3$. Na pečenie cupcakov boli k dispozícii dve rúry, ktoré predstavujú faktor, ktorý budeme značiť T s úrovňami $T1$ a $T2$. Aby sa vyskytla každá kombinácia týchto faktorov, bolo potrebné spraviť aspoň 12 cupcakov. Nakoniec sa vyrobilo 72 cupcakov, takže každá kombinácia sa vyskytla 6 krát.

Bol navrhnutý faktoriálny experiment typu $2 \times 2 \times 3$ ($T \times P \times R$): podľa každého z receptov sa pripravili dve cestá, každé s iným práškom. Polovica z každého cesta sa dá piecť do jednej rúry a druhá polovica do druhej. Cupcaky, ktoré sa takto vyrobia naraz predstavujú jednu várku. Teda sú z nich vytvorené bloky, na ktoré pôsobí blokový faktor V , ktorý má tri úrovne. Recept je teda testovaný na várkach, zatiaľčo faktor P a interakcia $P \wedge R$ pôsobia na cupcaky. Hasseho diagram pre túto štruktúru môžeme vidieť na Obrázku 3.5 vľavo.

Pri výpočte stupňov voľnosti podľa diagramu sa vyskytla situácia, že počet stupňov voľnosti pre faktor V je $d_V = 0$. Upozorňuje nás to na fakt, že efekt faktora V je pevne viazaný na faktor R . To znamená, že platí $R \equiv V$, teda faktory R a V sú navzájom ekvivalentné. Môžeme ich teda zjednotiť do jedného faktora. Po tejto úprave dostávame výsledný Hasseho diagram, ktorý sa nachádza na Obrázku 3.5 vpravo. Výsledný model preto nebude zahŕňať efekt faktora V a bude v tvare

$$y_{ijkm} = \mu + \pi_i + \rho_j + (\pi\rho)_{ij} + \tau_k + \epsilon_{ijkm}, i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2; m = 1, \dots, 6,$$

kde π_i je efekt faktora P , ρ_j je efekt faktora R , τ_k je efekt faktora T , $(\pi\rho)_{ij}$ je efekt interakcie $P \wedge R$ a ϵ_{ijkl} predstavuje náhodnú chybu.



Obrázok 3.5: Hasseho diagramy s faktorom V (vľavo) a bez faktora V (vpravo)

Záver

Táto práca sa zaoberala Analýzou rozptylu, s ňou spojenými experimentami a ich vizualizáciou pomocou Hasseho diagramov. Boli predstavené základné štatistické experimenty a popísaná ich analýza pomocou metódy Analýza rozptylu. Cieľom bolo poskytnúť prehľad o zostavovaní Hasseho diagramov, ktoré prinášajú grafický pohľad na uvažovaný experiment a môžu pomôcť pri ich analýze. Tieto poznatky boli použité v niekoľkých praktických príkladoch.

V prvej časti práce bola predstavená Analýza rozptylu. Taktiež boli stručne popísané základné techniky využívané pri experimentovaní. Predstavili sme niekoľko štatistických experimentov využívajúcich Analýzu rozptylu, na ktoré sme sa v priebehu práce odvolávali v praktických ukázkach.

Ďalšia časť sa venovala faktorom vyskytujúcim sa v experimentoch. Na začiatku boli zavedené nové pojmy súvisiace s danými faktormi. Boli pomenované vzťahy medzi faktormi a operácie medzi nimi. Následne sme tieto vzťahy vizualizovali pomocou Hasseho diagramov. Dôležitou časťou bolo zavedenie podpriestorov definovaných faktormi, pomocou ktorých bola zavedená ortogonalita faktorov. Na základe týchto poznatkov bol opísaný výpočet stupňov voľnosti a zostavovanie kostier ANOVA tabuliek.

Záver práce sa venuje praktickému použitiu Hasseho diagramov pri konkrétnych experimentoch. Bolo popísaných niekoľko návrhov experimentov, ku ktorým boli zostavené Hasseho diagramy a pomocou nich vypočítané stupne voľnosti. K vybraným návrhom boli zostavené kostry tabuľky Analýzy rozptylu.

Zoznam použitej literatúry

- ANDĚL, J. (2007). *Statistické metody*. Čtvrté upravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-003-8.
- BAILEY, R. A. (2008). *Design of Comparative Experiments*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-68357-9.
- HROCHOVÁ, M., CHLUBNOVÁ, T., JANOUŠKOVÁ, K. a MASÁK, T. (2016). Vliv kypřícího prášku na nakynutí a chuť cupcaků. URL <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hlavka/vyuka/planex/sfg-cupcaky/vliv-kypriciho-prasku-final1.pdf>.
- JAROŠOVÁ, E. (2007). *Navrhování experimentů a jejich analýza*. Česká společnost pro jakost, Praha. ISBN 978-80-02-01985-5.
- MILLIKEN, G. A. a JOHNSON, D. E. (2004). *Analysis of Messy Data Volume 1: Designed Experiments*. Second Edition. Chapman and Hall/CRC. ISBN 9781584883340.
- OMELKA, M. (2021). NMSA331 Matematická statistika 1 - poznámky k přednášce. URL <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~omelka/Soubory/nmsa331/ms1.pdf>.

Zoznam obrázkov

2.1	Tri príklady základného diagramu - $G \prec F$, $F \wedge G$, $F \vee G$	13
2.2	Hasseho diagramy s jedným a dvoma faktormi	14
2.3	Hasseho diagram pre faktorové podpriestory	16
2.4	Hasseho diagram pre blokový faktor a dva kontrolované faktory bez interakcie	17
3.1	Znáhodnený experiment s dvoma faktormi (vľavo) a znáhodnené bloky (vpravo)	20
3.2	Hasseho diagramy, ak uvažujeme situáciu pre faktor T (vľavo) a faktor R (vpravo) samostatne	21
3.3	Hasseho diagramy pre Split-plot návrhy bez (vľavo) a s blokovým faktorom DEŇ (vpravo)	21
3.4	Hasseho diagram pre Strip-plot návrh	23
3.5	Hasseho diagramy s faktorom V (vľavo) a bez faktora V (vpravo)	24