Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2021 Michal Sláma

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Experimentování v prostředí dynamické geometrie

Experiments in DGS

Michal Sláma

Vedoucí práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph. D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: nmgr. kombinované MA jednoob. od 2012

2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Experimentování v prostředí dynamické geometrie potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne

....

Děkuji svému vedoucímu za podporu, za jeho cenné rady a trpělivost při vedení mé diplomové práce. Rovněž bych chtěl poděkovat vedení školy i mým kolegyním a kolegům za vstřícnost a pomoc při získání potřebných informací a podkladů, též za umožnění výzkumu.

....

NÁZEV:

Experimentování v prostředí dynamické geometrie

AUTOR:

Michal Sláma

KATEDRA (ÚSTAV)

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VEDOUCÍ PRÁCE:

doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph. D.

ABSTRAKT

Cílem této diplomové práce je zjistit, zda žáci druhého stupně základní školy, konkrétně žáci 6. ročníku, jsou schopni samostatně experimentovat v prostředí dynamické geometrie u vhodně připravené úlohy. Mezi teoretická východiska práce patří studie platného zamýšleného kurikula geometrie na druhém stupni základní školy, vztah tzv. badatelsky orientovaného vyučování k možnosti žákovského experimentování ve výuce geometrie, studie pedagogických teorií v souvislosti s žákovským bádáním a rovněž ve vztahu k matematizaci, která je ve výuce matematiky a geometrie nutně žádána. Žákovský experiment je zde koncipován jako samostatná didaktická metoda. Z hlediska proveditelnosti experimentu i návazného výzkumu bylo zvoleno prostředí dynamické geometrie – systém GeoGebra. Teoretická část práce je zakončena popisem parametrů důležitých pro uskutečnitelnost experimentování v prostředí dynamické geometrie ve výuce geometrie. Výzkumná část se zabývá realizovaným výzkumem, jehož cílem bylo zjistit, do jaké míry budou žáci při experimentování samostatní, pokud se jim připraví vhodné materiály a poskytne vhodně nastavené edukativní prostředí. Výzkumná činnost se soustředila na zkoumání edukativních i psycho-sociálních projevů při vyučování. Výstupy výzkumu jsou hodnoceny kvalitativně.

KLÍČOVÁ SLOVA

GeoGebra, Dynamická geometrie, Experimentování, Planimetrie, Konstruktivistické přístupy, Badatelsky orientovaná výuka

TITLE:

Experiments in DGS

AUTHOR:

Michal Sláma

DEPARTMENT:

Department of Mathematics and Mathematical Education

SUPERVISOR:

doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph. D.

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to find out whether the pupils of the second stage of primary school, specifically the pupils of the 6th grade, are able to experiment independently in the environment of dynamic geometry with a suitably prepared material. The theoretical basis of the work includes the study of the valid intended curriculum of geometry at the second stage of primary school, the relationship of so-called inquiry-oriented teaching to the possibility of student experimentation in learning geometry, the study of pedagogical theories in connection with inquiry education and also in relation to mathematisation, which is in the teaching of mathematics and geometry necessarily required. The student experiment is conceived here as an independent didactic method. From the point of view of the feasibility of the experiment and subsequent research, the environment of dynamic geometry was chosen – the GeoGebra system. The theoretical part of the work ends with a description of parameters important for the feasibility of experimentation in the environment of dynamic geometry in the teaching of geometry. The research part deals with the research, the aim of which was to find out to what extent students will be independent in experimentation, if suitable materials are prepared and provided with a properly set educational environment. The research activity focused on the study of educational and psycho-social manifestations in the process of education. Research outputs are evaluated qualitatively.

KEYWORDS

GeoGebra, Dynamic Geometry, Experiments, Planimetry, Constructivism, Inquiry Education

Obsah

Úvod

Cílem této diplomové práce je zjistit, zda žáci druhého stupně základní školy, konkrétně žáci 6. ročníku, jsou schopni samostatně experimentovat v prostředí dynamické geometrie u vhodně připravené úlohy. Mezi teoretická východiska práce patří studie platného zamýšleného kurikula geometrie na druhém stupni základní školy, vztah tzv. badatelsky orientovaného vyučování k možnosti žákovského experimentování ve výuce geometrie, studie pedagogických teorií v souvislosti s žákovským bádáním a rovněž ve vztahu k matematizaci, která je ve výuce matematiky a geometrie nutně žádána.

Žákovský experiment je zde koncipován jako samostatná didaktická metoda. Z hlediska proveditelnosti experimentu i návazného výzkumu se nabízí volba prostředí dynamické geometrie, které poskytuje ideální prostor k uvedenému účelu. Pro tuto práci je zvolen systém GeoGebra, jenž je přístupný online a zdarma a jehož používání žáky základní školy je představitelné bez náročného učení.

Teoretická část práce je zakončena popisem parametrů důležitých pro uskutečnitelnost experimentování v prostředí dynamické geometrie ve výuce geometrie.

Výzkumná část se zabývá realizovaným výzkumem, jehož cílem bylo zjistit, do jaké míry budou žáci při experimentování samostatní, pokud se jim připraví vhodné materiály a poskytne vhodně nastavené edukativní prostředí. Výzkumná činnost se soustředila na zkoumání edukativních i psycho-sociálních projevů při vyučování. Výstupy výzkumu jsou hodnoceny kvalitativně.

Konkluze teoretických předpokladů a interpretace výstupů výzkumu včetně odpovědi na otázku, zda je možné realizovat žákovský experiment ve výuce geometrie v prostředí dynamické geometrie s předpokladem velké míry samostatnosti žáků, se nalézá v závěru.

1. Teoretická východiska

Vyučování geometrie je bezesporu nezbytnou a tradiční součástí výuky matematiky. Vzhledem k tomu, jak se proměňuje svět i společnost kolem nás, si klademe otázku, jaký to má vliv na vzdělávání, zda jsou dosavadní pedagogické způsoby a postupy na místě, nebo by se mělo něco změnit. Pokud zažíváme epochální proměny, které se dotýkají nejzákladnějších paradigmat[1], musíme se zamýšlet i nad aktualizací výuky matematiky, o níž by se mohla vést rozsáhlá akademická i celospolečenská diskuse.

Předpokládáme, že realizovaná forma vzdělávacích obsahů[2] matematiky je v našem vzdělávacím systému dobrá. Je zde nejen bohatá tradice, máme v celosvětovém srovnání poměrně vysoké vzdělávací standardy i nadprůměrné výsledky v průzkumech.[3] Otázkou je, jaký bude vývoj matematické gramotnosti v budoucnu, protože průzkumy za poslední desetiletí vykazují spíše klesající tendenci.[4]

To, co se zdá být nejvážnějším problémem výuky matematiky a potažmo geometrie, je ve složitosti objektů, struktur, postupů, úloh, relativní náročnosti předmětu nejen kvůli kvantitě výukové látky, ale též údajné odtrženosti toho, co se žáci učí ve škole, od běžného praktického života. Navzdory vší „praktičnosti“ matematiky, obrovskému poli její aplikace v životě společnosti a civilizace, získávají mnozí žáci rezistenci ba odpor k matematice jakožto školnímu předmětu. Vyplývá z toho otázka, jak učit matematiku lépe, aby byla nejen atraktivní, poutavá a zábavná, ale aby byla rovněž efektivní, přínosná a obohacující.

---

[1] Ať už to vnímáme podobně jako Thomas S. Kuhn, který rozlišoval „fázi normální vědy, období anomálií (a krizi paradigmatu) a fázi vědecké revoluce (a přijetí paradigmatu nového)“ In VAŠÍČEK, Jiří, 2005: Thomas S. Kuhn, Struktura vědeckých revolucí, paradigma a relativita vědeckého poznání, resp. připomeňme celý proud husserlovské filozofie, nebo ne, dobová aktualizace metod i obsahů vzdělávání je v pedagogice standardním a nutným dějem.

[2] Viz pět forem existence obsahu vzdělávání In PRŮCHA, 2009, s. 119.

[3] Srov. PISA 2018: „V matematické gramotnosti dosahuje nebo překračuje základní druhou gramotnostní úroveň 80 % českých žáků, což je více než je průměr zemí OECD (76 %). Dovednosti odpovídající dvěma nejvyšším úrovním má 13 % českých žáků, v zemích OECD je to v průměru 11 % žáků.“

[4] Viz Tamtéž: „Výsledky žáků v matematické gramotnosti je možné sledovat od roku 2003, kdy byla tato oblast poprvé hlavní testovanou oblastí. Výsledky českých žáků byly v roce 2003 nad průměrem zemí OECD. Průměrný výsledek českých žáků se v oblasti matematické gramotnosti mezi hlavními šetřeními v letech 2003 a 2012 statisticky významně zhoršil o 17 bodů. Mezi roky 2012 a 2015 se dále mírně zhoršil o 7 bodů, ale už statisticky nevýznamně, a kopíroval úroveň průměru zemí OECD. V následujícím cyklu v roce 2018 se zlepšil o 7 bodů, na hodnotu 499 bodů. Je to výsledek statisticky významně lepší než průměr zemí OECD (489 bodů). Statisticky významně lepšího výsledku dosáhli čeští žáci naposledy v roce 2006, kdy hodnotu průměru zemí OECD převyšovali o 20 bodů.“

Úsilí o lepší matematickou gramotnost, o vzdělanost obecně, se nemůže spoléhat jen na populární způsoby vyučování, protože musí respektovat podstatné prvky poznání, jež stovky a tisíce let vyrůstalo bádáním a zkoumáním světa od počátku až po dnešek. Toto vyhmatávání skutečnosti, vědecké poznávání světa, získávání po generace předávaných zkušeností může být samo předmětem zkoumání, čímž se zabývá řada exaktních i humanitních věd.

Z hlediska pedagogiky nás zajímá, jakým způsobem bádá, hledá, zkoumá, poznává a získává zkušenosti dítě, respektive žák, jak se kognitivní procesy vyvíjí a jak jim efektivně pomoci. Na tomto základě vznikající pedagogické teorie konstituují metody, jež mohou být implementovány v edukativních procesech.

Fenomén bádání, jenž pokládáme za součást lidské přirozenosti, stojí ve středobodu badatelsky orientovaného vyučování, které se v posledních letech více prosazuje nejen v přírodovědných předmětech, ale hledá si taktéž cestu do výuky matematiky. Badatelské činnosti mají přiblížit žákům svět vědy a zároveň je inspirovat k vlastní zvídavosti, k samostatnosti v učení, k cítění zodpovědnosti za své vzdělání i solidarity s ostatními.

Existuje mnoho způsobů jak bádat a zdaleka ne všechny jsou použitelné v pedagogické práci s dětmi a dospívajícími. Badatelsky orientované vyučování si proto žádá širší teoretickou základnu. Z plejády pedagogických škol, směrů a proudů volíme pragmatickou pedagogiku, v jejíž počátcích se badatelsky orientované vyučování zrodilo, ale přijímáme inspiraci i dalších, které mají k tomuto způsobu výuky blízko. Jedná se zejména o teorie projektového vyučování, problémového vyučování, scaffolding či freinetovskou pedagogiku. V rámci pedagogických teorií považujeme za nutné zmínit problematiku matematizace.

Konkrétní edukativní formou badatelsky orientovaného vyučování může být žákovský experiment, který lze pojmout z hlediska didaktiky několika způsoby. Popíšeme, jakých forem může žákovské experimentování nabýt a jak jej připravit k výuce. Předpokládáme, že ideálním prostředím pro experimentování v geometrii je prostředí dynamické geometrie. Z dostupných systémů se nabízí GeoGebra, jejíž popularita v poslední letech z pochopitelných důvodů rapidně roste. Teoretickou část práce uzavřeme popisem parametrů žákovského experimentování v dynamickém prostředí GeoGebra.

1.1. Výuka geometrie na druhém stupni základní školy

Geometrie odedávna patřila k úhelným kamenům vzdělanosti, byla jedním ze sedmi svobodných umění, součástí středověkého kvadrivia. V dnešním školském pojetí se pokládá za tematický okruh vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Matematikové obyčejně vnímají geometrii nejen jako okruh témat, ale spíše jako svébytnou vědní disciplínu. Vopěnka mluví dokonce o matematice geometrického názoru,[5] čímž naznačuje, že geometrii vnímá jako plnohodnotný a živý hermeneutický proud matematického chápání světa.

To, čeho se snažíme ve výuce geometrie na základní škole dosáhnout, je naučit žáky geometricky vidět a chápat svět kolem sebe. Učíme je poznávat a rozumět geometrickým objektům, strukturám a jevům, k čemuž slouží nástroje evidence, dokazování, měření, rýsování, geometrické počítání a další. K výuce nám zpravidla slouží geometrické úlohy a problémy, ale může (a mělo by) i umění, věda, logika a filozofie. Vnímání geometrie jako tematického okruhu plného objektů, úloh a problémů zavání scholastickým zploštěním, v němž žáci zřídkakdy nalézají ke geometrii a potažmo k matematice pozitivní vztah, natož hluboký zájem. Duchaprosté drilování úloh pak může páchat více škody, než užitku.

Žáci na druhém stupni základní školy jsou celkově vzato schopni samostatných úvah a formulace vlastních názorů, poznávání geometrických objektů, pamatují si naučené postupy řešení, dokáží bez pomoci rýsovat základní geometrické konstrukce. Obyčejně nejsou schopni složitějších abstraktních postupů, jako je dokazování či aplikace vyšší logiky, mívají problémy se složitějšími vizualizacemi, kupř. s principy deskriptivní geometrie. Jejich rozumové schopnosti však není prozíravé podceňovat, protože prochází rapidním a mnohdy skokovým vývojem, což znamená, že někteří talentovaní žáci mohou dosahovat nadprůměrných až vynikajících výsledků. Právě pro ně jsou dobrou příležitostí různé formy vzdělávacích projektů, badatelské činnosti, experimenty, zážitkové vyučování, ať už v rámci formálního či neformálního vzdělávání.[6]

---

[5] VOPĚNKA, 2001, s. 19.

[6] Uvedené formy vyučování jsou samozřejmě vhodné pro široké spektrum žactva, což je dáno mimo jiné jejich sociálním rozměrem, především snahou o týmové zapojení. Badatelsky orientované vyučování může zaujmout talentované žáky stejně jako žáky s individuálními vzdělávacími potřebami. Srov. DOSTÁL, 2014, s. 8n.

1.1.1. Kurikulum geometrie na základní škole

Průcha ve své Pedagogické encyklopedii rozlišuje zamýšlené, realizované a dosažené kurikulum.[7] Vzhledem k rozsahu práce se budeme zabývat stručným studiem zamýšleného kurikula geometrie na základní škole, především platných kurikulárních dokumentů definujících obsah sledované vzdělávací oblasti na druhém stupni a jejich vztahu k tématu diplomové práce.

Osovým dokumentem je Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, který byl zaveden na základě tzv. Bílé knihy (2001) a je průběžně aktualizován. Bílá kniha pozbyla svou platnost vydáním Strategie vzdělávací politiky České republiky (dříve Strategie vzdělávací politiky do 2020, nyní ve verzi Strategie vzdělávací politiky do roku 2030+), nicméně struktura formálního kurikula, v podobě strategie – rámcový vzdělávací program – školní vzdělávací program, zůstává zachována.

Aktuální strategie[8] navrhuje úpravu rámcového vzdělávacího programu základního vzdělávání v rámci klíčové aktivity Inovace struktury a obsahu RVP ZV týkající se výuky matematiky takto: „Obsah RVP ZV bude inovován v klíčových kompetencích, s prioritním zaměřením na tyto zásadní oblasti: mateřský a cizí jazyk, matematika a přírodní vědy (STEM) a využití digitálních technologií.“ Z dalšího kontextu vyplývá, že se plánuje větší zapojení digitálních technologií ve výuce, zvýšení digitální gramotnosti učitelů i žáků. Ke geometrii se strategie výslovně nevyjadřuje.

Lze předpokládat, že se plánované větší využívání technologií týká i výuky geometrie, což jde ruku v ruce s aktuálním vývojem a šířením vyučování v prostředí dynamické geometrie.

Výuce geometrie na druhém stupni základní školy se většinou věnuje jedna hodina ze čtyřech[9] určených v týdenní časové dotaci matematice. V závislosti na náročnosti učiva a dynamice výuky jí však mohou učitelé dočasně věnovat i více prostoru.

[7] Viz PRŮCHA, 2009, s. 119. Tyto formy kurikula rozlišují i mezinárodní dokumenty, např. TIMSS 1999 – *Třetí mezinárodní studie matematického a přírodovědného vzdělávání*.

[8] Zkráceně nazývaná Strategie 2030+ byla vydána MŠMT ČR v r. 2020. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/54104/.

[9] Pokud škola rozšíří minimální časovou dotaci pomocí disponibilních hodin, tak to může být pět nebo více hodin týdně.

1.1.2. Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání vydaný ministerstvem školství v aktuálním znění[10] specifikuje geometrii v rámci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace takto: „V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.“[11]

Ve srovnání se Vzdělávacím programem Obecná škola[12] se předchůdce rámcového vzdělávacího programu věnuje geometrii více. Geometrii pojímá jako jednu ze čtyřech hlavních složek matematiky a věnuje se jí v každém ročníku vlastní tematický okruh rozdělený na dvě části: početní geometrie a konstrukční geometrie. Geometrie je charakterizována autory programu takto:

„Geometrie navazuje jak tematicky, tak i formami práce na přístupy, které byly rozvíjeny v obecné škole. Žáci se seznamují manuálními činnostmi s modely geometrických útvarů (mozaika a stavebnice), s vlastnostmi geometrických útvarů v rovině a v prostoru. Geometrie není v občanské škole deduktivní, ale spíše „konstruktivní“. Spolu s modelováním se pěstuje v geometrii kreslení a rýsování. Struktura geometrie není formálně-logická, nevycházíme ze žádné axiomatické soustavy s posloupností primitivních pojmů, ale budujeme strukturu didaktickou. Na základě zkušeností s prostorem, v němž žáci žijí, poznáváme, že prostor (rovinu) lze vhodným způsobem dělit a vyplňovat. Dělení roviny přímkou lze modelovat přeložením listu papíru, uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná, vede k představě mnohoúhelníku atp.“[13]

Program dále vyjmenovává další důležité prvky výuky, souvislosti s dalšími předměty, především s fyzikou a přírodovědnými předměty.

---

[10] Vydáno Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky v lednu 2021.
[11] RVP ZV s. 30.
[12] Platným od 1.9.1997, aktualizovaným k 1.9.2006.
[13] Obecná škola (1997, akt. k 1.9.2006), s. 187.

Rámcový vzdělávací program počítá s tím, že vzdělávací oblasti a tematické okruhy budou dále rozvedeny ve školním vzdělávacím programu, k čemuž poskytuje vodítka v podobě očekávaných výstupů a specifikace učiva.

Očekávané výstupy na druhém stupni základní školy jsou:

- *zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku*
- *charakterizuje a třídí základní rovinné útvary*
- určuje velikost úhlu měřením a výpočtem
- odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů
- využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- načrtne a sestrojí rovinné útvary
- užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- *načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar*
- *určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti*
- odhaduje a vypočítá objem a povrch těles
- načrtne a sestrojí sítě základních těles
- načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině
- *analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu*

Výstupy zvýrazněné kurzívou, zejména ten poslední, mohou být podle našeho názoru efektivně realizovány vyučováním v prostředí dynamické geometrie. Tomu odpovídá většina učiva uvedeného níže.

Učivo na druhém stupni specifikuje takto:

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník
- (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta
- prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

Prostředí dynamické geometrie je možné využít ve vyučování všeho uvedeného učiva. V praxi výuky žáků druhého stupně základní školy jej lze považovat za přínosné a efektivní zejména ve vyučování shodnosti a podobnosti, v řešení některých konstrukčních úloh, v učení osové a středové souměrnosti.

Je otázkou, zda lze pro výuku uvedeného učiva použít metody badatelsky orientovaného vyučování, na což odpovíme v závěru diplomové práce.

1.1.3. Školní vzdělávací programy

Struktura školních vzdělávacích programů, podle kterých se ve školách vyučuje, se řídí rámcovým vzdělávacím programem, nicméně při jejich tvorbě se očekává, že bude zamýšlené kurikulum co nejvíce přiblíženo realizovanému, tedy vzdělávací obsahy budou koncipovány tak, aby se žáci v určitých ročnících konkrétní školy naučili to, co mají. Konkretizace obsahů má vyplývat z možností a situace školy, která se oficiálním schválením školního vzdělávacího programu zavazuje naplňovat specifikované vzdělávací cíle. To také kontroluje Česká školní inspekce.

Ke tvorbě školního vzdělávacího programu existují různé manuály a doporučení, v praxi se však většinou používá několik vzorů, které se mění a aktualizují podle potřeb školy. Není vzácností, že jsou takové dokumenty velmi obsáhlé,[14] a proto pro jejich přehlednost při používání v praxi nabízí Česká školní inspekce systém InSpis, v němž je možné školní vzdělávací programy tvořit a posléze s nimi lépe zacházet.

Prakticky to znamená, že učitelé pracují s tabulkami exportovanými ze školního vzdělávacího programu, v nichž jsou rozvedeny výstupy a učivo specifikované rámcovým vzdělávacím programem do jednotlivých kompetencí a témat. Též je zvykem uvádět v samostatném sloupci mezipředmětové vztahy a průřezová témata. Z těchto tabulek si učitelé vytvářejí učební plány, podle kterých si organizují vyučování.[15]

Tabulky obyčejně obsahují informace ke každému ročníku zvlášť a jsou dále členěny dle tematických okruhů. Učivo se může v několika ročnících opakovat, zvláště pokud jde o široké téma, které vyžaduje hlubší porozumění. Je též možné, že se určité učivo objevuje v jednom ročníku (např. Pythagorova věta v 8. ročníku), zatímco v programu jiné školy se vyučuje v jiném ročníku. Podoba i kvalita školních vzdělávacích programů v jednotlivých školách se může lišit.[16]

---

[14] Mají často 400 až 500 stran.
[15] Viz např. Příloha 2.
[16] Srov. Tematická zpráva ČŠI: Analýza školních vzdělávacích programů pro základní vzdělávání za období 2007–2011, Dostupné z.: https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Tematick%C3%A9%20zpr%C3%A1vy/2012_TZ_analyza_SVP_2007_2011.pdf

Příklad učiva geometrie ve školním vzdělávacím programu

Pro ilustraci uvádíme výňatek ze školního vzdělávacího programu s názvem Škola porozumění.[17]

Učivo geometrie 6. ročníku:

Geometrie v rovině a prostoru:

- Vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- Shodnost geometrických útvarů
- Základní rovinné útvary
- Druhy čar
- Úhel a jeho velikost
- Druhy trojúhelníků
- Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku
- Výšky, střední příčky, těžnice a těžiště trojúhelníku
- Pravidelný mnohoúhelník
- Jednotky velikosti úhlů
- Operace s úhly
- Obsah a obvod čtverce, obdélníku, trojúhelníku
- Konstrukce rovinných útvarů
- Výšky, těžnice a těžiště trojúhelníku, střední příčky
- Věty o shodnosti trojúhelníku
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Krychle a kvádr
- Povrch a objem krychle a kvádru
- Síť krychle a kvádru
- Volné rovnoběžné promítání
- Geometrické slovní úlohy
- Vlastnosti rovinných a prostorových geometrických útvarů

[17] Pod tímto názvem uvádí svoje programy několik škol. Z důvodu ochrany autorských práv byl dokument anonymizován (viz Příloha 2).

1.1.4. Metodické příručky, učebnice, učební materiály a pomůcky

Na úrovni tvorby konkrétních učebních plánů se v učitelské práci uplatňují učebnice, učební materiály, pomůcky a s nimi vydávané metodické příručky. Vzhledem k tématu diplomové práce se omezíme na stručnou rešerši materiálů pracujících s badatelsky orientovaným vyučováním a žákovským experimentováním.

Na počátku některých kapitol řady učebnic Matematika pro základní školy nakladatelství SPN[18] je motivační úloha řešená žáky formou experimentu nebo pozorování, veškerá příprava a diskuze ale leží na straně učitele. Největší užití je v tématu osové souměrnosti. Obdobné nastavení mají i ostatní běžně dostupné učebnice matematiky pro druhý stupeň.[19]

Badatelsky orientovaným vyučováním se systematicky zabývá Vzdělávací centrum TEREZA, které provozuje portál Badatelé.cz, kde vydává výukové materiály a poskytuje metodickou pomoc učitelům. Vydalo např. příručku s názvem Pět kroků, Příručka pro badatele, kteří chtějí měnit svět, 2019, kde je věnována stručná kapitola i bádání v matematice[20] a Průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním, 2013.

Hodnocením a tvorbou materiálů pro badatelsky orientované vyučování přírodovědných oborů a matematiky se zabývá univerzitní projekt *ASSIST-ME* Kodaňské univerzity, jejímž partnerem je v České republice Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Mezinárodní výzkumný a vzdělávací projekt byl realizován v letech 2013 − 2016.[21]

---

[18] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Zdeněk PŮLPÁN a Michal ČIHÁK. Matematika 6: pro základní školy. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007.

[19] Byly prostudovány učebnice nakladatelství Fraus, Nová škola, Fragment, Taktik, Prometheus, Fortuna. Schválené učebnice totiž musí vycházet z rámcového vzdělávacího programu. Bádání se proto uplatňuje spíše na úrovni učebních plánů a ve výuce v podobě učiteli používaných metod a doplňkových materiálů.

[20] Je zde citována zkušenost paní učitelky matematiky druhého stupně: „Nedávno se mi podařila celá badatelská hodina v 8. třídě na téma Obvod kruhu, délka kružnice (s hypotézou, měřením, ověřením výpočtu). Pomůcky: různé kruhy (víka, misky, květináče, kyblíky…), pravítka, metr, provázek, kalkulačka; měření průměru a poloměru, obvodu kruhu provázkem, zápis do tabulky a výpočty na kalkulačce. Hodina s kruhem se mi povedla, děti se pustily s chutí do práce (zjistily, že se dobře pracuje aspoň ve dvojici, když si mohou pomáhat při měření), příště je ale budu směřovat k hypotéze a výpočtu s průměrem, ne s poloměrem. Napadla mě další celá hodina do matematiky, je opět „měřící“: různé rovnoběžníky (čtverec, obdélník, kosodélník, kosočtverec) a vlastní zkoumání vlastností úhlopříček těchto rovnoběžníků. Tuto hodinu budu moci realizovat až na začátku příštího školního roku v 8. třídě.“ Pět kroků, Příručka pro badatele, kteří chtějí měnit svět, 2019, s. 17.

[21] Více o projektu na stránkách Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kpe/assist-me.html nebo Univerzity v Kodani: https://assistme.ku.dk/.

V souvislosti vznikl projekt SAILS (Strategies for Assessment of Inquiry Learning in Science), který poskytuje výukové materiály pro učitele na svých webových stránkách.[22] Mezinárodního projektu se účastní více než 2 500 učitelů z dvanácti zemí. V rámci SAILS se organizují vzdělávací kurzy pro pedagogy, ale též se sdílí pracovní materiály a pomůcky pro badatelské vyučování.[23]

Obdobný mezinárodní univerzitní projekt zaměřený na výzkum i tvorbu materiálů pro badatelské vyučování je „*MaSciL* (mathmatics and science for life!)“ organizovaný Vzdělávací univerzitou ve Freiburgu.[24] Partnerskou univerzitou v České republice je Univerzita v Hradci Králové.[25] Česká verze webu je na materiály poměrně chudá, nicméně ta mezinárodní nabízí desítky učebních materiálů a platformu pro sdílení a komunikaci mezi učiteli.

Užitečné náměty a příklady badatelských činností pro výuku matematiky nabízí odborný článek *Badatelsky orientované vyučování matematice* autorek Libuše Samkové, Aleny Hošpesové, Marie Tiché a spoluautora Filipa Roubíčka,[26] jenž je dále citován v této práci.

V neposlední řadě lze doporučit mnohé práce a materiály docenta Katedry technické a informační výchovy Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, Jiřího Dostála, který se badatelsky orientovaným vyučováním odborně zabývá a jehož práce jsou níže rovněž hojně citovány.[27]

---

[22] Dostupné z: http://www.sails-project.eu/.

[23] Srov.:„The SAILS project has demonstrated how inquiry approaches can be used for teaching a range of scientific topics, and has helped science teachers become confident and competent in the assessment of their students' learning through inquiry. More than 2500 science teachers in 12 countries have participated in SAILS teacher education programmes. These teachers have strengthened their inquiry pedagogy and assessment practices by developing their understanding of the role of assessment.“ Tamtéž.

[24] Dostupný z: https://mascil.ph-freiburg.de/.

[25] Univerzita v Hradci Králové je řešitelem v součinnosti s Národním poradním sborem (NAB). Informace dostupné z: https://ris2.uhk.cz/mascil/.

[26] In Scientia in educatione 6(1), 2015, SAMKOVÁ, Libuše, HOŠPESOVÁ, Alena, ROUBÍČEK, Filip, TICHÁ, Marie. Badatelsky orientované vyučování matematice, 2015.

[27] Přehled jeho publikací je dostupný z: https://www.pdf.upol.cz/nc/kontakty/vizitka/empid/19183/.

1.2. Badatelsky orientované učení

Slovo bádat původně znamenalo očichávání, vnímat čichem a dnes mu rozumíme ve významu vnímat, zjišťovat, zkoumat.[28] V anglosaské literatuře se setkáváme s pojmem *inquiry* nebo *enquiry*, což pochází z latinského *inquīrō*, tzn. vyhledávat, pátrat po něčem. Bádání můžeme pojímat mimo edukační realitu,[29] např. v rámci vědeckého výzkumu, i když ani zde to není bez souvislosti, nebo jej brát za pevnou součást edukativních procesů. Jde v základu o velmi přirozený způsob poznávání něčeho nového, proto jej můžeme ve vhodné formě zařazovat do výuky od útlého věku. Je však zřejmé, že škála badatelských metod je díky tisíciletému rozvoji civilizace a věd velmi široká a do prostředí základní školy se hodí jen některé. Obzvláště patrné je to v matematice, která za mnohá staletí svého vývoje absorbovala nejen rozsáhlá množství obsahů, ale též sofistikovaných metod zkoumání, jež jsou mnohdy obtížně pochopitelné. Učitelé pak stojí před úkolem tyto obsahy a metody představit žákům a studentům tak, aby byly srozumitelné, osvojitelné a přitom se z nich nevytratilo nic podstatného. Badatelsky orientované učení může nabídnout způsob, jak toho docílit.

1.2.1. Badatelsky orientované učení v literatuře a dalších pramenech

Jiří Dostál rozlišuje různé podoby bádání podle toho, zda mají vzdělávací charakter, nebo ne.[30] Například o vědeckém bádání soudí, že nemá vzdělávací charakter, pravděpodobně proto, že jeho hlavním cílem není vzdělávání, ale zkoumání nějakého předmětu. Akční výzkum, který je blíže aktérům edukačních procesů, též není tím bádáním, které by bylo možné využít ve výuce, protože je spíše zaměřeno na zkoumání specifické problematiky. Bádání, které je možno realizovat ve výuce, nazývá jako „školní bádání, žákovské bádání, bádání dětí nebo dětské bádání, to podle toho, o kterou úroveň vzdělávání se jedná. Žákovské bádání má vždy přímou vazbu ke konkrétnímu předmětu poznávání (bádání o něčem).“[31] V badatelských aktivitách spatřuje možnost obohacení výuky, které přináší prvky neformálního a informálního vzdělávání a zároveň přibližuje svět vědy.

---

[28] Viz REJZEK, 2015, s. 62.
[29] Tím rozumíme „každou skutečnost, objektivně se vyskytující v lidské společnosti, v níž probíhají určité edukační procesy a fungují zde nějaké edukační konstrukty“ PRŮCHA, 2002, s. 64.
[30] DOSTÁL, Badatelsky orientovaná výuka, 2015, s. 16n.
[31] Tamtéž.

Podle autorského týmu projektu Badatelé.cz[32] je badatelsky orientované vyučování „jedním z účinných přístupů problémového vyučování, u kterého si žáci osvojují způsoby myšlení a postupy, které věda používá.“ Problémem se zde myslí námět, podnět ke zkoumání, otázka, která má žáky zajímat. Žákovské bádání vnímají jako implementaci vědeckých postupů do vyučování. Hlavním motivem je vzbuzení zájmu a podpora samostatného zkoumání. Role učitele je zde stylizována do role průvodce, který žákům napomáhá uskutečnění výzkumu. Autoři rozlišují otevřené bádání, nasměrované bádání, strukturované bádání a potvrzující bádání podle toho, jak je strukturováno a v jaké míře zasahuje do dění učitel. Badatelsky orientované vyučování v jejich pojetí otevřeně navazuje na anglosaskou tradici a literaturu, např. používáním metody 6W (Why, What, Where, When, Who; HoW)[33] a podle jejich názoru „podporuje konstruktivistický, nikoliv jen transmisivní styl výuky. Využívá aktivizující metody (heuristickou metodu, kritické myšlení, problémové vyučování, zkušenostní učení, projektovou výuku a učení v životních situacích)… Výsledkem je to, že žáci kladou otázky, formulují hypotézy, plánují postup jejich ověření, provádějí pokusy, vyhledávají a třídí informace, vyhodnocují výsledky a formulují závěry, které nakonec prezentují před ostatními.“[34]

Dle Barbory Svátkové je podstatou badatelské výuky „samostatná či skupinová práce žáků a takzvané kreativní napětí, které ve třídě vzniká na základě položené problémové otázky, zpravidla vycházející z reálných situací a života. Problémovou otázku může pokládat pedagog či děti samy. Pokud problémovou otázku položí sám žák, dochází k rozvoji klíčových kompetencí k řešení problémů a kompetencí pracovních.“[35] Pedagogové mají podle Svátkové vystupovat neautoritativně, v duchu rovnocenného partnerství spolupracovat na řešení badatelského problému. Svátková se domnívá, že badatelské způsoby vyučování by mohly významně zatraktivnit a zpestřit vyučování přírodovědných předmětů, především za použití heuristických metod, při nichž zažívají žáci překvapení a radost z objevů.

[32] VOTÁPKOVÁ, ed. Badatelé.cz: Průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním, 2013, s. 15.
[33] Viz tamtéž s. 47.
[34] http://badatele.cz/cz/o-metode
[35] SVÁTKOVÁ, 2015, s. 16.

Podle Stephanie Rothstein a Lainie Rowell[36] by mělo být badatelsky orientované vyučování tzv. 3D, což je zkratka anglických slov „discover, discuss, demonstrate" – „objevuj, diskutuj, předváděj". 3D vyučování v jejich pojetí angažuje žáky, prohlubuje znalosti, motivuje je k učení. Autorky též zdůrazňují důležitost kritického myšlení, roli empatie v sociální oblasti, nezbytnost technologií v přípravě i realizaci vyučování. Jednotlivé složky 3D nemají být vnímány pouze lineárně, ale spíše cyklicky, aby činnosti plynule navazovaly a prolínaly se. Vyučování se může uskutečnit synchronně, tj. od jedné činnosti k druhé, nebo asynchronně v duchu „blended learning", tedy provázaného učení, v němž se střídají činnosti podle situace a podle potřeb studentů. Doporučují, aby žáci studovali teorii individuálně doma a ve škole se odehrávaly především společné experimenty, což nazývají „flipped learning". Badatelsky orientované vyučování je podle nich velmi efektivní.

Podle autorů článku „Badatelsky orientované vyučování matematice"[37] zahrnuje bádání, které rozlišují na vědecké a žákovské, tyto činnosti žáků při nichž rozvíjejí své znalosti a porozumění vědeckým myšlenkám:

- pozorování;
- kladení otázek;
- vyhledávání informací v knihách a dalších zdrojích (aby zjistili, co je již známo);
- plánování výzkumu, navrhování postupů zkoumání;
- přezkoumávání toho, co je již známo, na základě experimentálních výsledků;
- využívání nástrojů pro sběr, analýzu a interpretaci dat;
- formulování odpovědí, vysvětlení a předpovědí;
- sdělování závěrů.

---

36 ROTHSTEIN, ROWELL, Discover, Discuss, Demonstrate: Using Inquiry-Based Learning to Keep Students Engaged, 2021, edutopia.org

37 Scientia in educatione 6(1), 2015, SAMKOVÁ, Libuše, HOŠPESOVÁ, Alena, ROUBÍČEK, Filip, TICHÁ, Marie. Badatelsky orientované vyučování matematice, s. 95.

Bádání podle jejich názoru „vyžaduje identifikaci předpokladů, využití kritického a logického myšlení, zvažování alternativních vysvětlení.“[38] Za základní předpoklad považují pochopení povahy vědy, což je však samosebou obšírný hermeneutický problém, jak vzápětí potvrzují: „ve vědě neexistuje žádný univerzální postup – vědecká metoda, která by spolehlivě vedla k získání nových vědeckých poznatků.“[39] Je evidentní, že takto nelze při výuce k bádání přistupovat, že je nutné imitovat vědecké postupy tak, aby to bylo žákům srozumitelné. Z toho vyplývají tři těžiště žákovského bádání, na kterých lze výuku stavět:

- pozorování a jeho různé interpretace;
- řešení problémů, jejichž vstupní informace mohou být nekompletní a mají nejasnou důležitost;
- řešení problémů, které mají nejasný počet nejasně klasifikovatelných řešení (nedá se jednoznačně určit, které řešení je správné, nejlepší apod.).[40]

Badatelsky orientované vyučování podle nich stojí v protikladu s transmisivním vyučováním, mění pozice a role žáků a učitelů, kteří mají za hlavní úkol připravit vhodné prostředí a podmínky pro uskutečnění bádání tak, aby žáci bádali pokud možno sami.[41]

[38] Tamtéž, s. 96.
[39] Tamtéž.
[40] Viz tamtéž.
[41] „Požadujeme-li, aby žák pozoroval, hledal aktivně informace, dedukoval, vytvářel a diskutoval o hypotézách, ověřoval je apod., učitel musí pro tyto činnosti vytvořit vhodné prostředí.“ Tamtéž.

Shrnutí charakteristik badatelsky orientovaného vyučování

Na základě uvedených znaků bychom mohli tento směr zařadit mezi sociokognitivní pedagogické teorie, které zdůrazňují sociální dimenzi učení, kooperativní a induktivní strategie, soustředí se na samostatné řešení problémů a získávání poznatků. Do tohoto rámce jsou inkorporovány obsahy a metody vědeckých disciplín, které mají vztah k vyučovanému předmětu.

Někteří spatřují zakladatele badatelsky orientovaného vyučování v osobě amerického filozofa a pedagoga Johna Deweye.[42] Ten vymezuje bádání jako „kontrolovanou nebo řízenou transformaci neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku.“[43] Je otázkou, zda bádání ve vyučování je vynálezem jedné osoby, jak se někteří domnívají,[44] nebo spíše inherentním prvkem lidského poznávání. Aniž bychom umenšovali přínos Johna Deweye, lze se stejnou vážností tvrdit, že zakladatelem bádání ve vyučování byl Aristoteles. Na druhou stranu je bezesporu důležité respektovat tradice, které na základě myšlenek amerických (Dewey, Bruner), francouzských (Freinet) a dalších filozofů a pedagogů (Vygotskij, Okoń) vytváří specifické teorie či svébytné metody vyučování, jež vedou k obohacení vzdělávacích procesů prostřednictvím bádání.

[42] „Základní myšlenky BOV je možné najít v dílech Johna Deweye (zejména Dewey,1938). Nicméně první náznaky je možné hledat i u jeho předchůdců, z nichž jmenujme alespoň Humboldta, Pestalozziho a Fröbela, kteří hledali cesty, jak zakládat vědomosti na myšlení, experimentování a reflexi, jak stimulovat zájem žáků o učení a kultivovat jejich autonomii. Ještě hlouběji z minulosti je možné připomenout řeckého filozofa Sokrata a jeho dialogickou metodu tázání.“ SAMKOVÁ a kol., 2015, s. 100.

[43] DEWEY, 1938: s. 104–105, vlastní překlad IN SAMKOVÁ a kol., 2015, s. 101.

[44] Srov. SAMKOVÁ a kol., 2015, 100.

1.2.2. Badatelsky orientované učení v matematice

Badatelsky orientované učení se začíná prosazovat v našich podmínkách zejména v posledních letech. Přirozeným prostředím pro aplikaci tohoto způsobu výuky jsou přírodovědné předměty. Využití badatelských činností v matematice se taktéž vyloženě nabízí. „Podobně jako bádání v přírodovědných předmětech, také bádání v matematice začíná otázkou nebo problémem, přičemž odpovědi hledáme pozorováním a zkoumáním; realizujeme mentální, skutečné nebo virtuální experimenty; hledáme další, již dříve řešené a vyřešené zajímavé otázky a problémy, které jsou podobné těm našim; používáme a přizpůsobujeme, je-li to potřeba, známé matematické techniky. Proces bádání je veden nebo vede k hypotetickým odpovědím – domněnkám, které je potřeba ověřit.“[45]

Je otázkou, co tvoří základní znaky badatelsky orientované výuky v matematice. Samková a kol.[46] je představují takto:

- úlohy a otázky, které mohou být různě interpretovány, mají více způsobů řešení, více správných odpovědí;
- objevování a znovuobjevování (jako doplněk k deduktivnímu přístupu);
- učení se z chyb (hlavně vlastních, ale i cizích; chyba je chápána jako nedílná
- součást učebního procesu);
- zajištění dostatečně husté sítě základních znalostí (na nichž by bylo možné dále stavět);
- kumulativní styl učení (propojování nových poznatků s dříve nabytými znalostmi);
- propojení matematiky s jinými obory (i nevšedními, např. českým jazykem či dějepisem);
- podpora kooperativního i autonomního učení.

[45] SAMKOVÁ a kol. 2015, s. 99.
[46] Tamtéž s.100.

Při hlubší úvaze lze pochybovat nad tím, zda jsou tyto znaky specifické pro badatelské činnosti, neboť je lze považovat stejně dobře za znaky kvalitní výuky matematiky obecně. Naopak specifickým znakem badatelsky orientované výuky je jistě experiment, při němž se klade důraz na samostatnost poznávání i řešení badatelských problémů. Dále je akcentován sociální rozměr učení, ve kterém je charakteristická změna v roli učitele a významný apel na týmovou práci. Těžiště rozhodování a tím pádem i průběh experimentu více závisí na vlastnostech sociální skupiny. Pro bádání v matematice je typická široká nabídka zdrojů a námětů, protože matematika je imanentní vůči plejádě vědních i mimovědních oblastí, jako je například umění. Samková a kol.[47] uvádí tyto zdroje:

- přírodní jevy;
- technické problémy;
- každodenní problémy;
- lidské vynálezy;
- umění
- matematické objekty.

K tomu bychom přidali matematické zákonitosti, vzorce a teorie, jež jsou nezbytné nejen jako základ pro výuku matematiky, ale též fyziky a dalších přírodních oborů, jinými slovy matematickou analýzu, svět informačních technologií, logiku a především bychom zdůraznili geometrii. Badatelsky orientované vyučování tak má v matematice velké pole uplatnění a v řadě edukativních oblastí může být velkou pomocí na cestě nejen za efektivnějším vyučováním, ale především za hlubším poznáním.

[47] SAMKOVÁ a kol., 2015, s. 100.

1.3. Pedagogické teorie využitelné pro žákovské experimentování

Základním prvkem učení je mimojiné získávání zkušeností. Ty lze získat jedině tak, že se něco zkouší a zkoumá, bádá se, přemýšlí a hlavně se to osvědčí praxí. Badatelsky orientované vyučování, které cílí k získávání žákovských zkušeností, může čerpat z široké nabídky pedagogických teorií. Je volbou poskytovatelů vzdělávání, což jsou zpravidla pedagogové,[48] zda využijí při žákovském bádání prvky jedné či více teorií, nebo se budou držet standardních postupů.

Mnoho pedagogických teorií je vystavěných na výzkumech dětského vývoje, v němž se z nemluvňat stanou mluvící a myslící lidé, což je svým způsobem fascinující děj. Je otázkou, do jaké míry je to spontánní a samostatný vývoj, či naopak, jak velký je vliv prostředí a sociálních interakcí v učení. Většina badatelů nepochybuje o významu sociálních vazeb, především rodinných, hlavně mateřského vztahu, ale názory se různí v problematice školního formování. Pedocentrické směry se snaží o co největší autonomii a svobodu žáků, role učitelů je spíše průvodcovská, partnerská, doprovázející a jejich pracovní náplní je zejména formování prostředí a dalších edukačních podmínek.

Některé konstruktivistické teorie počítají s určitou interaktivitou až direktivitou učitelů, specifikují didaktické postupy, připouští určitou míru transmise, ale zároveň jasně deklarují důležitost osobní autonomie žáků, kteří by měli mít ke vzdělávání svůj osobní, autentický postoj.

Vzhledem k omezenému rozsahu diplomové práce není možné podat vyčerpávající přehled pedagogických metod využitelných pro žákovské experimentování, což ostatně není ani jejím cílem, nicméně uvedeme v následujících kapitolách širší nástin alespoň těch teorií, které buď s badatelsky orientovaným vyučováním přímo historicky souvisí, nebo badatelské činnosti obyčejně zařazují do sféry svých didaktických postupů a metod. V závěru kapitoly se též dotkneme problematiky matematizace, která není vlastní pedagogickou teorií, ale je klíčovým konceptem pro výuku matematiky.

[48] Badatelsky orientované vyučování lze s úspěchem aplikovat i v neformálním vzdělávání, případně v nejrůznějších alternativních formách vzdělávání, jako např. individuální (domácí) vzdělávání. Srov. DOSTÁL, 2015, s. 16.

1.3.1. Teorie instrumentace

Teorií instrumentace zde myslíme zacházení s myšlenkami ve vědeckém poznávání přírody a světa. Její základní ideou je, že myšlení je nástrojem jednání. Průkopníkem tohoto postoje je filozof, pedagog a psycholog, protagonista pragmatismu, John Dewey,[49] který je zároveň zastáncem badatelsky orientovaného vyučování. Výchozím bodem je pro něj tzv. neurčitá situace otevřená bádání: „Neurčité situace mohou být charakterizovány různými pojmenováními. Jsou znepokojivé, svízelné, nejednoznačné, popletené, plné protichůdných tendencí, mlhavé, apod.“[50] Neurčitá situace budí zvídavost, napětí, touhu po poznání, proto začne člověk hledat prostředky, jak se v situaci lépe vyznat, co a jak pojmout. Hledá proto správné nástroje – instrumenty.

Aby člověk dosáhl naplnění své touhy po poznání, musí se učit, osvojit si patřičné schopnosti a dovednosti, najít nejvhodnější prostředky. Učení je de facto bádáním. „Dewey vidí učení jako adaptivní proces, při kterém je zkušenost hnacím motorem pro vytváření spojení mezi pocity a myšlenkami, prostřednictvím kontrolovaného a reflexivního procesu nazvaného reflexivní bádání (reflective inquiry; Dewey, 1938). To znamená, že jde o interakce mezi individuem a jeho okolím: bádání není chápáno jako vědecká aktivita, ale spíše jako vyrovnávání se s každodenními požadavky.“[51]

Instrumentací můžeme nazvat děj myšlenkového obohacování se na cestě za určitým cílem. S tímto konceptem pracuje nejen pragmatická pedagogika, ale též ku příkladu dobře známá metoda instrumentálního obohacování Reuvena Feuersteina, která umožňuje dosahovat významných terapeutických i vzdělávacích úspěchů. Konečně je instrumentace klasickým postupem v přípravě jakéhokoliv experimentu, což má v řadě vědeckých oborů ustálená pravidla. Z hlediska teoretické přípravy na náš výzkum se budeme věnovat instrumentaci v rámci pragmatické pedagogiky.

[49] Narozen 20. 10. 1959, zemřel 1. 6. 1952.
[50] DEWEY, 1938: s. 105, vlastní překlad IN Scientia in educatione 6(1), 2015, Badatelsky orientované vyučování matematice, s. 101.
[51] SAMKOVÁ a kol. Scientia in educatione 6(1), 2015, Badatelsky orientované vyučování matematice, s. 101.

Pragmatická pedagogika

Cílem pragmatického vyučování je dosáhnout pokud možno co nejvíce autonomního vývoje kognitivních strategií, který je založen na pohnutkách vyvolaných životní situací (nebo alespoň její imitací). Růst a vývoj jsou centrálním tématem a primární hodnotou Deweyovy filozofie.[52]

Neuralgickým bodem kognitivní instrumentace je motivace, na prvním místě vzbuzení zájmu. To se jeví rovněž jako klíčový problém didaktiky badatelského experimentu. Na pomoc přichází práce se sociální skupinou, jejíž dynamika může zapojit i ty, kdo jsou zpočátku k neurčité situaci vlažní. Sociální rozměr vzdělávání, jeho komunitní charakter a důležitost komunikace si Dewey uvědomoval:„...vlastní proces společného žití vzdělává. Rozšiřuje a podněcuje zkušenost, stimuluje a obohacuje představivost, vytváří odpovědnost směrem k přesnosti a živosti postojů a myšlenek."[53]

Dewey se dále domnívá, že klíčové hodnoty pro funkční společné vzdělávání jsou ty demokratické. „Co se týče vzdělávání, nejprve poznamenejme, že utváření společenského života, v němž se zájmy vzájemně prolínají a kde rozvoj či přizpůsobování se bere v potaz, dělá demokratickou společnost více dbalou záměrnému a systematickému vzdělávání, než jiné společnosti. Zanícení demokracie pro vzdělávání je známým faktem."[54] Demokracii nebere jen jako socio-politické klima, ve kterém se vzdělávání odehrává, ale též jako ústřední princip společenského života na všech úrovních, tedy i ve vzdělávací skupině. Vyzdvihuje především princip společného zájmu (*common interest*), vzájemný respekt, rovnost příležitostí, toleranci a plnost svobody.

[52] „Růst, vývoj – to jsou klíčová slova Deweyova nazírání světa. Jsou měřítkem i v etice. Cílem života není dokonalost jako poslední cíl, nýbrž stále postupující proces zdokonalování." STÖRIG, 1999, s. 414n.
[53] DEWEY, 1916, s. 7 (vlastní překlad).
[54] Tamtéž, s. 100n (vlastní překlad).

Dewey se však nezamýšlí jen nad teoretickými parametry vzdělávání, ale intenzivně promýšlí praktické způsoby jak učit a především, jak se učit (resp. společně se učit). Odmítá scholastický přístup ve smyslu pouhého informování, vybavování schopnostmi a trénování, ale klade velký důraz na rozvoj myšlení. Apeluje na to, aby se žáci co nejvíce vystavovali zkušenostem, podněcovali se k jejich získávání a povzbuzovali se k tomu, aby se tolik neobávali chyb, které jsou nutným prostředkem k učení. Dewey je ostrým kritikem umělosti a neautentičnosti vyučování, jeho odtrženosti od života.

Životní zkušenost (experience) je podle něj tou nejlepší školou. Tím pravým prostředkem k získávání zkušeností je objevování, bádání, originální a entuziastické myšlení, které je možno pozorovat u dětí. „Je zde [v objevování] skutečný nárůst zkušenosti, ne jen další mechanicky přidaná záležitost, ale obohacení o novou kvalitu. Spontaneita malých dětí je pro bedlivé pozorovatele okouzlující kvůli tomu, že spatřují tuto intelektuální originalitu. Radost, kterou děti zažívají, je radostí z intelektuální konstruktivity – kreativity...“[55] Objevování, které vychází z životní situace a vnitřní touhy, přináší podle Deweyho skutečnou radost.

Pedagogické představy Johna Deweye inspirovaly široký proud sociokognitivních pedagogických teorií, jejichž představiteli jsou např. Herbert Arnold Thelen (autor teorie skupinového bádání), Albert Bandura (zakladatel teorie sociálního učení), rovněž řady teorií sociálního učení (Ira Shor – pedagogika osvobození).[56] Pro přehled alespoň zmiňme teorii problémového vyučování (Wincenty Okoń), prodemokratické pedagogické teorie jako např. Freirovo hnutí, nebo technologické teorie vzdělávání (hypermediální).

---

[55] Tamtéž, s 187, (vlastní překlad).
[56] Srov. BERTRAND, 1998, s. 119 a 165.

Instrumentalismus

Ve svém díle Experience and Nature (1925) představuje Dewey v rámci promýšlení způsobů vědeckého poznání svůj koncept instrumentalismu. „Deweyho určitá verze pragmatizmu, kterou nazval ‘instrumentalismem’, je názor, že poznání vzniká z rozlišování souvislostí mezi událostmi nebo změnami. Bádání vyžaduje aktivní účast v takových procesech: badatel v nich provádí určité variace, aby se kvůli tomu objevily rozdíly a měří, jak se daná událost změnila ve vztahu k těmto variacím.“[57] Myšlenky vznikající při bádání, tedy evidencí souvislostí a rozdílů v pozorovaných událostech a objektech, jsou instrumenty – nástroji poznání. „Dewey nazývá vztahy a spojitosti ‘instrumentálními’ prvky přírody – jsou to prvky přístupné manipulaci, predikci a kontrole.“[58] Zacházením s prvky přírody vznikají myšlenkové nástroje, jejichž používáním se vytvářejí a ustalují zkušenosti. Za klíčovou metodu považuje Dewey názornou demonstraci, při níž se může instrumentace dobře odehrávat.

Úspěšné bádání se podle něj neobejde bez získávání důkazů, bez ujišťování. „Co již je známo, co je přijímáno za pravdu, je nesmírné důležitosti, bádání by bez toho nemohlo pokračovat o jediný krok.“[59] Samotná instrumentace není zárukou úspěchu, i když sama o sobě může přinášet radost. To, že badatel na něco přijde, něco objeví, má hodnotu, nicméně od bádání si obyčejně žádáme nějaký výsledek. To, co si od experimentu přejeme ale není úspěch v podobě naplnění našich představ a očekávání, nýbrž zkušenost, ať už je pozitivní nebo negativní.

Sdílením instrumentů, poznatků a zkušeností roste sounáležitost mezi aktéry bádání, rostou sociální dovednosti a rozvoj demokratických hodnot, které mají být podle Deweye univerzálním pojivem na cestě k pravé humanitě. Bádání je v tomto světle ideální vzdělávací metodou.

57 Britannica, Instrumentalism Of John Dewey, (vlastní překlad)
Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/John-Dewey/Instrumentalism, [Citováno 22.3.2021].

58 GODFREY-SMITH, 2013, (vlastní překlad), s. 11.

59 DEWEY, 1925, s. 154.

1.3.2. Projektové vyučování

Metoda učení prostřednictvím projektů má vícero podob a tradic. Výkladový slovník z pedagogiky uvádí ve školní praxi tři druhy projektů: celoškolní projekt, třídní projekt, vzdělávací projekt. „Projekt ve vyučování lze považovat za komplexní metodu nebo organizační formu, která se vyznačuje společným (učitel a žák) promýšlením určitého návrhu, jeho všestrannou přípravou (informace, zvládnutí dílčích postupů, materiály, formy spolupráce, rozdělení úkolů), komplexním provedením, společným vyhodnocením, včetně zhodnocení toho, co žáci zvládli, co se naučili.“[60]

V Evropě sahá historie teorie projektového vyučování až do počátku 17. století, kdy byla hojně využívána ve výuce architektury. Tradice byla dále rozvíjena v prostředí Spojených států amerických, kde se však postupem času vytratila a dnes patří spíše k minoritním metodám. Naopak v Evropě se vlivem amerických představ projektové vyučování uchytilo a během 60. let 20. století zažilo nebývalou přízeň především v severní a střední Evropě. Za kolébku projektového vyučování tak někteří autoři považují Řím a Paříž se svými uměleckými akademiemi, zatímco jiní vidí projekty za rys ryze americké pedagogiky zejména v technickém školství.[61]

Projektové vyučování získalo charakter pedagogické metody vlivem Williama Hearda Kilpatricka,[62] žáka a kolegy Johna Deweyho, který své teorie představil v článku „The Project Method“ na podzim roku 1918. Kilpatrick vycházel z vývojové teorie svého mentora, přejal Deweyho koncept získávání zkušenosti, ale později se významně odchýlil vlivem dalších teorií, především „zákony učení“ Edwarda L. Thorndika. Jádrem projektové metody je psychologie dítěte, v níž hrají zásadní roli sklony, touhy a uspokojení, spíše než podráždění a nucení. Proto musí mít žáci svobodnou volbu, v níž se mohou rýsovat vlastní důvody k učení.

[60] KOLÁŘ a kol., 2012, s. 110.
[61] Srov. KNOLL, 1997, s. 2.
[62] Narodil se 20. 11. 1871, zemřel 13. 3. 1965.

Později Kilpatrick své metody rozvinul, definoval koncept „srdečně cílevědomého jednání“,[63] hlavního hybatele projektové pedagogiky. Projektem je podle Kilpatricka jakékoliv cílevědomé jednání, které žáci realizují. Projekt má čtyři fáze: odůvodňování, plánování, provádění a posuzování.[64] Úkolem učitelů je, aby tyto fáze byly realizovány, nicméně by neměli významně zasahovat do jejich průběhu. Kilpatrickova metoda si získala brzy velkou pozornost, ale také kritiku. Dewey se k ní ostře ohradil a distancoval se od ní, protože, na rozdíl od Kilpatricka, bral projektové vyučování jako za jednu z mnoha vyučovacích metod.

Kilpatrickovy konstruktivistické a progresivní teorie nezůstaly bez vlivu v Evropě během módní vlny projektového vyučování v 60. letech minulého století. Projektové vyučování se rozšířilo do vícero forem, více či méně tradičních. V některých formách se během týdenních projektů realizovaly plány učitelů, od čehož se postupně upustilo. V tradičnější formě se žáci nejprve učili osvojit si nástroje, techniky a dovednosti nutné k realizaci projektů, jež se v návaznosti realizovaly (projektové vyučování podle Woodwarda). Nejtrvalejší formy se držely stávajícího kurikula v podobě tématických týdnů, jež zpestřují standardní výuku. Od radikálních Kilpatrickových postojů, tedy od projektové metody jako jediného způsobu výuky se z velké části upustilo.[65]

V současnosti je projektová metoda v řadě škol stále oblíbená, ovšem ve své umírněnější formě. Bývá používána v rámci celoškolních, lokálních, či mezinárodních projektů, častěji se využívá v přírodovědeckých a technických předmětech, případně ve výuce cizích jazyků. Ústředním motivem je dobrovolnost žáků, kteří si volí činnosti v závislosti na svých zájmech. Projekty se obyčejně realizují ve skupinové práci nebo v podobě soutěže (školní olympiády).

Projektové vyučování má silný prosociální charakter, vnáší do rutinního kurikula novou dynamiku a může pomoci zapojit ty, kdo se obyčejně neangažují. Realizace projektu tedy není jediným přínosem této metody, spíše je třeba hodnotit jako hlavní přínos katalýzu sociálních interakcí, zejména pozitivních sociálních vazeb, které díky společnému dílu vznikají.

---

[63] „hearty purposeful act“
[64] KNOLL, 1997, s. 5.
[65] KNOLL, 1997, s. 9.

1.3.3. Problémové vyučování

Teorie tzv. problémového vyučování patří k oblíbeným tématům řady autorů. Již Dewey považoval problém za důležitou součást procesu myšlení. Konkrétnější pojetí nabídli v šedesátých letech Rubinštejn, Kupisiewicz, Okoń a další.[66] Problémem se myslí to, co podněcuje žáky k hledání otázek a odpovědí, ke zkoumání, často v podobě nějaké obtíže, nerovnováhy, napětí, konfliktu. „Je to otázka, na kterou hledáme odpověď, popř. cíl, k jehož splnění musíme nejprve najít cestu."[67]

Klíčovým konceptem je problémová situace, do níž mají být žáci uvedeni tak, aby se v nich vyvolaly myšlenkové procesy. Problémová situace má v jádru určitý problém, z něhož pramení tvorba pracovních úkolů, jež by podle řady autorů měla být autonomní, přirozená a nedirektivní. Předmětová složka problému obsahuje výukovou látku, téma, které má být zpracováno a motivační složka se věnuje animaci edukativních dějů. Situace má být vytvořena tak, aby pociťované obtíže žáky konfrontovaly, ale nesnižovaly jejich sebevědomí pocity bezradnosti.

Úlohou učitelů je příprava problémových úkolů a otázek, které mají nasměrovat žáky k samostatnému zkoumání. Těžištěm úkolů je daná neznámá, jež musí být učiteli připravena tak, aby ji konkrétní skupina žáků považovala za didaktický problém a zároveň byla dostatečně motivovaná k jeho řešení. Žáci jsou vedeni k řešení úloh nejprve identifikací problému a jeho analýzou, stanovením hypotézy a jejím ověřováním, zkrátka zvolením strategie vedoucí k odpovědím. Některá pojetí počítají i s neúspěchem bádání a zařazují revizi hypotéz. V závislosti na typu problémových úloh se definují didaktické parametry hodiny.[68]

---

[66] „J. Dewey ztotožňuje ve své práci problém s myšlením (Růžičková, 1997, s. 50). S. L. Rubinštejn (1960, s. 11) vnímá problém jako to, co „obsahuje vždy něco, co je v něm implicitně obsaženo, ale není explicitně vyjádřeno". C. Kupisiewicz chápe problém jako (1962, s. 16) „obtížnost teoretické nebo praktické povahy, která vyvolává zkoumavý postoj subjektu a vede k obohacení jeho vědomostí". W. Okoń (1966, s. 77) uvádí, že „Didaktický problém je praktická nebo teoretická obtíž, kterou žák samostatně řeší svým vlastním aktivním zkoumáním.", J. Linhart (1967, s. 244) definuje problém jakožto „konflikt mezi počátečními daty a požadovanými výsledky", F. Mošna a Z. Rádl (1996, s. 11) poukazují na psychologické hledisko problému, který „vnímáme tehdy, jestliže si uvědomíme určitou nerovnováhu mezi sebou a prostředím a tuto nerovnováhu nemůžeme překonat pomocí jednání a reakcí vyplývajících z našich dosavadních zkušeností." In PRIŠČÁKOVÁ, 2019, s. 8n.

[67] Dále: „Didaktický problém je praktická nebo teoretická obtíž, kterou žák samostatně nebo společně s ostatními (ve skupině, ve třídě) řeší svým vlastním aktivním zkoumáním." KOLÁŘ a kol., 2012, s. 107.

[68] Okoń (1966) rozlišuje: Problémové a neproblémové úlohy, které dále dělí na slovní a číselné, slovní dělí na praktické a abstraktní, oboje dále dělí na otevřené a uzavřené, jednoduché a složité.

1.3.4. Scaffolding

Jerome Bruner,[69] americký psycholog a vysokoškolský pedagog židovského původu, se intenzivně zabýval studiem a výzkumem vývoje dětí. Jeho teorie spolu s poznatky a postoji Lva Vygotského, na kterého Bruner navázal, jsou považovány za protiváhu teoriím školy Jeana Piageta. Jsou zařazovány mezi konstruktivistické teorie, které zastávají aktivní pedagogický přístup k žákům, zájem o integrální rozvoj dětí prostřednictvím úpravy tzv. zóny nejbližšího vývoje. V učení podle nich má zásadní důležitost sociokulturní prostředí.

Scaffolding, což obrazně řečeno znamená „stavění lešení“, spočívá ve vazbě dítěte a dospělého, který má být otevřený, přívětivý a ochotný pomáhat. Předobraz vidí Bruner v ideální vazbě matky a malého dítěte, které ještě neumí mluvit, ale matka dělá vše proto, aby se to dítě naučilo. V láskyplném vztahu, ve kterém je podporováno ve svých snahách, pak dítě prosperuje. Významným pedagogickým nástrojem je oceňování, chválení a povzbuzování, což je dítětem vyhledáváno. Žáci se totiž nesnaží jen proto, aby splnili edukativní problém, úlohu či cvičení, ale též aby měli sociální interakci.

Ze strany pedagogů je nutné předcházet negativním emocím, nezájmu, úzkostem, smutku, nudě, protože silně brání edukativním procesům. Po zadání instrukcí se doporučuje vést s žáky konstruktivní dialog, v němž pedagog na prvním místě jeví zájem o osobu žáka a teprve pak s ním společně řeší překážky na cestě k řešení a úspěchu. Mezi základní nástroje scaffoldingu patří[70]:

- získávání zájmu
- určité omezení svobody (ve smyslu libovůle)
- udržování zacílení (soustředěnosti)
- vysvětlování hlavních bodů úkolu
- kontrola frustrace
- představování ideálních způsobů řešení.

[69] Narodil se 1. října 1915, zemřel 5. června 2016.
[70] Srov. Essays, UK. 2018. Bruner and Scaffolding Lecture. Dostupné z: https://www.ukessays.com/lectures/education/approaches/constructivism-3/?vref=1 [Citováno 22.3.2021].

Z psychologického hlediska dochází během scaffoldingu k procesu, který Vygotskij nazývá „dobré učení“. Tento proces se odehrává v zóně nejbližšího vývoje: „Tak nám poznání zóny nejbližšího vývoje umožňuje vyhlásit nový poznatek, že jediné 'dobré učení' je to, které je napřed vývoji.“[71] Během „dobrého učení“ dochází k propůjčování určitých mentálních kvalit, schopností a dovedností, po nichž učící se šplhá jako po lešení,[72] zkouší si je a napodobuje, aniž by si to uvědomoval. Jinými slovy je to varianta napodobování propojená s nezávislým bádáním, zkoumáním a zkoušením, při čemž hrají primární roli sociální interakce.

Vygotského teorie však má i odvrácenou minci. Pokud je zóna nejbližšího vývoje, tedy blízké edukativní prostředí se všemi jeho aktéry a interakcemi nějakým způsobem narušeno, „dobré učení“ se stává špatným, narušeným učením. Této temné stránky si všímá Bruner v širokých až metafyzických konotacích: „Když a jestli překonáme tiché zoufalství ve kterém nyní žijeme, když pocítíme, že jsme opět získali kontrolu nad závodem ke zkáze, roste naděje, že se narodí nový druh vývojové teorie. Bude to motivováno otázkou, jak vytvořit novou generaci, která by dokázala zabránit světu, aby se rozložil v chaosu a došel k sebezničení. Domnívám se, že ústřední technickou záležitostí bude, jak mladé naučit oceňovat fakt, že mnoho světů je možných, že smysl a skutečnost jsou stvořené a ne objevené, že vyjednávání je umění tvorby nových pohledů na svět, skrze něž jedinci mohou regulovat své vzájemné vztahy.“[73]

Scaffolding by v ideálním případě měl být společnou snahou o konstrukci harmonického prostředí, tj. obohacujícího sociokulturního klimatu, v němž mají aktéři vyrovnané a pozitivně laděné vztahy a ve kterém se žáci dobře učí.

[71] VYGOTSKIJ, 1978, s. 89.
[72] Jak to nazval Bruner.
[73] BRUNER, 1986, s. 149.

1.3.5. Freinetovská pedagogika

Célestin Freinet[74] se narodil jako páté z osmi dětí do rolnické rodiny. Tvrdá zemědělská práce, starost o zvířata a pilné studium v dětství a mládí se mu staly životním tématem i pro jeho učitelskou kariéru. Prosazoval tzv. přirozenou metodu učení, ve které didaktika musí vycházet z reálné životní situace, na základě níž se připravují nástroje a stanovují způsoby práce. „Je to materialistická pedagogika, v níž použití pracovních nástrojů a technik umožňuje dětem a adolescentům, aby se dobírali individuální a kolektivní autonomie a aby získávali potřebné poznatky.“[75]

Freinetovská pedagogika, která je svým charakterem bytostně kooperativní, se opírá o čtyři základní myšlenky:

- právo na sebevyjádření a na komunikaci,
- kritická analýza reality,
- převzetí zodpovědnosti za sebe sama,
- převzetí zodpovědnosti za skupinu.[76]

Těžiště pedagogické práce je v péči o skupinu, která má v duchu partnerství a vzájemné pomoci spolupracovat na plnění úkolů. Činnosti se řídí v závislosti na projektech, které se v rámci vyučování realizují. Od žáků se čeká aktivita, flexibilita, sociální adaptabilita, týmový duch a intenzivní práce na společném díle.[77] Hodnocení vzdělávacích výsledků se uskutečňuje při dokončení projektů v němž mají hlavní slovo žáci. Školní hodnocení se obyčejně vystavuje na základě portfolia.

Kooperativní učení vyžaduje menší pracovní skupiny, na plánování činností se aktivně žáci podílí. Učitelé se na prvním místě musí soustředit na sociální dovednosti členů skupiny, aby spolupráce byla efektivní, pak se stát tím, kdo usnadňuje činnosti a pomáhá v řešení problémů.

[74] Narozen 15. 10. 1896, zemřel 8. 10. 1966.
[75] BERTRAND, 1998, s. 141.
[76] Tamtéž.
[77] „Základem jeho pedagogiky byla aktivnost, svobodný rozvoj dítěte a práce jako důležitý princip vzdělávání. Tomu odpovídal i vzhled třídy, která byla zařízena jako dílna sestávající z jednotlivých ateliérů. V ní děti samostatně i individuálně pracovaly na úkolech.“ ČAPEK, 2015, s. 200.

1.3.6. Teorie matematizace

Z hlediska vyučování matematiky je užitečné alespoň zmínit problematiku matematizace, která stojí na pomezí filozofie, matematiky a pedagogiky. Proces matematizace spočívá v tom, že naše poznání reality analyzujeme, poznatky třídíme a zpracováváme je určitým matematickým způsobem tak, abychom s nimi mohli užitečně zacházet.

Filozof Jan Patočka ji charakterizuje takto:„Praxe, aplikace matematiky, šťastná směsice metody a instinktu, tak dovolují objevit první matematické formulace přesně řízeného kauzálního dění. A toto praxe vede rovněž k prohlubování a rozšiřování matematických metod samých: měřičské umění je totiž zároveň uměním stále a donekonečna zdokonalovat svou vlastní metodu. Matematizace tak nabývá smyslu metodické objektivace názorně daného světa, objektivací, která stále postupuje, která však přes veškerý pokrok a ověřování zůstává stále hypotetickou.“[78] Matematizace je tedy snaha o objektivní chápání reality, o němž se Patočka domnívá, že je stejně hypotetické jako chápání jiné, např. filozofické.

Současným trendem v pedagogice je jiné chápání matematizace. Autorky Metodických doporučení k rozvoji matematické gramotnosti v základním vzdělávání popisují matematizaci takto: „Je to schopnost žáků efektivně analyzovat, uvažovat a sdělovat myšlenky, když v různých situacích přistupují k matematickým problémům, formulují je, řeší a interpretují svá řešení. Tato řešení problémů vyžadují, aby žáci používali znalosti a dovednosti, které získali jak ve škole, tak i na základě svých životních zkušeností.“[79] Tato definice postrádá hned několik důležitých parametrů, což by si žádalo obsáhlejší diskusi. Alespoň podotkněme, že matematika se nezabývá pouze problémy, ale též hledá své vlastní místo ve světě, mění své metody a způsoby, učí se a mění, je živá.[80] Mohli bychom tuto „metodickou“ matematizaci nazvat používáním matematických konceptů.

---

[78] PATOČKA, 2006, s. 172.

[79] ZELENDOVÁ, NEMČÍKOVÁ, 2012, Metodická doporučení k rozvoji matematické gramotnosti v základním vzdělávání. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/15099/priloha___metodicka_doporuceni_k_rozvoji_matematicke_gramotnosti_v_zakladnim_vzdelavani.pdf [Citováno 22.3.2021].

[80] V matematice přeci nejde o to vidět svět skrze problémy. Matematika se zabývá pravdou, krásou, smyslem, poznáním, ale též se nebere pořád tak vážně. O tom svědčí i humorný Einsteinův citát: „Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak se zbláznit.“
Zdroj: https://citaty.net/citaty/275816-albert-einstein-matematika-je-jediny-skutecne-zaruceny-zpusob-jak/.

Dle autorů Matematického koncepčního rámce pro výzkum PISA 2012[81] je matematizace základní matematickou dovedností: „Matematizace: Matematická gramotnost může zahrnovat převedení problému z reálného světa do jeho čistě matematické podoby (což představuje např. strukturování, konceptualizaci, vyslovování hypotéz nebo vytvoření matematického modelu), dále interpretaci či vyhodnocení matematického výsledku nebo matematického modelu v kontextu původního problému. Pojem „matematizace" odkazuje na ty základní matematické úkony, které jsou k tomu potřeba."[82]

V rámci matematizace se mají odehrávat tyto činnosti:

- Určení matematických proměnných a struktur v problémové situaci z běžného života a vyslovení předpokladů, které lze použít.
- Využití porozumění kontextu jako vodítka či usnadnění matematického řešitelského procesu, např. práce na takové úrovni přesnosti, která je daná kontextem.
- Pochopení platnosti a omezení matematického řešení, oboje souvisí se zvoleným matematickým modelem.[83]

Matematizace je Matematickou expertní skupinou pro PISA 2012 chápána jako jedna základní matematická dovednost z mnoha, které jsou třeba k získání matematické gramotnosti. Je otázkou, jaký vztah má tato poměrně složitě formulovaná teorie[84] k praxi. Autorky výše zmíněného metodického doporučení prosazují používání kritického myšlení: „Kritické myšlení je, v nejobecnějším slova smyslu, pečlivé a uvážlivé rozhodování o tom, zda nějaké tvrzení s určitým stupněm jistoty přijmeme, odmítneme nebo se zřekneme úsudku. Kritické myšlení předpokládá porozumění informaci, uchopení myšlenky a její důsledné prozkoumání, její porovnání s jinými názory a s tím, co už o problému víme, a výsledné zaujetí stanoviska a zodpovědnosti za ně."[85]

Ačkoliv není matematizace pedagogickou metodou, je spíše konceptem matematické filozofie, je klíčovým principem v didaktice matematiky.

[81] Matematická expertní skupina (MEG), která materiál připravila, je tvořena údajně více než 170 odborníky-matematiky z více než 40 zemí.
[82] PISA 2012, s. 9.
[83] Viz tamtéž, s. 11.
[84] Srov.Příloha 1.
[85] ZELENDOVÁ, NEMČÍKOVÁ, 2012, s.6.

1.3.7. Shrnutí pedagogických teorií směrem k didaktice experimentu

Dynamika pedagogických postupů v rámci bádání obyčejně začíná evokací, vyvoláním zájmu. „Proces bádání se vyvíjí jako souhra známého a neznámého v situacích, kdy se jednotlivec nebo skupina jednotlivců potýkají s nějakou výzvou. Je potřeba, aby situace obsahovala neznámé vnímané jako podnětné nebo zajímavé; přičemž bádání je možné, pouze pokud k této neznámé části můžeme přistupovat prostřednictvím věcí již známých, protože pouze fakta a souvislosti mohou vést k domněnkám a úsudkům.“[86]

Evokace, tedy začátek bádání, má být v projektovém vyučování podle Kilpatricka co nejvíce spontánní, zatímco podle jiných teorií je vhodné alespoň navodit situaci tak, aby se žáci začali o něco zajímat. Freinetovská pedagogika se v rámci projektů soustředí na katalyzování autonomních činností žáků, animuje činnosti pracovních týmů, aby se navodila kooperativní a činorodá atmosféra. Scaffolding počítá se samostatnou, více či méně nezávislou činností žáků, ale dává pevnější hranice a jasně definuje roli pedagogů, kteří mají usilovat o co nejvíce komfortní zónu nejbližšího vývoje, tedy vytvořit ideální podmínky pro co nejlepší učení.

Ve všech uvedených teoriích se zdůrazňuje úloha kooperace. Je však otázkou, zda je vždy přínosná. „Všichni nejsou přesvědčeni, že kooperativní učení je efektivní ve všech oblastech výuky a u všech typů učení. Zdá se, že vše probíhá dobře u elementárních typů učení, avšak názory na efektivitu kooperativního učení se různí, jde-li o obtížné úkoly.“[87]

Klíčovým prvkem je rovněž dialog, během něhož je možné rozvíjet a formovat sociální interakce. Diskuse by měla být zařazována nejen v začátcích, ale též průběžně, kdykoliv to situace žádá a měla by být přítomna v závěrečném hodnocení, v němž by žáci měli hodnotit sami své výsledky a závěry.

Pragmatická pedagogika zařazuje do svých postupů demonstraci, jakožto ústřední prostředek přesvědčování se pravdě. Demonstrace může být na začátku bádání, kdy jsou vědeckým způsobem předloženy platné skutečnosti tak, aby o tom byli žáci dostatečně

[86] SAMKOVÁ a kol. 2015, s. 101.
[87] BERTRAND, 1998, s. 151.

přesvědčeni. S evidencí se dále pracuje, rozvíjí se poznávání a hledají se další cíle a cesty. Doporučuje se provádět demonstraci v závěru badatelské aktivity, například formou žákovských prezentací, kdy se zveřejňují před spolužáky výsledky bádání jednotlivých skupin.

Pragmatická pedagogika Johna Deweyho stojí se svými koncepty v počátcích ostatních teorií, které z ní čerpají nebo se vůči ní vymezují. Instrumentální obohacování, získávání zkušeností prostřednictvím experimentů, samostatnost a týmovou spolupráci přejímá většina z nich bez výhrad. Projektové vyučování Kilpatrickovy linie akcentuje svobodné rozhodování žáků, scaffolding klade důraz na péči o co nejlepší edukativní faktory, Freinetova škola apeluje na žákovskou i skupinovou zodpovědnost a solidaritu.

Z hlediska uplatnitelnosti těchto teorií ve výuce matematiky ve standardní státní škole, jež se musí řídit standardním kurikulem dle rámcového vzdělávacího programu, se zdá, že řada konceptů je v dané realitě nepoužitelných. Například plná autonomie žáků během badatelských činností, kdy by si žáci sami určovali to, co chtějí zkoumat, se v nabitém vzdělávacím programu dá obtížně realizovat. Na druhou stranu, vzhledem ke komplikovanosti matematizace, která je programově vyžadována, se zdá být badatelsky orientované vyučování v duchu uvedených pedagogických konceptů jako přínosný a efektivní způsob.

Složité abstraktní činnosti matematizace, jako je strukturování, konceptualizace, vyslovování hypotéz, modelování, interpretace či vyhodnocení,[88] jež se od žáků očekávají, lze elegantně provádět formou experimentu, během něhož si žáci sami vytvářejí instrumenty (vědecké postupy), ověřují si své domněnky v praxi a zažívají radost z toho, co objeví. „Poznatky jsou získávány konstruktivistickým způsobem, tedy při správné realizaci nebudou žákem zapomenuty, jsou pro něho zábavnou, zajímavou a užitečnou činností.“[89] Přidanou hodnotou jsou navíc sociální interakce, které přinášejí mnohdy větší zkušenosti pro život, než výsledky matematických úloh.

[88] Z hlediska vyučování je matematizace univerzálním procesem, použitelným na aritmetické či geometrické struktury. Jejich teoretická složitost je ilustrována například materiály PISA, srov. Příloha 1.
[89] ČAPEK, 2015, s. 197.

1.4. Žákovský experiment jako samostatná metoda ve vyučování geometrie

Ve světle uvedených pedagogických teorií předpokládáme, že žákovský experiment je vhodný i pro výuku geometrie. Geometrická matematizace je nepředstavitelná bez vizuální percepce, bez názornosti, bez zkušeností plynoucích z rýsování. Formou experimentu lze docílit efektivního učení, pochopení geometrických struktur a objektů, zvláště když je bádání vhodně zařazeno mezi ostatní formy vyučování. Dostál hodnotí experimentování ve výuce takto: „Zařazení experimentu do výuky umožňuje žákům seznámit se se základními praktickými postupy a metodami práce v příslušné oblasti lidského konání a slouží jako prostředek k získávání nebo ověřování teoretických znalostí žáka, případně rekonstrukci již osvojených znalostí (zdroj poznatků). Díky tomu, že je zkušenost získávána přímo, umožňuje trvalé a důkladné osvojení objevených poznatků. Experimenty jsou vhodným nástrojem pro naplňování didaktické zásady spojení teorie a praxe. Při aplikaci do výuky jsou do jisté míry odrazem metod vědeckého výzkumu. Při poznávání určité skutečnosti žáci získávají informaci nejen o ní samotné, ale také o zvolené metodě studia a o experimentálním zařízení.“[90]

Rozlišování teorie a praxe v geometrii je poměrně diskutabilní, protože sama geometrie je vizuální a matematickou objektivací skutečnosti a její realizace i v nejpraktičtějších podobách je stále teorií, tedy nápodobou toho, co se má podle rysů vytvořit. Na druhou stranu se může geometrie jevit až příliš abstraktní, odtržená od života, zvláště ve scholastickém pojetí. Experiment může tuto hranici pomoci posunout, či ji překročit tak, že si žáci spojí to, co se učí, s životní realitou,[91] ať už to je simulací architektonických rysů, technických nákresů, virtuálních počítačových modelů apod. Stejně tak může být lákavý experiment inspirovaný dějinami, např. aproximace čísla π pomocí kružnici vepsaných a opsaných pravidelných mnohoúhelníků,[92] což je čistě teoretický problém.

[90] DOSTÁL, 2013, s.11.

[91] „Jeho [experimentu] největší pozitivum je spojení teoretických vědomostí s praktickým použitím.“ ČAPEK, 2015, s. 197.

[92] Tzv. Archimédova metoda, kterou s velkou vášní aplikoval Ludolph van Ceulen.

1.4.1. Didaktika žákovského experimentování

Podle Dostála by žákovský experiment měl mít šest atributů:

- neměl by vyžadovat speciální zařízení
- musí být bezpečný
- jednoduchý na přípravu
- časově nenáročný
- didakticky odůvodněný
- s jednoznačným výsledkem.[93]

Dále definuje obecné zásady didaktiky experimentu: experiment nesmí být realizován, pokud nebyl předtím vyzkoušen; musí souviset s obsahem vzdělávání; při demonstraci experimentu učitel eliminuje činitele rušící pozornost; při realizaci experimentu nesmí učitel ohrozit sebe ani žáky; musí být udržován pořádek; začínáme realizací jednodušších experimentů a pokračujeme k experimentům složitějším; pokus musí být přiměřený znalostem a experimentálním dovednostem žáků; experiment musí být didakticky zdůvodněn; experiment musí odpovídat materiálnímu vybavení školy; učitel musí umět experiment realizovat a vedle toho navíc didakticky podat.[94]

Samotný experiment by měl být strukturován do několika fází: příprava, realizace a vyhodnocení.[95] Pokud se jedná o vícerázovou aktivitu, lze samozřejmně fázi realizace rozložit do jednotlivých lekcí. V rámci přípravy rozlišujeme přípravu pedagogickou (přípravu edukativních materiálů, pracovních listů, nastavování techniky, přípravu na hodinu atp.) a přípravu žákovskou, např. chystání pomůcek před badatelskými činnostmi. Vyhodnocení může být formou závěrečné diskuse, individuálním hodnocením, dají se hodnotit naplnění cílů experimentu či pracovní nasazení žáků atd. Výsledky experimentu by měly být zdokumentovány, případně se může zhotovit závěrečná zpráva o průběhu.

---

[93] Srov. DOSTÁL, 2014, s 12.

[94] Srov. tamtéž.

[95] „K tomu, aby školní experiment plnil svou funkci, by měla jeho realizace probíhat ve třech fázích (Solárová, 2007): přípravné, realizační a hodnoticí.“ Tamtéž, s. 13.

Didaktické funkce experimentu

Žákovské bádání formou experimentu nabízí množství přínosů díky svým didaktickým funkcím. Na prvním místě je to heuristická funkce, tedy objevitelská. Zvídaví žáci se rádi dozvídají nové informace, žasnou a vítají překvapení z nových objevů. Toho lze docílit vhodnou demonstrací, či jen účinnou evokací v úvodu lekce.

Verifikační funkce je výsledkem základních vědeckých postupů spočívajícím v dokazování, v ověřování hypotéz. Verifikací se potvrdí dříve předávané znalosti, pokud se naplní teoretické předpoklady. Výsledek verifikace však může být i negativní, kdy se předpoklady nepotvrdí, ba úplně vyvrátí. Proto platí zásada, že experiment musí být vyzkoušený, než se stane součástí vyučování, aby nenastala nečekaná situace plná rozpaků.

Motivující funkce pracuje s emoční dynamikou experimentu. Žáci se mohou na bádání těšit i mohou díky experimentu získat motivaci k dalšímu studiu. Inspirace experimentem může zanechat hluboké stopy vedoucí k volbě budoucího povolání, proto je tato funkce z hlediska pedagogiky velice důležitá.

Ilustrační funkce ukazuje nějaký jev, zaměřuje se na problém, který má být žákům představen. Ilustrací se vedou k hlubšímu pochopení pomocí názornosti. Cílem je iniciace přemýšlení o fenoménech, které nás obklopují.

Aplikační funkce vede žáky k větší uplatnitelnosti teoretických poznatků. Pomocí experimentu se např. zhotovuje funkční model, který pak slouží jako předloha skutečnému výrobku.

Historická funkce žákům rozšiřuje všeobecný přehled, inspiruje je skutečnými historickými událostmi, vynálezy, pokusy a vede je k vnímání vědeckých milníků lidských dějin.

Opakující a prohlubující funkce má za cíl upevnění učiva, rozšíření znalostí, schopností a dovedností. Opakovanými experimenty též roste zručnost, efektivita práce, stálost výsledků.

Kontrolní funkce spočívá ve vědecké zkoušce, zda experiment proběhl, jak měl.[96]

[96] Typy funkcí dle SVOBODA, Emanuel. Didaktika Fyziky, Didaktické funkce experimentů. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/didaktika/DF_POKUSY.pdf, [Citováno 29.3.2021].

1.4.2. Stanovení edukativních cílů experimentu

Očekáváme, že experimentem získají žáci zkušenosti, na jejichž základě se zlepší percepce i kognice geometrických struktur, jejich chápání a zacházení s nimi. Edukativní cíle žákovského experimentu by měly vycházet z probíraného učiva, jejich volba se řídí školním vzdělávací programem a ročním tématickým (učebním) plánem. Na druhou stranu se dá jít i cestou samostatného školního projektu, nebo realizovat experimenty v rámci neformálního vyučování. Jednorázové experimenty lze realizovat pro zpestření standardní výuky, nicméně experimenty v rámci organizovaných projektů, ať už školních či mimoškolních, jsou zpravidla efektivnější formou.

V rámci volby edukativních cílů též volíme formu experimentu. Dostál je člení takto:

1) Podle způsobu osvojování poznání žákem: demonstrační a badatelský, který lze dále členit na individuální, skupinový a frontální.
2) Podle fáze výuky: motivační, expoziční, fixační a verifikační.
3) Podle oboru (předmětu): technický, společenskovědní a přírodovědný, který lze dále členit na fyzikální, chemický, biologický, geologický a geografický.
4) Podle funkce poznávacího procesu: zjišťující (objevný), dokládající (ověřující), vysvětlující a potvrzující.
5) Podle osoby experimentátora: realizovaný žákem a realizovaný učitelem.
6) Podle prostředí a podmínek, za kterých probíhá: laboratorní a přirozený.
7) Podle podstaty realizace: myšlenkový, fyzický, virtuální a vzdálený.
8) Podle druhu vzdělávání: školní a zájmový, který lze dále členit na realizovaný v zájmovém kroužku a realizovaný doma.
9) Podle řízení realizace experimentů: podle postupu v učebnici či metodickém listu, podle instrukcí učitele a podle vlastních myšlenkových postupů žáka.[97]

Z hlediska experimentování ve výuce geometrie se některé uvedené typy experimentů prolínají, jiné jsou nevhodné. Níže uvádíme vlastní přehled typů:

[97] Viz DOSTÁL, 2013, s.13.

Afirmativní (verifikační) experiment

Ve školních podmínkách[98] se zdá být nejlepší forma woodwardovského projektu, tedy experimentování na základě již naučených a osvojených schopností a dovedností. Experiment je v tom případě afirmací již probrané výukové látky, přičemž lze očekávat upevnění znalostí a prohloubení jejího chápání. V afirmativním experimentu je naplňována především verifikační, případně kontrolní didaktická funkce. Příkladem může být probírání Pythagorovy věty během předchozích lekcí, což se pak odrazí v experimentu, v němž je toto učivo třeba k řešení úlohy. Očekávatelným výsledkem je hlubší pochopení smyslu a významu probraného učiva.

Demonstrativní (demonstrační) experiment

Projekt můžeme začít ve formě demonstrace. Demonstrativní (či demonstrační) experiment je svou strukturou otevřenější, měl by v něm být větší prostor na diskusi a hodnocení. Cílem demonstrativního experimentu je především získání zájmu, motivace k objevování a učení. Učitel je zpočátku iniciátorem experimentu, demonstruje určitý jev, představí problém, který žáky zaujme. V další fázi mohou žáci experiment napodobit, aby si jej vlastnoručně vyzkoušeli. To je vhodné zejména u složitějších konstrukcí.

Heuristický (objevitelský) experiment

Objevitelské nadšení může vést k významné motivaci k učení. S využitím dynamiky zvídavosti, kdy žáci prahnou po tom, aby „něčemu přišli na kloub“, aby objevili něco nového a zajímavého, je možné dosáhnout velkých edukativních výsledků. Ideální jsou úlohy s vícero řešeními, kreativní úlohy, či příklady s kombinacemi, jako jsou některé herní úlohy (např. s kostkami).

Modelový experiment

Modelem zde myslíme rys, který má být použit k výrobě, výtvoru. Ideálním prostředkem k modelování je 3D tisk, v němž je nejprve nutné vytvořit prostorový nárys. Během tisku si pak žáci ověří, jak rýsovali a zažívají radost z toho, když se jim výrobek povede.

---

[98] Míníme v podmínkách standardní české školy.

Historický experiment

Matematika je za tisíciletí svého vývoje bohatá na historické úlohy, jež jsou plné zajímavostí. Historický experiment, jinými slovy dějepisně poznávací a naučný, je vynikající příležitostí pro uplatnění mezipředmětových vztahů, ale též pro pochopení kořenů toho, proč se něco učíme, tak jak se to učíme. To nás vede zpětně k větší úctě k předkům, kteří pro nás vydobyli nějaké vědění. Žasnout tak mohou žáci např. nad strojem z Antikythéry, nad jehož důmyslností žasnou generace vědců. Po výkladu o antickém mechanismu s ozubenými koly, pak mohou žáci experimentovat a narýsovat v dynamickém prostředí vlastní pohyblivý mechanismus. Naučí se tím chápat jednoduchou mechaniku, získají historické znalosti a přitom se věnují matematice a geometrii.

Projektový (organizovaný) experiment

Projektová výuka nabízí pro badatelsky orientované vyučování široké pole působnosti. Projektový experiment se od ostatních neliší ani tolik didaktikou, jako organizací. V projektu, který je nesen určitým tématem, může být bádání rozvrhnuto do několika experimentů, které na sebe navazují. Typicky jsou to projekty s ekologickou tématikou, přírodovědné, projekty s cestováním apod. V geometrii jsou typické architektonické projekty, v nichž se rýsování uplatňuje hned v několika disciplínách. Ve školách jsou také běžné různé olympiády, které je možno rovněž realizovat formou projektu.

Umělecký experiment

Jak známo, geometrie a vizuální umění má k sobě velmi blízko. Připomeňme např. slavné obrazy Albrechta Dürera. Geometrie se jasně uplatňuje ve vyučování perspektivy, v konceptu zlatého řezu, v malířství, sochařství i v architektuře. Umělecký experiment snoubí více didaktických funkcí, využívá přínosů mezipředmětových vztahů, přitom prohlubuje zájem o matematiku a geometrii. Očekávatelným výsledkem může být nejen umělecké dílo žáků, ale též objevení talentů.

1.4.3. Realizace experimentu v rámci vyučování

V závislosti na tom, jaký typ experimentu a v jaké edukativní situaci se chce realizovat, se volí didaktické prostředky. Jak bylo uvedeno výše, realizace se odehrává ve třech hlavních fázích: příprava, realizace vlastního experimentu, vyhodnocení.

Příprava experimentu

V přípravě je vhodné se nejprve rozhodnout nad těmito otázkami: Jaký je cíl experimentu? Kdo bude experimentovat? Co je k experimentování potřeba? Jaký je očekávatelný výsledek? Pak je možné přikročit k plánování a organizaci.

Cíle experimentu jsou na prvním místě edukativní, didaktické, stejně tak hrají roli sociální faktory. Experiment může nejen katalyzovat sociální interakce v edukativní skupině, ale též může být vhodným prvkem k prezentaci, což přinese potenciální širší pozornost.

Aktéři experimentu by měli být k tomu způsobilí, aby byla dodržena zásada bezpečnosti. V badatelsky orientovaném vyučování se klade důraz na co největší autonomii žáků, role učitelů je klíčová především v přípravě. Od pedagogů se očekává evokace, iniciace, případně demonstrace a následně role průvodcovská a pomocná. Je otázkou jaká míra autonomie žáků je vhodná, zda jsou např. schopni stanovení vlastních cílů a postupů, zda je možné, aby se geometrii učili za určitých podmínek zcela sami, tj. s minimálními zásahy pedagoga.

Materiální a technické zázemí je v experimentování důležitým faktorem. V rámci přípravy je vhodné experiment realizovat v pilotním režimu, aby se nestalo, že náročně připravovaný experiment neproběhne kvůli technickým potížím. Doporučeníhodné je mít záložní plán pro případ, že potíže nastanou. V neposlední řadě se musí myslet na zásady bezpečnosti práce, kdy by učitelé neměli spoléhat jen na formální poučení, ale s veškerou vážností myslet na zdraví a bezpečí žáků, v každém případě je chránit.

Očekávatelné výsledky mohou být konkrétní, nebo otevřené s tím, že by měly být v definované oblasti řešení. Výsledky by pak měly být zaznamenány v prezentovatelné podobě.

Realizace experimentu

Experiment obyčejně začíná podobně jako ostatní lekce. Po uvítání se oznámí téma a cíl, žáci se poučí o tom, jak by měli bezpečně pracovat a přikročí se k iniciační fázi. V ní se představí předmět experimentu, způsoby práce, motivuje se a získává zájem o problém. Jakmile se žáci seznámí s tím, co mají dělat, ať je to formou výkladu, demonstrace nebo diskuse, přikročí k vlastní realizaci, která začíná přípravou pomůcek a seznámením se s pracovními materiály.

Badatelské činnosti by se měly ideálně odehrávat samostatně, bez významných zásahů učitelů a mohou se vykonávat individuálně, nebo v týmech. Při volbě týmové práce je nutné v iniciační fázi pokud možno předejít sociálním problémům tím, že se vytvoří pracovní skupiny spravedlivým způsobem (volbou, losem, rozhodnutím). Pokud nastanou významné sociální problémy, je lepší experiment přerušit a vyřešit příčinu napětí. Sociální aspekt, jak podtrhuje freinetovská škola, je v daný moment významnější než realizace vytyčených edukativních cílů. Nelze-li jinak, musí být narušitelé z pracovní skupiny vyloučeni, přeřazeni, v krajním případě se pro vážné sociální problémy musí experiment skončit. Můžeme využít rad pedagogiky scaffoldingu a významně chválit každý badatelský počin jednotlivců i týmů, zejména u mladších žáků, čímž se mimojiné zlepšuje psychosociální klima.

Při experimentování by měl být sledován postup, zda se daří naplňovat jednotlivé naplánované kroky, zda postupují práce v čase. Žádají-li badatelé pomoc, měli by být nejprve bez prozrazení řešení osloveni v rámci dialogu, aby se sami snažili co nejvíce najít vlastní řešení. Dojde-li experiment do stanovených cílů, či se naplní čas, mělo by nastat hodnocení.

Vyhodnocení experimentu

Hodnocení se může odehrávat na několika úrovních. Jednak je vhodné, aby žáci sami hodnotili k čemu došli, co se naučili, co objevili.[99] Hodnocení experimentu se provádí v přímé návaznosti, či hned při dalším setkání. Myslitelných je hned několik forem. Oblíbenou formou je diskuse v kolokviu, v níž žáci prezentují své výsledky a sami hodnotí nejen svou práci, ale i spolužáků. Moderátor dohlíží na to, aby byla diskuse věcná a pokud možno v pozitivní, konstruktivní atmosféře. Diskuse by se měla ideálně vést v doprovodu vizualizace rysů, ať promítáním, náhledem na tisky nebo přímo v systému na počítačích. Je praktické vidět to, o čem se mluví.

Za druhé je zvykem, že se ve škole provede záznam o průběhu experimentu, ať to je formou samostatné zprávy, nebo zápisem do třídní knihy. V případě, že je projekt financován z některého grantu, je nutné sepsat podrobnou zprávu podle požadavků zadavatele. Bádání může být rovněž popsáno formou slohu, např. v podobě záznamu do portfolia. Je-li experiment součástí většího projektu, vede se zpravidla fotodokumentace a záznamy jsou řazeny do rozsáhlé závěrečné zprávy, což je standardem při grantových projektech.

Je-li experiment součástí standardní výuky podle školního vzdělávacího plánu, mohou být výstupy klasifikovány. V tom případě by měli být žáci předem informováni v úvodní části, jaká jsou klasifikační kritéria.[100] Kvantitativní hodnocení nicméně nebývá zvykem. Badatelsky orientované vyučování se obyčejně bere za zpestření, zážitek či zajímavé doplnění standardní výuky matematiky a geometrie, která má poměrně dost nabité kurikulum a pevně dané vzdělávací plány. Daleko běžnější jsou různé formy slovního hodnocení.[101]

[99] Srov. „Z didaktického hlediska je možné sebehodnocení žáků chápat jako kompetenci, podporující samostatnost a nezávislost na učiteli.“ KOLÁŘ, 2009, s.151.

[100] Podle hesla M. Pascheho: „Řekni jim, co se naučí, nauč je, co jsi jim slíbil, a vyzkoušej je z toho, co jsi vyučoval.“ In KOLÁŘ, 2009, s. 98.

[101] Verbální hodnocení při hodině, závěrečné hodnocení projektu, vyznamenání žáků, vyhlášení vítězů soutěže, atp. (Srov. KOLÁŘ, 2009, 93n.)

Většina autorů se shoduje na tom, že by hodnocení mělo být především formativní.[102] Navrhují, aby žáci byli nejprve seznámeni s metodou hodnocení, diskutovat s nimi o tom, zda hodnocení rozumí a jaké mají pocity. Též se doporučuje, aby hodnotili učitelé i žáci společně, protože mají různé pohledy, které se v mnohém vzájemně doplňují.

Vrcholnou formou jsou závěrečné slavnosti soutěží a olympiád, v nich jsou výsledky projektu vyhlášeny a čestně oceněny. Tato forma může mít významný sociální a psychologický dopad nejen na žáky, ale i na celé společenství školy (kroužku, organizace, atp).

Pedagogická práce obyčejně obsahuje prvky autoevaluace, kdy si učitelé vyhodnocují, jak a zda se podařilo dosáhnout edukativních cílů. Výsledky experimentů mohou být diskutovány na pedagogických radách, mohou být oceněny v kolegiu pedagogického sboru či vedením školy. To je nutným předpokladem realizace dalších experimentů, zvláště pokud jsou finančně nákladné. Vidí-li škola (obecně organizace), že je badatelské vyučování benefitní, je pravděpodobné, že ho zařadí do svého harmonogramu a případně portfolia činností.

[102] Formativním hodnocením v badatelsky orientované výuce v přírodovědných předmětech a matematice se zabývá výše zmíněný mezinárodní univerzitní projekt ASSIST-ME, o kterém je více pojednáno v kapitole Dosavadní výzkumy ve výzkumné části diplomové práce.

1.5. Prostředí dynamické geometrie

„Dynamická geometrie je moderní, rychle se rozvíjející oblast geometrie, která je s úspěchem začleňována do výuky na všech typech škol. Počítačové programy umožňují oprostit se od statické geometrie, ve školní praxi reprezentované rýsováním do sešitu respektive na tabuli, kde jednou narýsované objekty již dále nelze výrazně měnit. Základním rysem dynamické geometrie není jen interaktivnost, neboli možnost změny parametrů (např. polohy, rozměrů, barvy) narýsovaných objektů. Nejdůležitější charakteristikou je zachování zadaných vztahů mezi objekty během pohybu. Dynamický přístup umožňuje hlubší pochopení souvislostí a snadné zobrazení zadané konstrukce při změně výchozích parametrů.“[103] Systémy dynamické geometrie jsou díky verzatilnosti, modifikovatelnosti, efektivitě rýsování předurčeny nejen k vyučování na vysokých školách nebo k akademickým výzkumům. Získávají si zaslouženě čím dál větší pozornost pedagogů středních i základních škol.

Dostupnost systémů dynamické geometrie se v posledních letech velmi zlepšila prostřednictvím zdarma stažitelných aplikací přes internet. Mezi nejznámější patří:

- Geonext[104] vyvíjený Univerzitou Bayreuth v Německu
- Cabri[105] vyvíjený společností Cabrilog ve Francii
- The Geometer's Sketchpad[106] vyvíjený společností Key Curriculum Press v USA
- Cinderella[107] vyvíjená Jürgenem Richter-Gebertem a Ulrichem Kortenkampem z Německa
- Euklides[108] vyvíjený Christianem Obrechtem z Francie
- GeoGebra[109] vyvíjená Markusem Hohenwarterem z Rakouska.

Z uvedených jsou kompletně zdarma Geonext, Euklides a GeoGebra.

---

[103] ŠŤASTNÁ, 2006, s. 23.
[104] Aplikace na platformě Java, ke stažení zdarma na webu: http://geonext.uni-bayreuth.de/content/int/download/index.html.
[105] Komerční výukový software (demoverze je omezena na 15 minut práce) distribuovaný v České republice firmou Akermann Electronic, viz: https://akermann.cz/software-cabri/.
[106] Komerční výukový software (demoverze je omezena na 20 minut práce). Dostupný ze stránky: https://www.keycurriculum.com/.
[107] Komerční výukový software. Nákup možný na amazon.com, dostupný též ze stránky: https://cinderella.de/.
[108] Freeware volně ke stažení na stránkách: http://www.eukleides.org/.
[109] Kompletně zdarma ke stažení na: www.geogebra.org. Je jí věnována kapitola níže.

1.5.1. Parametry a princip dynamického prostředí

Prostředí dynamické geometrie využívají různých programovacích jazyků k dosažení zobrazení v počítači a v dalších zařízeních, případně v některých grafických kalkulačkách. Většina systémů je funkčních na platformě Java vyvinutá firmou Sun Microsystems. Euklides je koncipován jako samostatný programovací jazyk podporující geometrický zápis. GeoGebra je, vedle svých aplikací psaných v jazyce Java, aktivně vyvíjena v HTML5, proto je možné ji používat snadno bez instalace online.

Pomocí softwarových nástrojů je možné nejen rýsování geometrických útvarů, ale též jejich animace, interaktivita (např. tažením za průsečík se mění poloha obou přímek), je možné poměřování, analýza, provádění výpočtů a řada dalších funkcí. Geometrii lze snadno propojit s algebrou, jsou k dispozici grafické a vědecké kalkulátory, je možné provádět vědecké testování, což je umožněno prostupností dat mezi aplikacemi.

Dynamické rýsování se dá sdílet, také lze na práci přímo spolupracovat online. Systémy nabízí možnost vytváření výukových materiálů, prezentací či videí. Práce v softwarech je do určité míry intuitivní, pro základní činnosti není třeba náročných školení, ale většina pokročilejších funkcí si žádá alespoň studium programové dokumentace. Komerční výukové softwary mají k dispozici i odbornou pomoc, tutoring, profesionální školení a podporu. Freeware systémy tuto podporu zpravidla postrádají, ale je možné využít internetových diskusí pro řešení problémů, případně dostupných výukových videí.

Princip dynamického prostředí geometrie spočívá v programovém zpracování geometrických objektů, které jsou vytvářeny v grafickém editoru (rýsovací prostředí může být i 3D). Ke každému objektu se dají definovat různé parametry a nastavení, nejen geometrického rázu, ale též grafického či programovacího. Aplikací skriptů vzniká interaktivní rys, který je snadno modifikovatelný, což je ideální pro tvorbu výukových materiálů i pro práci při výuce. „Všechny tyto programy umožňují jak zaznamenávat dynamiku konstrukce, tak i následně měnit výsledek konstrukce pomocí změny zadání. Právě tato funkce nám umožňuje žáky upozornit na potřebu přesné konstrukce a ukázat jim potřebný rozdíl mezi měřením a rýsováním.“[110]

[110] JANČAŘÍK, 2012, Geometrie, GeoGebra a potřeba přesnosti. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14871/geometrie-geogebra-a-potreba-presnosti.html/ [Citováno 4.4.2021].

1.5.2. GeoGebra

GeoGebra je dynamický matematický software přístupný online na internetové adrese www.geogebra.org, je kompletně zdarma. Umožňuje studium geometrie, algebry a matematické analýzy a nabízí mnoho užitečných funkcí nejen k výuce, ale též k univerzitnímu či profesionálnímu výzkumu.[111] Vedle online prostředí nabízí i několik samostatně funkčních aplikací ke stažení.

GeoGebra byla vytvořena v roce 2001/2002 jako součást diplomové práce studenta matematiky a informačních technologií na Salzburské univerzitě v Rakousku, Markuse Hohenwartera. Při doktorandských studiích Hohenwarter pokračoval za široké podpory univerzity a později i rakouské akademie věd. Systém si záhy získal oblibu široké komunity, která jej brzy přeložila do dalších 25 jazyků. Od roku 2006 je GeoGebra systematicky podporována rakouským ministerstvem školství a získala též ocenění a podporu mnoha mezinárodně uznávaných autorit a organizací. Je stále rozvíjen a rozšiřován, vedle Hohenwartera na něm pracuje mezinárodní tým programátorů.

Autoři systému jej charakterizují takto:„GeoGebra je dynamický matematický software pro všechny úrovně vzdělávání, který spojuje geometrii, algebru, tabulkový procesor, grafy, statistiku a analýzu do jednoho snadno použitelného balíčku. GeoGebra je rychle rostoucí komunita milionů uživatelů žijících prakticky ve všech zemích světa. GeoGebra se stala špičkovým poskytovatelem dynamického matematického software podporujícího vědu, technologii, inženýrství a matematiku (STEM).“[112] Geogebra je nejen software, ale hlavně živá komunita učitelů, studentů, badatelů, výzkumníků a odborníků, programátorů, dobrovolníků a nadšenců, kteří společně přispívají k matematickému vzdělání.

Geogebra v současnosti soustřeďuje několik aplikací, z nichž pro účely výuky je vhodná GeoGebra Klasik[113] nebo GeoGebra Geometrie, v níž jsou přehledné, jednoduše použitelné, základní rýsovací nástroje. Kromě základních aplikací s grafickými editory má systém několik dalších sekcí informativního či edukativního charakteru. Sekce

[111] Viz Co je GeoGebra, Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/cs/P%C5%99%C3%ADru%C4%8Dka. [Citováno 23.3.2021].
[112] Co je GeoGebra? Dostupné z: https://www.geogebra.org/about. [Citováno 10.2.2021].
[113] Ve verzi Klasik 5 stažitelné pro použití na desktopech, ve verzi Klasik 6 též online.

s výukovými materiály, které poskytuje velká komunita pedagogických i nepedagogických, profesionálních i amatérských přispěvatelů, obsahuje na tisíce tříděných simulací, modelů, výukových lekcí, matematických her nejen pro základní školu. Přístupné jsou i celé knihy, učebnice a sbírky úloh. Užitečná je dokumentace ve formě encyklopedie (wiki), která je průběžně překládána a rozšiřována. Naučit se zacházet se systémem lze i prostřednictvím připravených lekcí a videí v sekci Materiály.

Vstupní branou k online systému je uživatelský profil, jenž umožňuje práci ve všech aplikacích GeoGebry, ukládání rysů, tvorbu nových výukových materiálů i přípravu na vyučování. V profilu se vytváří složky, připravují nové aktivity a sepisují knihy – online učebnice. Branou k vyučování jsou především aktivity, což jsou v podstatě prezentace, do nichž se mohou vkládat připravené rysy, externí text, videa a obrázky, pdf prezentace, nebo je lze propojit s jinými webovými prvky. Aktivity se v systému dělí pomocí klíčových slov a nastavení věku cílové skupiny.

Pro vyučování je určena sekce Classroom, což je virtuální třída, kde mohou učitelé a žáci interaktivně spolupracovat. GeoGebra Classroom nabízí, vedle práce v připravených aktivitách, zadávání cvičení a úkolů, jejich vyhodnocování, sledování postupu žáků, diskusi s žáky, ale též možnost učitelských vizitací či práci v učitelských týmech. Toto prostředí je ideální pro distanční online výuku, stejně tak je dobře uplatnitelné ve školách s počítačovými učebnami, což je dnes spíše standardem, než vzácností.

Vzhledem k tomu, že je GeoGebra poskytována jako neziskový projekt zdarma a online, roste nejen komunita přispěvatelů, ale též tým profesionálních tvůrců systému, který soustavně roste a vylepšuje se. Svojí dostupností předbíhá ostatní dynamická prostředí v popularitě a oblíbenosti, přitom si zachovává vysoký standard poskytovaných služeb. Nelze si tak nepovšimnout významu sociálního rozměru projektu, který propojuje odborníky, akademiky, učitele, studenty, žáky všech úrovní, profesionály i amatéry z celého světa. Mezinárodní komunita systém nejen rozvíjí, ale také překládá do dalších jazyků, čímž celosvětová dostupnost nadále roste.

GeoGebra Classic

Aplikace GeoGebra Classic je hlavní virtuální prostředí pro rýsování. Její lokalizace je kompletně česká, výjimku tvoří některé příspěvky v dokumentaci (wiki), které ještě nebyly přeloženy. Ve středu okna se nalézá nákresna, na které je možné zobrazit základní osy a mřížku. V horním menu se nalézají rýsovací nástroje, v levém postranním panelu pak seznam narýsovaných objektů s možností jejich písemných a číselných úprav. Pravý postranní panel slouží k celkovému nastavení prostředí a pro přepínání do dalších nástrojů a prostředí (např. grafy nebo tabulky). V pravém horním rohu je administrační menu, kde se vytváří nové soubory, otevírají se či se ukládají, sdílí se, nastavuje se tisk a export, nastavuje se aplikace, je zde nápověda a odkaz na nastavení uživatelského profilu.

Tvorba geometrických objektů spočívá ve zvolení nástroje a konstrukci na nákresně. Objekty lze též definovat pomocí písemného zápisu do okna vstupu. Rýsování objektů lze vrstvit, objekty jde uspořádávat a třídit, dále rýsovat pomocné objekty, které se dají skrýt (typicky pomocné přímky a kolmice). Systém nabízí kromě rýsování základních geometrických útvarů konstrukci komplexních čísel, vektorů, hyperbol a parabol a dalších struktur, které jsou nad rámec kurikula základní školy.

Užitečné jsou i měřící a porovnávací nástroje, jako je například měření obsahů či porovnávání velikostí úseček. Do interaktivní podoby se dají rysy uvést pomocí speciálních objektů a aktivních prvků, jako jsou posuvníky, tlačítka, zaškrtávací pole, obrázky a textová pole.

Výsledek práce lze přímo sdílet, nebo jej zařadit do výukové aktivity a pracovat s ním v GeoGebra Classroom. Classic je ideální nejen pro přípravu výukových materiálů, prezentací, demonstrací a dalších edukativních aktivit zhotovených k vyučování, ale též jako experimentální prostředí umožňující začít, tak řečeno, na zelené louce. Z toho důvodu je GeoGebra vhodnou volbou pro badatelsky orientované vyučování.

1.6. Experimentování v prostředí dynamické geometrie GeoGebra ve výuce

Prostředí dynamické geometrie poskytují ideální nástroje k žákovskému experimentování při výuce geometrie. Jelikož jde o poměrně nový způsob edukace, který vyžaduje větší počítačovou gramotnost, dostává se interaktivním systémům pozornosti až v posledních letech. Významný rozvoj a celosvětově rostoucí zájem zaznamenal systém GeoGebra především svou marketingovou taktikou. Jako jeden z mála nabízí plnou funkčnost naprosto zdarma, navíc nemá velké hardwarové nároky, lze ho používat přímo prostřednictvím internetového prohlížeče bez nutnosti instalace dalších pluginů[114], což je způsobeno nativní implementací standardů HTML5. GeoGebra nenabízí jen prostředí a řadu užitečných nástrojů k výuce (viz Classroom), ale též množství edukativních materiálů v českém jazyce. Z těchto důvodů byl zvolen pro žákovské experimentování v rámci výzkumu pro tuto diplomovou práci.

Každý softwarový nástroj určený k výuce je nutné si osvojit, prostudovat, prozkoumat jeho možnosti a zjistit, co práce v takovém systému obnáší. Geogebra sice nenabízí profesionální podporu a tutoring v rámci placené licence, jako je to u některých ostatních systémů, nicméně existuje mnoho bezplatně přístupných výukových videolekcí, internetových diskusí a v neposlední řadě stále rozšiřovaná encyklopedie wiki v rámci dokumentace systému. Není tedy třeba náročných školení, aby se učitelé se systémem seznámili a osvojili si základní postupy práce v rámci přípravy experimentu. Pro vyučování na prvním stupni základní školy je vhodnější využít jednodušší systém GeoGebra Geometrie, v němž je méně nástrojů, je přehledný a pro základní rysy bohatě stačí. GeoGebra Classic je oproti tomu vhodnější pro rýsování na druhém stupni základní školy a na vyšších stupních škol, protože poskytuje plnou funkčnost pro řešení náročnějších úloh, přitom je možné vykročit k vyšší a složitější geometrii a matematice, díky propojení s nástroji matematické analýzy, algebry, statistiky atp.

[114] Starší verze systémů využívající programovací jazyk Java využívaly pluginy k zobrazování v prohlížeči, což však některé prohlížeče přestaly podporovat (např. Google Chrome od verze 45). Standardem pro zobrazování interaktivních prvků v prohlížeči se stal jazyk HTML5.

1.6.1. Příprava projektu

Vedle studijní přípravy, v níž by se měli organizátoři experimentu sami seznámit s prostředí dynamické geometrie, aby jej spolehlivě ovládali bez potíží, se předpokládá důkladná příprava projektu, ať už půjde o jednorázový experiment či sérii badatelských lekcí. Pozornost si zaslouží příprava materiálně technické základny projektu, v níž se může uvažovat i o distanční formě vyučování. Experimenty ve škole samozřejmě vyžadují funkční počítačovou učebnu s připojením na internet a odpovídající softwarové vybavení, což je ve většině škol již standardem.

V potaz by se měla vzít též úroveň počítačové gramotnosti žáků, jež se významně liší především na prvním stupni základní školy. U druhostupňových žáků se očekává, že ovládají počítač a internetové nástroje bez potíží. Z praxe plyne, že nejčastějším úvodním problémem je opakované přihlašování žáků, kteří čas od času zapomenou heslo. Proto je vhodné si hesla při prvním zřizování pracovních účtů zapsat.

Příprava v systému GeoGebra spočívá nejprve v nastavení učitelského účtu, v nastavení aplikace Classroom a posléze v přípravě vlastního experimentu. V závislosti na pojetí a typu experimentu se nastaví virtuální pracovní prostředí, připraví rysy a úkoly, otestuje se vzorové řešení. Doporučuje se (viz výše kap. Příprava experimentu), aby nový experiment byl nejprve vyzkoušen od počátku do konce v pilotním režimu.

V poslední fázi je praktická příprava na hodinu včetně plánování činností, přípravy výukových materiálů, pomůcek, pracovních listů apod. Zadání úloh může proběhnout ústně, písemně či přímo v systému. Než se však přikročí k vlastnímu experimentování, musí se žáci s dynamickým prostředí seznámit, vyzkoušet si jej, s čímž by se při přípravě mělo též počítat.

1.6.2. Realizace a hodnocení

Po fázi přípravy je prvním krokem k realizaci experimentu plánování konkrétních hodin, během nichž mají proběhnout badatelské činnosti. Tomu mohou předcházet teoretické výukové lekce, v nichž žáci nabydou potřebné znalosti a vědomosti, jež budou v experimentu potřebovat nebo je ověřovat. V rámci přípravy též mohou proběhnout praktické instruktážní lekce, v nichž se žáci nejprve seznámí s prostředím dynamické geometrie a je v nich prostor na řešení technických záležitostí. Vlastní experiment může být zařazen jako součást projektu, např. v projektových dnech, v nichž žáci se žáci různými činnostmi věnují určitému tématu.

Úvodní část hodiny má zpravidla velký vliv na průběh celého vyučování. Odehrává se v ní iniciace a evokace, vzbuzení zájmu, prvotní motivace k badatelské práci, ale také poučení o bezpečnosti a správném průběhu práce. V návaznosti může proběhnout demonstrace, ilustrace problému, názorné představení vstupních parametrů úloh, nebo se vede úvodní diskuse, v níž se společně plánuje. Z hlediska vyučování geometrie je demonstrace téměř obligátním prvkem. K tomu může posloužit promítání ilustrací, nebo sdílení obrazovky.

Po fázi informování a plánování by již měla začít samostatná činnost. Badatelské činnosti by měly probíhat buď individuálně, nebo týmově (GeoGebra umožňuje obojí), s minimálními zásahy organizátorů, kteří by se měli soustředit na případnou pomoc, spíše než na řízení experimentu. Autonomní bádání je jádrem a těžištěm výuky. Během této fáze mohou probíhat rozhovory, zejména krátké nápomocné a povzbuzující dialogy, nicméně je vhodné navodit maximální soustředění na řešení úloh.

Experiment končí buď dokončením plánovaných výstupů, nebo naplněním času. Ideálně by mělo být vše naplánováno tak, aby byl dostatek času na tvorbu výstupů, dokončení řešení, odevzdání výsledků a praktické ukončení činností. To je též jeden z důvodů, proč by měl být experiment dříve vyzkoušen.

Závěrem se práce uloží, prakticky se hlavní fáze ukončí odhlášením ze systému a úklidem, popřípadě se plynule přejde k hodnocení, které se odehrává podle výše uvedených pravidel.

2. Výzkum

V rámci kvalitativního pedagogického výzkumu bylo zkoumáno, zda jsou žáci schopni samostatně experimentovat v prostředí dynamické geometrie GeoGebra, pokud jim budou připraveny úlohy v podobě digitální pracovních listů s interaktivními nápovědami. Výzkum byl proveden na základě výsledků žáků šestého ročníku základní školy shromážděných během čtyřech experimentálních lekcí v každé ze čtyř tříd v ročníku. V šestnácti čtyřicetipětiminutových setkáních absolvovalo výzkum 86 žáků. Výzkumná data byla shromážděna ode všech, přičemž některé sady nebyly úplné kvůli absencím.

K zachycení výzkumných dat byla zvolena metoda zpracování digitálních pracovních listů prostřednictvím systému GeoGebra. Pracovní listy byly vytvořeny jako samostatné soubory, v nichž byly kromě pracovních úkolů z geometrie i jednoduché dotazníky na žákovskou motivaci. Pracovní úkoly bylo možno řešit zcela samostatně, nicméně se předpokládalo používání tří forem nápovědy: textová nápověda, nápověda grafickým objektem (statickým obrázkem), animovaná nápověda.

Výzkum byl realizován v květnu roku 2019 během čtyř týdnů v Základní škole Zdenky Braunerové Roztoky, příspěvková organizace, kde autor diplomové práce působí jako učitel matematiky a informatiky. Díky dobré vůli vedení školy mohl výzkum probíhat v rámci standardní výuky informatiky. Výzkumné skupiny tvořily čtyři třídy šestého ročníku z několika důvodů: hledisko informatické gramotnosti, hledisko provozu školy, výzkumné hledisko, kurikulární hledisko.

Výzkum se podařilo zrealizovat v plánovaném termínu, data byla shromážděna v dostatečném množství, na výzkumné otázky se podařilo částečně odpovědět, jak je uvedeno v závěru výzkumné části.

2.1. Výchozí předpoklady a dosavadní výzkumy

Výchozím předpokladem výzkumu je uskutečnění badatelsky orientovaných experimentů v prostředí dynamické geometrie GeoGebra žáky šestého ročníku základní školy, přičemž badatelské činnosti by měly probíhat co nejvíce autonomně. Role učitele by měla být především v přípravě výukových materiálů a edukativního prostředí, naopak při hodině víceméně pasivní. Předpokladem je samozřejmě možnost využít při hodině pomoci učitele na vyžádání, aktivnější role při motivaci a sociálních interakcích se očekává.

Transmisivní styl výuky smí být použit pouze v přípravě v rámci pilotního režimu, ve kterém se žáci seznamují s dynamickým prostředím geometrie prostřednictví názorné demonstrace. Naopak při vlastním žákovském experimentu se drží učitel své průvodcovské role.

Pravidla experimentu byla nastavena tak, že kooperace ani komunikace v průběhu experimentování není mezi žáky povolena. Výzkum byl zaměřen na sledování individuálních výsledků. Učivo geometrických úloh je zvoleno tak, že je do určité míry výzvou, protože přesahuje standardní kurikulum šestého ročníku základní školy, nicméně s ním úzce souvisí. Didaktické problémy jsou ve sféře nadstandardních úloh, ale jsou zvladatelné i průměrně nadanými žáky. K úspěšnému řešení mohou sloužit nápovědy ve třech formách. Předpokladem je, že díky nim, budou žáci úlohy řešit zcela samostatně. Po každém experimentu se pořádá společná diskuse, v níž žáci hodnotí proběhlý experiment.

Dalším předpokladem je, že jedna hodina experimentování nestačí k tomu, aby si žáci badatelský přístup dostatečně osvojili, proto byla zvolena série třech navazujících hodin. K tomu náleží úvodní pilotní hodina, v níž budou žáci seznámeni s metodami práce.

Práce žáků budou hodnoceny pouze ústně a bude poskytována pozitivní zpětná vazba.

Práce žáků budou po skončení sběru dat kategorizovány a zpracovány pomocí tabulkového editoru pro účely výzkumu. Výsledky zpracování dat budou interpretovány tak, aby se nalezly odpovědi na specifikované výzkumné otázky.

2.1.1. Dosavadní výzkumy

ASSIST-ME

Univerzitní projekt *ASSIST-ME* Kodaňské univerzity, jejímž partnerem je v České republice Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, se zabývá především „postupy formativního hodnocení při badatelsky orientované výuce přírodovědných oborů a matematiky.“[115]

Mezinárodní výzkumný a vzdělávací projekt byl realizován v letech 2013 - 2016.[116]

Hlavními cíli bylo:

- „poskytnout odborný základ pro efektivní přijetí formativního a sumativního hodnocení v badatelsky orientovaném vyučování na základních a středních školách.“[117]
- „vytvořit a ověřit sadu konkrétních postupů hodnocení
- využít takto vzniklou výzkumnou databázi k vytvoření metodických materiálů.“[118]

Výsledkem bylo mimojiné několik odborných článků k tomuto tématu.

V souvislosti vznikl výše zmíněný projekt SAILS (Strategies for Assessment of Inquiry Learning in Science), který poskytuje výukové materiály pro učitele na svých webových stránkách.[119]

---

[115] Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kpe/assist-me.html [Citováno 5.4.2021]
[116] Více o projektu na stránkách Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kpe/assist-me.html nebo Univerzity v Kodani: https://assistme.ku.dk/.
[117] Prezentace Formativní hodnocení v badatelsky orientovaném vyučování v přírodovědných předmětech a matematice, PF JU v Českých Budějovicích, Dostupné z: https://assistme.ku.dk/resources-pdfs/2015_-_CPdS_symposium_Ceske_Budejovice__Stuchlikova_et_al._.pdf [Citováno 5.4.2021].
[118] https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kpe/assist-me.html [Citováno 5.4.2021]
[119] Dostupné z: http://www.sails-project.eu/.

MaSciL

Mezinárodní univerzitní projekt „*MaSciL* (mathmatics and science for life!)“ je organizovaný Vzdělávací univerzitou ve Freiburgu.[120] Partnerskou univerzitou v České republice je Univerzita v Hradci Králové.[121] Projekt je definován takto: „MaSciL (Mathematics and Science for Life – Matematika a přírodní vědy pro život) je projekt podporovaný Evropskou komisí a podílí se na něm 18 partnerů ze 13 zemí.[122] Projekt se zaměřuje na změny ve vyučování a učení se matematiky a přírodovědných předmětů v Evropě, které podporují učitele při využívání badatelské metody (IBL – Inquiry Based Learning). Dalším záměrem projektu je spojení výuky matematiky a přírodovědných předmětů se světem práce, tj. s reálným životem. Jde o to, aby badatelsky orientovaná výuka ve spojení se světem práce pomohla učinit matematiku a přírodovědné předměty více smysluplné a přístupné pro žáky.“ Výsledkem projektu je řada edukativních materiálů připravených k výuce, nicméně k tématu geometrie jich je dostupných pouze několik a to jen v obecné rovině. Kurikula geometrie se netýká žádný z nich.

[120] Dostupný z: https://mascil.ph-freiburg.de/. [Citováno 6.4.2021].

[121] Univerzita v Hradci Králové je řešitelem v součinnosti s Národním poradním sborem (NAB). Informace dostupné z: https://ris2.uhk.cz/mascil/.

[122] „Řešení projektu se kromě spoluřešitelů z PřF Univerzity Hradec Králové, který předpokládá spolupráci napříč ustaveným fakultním výzkumným týmem zaměřeným na oborové didaktiky přírodních věd, matematiky a informatiky, účastní univerzity a další instituce z Německa, Nizozemí, Španělska, Norska, Turecka, Litvy, Bulharska, Rumunska, Řecka, Kypru, Rakouska a Velké Británie. Jejich zástupci budou nejen vyvíjet a nabízet nové přístupy profesního rozvoje učitelů, ale také zkoumat, jak by jednotlivé národní vzdělávací systémy a podmínky v evropských zemích měly být změněny, aby podporovaly novou vzdělávací kulturu. Projekt MaSciL je podporován Evropskou komisí v rámci 7. Rámcového programu EU a měl by se přímo dotknout 65 000 a nepřímo až 800 000 evropských učitelů.“ Dostupné z: https://mascil.ph-freiburg.de/. [Citováno 6.4.2021].

Výzkumy evidované Českou asociací pedagogického výzkumu[123]

Česká asociace pedagogického výzkumu pravidelně vydává sborníky, v nichž uvádí přehled provedených pedagogických výzkumů. K tématu geometrie evidence uvádí pouze tyto:

- SÝKORA, Václav. *Metodologické problémy analýzy pojmu vizualizace.* Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, M.D. Rettigové 4, Praha, 2020
- LIBICHER, Jaroslav. *Počítačem podporovaná výuka konstruktivní geometrie.* Katedra matematiky s didaktikou PdF OU, Cs. legií č. 9, Ostrava, 2001.
- KUŘINA, František. *Pedagogika jako věda a školská praxe.* Katedra matematiky Pedagogické fakulty VŠP, Hradec Králové, 1999.
- SÝKORA, Václav. *Polarita tvaru a velikosti nejen v geometrii.* Pedagogická fakulta UK, M.D. Rettigové 4, Praha, 1997.

Z uvedených výzkumů se badatelským vyučováním zabývá František Kuřina, ovšem bez užšího vztahu ke geometrii. Výzkum se zabývá pedagogickými teoriemi a zmiňuje např. některé myšlenky Johna Deweyho.

Václav Sýkora se zabývá více didaktikou geometrie a řeší procesy matematizace, geometrizace, vizualizace a dalších kognitivních postupů, které jsou podstatné pro vyučování geometrie. Výzkum je zaměřen spíše na středoškolské a vysokoškolské studenty.

Jaroslav Libicher se zabývá výzkumem počítačových systémů CAD a jejich využitelnosti ve výuce deskriptivní geometrie.

Lze konstatovat, že výzkum zaměřený na badatelsky orientované vyučování geometrie na základní škole v prostředí dynamické geometrie nebyl nalezen.

[123] Viz http://www.capv.cz/.

2.2. Cíle výzkumu a použitá metodika

2.2.1. Výzkumné otázky

V rámci konkrétní výzkumné situace lze položit tyto otázky:

1) Jak žáci experimentují při hledání řešení v prostředí dynamické geometrie?
2) Jaký druh dopomoci a nápovědy jim poskytnout, aby bádali úspěšně a samostatně?
3) Jak souvisí motivace k samostatnému řešení úlohy s použitím nápovědy?
4) Jak žáci hodnotí experimentování v prostředí dynamické geometrie?

Ad 1) Prostředí dynamické geometrie je pro badatelsky orientované činnosti ideálním prostředím, jak vyplývá z teoretických zjištění. Otázkou je, zda žáci šestého ročníku základní školy mají dostatečnou informatickou gramotnost k tomu, aby byli v experimentování úspěšní.

Ad 2) Klíčovou otázkou je, jaká forma nápovědy bude pro samostatné bádání efektivní. Dostupné budou nápovědy textové, obrazové a animované. Žáci mohou použít libovolnou kombinaci nápověd, či žádnou.

Ad 3) Motivovanost žáků je na začátku experimentu a před každou úlohou monitorována dotazníkem. Otázkou je, do jaké míry dostupnost nápověd povzbudí, či změní motivaci k řešení dalších úloh. Celková motivace k učení pak bude společně ve skupině diskutována.

Ad 4) Tato výzkumná otázka předpokládá hodnocení v rámci společné diskuse. Předmětem hodnocení je nejen průběh experimentu, ale i náročnost úloh. Součástí hodnocení je i náhled na prostředí dynamické geometrie GeoGebra.

2.2.2. Metodika

Výzkum je svou povahou kvalitativní a využívá výzkumný plán v podobě fenomenologického zkoumání.[124] Základní zkoumanou strukturou jsou zkušenosti žáků při bádání v prostředí dynamické geometrie.

Hlavní metodou výzkumu je pozorování žáků při badatelských činnostech v experimentu, který je svou povahou spíše heuristický (viz výše kap. Heuristický experiment). Pozorování se odehrává prostřednictvím záznamů žákovské práce na digitálních pracovních listech. Pozorování je zaměřeno především na používání nápověd při řešení úloh.

Součástí výzkumu je vyhodnocení dotazníků, které vyplňují žáci v úvodu experimentů i u každé úlohy. Dotazník monitoruje motivaci k učení obecně i motivaci k řešení konkrétních úloh.

Třetí metodou je nestrukturovaný rozhovor[125] v rámci závěrečné společné diskuse, kdy si žáci společně s učitelem sdělují dojmy z proběhlého experimentu a hodnotí jej.

Opěrným bodem výzkumu je digitální pracovní list, v němž se soustřeďují nejen geometrické úlohy, ale též otázky motivačního dotazníku. Struktura pracovního listu je:

- dotazník
- zadání úlohy
- nápovědy
- záznam řešení.

Z odevzdaných digitálních pracovních listů jsou zjišťovány tyto informace: motivace žáka, stav řešení úlohy, použití nápověd.

Informace jsou kategorizovány a zpracovány do tabulkových přehledů.

Ze společných diskusí jsou zaznamenány pracovní poznámky, které jsou zpracovány do celkového hodnocení.

[124] Viz PRŮCHA, 2009, s. 820.
[125] Viz PRŮCHA, 2009, s. 821.

2.2.3. Struktura úloh

Nejjednodušší jsou úlohy, kde žáci hledají parametry objektů v situaci bez souvisejícího abstraktního usuzování. Řešení takových úloh nejvíce závisí na pozorování a rozpoznání požadovaných či nežádoucích vlastností objektů, které lze interaktivně modifikovat v dynamickém prostředí. Nápovědy přitom navádí žáka buď k ověřování těchto vlastností, nebo směrem k hranici, kde požadované přestává (či naopak začíná) platit.

Druhou skupinou jsou úlohy, kde žáci mají bádat, kterým směrem situaci měnit při zachování extrému – kupř. dělit plochu na co nejmenší počet částí, či přidat přidat vrchol do mnohoúhelníku, dovodit počet úhlopříček. Takové úlohy vyžadují vhled do situace a jsou pro žáky náročné na vyjadřovací dovednosti při formulování odpovědí. U žáků šestého ročníku se již dá předpokládat, že mají znalosti potřebných pojmů, ale nemají zkušenosti s formulacemi matematických výroků, proto očekávané odpovědi byly spíše doplňujícím komentářem k dříve zachycenému řešení.

Třetí skupinou úloh jsou úlohy, kde zadáním je složitější situace s cílem zadaným jen obecně, případně ne zcela konkrétně. V takových úlohách žák musí nejdříve experimentováním dopátrat souvislosti a teprve v dalším kroku hledá nějaké ze zamýšlených řešení. Pro účely práce stačilo, aby žák nějaké vlastní řešení rozpoznal a vypracoval.

Dalším strukturálním prvkem úloh jsou nápovědy, které mají napomoci autonomnímu řešení. Nápovědy jsou trojího druhu: textové, pomocným vizuálním objektem a animované.

Textová nápověda má formu slovního návodu k dalším krokům směrem k řešení. Efektivita textové nápovědy závisí na žákově čtenářské gramotnosti a znalosti použitých termínů.

Nápověda pomocným objektem využívá možnosti zvýraznit, zobrazit či doplnit situaci o předem připravené konstrukce, nejčastěji barvami či šipkami. Takové zvýraznění se často opírá o techniku dopomoci prvního kroku používané obyčejně u žáků se specifickou poruchou učení. Nevýhodou takové nápovědy je znepřehlednění rysu. Další nevýhodou je těžké znázornění použitých termínů – např. kolmost může být zaměněna s pravým úhlem.

Nápověda animací používá stejných možností jako nápověda pomocným objektem, navíc ale rozšiřuje možnosti pochopit zdůrazňovaný prvek či vlastnost. Rizikem použití takové nápovědy může být, že si ji žák špatně vyloží a bude se soustředit na jinou, než znázorňovanou část situace.

2.2.4. Podoba digitálních pracovních listů

Žáci základních škol běžně pracují s papírovými pracovními listy. Pracovní soubory pro účely výzkumu byly proto principiálně koncipovány v podobě, která jim bude blízká svou strukturou a jednoduchostí. Ustálený název „pracovní list" byl zachován, i když jde de facto o digitální soubor. V pracovních souborech systému GeoGebra je možné kromě zadávání úloh i předávat instrukce, případně pokládat dotazníkové otázky. Digitální pracovní list navíc může obsahovat interaktivní prvky a umožňuje dokonce některé objekty animovat. Další důležitou možností je omezení nástrojů pouze na ty, které žák má použít. Nadbytečné nástroje, stejně jako mřížka a souřadnicový kříž na pozadí mohou znesnadnit a znepřehlednit práci, proto je tedy vhodné vypnout jejich zobrazení.

Pro účely výzkumu jsou pracovní listy vytvořeny přímo v systému GeoGebra jako samostatné soubory s příponou „.ggb", jež lze ukládat, nahrávat a sdílet. Žáci pro jejich otevření načtou soubor do okna prohlížeče s otevřeným systémem.

Podoba konkrétní pracovních listů ve čtyřech sadách: 0 – pro pilotní hodinu; 1 – a, b, c pro první výzkumný týden; 2 – a, b, c pro druhý týden; 3 – a, b, c pro třetí týden; je k nahlédnutí v Příloze 4.

2.2.5. Další parametry výzkumu

Pro realizaci výzkumu bude použita počítačová učebna, kde mají každotýdenně žáci výuku informatiky. Žáci zde mají téměř roční zkušenosti s přihlašováním a odhlašováním, prací v souborovém systému a ovládání internetového prohlížeče. Tím odpadá část přípravy s výukou ovládání počítačového vybavení a pilotní hodina se může více soustředit na práci v prostředí GeoGebra a ovládání pracovních listů.

Plánované čtyři hodiny výzkumu budou v době výuky informatiky, v případě technického výpadku je možnost využít i hodin matematiky v závislosti na volném čase v počítačové učebně.

2.3. Výzkumná skupina

Výzkumnou skupinu tvoří žáci čtyřech tříd šestého ročníku základní školy. Průměrný počet žáků ve třídě je 24. Na základě svolení vedení školy a třídních učitelek byli osloveni zákonní zástupci žáků s prosbou o poskytnutí informovaného souhlasu. Celkem se podařilo získat 86 souhlasů z oslovených zástupců 95 žáků. Žáci, u kterých se nepodařilo získat souhlas, pracovali s třídou na stejném zadání i se zúčastnili pohodinové diskuse, ale záznam o jejich práci nebyl uchováván ani zpracováván. Celkem se takto práce zúčastnilo devět žáků. Někteří žáci neabsolvovali všechny výzkumné lekce, ale jejich data byla přesto zpracována.

Probrané učivo v době výzkumu

Z tematických okruhů mají třídy probrány témata osová souměrnost a trojúhelník a jeho vlastnosti. Díky odvození výpočtu obsahu trojúhelníku mají žáci i povědomí o rovnoběžnících.

Výňatek ze školního ŠVP, v němž se uvádí již probrané kapitoly:

- úhel a jeho velikost - určuje velikost úhlu měřením a výpočtem
- osová a středová souměrnost
    - načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru středové a osové souměrnosti
    - určí osově a středově souměrný útvar
- trojúhelník
    - načrtne a sestrojí rovinný útvar

Při výuce matematiky i informatiky dosahovaly všechny třídy uspokojivých výsledků. Ani v jedné z tříd není toho času žák, kterému by školské poradenské zařízení doporučilo podporu asistenta.

2.4. Příprava a pilotní průběh

Na základě teoretického studia a předpokladu realizovatelnosti výzkumu byla stanovena čtyři hlediska: hledisko informatické gramotnosti, hledisko provozu školy, výzkumné hledisko, kurikulární hledisko.[126]

Výuka informatiky na pracovišti, kde se plánoval uskutečnit výzkum, probíhá povinně v 5. a 6. ročníku, v 7. se informatika nevyučuje, v 8. a 9. pouze formou volitelného předmětu. Z těchto důvodů padla volba na 6. ročník, kde je největší prostor pro uskutečnění žákovských experimentů.

Na základě komunikace s vedením školy bylo dohodnuto, že se výzkum může uskutečnit v rámci hodin informatiky, přičemž se nesmí ohrozit naplňování učebního plánu předmětu. Plánování výzkumu ke konci školního roku v květnu umožnilo dostatečnou časovou rezervu a přitom kurikulární vybavenost žáků. Učební plány matematiky i informatiky byly prostudovány a organizace výzkumu byla diskutována s vyučujícími. Aby bylo možno zaznamenávat žákovské práce, byli požádáni zákonní zástupci žáků o udělení souhlasu s výzkumem. Většina zástupců souhlas poskytla. Posléze bylo možno začít s přípravou úloh, která probíhala v několika fázích.

V první řadě bylo třeba zvolit náročnost úloh vzhledem k cílové skupině žáků tak, aby použité konstrukce byly pro ně zvládnutelné a formální stránka zadání byla srozumitelná. Úroveň úloh je cílena na konec šestého ročníku, což umožňuje zadávat úlohy poměrně jednoduché, tj. za použití termínů spojených s vlastnostmi přímek, kružnic, trojúhelníků a mnohoúhelníků, přitom lze žáky exponovat úlohami, se kterými se ještě nesetkali.

Při konzultacích s vyučujícími matematiky bylo ověřeno, že nadaným žákům v těchto třídách bývají občasně předloženy náročnější úlohy nad běžný rámec kurikula. Inspirací pro úlohy se v největší míře staly sbírky matematických olympiád a knihy s matematickými rébusy[127]. Ve výsledku byla pro účely výzkumu použita pouze jediná

---

[126] Hlediska mají přímý vztah k výzkumným konstruktům, viz: „Dalším krokem, který lze při přípravě výzkumu doporučit, je formulování tzv. operacionalizovaných definic pojmů, se kterými budeme ve výzkumu pracovat. Jedná se o definice, které umožní jednotlivé pojmy (konstrukty) jednoznačně „uchopit“ (zachytit, změřit).“ CHRÁSKA, 2016, s. 13.

[127] VYŠÍN, 1965; VYŠÍN a kol. 1969; VYŠÍN, 1976; MORAVČÍK a kol. 1981; MORAVČÍK a kol. 1982; KOMAN a kol. 1988; BUKOVSKÝ a kol. 1989. KOMAN a kol. 1992; více viz seznam literatury.

úloha, navíc značně zjednodušená. Překážkou nebyla složitost při řešení, ale velký rozsah textu zadání. Vzhledem k tomu, že jeden z plánovaných druhů nápověd měl být textový, bylo vhodné se vyhnout případu, kdy by textová nápověda pouze znovu vysvětlovala a opisovala jinými slovy zadání. Druhým zdrojem inspirace pro úlohy byla matematizace a objektivace,[128] jež přirozeně navazují na probranou látku. Nejvíce úloh je zaměřeno právě na bádání o vlastnostech čtyřúhelníků, u kterého lze předpokládat potřebné teoretické znalosti a dovednosti žáků. Po studiu možných parametrů úloh byly vytvořeny jejich sady, jak bylo popsáno výše.

Dalším krokem v návrhu bylo stanovení druhů použitých nápověd. Standardní textová nápověda byla inspirována nejen kontextovou nápovědou například samotné GeoGebry, ale i vysvětlujícími rámečky v učebnicích. Požadavky na takovou nápovědu spočívaly ve snaze neduplikovat zadání, ale naopak navrhnou směr a postup bádání.

Další zvažovanou nápovědou byl krátký zvukový záznam dostupný v mnoha výukových programech. Žáci mají zkušenost třeba s řadou Didakta od firmy Silcom. Tato metoda, i když by možná některým žákům vyhovovala, byla zamítnuta z organizačně realizačních důvodů. Další použité druhy nápověd (objektem a animací) se opírají o prostředí dynamické geometrie.

Ruku v ruce s přípravou úloh byla připravována organizačně technická stránka výzkumu. V součinnosti se správcem počítačového vybavení školy byl připraven nahrávací systém, aby bylo možno žákovské experimenty zaznamenat, což bylo klíčovým předpokladem sběru dat. Systém GeoGebra je dlouhodobě ve škole užíván, což znamená, že je technické vybavení dostatečné. Se systémem mají zkušenost pouze žáci z 8. a 9. ročníků, kteří dochází do volitelného předmětu.

Dále byl stanoven harmonogram výzkumu a plánovaly se jednotlivé lekce.

[128] Samozřejmně na úrovni přiléhavé věku žáků.

Pilotní hodina

Cílem pilotní hodiny bylo žáky naučit pracovat v prostředí dynamické geometrie GeoGebra, speciálně zdůraznit rozdíly oproti rýsování na papír, na které jsou zvyklí. Vzorová úloha pracovala s nástrojem „Nový bod“ a nástrojem „Průsečík“ ke konstrukci bodů, které závisí na předchozí konstrukci – žáci se zároveň učili rozdíly mezi samostatnými body a průsečíky. Důležité bylo také představit nástroje vhodné pro řešení úloh v dalším experimentování a ovládání pracovních nástrojů.

Pro úvodní seznámení s prostředím dynamické geometrie byla zvolena úloha konstrukce těžiště trojúhelníku, která byla probrána v předchozích týdnech.

Hodina byla rozdělena do dvou částí: v první žáci pod vedením učitele rýsovali těžiště trojúhelníka, v druhé potom v připraveném souboru řešili pilotní úkol, ve kterém řešili, zda existuje trojúhelník, kde těžiště je mimo plochu trojúhelníka. Při lekci se žáci seznámili nejen s digitálním pracovním prostředím, ale vyplňovali úvodní dotazník.

Součástí hodiny byla také zkouška nahrávání obrazovky a diskuze po skončení experimentu. Žáci projevili spokojenost s prací v systému GeoGebra a potvrdili, že je další výzkum proveditelný. Sdělili, že byla práce pro ně náročnější, než rýsování na papír, na což jsou zvyklí. Nebyly zaznamenány žádné závažné komplikace.

Čtyřech pilotních hodin se účastnilo všech 86 žáků ze 6. ročníku v týdnu, který předcházel vlastnímu experimentování.

2.5. Průběh žákovského bádání

2.5.1. Týden I

Při prvním cyklu žákovských experimentů se účastnilo 86 žáků ze čtyř tříd. Po úvodním přivítání a zprovoznění žákovských stanic byli seznámeni s první sadou úloh 1a, 1b, 1c. Časový limit na vypracování byl 35 minut. Průběh u všech tříd byl velmi podobný, jen v jedné třídě se vyskytovalo více nemotivovaných žáků (konkrétně 5 žáků z 24). Po osobním rozhovoru nad důvody jejich nechuti k experimentování se rozhodli k volnému bádání v systému GeoGebra mimo úlohy. Ostatní žáci volně přecházeli mezi pracovními listy, svobodně bádali až do vypršení času. V následné diskusi někteří žáci vyjádřili potřebu delšího času, ocenili vlastnosti dynamického prostředí, byli překvapení z netypického zadání úloh a někteří je považovali za obtížné. Na základě jejich zájmu jim na závěr byla učitelem demonstrována ukázková řešení úloh.

2.5.2. Týden II

V druhém cyklu chybělo celkem šest žáků. Průběh experimentů byl obdobný. Na základě zkušeností z minulého týdne se někteří žáci stavěli k úlohám otevřeněji a s větším zájmem. V rámci stejného časového limitu žáci opět svobodně bádali. Mnozí žáci nebyli tolik stresovaní jako prve a byli s prací dříve hotovi. V diskusi po badatelských činnostech se objevovaly pozitivnější komentáře. Nadanější žáci podle svých slov pronikli do řešení prvních úloh a začali s zájmem rozlišovat parametry náročnějších úloh. Demotivovaných žáků bylo přibližně stejně, nicméně jejich negativita se umenšila. Demonstrace řešení druhé a třetí úlohy se setkala s velkým zájmem.

2.5.3. Týden III

Třetího cyklu se zúčastnilo 82 žáků. Struktura experimentu byla stejná, průběh byl podobný. První úlohy byly vyřešeny velmi rychle. Časový limit byl tentokrát minimálním stresorem a bádání bylo ukončeno již po třiceti minutách, také kvůli tomu, aby byl větší prostor pro závěrečnou diskusi. Byl patrný zvýšený zájem o nejnáročnější úlohu ve třetí sadě a diskutovali mezi sebou svá řešení. Demonstraci tentokrát vedli sami žáci. Žáci v celkovém závěrečném hodnocení projevili spokojenost a zájem o bádání v systému GeoGebra, někteří ocenili didaktický přínos, několik jedinců se stavělo k bádání odmítavě.

2.6. Interpretace výsledků

2.6.1. Analýza dat

Výzkumná data byla získána z videozáznamů práce každého žáka. Ze záznamů byla získána data úvodních motivačních dotazníků, data řešení úloh a data použití nápověd. Každý druh dat byl následně zpracován. Na základě analýzy dat byly vytvořeny kategorie a přehledy ve formě tabulek.

Dotazníková data

V dotaznících jsou údaje o vztahu žáků k matematice, k práci obecně, k řešení didaktických problémů, o momentální náladě, o nastavení motivace k řešení konkrétní úlohy.

Na základě analýzy dotazníkových dat (viz Tabulka 7 v Příloze 3) bylo zjištěno, že žáci jsou s rostoucí zkušeností motivovanější k řešení úloh. Zatímco vztah k matematice a k práci obecně se u většiny nezměnil, momentální nálada i motivace k řešení úloh byla dynamická. Ti žáci, kteří úlohy neřešili, byli méně motivovaní, zato úspěšní řešitelé měli kladný vztah k matematice i jejich motivace byla vysoká.

Data řešení úloh

Data ohledně řešení úloh byla kategorizována takto:

1) nevyřešená úloha
2) částečně vyřešená úloha
3) úplně vyřešená úloha.

Kritéria pro částečné řešení úlohy závisely na konkrétním druhu úlohy, proto se v různých sadách mohla lišit. Na videozáznamu je sledován moment, kdy žák prokáže cílevědomost v řešení úlohy, namísto chaotického experimentování. Kategorie „částečně vyřešená úloha“ je přiznána v případech, kdy žákem ověřovaná hypotéza spadá do sféry správného řešení úlohy. „Úplně vyřešená úloha“ je ta, kde žák správně odpověděl a prošel očekávanými fázemi řešení.

Úspěšnost řešení byla zpracována do Tabulky 1 (viz Příloha 3), z níž vyplývá, že žáci jsou velmi úspěšní v řešení úloh, kde hledají parametry objektů v situaci bez souvisejícího abstraktního usuzování.[129] Úlohy, kde žáci mají bádat, kterým směrem situaci měnit při zachování extrému, byly z velké části řešeny, ale úplného řešení zpravidla nebylo dosaženo protože, žáci nebyli schopni formulovat slovní odpověď.[130] Analogicky se prohloubil rozdíl mezi četností částečného a úplného řešení ve třetích úlohách,[131] které byly nejnáročnější. Situace byla zpravidla správně pochopena i znázorněna v experimentech, nicméně klíčové kroky k řešení nebyly uskutečněny. Z následných diskusí bylo zjištěno, že některým žákům k dořešení úloh nezbýval čas, zatímco jiní nevěděli, jak postupovat dál. Lze předpokládat, že třetí úlohy přesahovaly žákovské schopnosti matematizace a abstraktního myšlení.

Data nápověd

V záznamu byl sledován čas strávený sledováním nápověd, postup volby jednotlivých druhů (pořadí) a následně efektivita zvolených nápověd směrem k řešení úloh. Z analýzy dat (Tabulka 2, 3 a 4 v Příloze 3) vyplývá, že i neřešící žáci si nápovědy prohlédli, ale neprostudovali je natolik, aby úlohy začali řešit. U ostatních žáků jsou sledovatelné preference ve volbě nápověd. Nejvíce využívaný druh nápověd byla nápověda animací, která byla v pozdějších experimentech často první volbou. Textová nápověda byla využívána čím dál méně, v některých případech vůbec.

Žáci, kteří byli úspěšnými řešiteli, považovali nápovědy animací za nejvíce názorné a snadno pochopitelné. Ti, co úlohy vyřešili jen částečně, používali více druhů nápověd, ačkoliv nápověda animací převažovala. V řádu jednotek se pohybovaly případy úspěšných řešení, kdy nebyla žádná nápověda použita.

Na základě měření času stráveného na jednotlivých nápovědách bylo zjištěno, že žáci nevěnují příliš pozornosti textovým nápovědám. Čas věnovaný ostatním druhům nápověd byl srovnatelný. Čas strávený na nápovědě animací je ovlivněn délkou animace. Též bylo zjištěno, že většina žáků si animaci prohlédla ve třech opakujících se cyklech.

[129] Úlohy označené 1a, 2a, 3a.
[130] Úlohy označené 1b, 2b, 3b; úspěšnost (úplné řešení) se pohybovala kolem 30%.
[131] Úlohy označené 1c, 2c, 3c; úspěšnost s pohybovala pod 20%.

Efektivita nápověd byla sledována v korelaci se zaznamenaným postupem řešení. V přechodu od nevyřešené úlohy k částečně řešené se nejvíce uplatňovaly nápovědy animací. V přechodu od částečného řešení k úplnému je nejúspěšnější textová nápověda, nejspíše proto, že slovní formulace lépe vysvětlovala princip řešení.

2.6.2. Interpretace individuálních výsledků

Z výzkumných dat lze vysledovat, jak se jednotliví žáci stavěli k řešení úloh i celkově k experimentům. Bylo možno rozpoznat tyto skupiny:

1) žáci, kteří úlohy neřešili, si prohlédli nápovědy v předloženém pořadí a v dotazníku přiznávali nízkou motivaci a negativní vztah k matematice
2) žáci, kteří úlohy úspěšně vyřešili, si cíleně vybírali nápovědy, nebo je dokonce vůbec nepoužívali, v dotazníku přiznávali vysokou motivaci a pozitivní vztah k matematice
3) žáci, kteří dosáhli částečných výsledků, vykazovali široké a dlouhodobé využívání nápověd, v dotazníku přiznávali průměrnou motivaci a neutrální vztah k matematice

Bylo vysledováno, že se členství ve skupině měnilo dle momentální situace i motivace. S přibývajícími zkušenostmi klesal počet neřešících žáků a počet úspěšných řešitelů rostl (viz Tabulka 1 v Příloze 3).

2.7. Diskuse

Je otázkou, do jaké míry byl výzkum kvalitně proveden. S tím souvisí limity a překážky, které vznikaly během realizace výzkumu. V závěru diskuse jsou nastíněny výsledky výzkumu, které vedly k závěrům.

2.7.1. Kvality výzkumu[132]

Saturace

Z hlediska možného provedení výzkumu bylo dosáhnuto maximální saturace. Devět zákonných zástupců z devadesáti pěti neudělilo souhlas k výzkumu. Více než 90 % žáků 6. ročníku se výzkumu účastnilo. Absence v pilotním týdnu a v prvním výzkumném týdnu byla žádná, v dalších dvou týdnech v řádu několika jednotek, což nemělo na kvalitu výzkumu z celkového hlediska významný vliv.

Krystalizace

Krystalizace výzkumu byla podložena rozsáhlým studiem teoretických východisek, zejména pedagogických teorií souvisejících s badatelsky orientovaným vyučováním, jak dokládá teoretická část práce.

Doba angažovanosti

Výzkum byl realizován celkem v šestnácti setkáních ve čtyřech týdnech. Z hlediska provozu školy to byla maximální možná doba. Z výzkumných dat získaných zejména během druhého a třetího týdne vyplývá, že fenomén získávání zkušeností byl signifikantní.

Revize

Výzkum byl revidován školní metodičkou formou kvalifikovaného rozhovoru a o výsledcích výzkumu bylo informováno vedení školy. Revizní zpráva nebyla vytvořena.

---

[132] Dle HENDL, Jan, Kvalitativní pedagogický výzkum In PRŮCHA, 2009, s. 823.

Triangulace

Triangulace byla zajištěna sběrem vypracovaných digitální listů, nahráváním badatelské práce do videozáznamů a osobními zápisky.

Kontrola pomocí účastníků studie

Kontrola pomocí účastníků studie byla formou závěrečné společné diskuse, na základě níž byly učiněny závěry zejména v oblasti žákovského hodnocení experimentů.

Úplnost zprávy

Vedle informací zde uvedených jsou k této diplomové práci přiloženy datové nosiče, na nichž jsou veškerá shromážděná data, pracovní soubory (GeoGebra) – pracovní listy, přehledy a tabulky, jak dokládá Příloha 5.

2.7.2. Limity výzkumu

Průběh výzkumu do značné míry závisel na organizačně provozních záležitostech. Nebýt pozitivního stanoviska školy a kooperativního přístupu učitelského kolektivu, jistě by čtyřtýdenní výzkum se čtyřmi třídami o celkem šestnácti hodinách nebyl proveditelný. Relativně vysoká saturace výzkumu byla docílena souhlasným stanoviskem více 90 % zákonných zástupců, což umožnilo shromáždit na 86 sad výzkumných dat, tedy dostatečné množství k tomu, aby závěry mohly být jednoznačné. Většina žáků byla motivovaná k experimentování, což bylo rovněž důležitým prvkem saturace. Dalším limitem byla úroveň technické základny (počítačové učebny a další infrastruktury), která byla nejen dostačující, ale ve výsledku umožnila hladký průběh výzkumu. Samotný systém dynamického prostředí GeoGebra se též osvědčil při žákovské práci i v rámci přípravy, nebylo zaznamenáno významných technických obtíží. Významným limitem nakonec byla enormní časová náročnost výzkumu nejen na přípravu, organizaci a provedení, ale též na zpracování dat. Samotné zpracování dat trvalo přibližně 90 minut na jednu sadu dat,[133] což činí více než 380 hodin. Celkem výzkum při započítání všech aktivit zabral odhadem 70 pracovních dní.

[133] Jedna sada je tvořena výzkumnými daty jednoho žáka z jednoho sezení.

2.7.3. Diskuse výsledků výzkumu

Z výše uvedené interpretace výzkumných výsledků vyplývá, že žáci jsou schopni samostatně experimentovat v prostředí dynamické geometrie a sami hledat řešení úloh. To ale nelze očekávat ode všech účastníků, protože se ukazuje, že motivace je klíčovým faktorem. Nejefektivnější nápovědou směrem k řešení se ukázala být nápověda animací, což může být způsobeno strukturou geometrické úlohy, nebo její větší názorností přístupnější žákovskému chápání oproti ostatním druhům nápověd. Četnost volby určitého druhu nápovědy však může být bez vztahu k řešení úlohy, jak vypovídá Tabulka úspěšných a částečných řešitelů.

Úspěšné řešení úlohy závisí na několika faktorech: znalosti a vědomosti, matematická, informatická a čtenářská gramotnost, motivace a dostatek času. Sociální interakce hrály roli pouze v diskusi, žáci byli při individuálních badatelských činnostech disciplinovaní.

Navzdory tomu, že forma úloh i pracovní prostředí byly zcela nové, demotivovaných žáků byla menšina. Zvídavost většiny umožnila experimentování provést a dokončit, aniž by bylo nutné do dění významně zasahovat. Z toho hlediska lze tvrdit, že heuristický experiment je realizovatelný i v geometrii.

Ze společných diskusí vyplývá, že žáci mají zájem o badatelské vyučování, rovněž o prostředí dynamické geometrie, na druhou stranu pociťovali jako negativní přílišnou náročnost některých úloh. Hodnotili jejich zadání jako nepochopitelná, nebo příliš náročná k porozumění. Z toho lze soudit, že proces matematizace, případně geometrické objektivace, je pro žáky 6. ročníku příliš abstraktní a pro mnohé neproveditelný.

Didaktika žákovského experimentování je rozhodně přínosná a realizovatelná, nicméně její příprava a rovněž práce v psychosociální oblasti, jako je motivace či závěrečná diskuse, jsou velmi časově náročné.

2.8. Závěry šetření

Na uvedené výzkumné otázky se podařilo odpovědět:

1) Žáků, kteří zcela autonomně objevují bez pomoci a nápověd, je menšina (viz Tabulka úspěšně řešící žáci). Ostatní využívají nápověd, přičemž většina dojde alespoň k částečnému řešení.
2) V praxi výzkumu se osvědčila nápověda animací v doprovodu nápovědy pomocným objektem (obrázkem). Textová nápověda byla nejméně používanou.
3) Demotivovaní žáci úlohy neřešili bez ohledu na nápovědy, ovšem byli tací, kteří si pročetli zadání i nápovědy, ale do řešení se nepustili. Motivovaní se dělili na ty, kteří chtěli bádat zcela samostatně a bez nápověd a na většinu těch, kteří bez zábran využili potřebnou nápovědu.
4) Většina žáků hodnotila experimentování v prostředí dynamické geometrie pozitivně. Konstatovali náročnost úloh, ale zároveň zájem o další podobné vyučování.

Z pozorování žáků při experimentování vyplynulo:

- Konstrukční chyby žáků v začátcích vznikají na základě rozdílu práce v dynamickém prostředí a rýsování na papír.
- Žáci mají problém slovně formulovat řešení geometrických úloh.
- Prostředí dynamické geometrie GeoGebra je pro ně vhodné a snadno použitelné.
- Proces matematizace je příliš náročný na to, aby jej žáci uskutečnili zcela autonomně.
- Vybrané části učiva lze touto metodou vyučovat.

Z žákovských dotazníků bylo zjištěno, že s přibývajícími zkušenostmi roste motivace k řešení jednotlivých úloh. Skupina úloh, kde zadáním je složitější situace s cílem zadaným jen obecně, případně ne zcela konkrétně, byla pro motivované žáky lákavou výzvou, ačkoliv bylo jejich řešení obtížné.

Závěr

Výuka geometrie na základní škole je disciplínou, která si žádá svůj vlastní originální přístup, protože je sice inherentní součástí kurikula matematiky, nicméně její edukace je specifická. Snoubí se v ní tisíciletá tradice s nejmodernějšími vědeckými i výukovými prostředky, jako je například prostředí dynamické geometrie. To nabízí okamžitou interaktivitu, efektivitu vyučování, možnost experimentování, sdílení poznatků i práce nezávisle na hranicích.

Abychom zjistili, zda jsou žáci druhého stupně základní školy schopni samostatně experimentovat v prostředí dynamické geometrie, bylo třeba prostudovat didaktické metody, odhalit teoretickou podstatu matematického poznávání geometrických objektů (matematizace) a rovněž se rozhodnout pro vhodné technické prostředky k realizaci.

Realizace zamýšleného výzkumu, který měl odpovědět na otázky: jak žáci experimentují při hledání řešení v prostředí dynamické geometrie; jaký druh dopomoci a nápovědy jim poskytnout, aby bádali úspěšně a samostatně; jak souvisí motivace k samostatnému řešení úlohy s použitím nápovědy; jak žáci hodnotí experimentování v prostředí dynamické geometrie; se odehrála na základní škole ZŠ Zdenky Braunerové Roztoky, příspěvková organizace, během čtyř květnových týdnů roku 2019 ve všech třídách šestého ročníku.

V rámci přípravy probíhalo nejen studium teoretických předpokladů, ale též sestavování výzkumných materiálů a organizace. Z plejády didaktických metod byl zvolen žákovský experiment v rámci badatelsky orientovaného vyučování. Z nabídky druhů experimentů byl zvolen heuristický model, který si žádá od žáků aktivní a samostatné objevování. Z toho důvodu byly vytvořeny digitální pracovní listy pro použití v systému GeoGebra, v nichž se nalézaly úlohy inspirované matematickými olympiádami a předpokládalo se, že budou pro žáky výzvou, se kterou se dosud nesetkali.

V prvním týdnu proběhly pilotní experimenty, během nichž se žáci učili zacházet se systémem GeoGebra a byli jim představeny způsoby badatelských činností. V následujících šestnácti sezení pak žáci samostatně a individuálně experimentovali při řešení náročných úloh, k čemuž jim sloužily nápovědy. Výzkum sledoval četnost použití a efektivitu nápověd, které byly strukturovány do třech druhů: textová nápověda, nápověda pomocným objektem, nápověda animací. Většina žáků nápovědy používala, nicméně byli i tací, kteří chtěli bádat bez pomoci. Nejčastěji používanou nápovědou byla forma názorné animace.

Výzkum došel jednoznačných závěrů: 1) Žáci samostatně bádají v prostředí dynamické geometrie a získávají zkušenosti; 2) Předpoklad použitelnosti nápověd se naplnil, nicméně největší efektivita směrem k řešení byla zaznamenána u nápověd animací; 3) Motivace žáků se ukázala jako klíčovým faktorem autonomního experimentování; 4) Většina žáků hodnotí experimentování v prostředí dynamické geometrie pozitivně.

Výzkum lze považovat za úspěšný, nicméně se neobešel bez jisté limitace. Samotné vyhodnocení výzkumných dat zabralo přibližně 380 pracovních hodin, přičemž celý výzkum včetně všech nutných činností si vyžádal cca 70 pracovních dní. Bez podpory vedení školy, učitelského sboru, zákonných zástupců i samotných žáků by nebylo myslitelné výzkum uskutečnit.

Za pozitivum provedeného výzkumu lze považovat expozici všech zúčastněných metodou badatelsky orientovaného vyučování navíc v netradičním prostředí dynamické geometrie GeoGebra, které je na škole využíváno pouze ve volitelných předmětech. Žákovská odezva byla z velké většiny kladná. V diskusích, které byly na závěr každého setkání, žáci sdělovali, že mají zájem o badatelské vyučování, rovněž o prostředí dynamické geometrie, na druhou stranu pociťovali jako negativní přílišnou náročnost některých úloh. Hodnotili jejich zadání jako nepochopitelná, nebo příliš náročná k porozumění. Z toho lze soudit, že proces matematizace, případně geometrické objektivace, je pro žáky 6. ročníku příliš abstraktní a pro mnohé neproveditelný.

Z hlediska organizátora výzkumu hodnotím patrný didaktický přínos pro většinu aktérů experimentů. Ačkoliv se několik jedinců stavělo k bádání odmítavě, významně to nenarušilo jeho průběh. Dynamika žákovské motivace sice kolísala, ale ukázalo se, že nosnou silou v badatelských činnostech je přirozená zvídavost. To odpovídá pedagogické teorii scaffoldingu a rovněž teorii projektového vyučování v pojetí Williama Hearda Kilpatricka.

Uvedené pedagogické teorie se ve výzkumu uplatnily všechny. Instrumentace podle Johna Deweyho byla patrná na získávání zkušeností, které byly zaznamenány především ve druhém a třetím výzkumném týdnu. Pragmatický přístup se manifestoval v práci s nápovědami, pomocí nichž žáci dosahovali úspěchů a tedy vnitřního uspokojení. Instrumentalistický přístup byl reprezentován variacemi v úlohách a bylo pozorováno, jak se zlepšuje efektivita jejich řešení. Projektové vyučování bylo pojato spíše formou woodvartovského projektu, jenž počítá z předchozími znalostmi a dovednostmi, ale zároveň bylo důležité žáky exponovat novými problémy, jako se podobně řeší v tzv. problémovém vyučování. V inspiraci scaffoldingem byla struktura úloh intencionálně stavěna jako pomocná struktura, pomocí níž budou žáci samostatně bádat a postupně usilovat i o řešení náročných úloh. Z freinetovské pedagogiky byla čerpána inspirace pro práci se sociálním prostředím umožňujícím svobodné a přitom intenzivní individuální bádání a zároveň vodítka pro otevřenou diskusi, v níž žáci hodnotili své výkony.

Ačkoliv je matematizace a ruku v ruce s ní geometrická objektivace (vizualizace, geometrizace) velmi náročným kognitivním procesem vyžadujícím abstraktní myšlení, lze dosáhnout významných edukativních úspěchů při použití vhodných pedagogických metod, jako je například badatelsky orientované vyučování. To se obyčejně uplatňuje především v přírodovědných předmětech, ale v poslední době si nalézá širší uplatnění i ve výuce matematiky. Prostředí dynamické geometrie pro to nabízí ideální prostředí.

Seznam literatury a použitých informačních zdrojů

Monografie

BERTRAND, Yves. *Soudobé teorie vzdělávání.* Praha: Portál, 1998. Studium (Portál).

BRUNER, Jerome. *Actual Minds, Possible Worlds.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1986.

ČAPEK, Robert. *Moderní didaktika: lexikon výukových a hodnoticích metod.* Praha: Grada, 2015. Pedagogika (Grada).

DEWEY, John. *Democracy and Education.* 1916. New York: The Macmillan Company. Dostupné z: Wikisource: https://en.wikisource.org/wiki/Democracy_and_Education/Chapter_I#The_Place_of_Formal_Education

DEWEY, John. *Experience and Nature*. New York: Dover Publications, 2018.

DOSTÁL, Jiří. *Badatelsky orientovaná výuka: kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015.

DVOŘÁKOVÁ, Markéta. *Základní učebnice pedagogiky.* Praha: Grada, 2015. Pedagogika (Grada).

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu.* 2., aktualizované vydání. Praha: Grada, 2016. Pedagogika (Grada).

KOLÁŘ, Zdeněk a Renata ŠIKULOVÁ. *Hodnocení žáků.* 2., dopl. vyd. Praha: Grada, 2009. Pedagogika (Grada).

KOLÁŘ, Zdeněk. *Výkladový slovník z pedagogiky: 583 vybraných hesel.* Praha: Grada, 2012.

OKOŃ, Wincenty. *K základům problémového učení.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-410-0.

PATOČKA, JAN. *Češi II. Sebrané spisy.* Praha: Oikoymenh, 2006.

PELIKÁN, J. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů.* Praha: Karolinum, 1998.

PRŮCHA, Jan. *Moderní pedagogika.* 2., přeprac. a aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2002.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník.* Praha: Portál, 2003.

PRŮCHA, Jan, ed. *Pedagogická encyklopedie.* Praha: Portál, 2009.

REJZEK, Jiří. *Český etymologický slovník.* Třetí vydání (druhé přepracované a rozšířené vydání). Praha: Leda, 2015

STÖRIG, Hans Joachim. *Malé dějiny filozofie.* Praha: Vyšehrad, 1999.

VALIŠOVÁ, Alena, Hana KASÍKOVÁ a Miroslav BUREŠ. *Pedagogika pro učitele.* 2., rozš. a aktualiz. vyd. Praha: Grada, 2011. Pedagogika (Grada).

VOPĚNKA, Petr. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci: souborné vydání Rozprav s geometrií.* 2. vyd. Praha: Práh, 2001.

VYGOTSKIJ, Lev. *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes.* Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, London, England, 1978.

Učebnice pro základní školu

BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Zdeněk PŮLPÁN a Michal ČIHÁK. *Matematika 6: pro základní školy.* Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007.

Příspěvek ve sborníku

HENDL, Jan, *Kvalitativní pedagogický výzkum* In PRŮCHA, Jan. Praha: Portál, 2009, s. 819-823.

Seriálové publikace (zpravodaje atd.)

VYŠÍN, Jan, Vlastimil MACHÁČEK a František ZÍTEK. *Sedmnáctý. ročník matematické olympiády: Zpráva a řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1967-1968*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

VYŠÍN, Jan a Rudolf ZELINKA. *Třináctý ročník matematické olympiády: Zpráva a řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1963-1964*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

VYŠÍN, Jan, František ZÍTEK, Josef MORAVČÍK, Lev BUKOVSKÝ a Jiří MÍDA. *Dvacátý šestý ročník matematické olympiády na základních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976.

MORAVČÍK, Josef, Leo BOČEK, Lev BUKOVSKÝ, Miroslav FIEDLER, Antonín VRBA, Jan VYŠÍN a František ZÍTEK. *Dvacátý osmý ročník matematické olympiády*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.

MORAVČÍK, Josef, Leo BOČEK, Lev BUKOVSKÝ, Antonín VRBA, Jan VYŠÍN a František ZÍTEK. *Dvacátý devátý ročník matematické olympiády na základních školách: Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1979-80*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982.

KOMAN, Milan, Leo BOČEK, Franrišek ZÍTEK a Vladimír REPÁŠ. *Třicátý pátý ročník matematické olympiády na základních školách: Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1985/86*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

BUKOVSKÝ, Lev, Jiří MÍDA, Milan KOMAN a Vladimír REPÁŠ. *Třicátý šestý ročník matematické olympiády na základních školách: Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1986/87*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

KOMAN, Milan a Vladimír REPÁŠ. *Třicátý devátý ročník matematické olympiády na základních školách: Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1989/90*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992.

Článek v časopisu (i elektronickém)

Scientia in educatione 6(1), 2015, SAMKOVÁ, Libuše, HOŠPESOVÁ, Alena, ROUBÍČEK, Filip, TICHÁ, Marie. *Badatelsky orientované vyučování matematice* p. 91–122, Dostupné z: https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/154/145. [Citováno 20.3.2021].

DOSTÁL, Jiří, *Experimentování žáků při výuce – nové možnosti a perspektivy.* Odborné články a statě, Pedagogická fakulta UP, Olomouc, 2014.

WWW stránka, elektronická monografie

DOSTÁL, Jiří. *Experiment jako součást badatelsky orientované výuky.* Přednáška, Pedagogická fakulta UP, Olomouc, 2013, Dostupné z: https://tvv-journal.upol.cz/pdfs/tvv/2013/01/02.pdf [Citováno 29.3.2021]

GODFREY-SMITH, Peter, *John Dewey's Experience and Nature*, City University of New York, 2013

JANČAŘÍK, Antonín. 2012, *Geometrie, GeoGebra a potřeba přesnosti.* Článek na Metodickém portálu rvp.cz. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14871/geometrie-geogebra-a-potreba-presnosti.html/ [Citováno 4.4.2021].

KNOLL, Michael, *The Project Method: Its Vocational Education Origin and International Development.* University of Bayreuth, Bayreuth, 1997.

ROTHSTEIN, Stephanie, ROWELL, Lainie. *Discover, Discuss, Demonstrate: Using Inquiry-Based Learning to Keep Students Engaged,* 2021, edutopia.org, Dostupné z https://www.edutopia.org/article/discover-discuss-demonstrate-using-inquiry-based-learning-keep-students-engaged, [Citováno 19.3.2021].

TEREZA, vzdělávací centrum, z. ú., *Badatelé.cz: O metodě BOV.* Praha: Sdružení Tereza, Dostupné z: http://badatele.cz/cz/o-metode [Citováno 19.3.2021].

TEREZA, vzdělávací centrum, z. ú., kolektiv autorů. *Pět kroků, Příručka pro badatele, kteří chtějí měnit svět.* Praha: Sdružení Tereza, 2019. Dostupné z: http://badatele.cz/cz/metodicke-materialy-pro-zs [Citováno 19.3.2021].

TEREZA, vzdělávací centrum, z. ú., kolektiv autorů. *Průvodce pro učitele*

badatelsky orientovaným vyučováním. Praha: Sdružení Tereza, 2013. Dostupné z: http://badatele.cz/cz/metodicke-materialy-pro-zs [Citováno 19.3.2021].

VAŠÍČEK, Jiří: *Thomas S. Kuhn, Struktura vědeckých revolucí, paradigma a relativita vědeckého poznání,* Antropoweb, 2005, Dostupné z: http://www.antropoweb.cz/media/webzin/webzin_02_2005/02_vasicek.pdf, [Citováno 10.3.2021]

VOTÁPKOVÁ, Dana, ed. *Badatelé.cz: průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním.* Praha: Sdružení Tereza, 2013. Dostupné z badatele.cz [Citováno 19.3.2021].

SVOBODA, Emanuel. *Didaktika Fyziky, Didaktické funkce experimentů.* Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/didaktika/DF_POKUSY.pdf, [Citováno 29.3.2021].

Bakalářské, diplomové a další graduační práce

MICHALOVIČOVÁ, Zuzana. Problémové úlohy ve výuce matematiky na základní škole. Bakalářská práce, vedoucí práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, 2016. 103 s.

PRIŠČÁKOVÁ, Laura. Problémové vyučování ve výuce dějepisu. Bakalářská práce, vedoucí práce: PhDr. Ivana Tvrzová. Praha: Univerzita Karlova, Filozofická fakulta, Katedra pedagogiky, Praha, 2019. 77 s.

SVÁTKOVÁ, Barbora. Badatelský způsob výuky na ZŠ. Diplomová práce, vedoucí práce: doc. RNDr. Václav Vančatai, CSc.. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2015. 98 s.

ŠŤASTNÁ, Barbora. Inteligentní sbírka úloh z euklidovské geometrie. Diplomová práce, vedoucí práce: RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta informatiky, 2006. 86 s.

Seznam příloh

Příloha 1 - PISA 2012 - Vztah mezi matematickými postupy a základními matematickými dovednostmi

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost ČŠI Česká školní inspekce
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obrázek 1.2
Vztah mezi matematickými postupy a základními matematickými dovednostmi

	Formulování situací matematicky	*Používání* matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování	*Interpretování*, aplikace a hodnocení matematických výsledků
Komunikace	Čtení, porozumění výrokům, otázkám, úkolům či objektům, obrázkům a animacím (v případě testování na počítači) s cílem vytvořit mentální model situace.	Zformulování řešení, prezentace postupu vedoucího k řešení nebo shrnutí a prezentace průběžných matematických výsledků.	Formulace a prezentace vysvětlení a argumentů v rámci daného problému.
Matematizace	Určení matematických proměnných a struktur v problémové situaci z běžného života a vyslovení předpokladů, které lze použít.	Využití porozumění kontextu jako vodítka či usnadnění matematického řešitelského procesu, např. práce na takové úrovni přesnosti, která je daná kontextem.	Pochopení platnosti a omezení matematického řešení, obojí souvisí se zvoleným matematickým modelem.
Reprezentace	Matematická reprezentace informací z reálného světa.	Využití forem reprezentace, propojení různých forem reprezentace.	Interpretace matematických výsledků různým způsobem v rámci situace nebo konkrétního použití; porovnání a zhodnocení dvou nebo více forem reprezentace v rámci dané situace.
Uvažování a argumentace	Vysvětlení, obhajoba, odůvodnění objevené nebo odvozené reprezentace problému z reálného světa.	Vysvětlení, obhajoba, odůvodnění postupů použitých při hledání matematického výsledku nebo řešení. Nalezení souvislostí mezi izolovanými údaji, při hledání řešení, zobecňování nebo vytvoření vícekrokové argumentace.	Reflexe matematických řešení, tvorba a vysvětlení argumentů, které obhajují nebo vyvracejí matematické řešení problémové situace z reálného světa.
Navržení strategií řešení problému	Výběr nebo navržení plánu či strategie, které dají matematický rámec kontextualizovanému problému.	Aktivizace efektivních a stálých kontrolních mechanizmů ve všech fázích komplexního procesu, který vede k matematickému řešení, závěru nebo zobecnění.	Navržení a implementace strategie, která umožní interpretovat, zhodnotit a ověřit matematické řešení kontextualizované úlohy.
Používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací	Používání vhodných proměnných, symbolů, diagramů a standardních modelů pro reprezentaci situace z reálného světa symbolickým/formálním jazykem.	Porozumění formálním konstruktům, které vyplývají z definic, pravidel i formálních systémů a používání algoritmů, a jejich aplikace.	Porozumění vztahu mezi kontextem problému či úlohy a reprezentací matematického řešení. Využití tohoto porozumění při interpretaci řešení v kontextu a při posuzování proveditelnosti a omezení řešení.
Používání matematických nástrojů	Používání matematických nástrojů pro určení matematické struktury nebo pro zachycení matematických vztahů.	Znalost a schopnost vhodně používat různé nástroje, s jejichž pomocí lze implementovat postupy matematického řešení.	Používání matematických nástrojů pro zjištění smysluplnosti matematického řešení a pro zjištění omezení takového řešení v kontextu daného problému či situace.

Příloha 2 - ŠVP Škola porozumění - Učivo geometrie v 6. ročníku

Soubor byl z důvodu ochrany autorských práv anonymizován. Příloha slouží pouze k ilustraci pro účely diplomové práce.

ŠVP ZV Škola porozumění
Učební osnovy 2. stupeň

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU				
M-9-3-01	• využívá při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů vzájemnou polohu dvou přímek v rovině • při řešení problému provádí rozbor (náčrt) úlohy a rozhodne, zda zvolí pro řešení známý algoritmus, nebo řešit úlohu úsudkem • rozpozná shodné geometrické útvary • používá příslušnou matematickou symboliku	• Vzájemná poloha dvou přímek v rovině • Shodnost geometrických útvarů	OSV - Osobnostní rozvoj: Rozvoj smyslového vnímání, pozornosti a soustředění; Cvičení dovednosti zapamatování; Dovednosti pro učení	Č: Souměrnost písmen, písma, souměrnost v českém jazyce
M-9-3-02	• rozezná základní rovinné útvary • rozlišuje a používá různé druhy čar • modeluje úhel pomocí poloroviny, rozlišuje druhy úhlů podle velikosti • charakterizuje vlastnosti dvojic úhlů • používá pro označení úhlů písmena řecké abecedy • třídí a popisuje trojúhelníky • charakterizuje a používá vlastnosti úhlu v trojúhelníku, vlastnosti výšky a těžnice v trojúhelníku • vysvětlí pojem pravidelný mnohoúhelník	• Základní rovinné útvary • Druhy čar • Úhel a jeho velikost • Druhy trojúhelníků • Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku • Výšky, střední příčky, těžnice a těžiště trojúhelníku • Pravidelný mnohoúhelník		
M-9-3-03	• určuje velikosti úhlů pomocí úhloměru a výpočtem • využívá vlastnosti dvojic úhlů • používá jednotky velikosti úhlu a převody mezi nimi • sčítá, odčítá, násobí a dělí úhly	• Jednotky velikosti úhlů • Operace s úhly		

61

ŠVP ZV Škola porozumění
Učební osnovy 2. stupeň

	graficky i početně			
M-9-3-04	• používá a převádí jednotky délky a obsahu • odhaduje a vypočítá obvod a obsah čtverce, obdélníku a trojúhelníku	• Obsah a obvod čtverce, obdélníku, trojúhelníku	OSV - Osobnostní rozvoj: Rozvoj smyslového vnímání, pozornosti a soustředění; Cvičení dovednosti zapamatování; Dovednosti pro učení	F: Látky a tělesa
M-9-3-06	• sestrojí a přenese úhly, porovná dva úhly • sestrojí výšky, těžnice a střední příčky v trojúhelníku • sestrojí čtyřúhelník s využitím rovnoběžnosti a kolmosti přímek	• Konstrukce rovinných útvarů • Výšky, těžnice a těžiště trojúhelníku, střední příčky		F: Síly
M-9-3-04	• vysvětlí pojem shodnost trojúhelníků, matematicky jej vyjádří • používá věty o shodnosti trojúhelník • sestrojí trojúhelník ze zadaných údajů sss, sus, usu	• Věty o shodnosti trojúhelníku		
M-9-3-08	• přiřadí k sobě vzor a obraz • rozezná samodružný bod • charakterizuje osově souměrné a středově souměrné útvary • sestrojí osu úhlu a úsečky • rozpozná útvary souměrné podle osy a podle středu • sestrojí obraz rovinného útvaru v osové a středové souměrnosti	• Osová souměrnost • Středová souměrnost	VMEGS - Evropa a svět nás zajímá (osová souměrnost v architektuře a přírodě)	Rozšiřující učivo: Posunutí
M-9-3-09	• charakterizuje krychli a kvádr • využívá při řešení úloh metrické a polohové vlastnosti krychle a kvádru	• Krychle a kvádr	VMEGS - Evropa a svět nás zajímá (tělesa v architektuře a přírodě)	
M-9-3-10 **M-9-3-11**	• používá a převádí jednotky délky, obsahu a objemu • odhaduje a vypočítá povrch a objem	• Povrch a objem krychle a kvádru • Síť krychle a kvádru	OSV - Osobnostní rozvoj: Rozvoj smyslového vnímání, pozornosti a	F: Látky a tělesa

62

Příloha 3 - Tabulky výzkumných dat

V tabulkách jsou kategorizovaná výzkumná data z 86 sad dat shromážděných při žákovských experimentech v I. až III. výzkumném týdnu.

Tabulka 1 – Úspěšnost žáků v řešení úloh

	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
Neřešící	12% (10)	15% (13)	15% (13)	10% (8)	16% (13)	18% (14)	4% (3)	12% (10)	15% (12)
Částečně řešící	15% (13)	54% (46)	68% (58)	8% (6)	43% (34)	63% (50)	10% (8)	45% (37)	66% (54)
Úspěšní řešitelé	73% (62)	31% (26)	17% (14)	82% (65)	41% (32)	19% (15)	86% (71)	43% (35)	19% (16)

Legenda: Neřešící žáci jsou ti, kteří vůbec neřešili. Částečně řešící jsou ti, kteří dosáhli částečného úspěchu. Úspěšní řešitelé jsou ti, kteří úlohu vyřešili a správně odpověděli.

Tabulka 2 – Použití nápověd u neřešících žáků

Neřešící žáci	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
bez nápovědy	–	–	–	3	3	3	3	3	3
T	–	–	–	–	–	–	–	–	–
TP	–	–	–	–	–	–	–	–	–
TPA	10	13	13	4	8	8	–	–	–
TA	–	–	–	–	–	–	–	–	–
TAP	–	–	–	–	–	–	–	–	–
P	–	–	–	–	–	–	–	–	–
PT	–	–	–	–	–	–	–	–	–
PTA	–	–	–	–	–	–	–	–	–
PA	–	–	–	–	–	–	–	2	2
PAT	–	–	–	–	–	–	–	–	–
A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
AT	–	–	–	–	–	–	–	–	–
ATP	–	–	–	–	–	–	–	–	–
AP	–	–	–	–	–	–	–	–	–
APT	–	–	–	1	2	3	–	5	7

Legenda: T – pouze textová nápověda (dále n.); TP – textová n. a později n. pomocným objektem; TPA – nápovědy v pořadí textová, pomocným objektem, animací; TA – textová n. a později n. animací (vynechaná nápověda pomocným objektem); textová n., později n. animací, nakonec n. pomocným objektem; P – pouze n. pomocným objektem; PT – n. pomocným objektem a pak textová n.; PTA – n. pomocným objektem, textová n., n. animací; A – pouze n. animací; AT – n. animací, pak n. textová; ATP – n. animací, pak n. textová, nakonec n. pomocným objektem; AP – n. animací, pak n. pomocným objektem; APT – n. animací, n. pomocným objektem, pak textová n.

Tabulka 3 – Použití nápověd u částečně řešících žáků

Žáci s částečným úspěchem	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
bez nápovědy	1	1	1	–	–	–	–	–	–
T	–	–	–	–	–	–	–	–	–
TP	1	1	–	1	2	–	–	1	2
TPA	5	10	22	1	6	12	2	6	7
TA	–	–	–	–	2	4	–	–	–
TAP	1	2	2	–	3	1	–	2	2
P	–	1	1	–	–	1	–	–	2
PT	–	–	–	–	–	–	–	–	–
PTA	1	3	3	–	2	2	–	2	4
PA	–	1	2	–	1	1	–	1	4
PAT	1	5	5	–	2	4	2	4	6
A	–	2	1	–	–	2	–	–	1
AT	–	–	–	–	–	–	–	–	–
ATP	1	8	9	–	2	1	–	2	3
AP	–	2	3	2	3	3	3	9	11
APT	2	10	9	2	11	19	1	10	12

Legenda: T – pouze textová nápověda (dále n.); TP – textová n. a později n. pomocným objektem; TPA – nápovědy v pořadí textová, pomocným objektem, animací; TA – textová n. a později n. animací (vynechaná nápověda pomocným objektem); textová n., později n. animací, nakonec n. pomocným objektem; P – pouze n. pomocným objektem; PT – n. pomocným objektem a pak textová n.; PTA – n. pomocným objektem, textová n., n. animací; A – pouze n. animací; AT – n. animací, pak n. textová; ATP – n. animací, pak n. textová, nakonec n. pomocným objektem; AP – n. animací, pak n. pomocným objektem; APT – n. animací, n. pomocným objektem, pak textová n.

Tabulka 4 – Použití nápověd u úspěšně řešících žáků

Žáci s plným úspěchem	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
bez nápovědy	5	3	1	9	2	1	8	2	–
T	2	–	–	–	–	–	2	–	–
TP	5	1	–	1	–	–	–	1	2
TPA	18	6	5	3	4	3	5	3	1
TA	1	–	–	2	1	–	–	–	–
TAP	4	2	–	4	3	1	4	1	2
P	–	–	–	–	–	–	2	1	–
PT	1	–	–	3	–	–	–	–	–
PTA	4	2	1	6	2	1	2	2	1
PA	1	1	–	3	1	–	8	1	–
PAT	4	2	3	6	1	2	10	4	2
A	1	–	–	3	2	–	3	3	–
AT	1	–	–	–	–	–	2	–	–
ATP	4	3	1	5	2	–	2	2	–
AP	2	1		7	6	3	16	9	5
APT	9	5	3	13	8	4	7	6	3

Legenda: T – pouze textová nápověda (dále n.); TP – textová n. a později n. pomocným objektem; TPA – nápovědy v pořadí textová, pomocným objektem, animací; TA – textová n. a později n. animací (vynechaná nápověda pomocným objektem); textová n., později n. animací, nakonec n. pomocným objektem; P – pouze n. pomocným objektem; PT – n. pomocným objektem a pak textová n.; PTA – n. pomocným objektem, textová n., n. animací; A – pouze n. animací; AT – n. animací, pak n. textová; ATP – n. animací, pak n. textová, nakonec n. pomocným objektem; AP – n. animací, pak n. pomocným objektem; APT – n. animací, n. pomocným objektem, pak textová n.

Tabulka 5 – Přehled motivace dle dotazníku a délky času stráveného u nápovědy

průměrný čas na nápovědě podle motivace k řešení úlohy	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
	Motivace 1 (nejnižší)								
T	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s
P	1,5 s	1,5 s	1,5 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s	0 s
A	2 s	2 s	3 s	3 s	3,2 s	3 s	2,2 s	3,2 s	1,6 s
	Motivace 2*								
T	1,3 s	0 s	0 s	–	–	–	–	–	–
P	2,3 s	2,2 s	2,4 s	–	–	–	–	–	–
A	3 s	3 s	3,2 s	–	–	–	–	–	–
	Motivace 3								
T	1,7 s	1,9 s	2,2 s	1,2 s	2,2 s	2,3 s	1,3 s	2,4 s	2,5 s
P	3,1 s	3,2 s	3,1 s	3,2 s	3,3 s	4,1 s	3,8 s	4,1 s	4 s
A	5,7 s	6 s	6,4 s	3,8 s	3,2 s	3,5 s	3,2 s	3,8 s	2,7 s
	Motivace 4								
T	2,3 s	3,3 s	3,2 s	2,2 s	2,8 s	3,1 s	1,8 s	2,8 s	3,1 s
P	3,6 s	4,1 s	4,6 s	4,3 s	4,5 s	4,1 s	4,1 s	4,3 s	3,4 s
A	5,9 s	6 s	6,4 s	4,1 s	4,6 s	3,5 s	4,4 s	4,2 s	3,8 s
	Motivace 5 (nejvyšší)								
T	2,8 s	3,9 s	3,7 s	2,5 s	3,1 s	3,2 s	1,8 s	3,1 s	3,1 s
P	4,2 s	4,8 s	6,5 s	4,4 s	4,8 s	4,3 s	4,4 s	4,6 s	4,8 s
A	5,9 s	6 s	6,4 s	4,2 s	4,6 s	4,7 s	4,8 s	4,8 s	4,2s

Legenda: T – textová nápověda (dále n.); P – n. pomocným objektem; A – n. animací;

* Pozn: Díky vyhranění žáků k práci se druhá nejnižší motivace k úloze v pozdějších sezeních neobjevila.

Tabulka 6 – Efektivita nápovědy směrem k částečnému řešení úlohy

Nápověda užitá pro přechod k částečnému řešení	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
nerozlišeno	16	19	16	9	6	6	4	5	5
bez nápovědy	10	21	13	47	28	12	49	29	15
T	12	8	10	3	6	12	5	5	10
P	15	10	15	5	12	15	9	12	18
A	22	14	18	7	14	20	12	21	22

Legenda: T – textová nápověda (dále n.); P – n. pomocným objektem; A – n. animací;

Tabulka 7 – Efektivita nápovědy směrem k úplnému řešení úlohy

Nápověda užitá pro přechod k úplnému řešení	Sada 1			Sada 2			Sada 3		
	úl 1a	úl 1b	úl 1c	úl 2a	úl 2b	úl 2c	úl 3a	úl 3b	úl 3c
nerozlišeno	9	4	5	8	3	2	5	3	1
bez nápovědy	12	4	2	12	4	1	20	4	0
T	13	4	2	10	5	4	9	6	3
P	11	6	2	12	6	2	12	9	5
A	17	8	3	23	14	6	25	13	7

Legenda: T – textová nápověda (dále n.); P – n. pomocným objektem; A – n. animací;

Tabulka 8 – Motivace žáků k řešení úloh

Motivace žáků	Sada 1					Sada 2					Sada 3				
Motivace	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Vztah k matematice	8	12	38	18	9	8	10	35	16	10	3	9	41	19	10
Motivace k práci	6	12	40	19	8	8	8	40	15	8	3	7	44	19	9
Motivace k řešení problémů	6	10	48	15	6	8	10	39	17	5	3	8	46	17	8
Motivace k denní práci	4	9	38	20	14	8	6	30	20	15	3	5	33	22	19

Příloha 4 – Pracovní listy

Pracovní list 0 – Těžiště trojúhelníku – pro pilotní hodinu

Nultý pracovní list slouží pro položení základů pro budoucí experimenty. Cílem je naučit se zacházet s pracovními nástroji v prostředí dynamické geometrie GeoGebra a osvojit si principy řešení úloh. K tomu účelu je zvolena úloha konstrukce těžiště trojúhelníku z několika důvodů: prvním a nejdůležitějším je obeznámenost žáků s touto úlohou i konstrukcí; dalším důvodem je, že tato vzorová konstrukce umožňuje ukázat výhody a potřebné postupy práce v prostředí dynamické geometrie.

Součástí pracovního listu je krátký úvodní dotazník s jedinou otázkou na motivaci ke studiu. V rámci přípravy na další dotazníky jde o otevřenou otázku s řádkem pro slovní odpověď.

Pracovní list 1a – Osová souměrnost

Tento pracovní list je zaměřený na téma osové souměrnosti, které by žáci podle školního vzdělávacího plánu měli znát. V úloze je dán čtverec ABCD, přímka *o* a obraz čtverce v osové souměrnosti podle osy *o*. Úlohou pro žáky je potom pohybováním volnými body A a B zajistit, aby se úhlopříčky AC a A´C´ překrývaly. Pracovní list neobsahuje žádné nástroje kromě „Ukazovátka“ a „Pohybu s nákresnou“.

Textové nápovědy připomínají vlastnosti osové souměrnosti: kde se nacházejí samodružné body a samodružné přímky, stejně jako principy kolmosti.

Nápověda pomocným objektem načrtne šipkami směr pohybu jednotlivých vrcholů, nejprve navádí na řešení – kde úhlopříčka leží na ose, v druhé variantě – kde bude úhlopříčka kolmá na osu.

Nápověda animací ilustruje na dalším čtverci pohyb vzoru a obrazu, bez přechodu do obou poloh řešení.

Pro částečné řešení by měl žák dosáhnout alespoň jednoho z řešení. Pro úplné řešení žák by měl žák projít jak řešení, kdy úhlopříčka leží na ose, tak řešení, kdy úhlopříčka je kolmá na osu.

Pracovní list 1b – Přímka, rovina, vzájemná poloha přímek

Na zadané čtvercové síti mají žáci odvodit, jak přidávat přímky kolmé a rovnoběžné, aby vzniklých částí roviny bylo co nejméně. Úloha patří do skupiny, kde žáci mají formulovat slovní odpověď. Pracovní list obsahuje pouze nástroje pro práci s body a přímkami: Bod, Bod na objektu, Průsečík, Přímka, Kolmice, Rovnoběžka. Pro lepší znázornění byla sada nástrojů doplněna o Mnohoúhelník.

Textové nápovědy jsou zaměřeny na připomenutí zadání – zachování kolmosti/ rovnoběžnosti a nejmenšího počtu částí roviny při přidání další přímky.

Nápověda pomocným objektem v prvním a druhém kroku načrtne polohu dvou přímek (rovnoběžné a kolmé) a zvýrazní další dvě možnosti kam další přímku přidat. V třetím kroku potom nabídne žákovi tabulku, kam si může k počtu přímek vyplnit počet částí roviny.

Nápověda animací ilustruje pohybem v horizontálním směru změnu počtu částí roviny pro tři a v druhém kroku čtyři přímky splňující zadání.

Pro částečné řešení by měl žák navrhnout přidávání přímek pouze v jednom směru. Pro úplné řešení by měl i slovem popsat způsob, jak další přímky přidávat.

Pracovní list 1c – Úhly obecně, úhly trojúhelníku a čtyřúhelníku, opsaná kružnice

Na daném obecném čtyřúhelníku, který má pohyblivé vrcholy, mají žáci odvodit, kdy bude mít opsanou kružnici. Úloha patří do skupiny, kde žáci musí sami odvodit řešení, ověřit si domněnku a formulovat ji slovem. Z nástrojů jsou dostupné ty pro kružnice, osy a úhly.

Textové nápovědy vedou žáka přes opsané kružnice trojici vrcholů, přes pohyb a změnu úhlů při překrytí těchto kružnic, až k změně při pohybu jedním vrcholem spojeným se sčítáním velikostí úhlů.

Nápověda pomocným objektem zvýrazní osy stran pro zdůraznění protínání os, v druhém kroku potom stranou zobrazí velikosti vnitřních úhlů tak, aby se snadno sečetly.

Nápověda animací na vedlejším čtyřúhelníku ukazuje v prvním kroku čtyřúhelník, který jednoho vrcholu střídavě má a nemá opsanou kružnici, v druhém kroku potom na změnu velikosti vnitřních úhlů při pohybu vrcholu po opsané kružnici.

Pro částečné řešení by si žák měl všimnout, že při pohybu po opsané kružnici se mění velikost pouze sousedních úhlů. Pro úplné řešení by měl žák i pravidlo o součtu úhlů formulovat.

Pracovní list 2a – Těžiště, osa úhlu ve čtyřúhelnících

Žák má zadaný obecný čtyřúhelník s vyznačeným těžištěm. Úloha patří do skupiny řešených prostým pohybem a žák má nalézt nějaký čtyřúhelník, kde těžiště bude mimo plochu čtyřúhelníku. pracovní list umožňuje nástroje potřebné k hledání těžiště trojúhelníka.

Textové nápovědy vedou žáka k vědomí, že čtyřúhelník je složený z trojúhelníků a kde hledat jejich těžiště. V druhém kroku potom navádí žáka k myšlence, jak jedno z těžišť trojúhelníka dostat mimo čtyřúhelník.

Nápověda pomocným objektem v prvním kroku zvýrazní těžiště jednotlivých trojúhelníků a jejich vztah k těžišti čtyřúhelníku, v druhém kroku potom zvýrazní hranice trojúhelníků.

Nápověda animací ukazuje různé druhy čtyřúhelníků od pravoúhlého po nekonvexní.

Pro částečné řešení úlohy by měl žák objevit možnost nekonvexního čtyřúhelníku. Pro úplné řešení by měl žák dostat těžiště mimo plochu čtyřúhelníku.

Pracovní list 2b – Vzájemná poloha kruhu a přímky, tětivy

Téma se týká vzájemné polohy kruhu a přímky, tětiv, vzájemné polohy úseček a částí roviny. Na zadané kružnici mají žáci odvodit, jak přidávat tětivy do kruhu, aby částí kruhu bylo co nejvíce. Úloha patří do skupiny, kde žáci mají formulovat slovní odpověď. Pracovní list obsahuje pouze nástroje pro práci s body, nástroj „Přímka“ a „Úsečka“. Pro lepší znázornění byla sada nástrojů doplněna o „Mnohoúhelník“.

Textové nápovědy jsou vedou žáka k zamyšlení nad tím, kolik částí kruhu vznikne, když se umístí postupně jedna, dvě a více tětiv. Nápovědy také zdůrazní možnost pohybovat tětivami a s tím měnící se počet částí kruhu.

Nápověda pomocným objektem umístí jednu tětivu a barevně zvýrazní části kruhu, v druhém kroku umístí další tětivu a barevně zvýrazní čtyři nově vzniklé části kruhu. V posledním kroku se žákovi nabídne tabulka, s možností vyplnit k předepsanému množství tětiv počet částí kruhu.

Nápověda animací umístí dvě tětivy na kruh a ukazuje změnu polohy od rovnoběžnosti přes společný počátek až ke kolmosti. Vzniklé části kruhu nápověda nezvýrazňuje.

Pro částečné řešení by měl žák umístit alespoň tři tětivy za maximálního počtu částí kruhu. Pro úplné řešení by měl žák i formulovat, jak bude tětivy přidávat.

Pracovní list 2c – Souměrnost a izometrie čtverce

Tento pracovní list je zaměřený na téma souměrnosti a izometrií čtverce. Zadaný čtverec mají žáci rozdělit na čtyři shodné pětiúhelníky. Úloha patří do skupiny, kde si žáci mají samostatně odvodit řešení, ale není třeba slovní odpověď. Pracovní list má povolené nástroje pro práci s body, usečkami a přímkami a nástroje pro osovou a středovou souměrnost.

Textová část nápovědy vede žáka k úvaze jak rozdělit čtverec na čtyři shodné části. V dalším kroku navádí k poznání, jak se liší dělení na trojúhelníky, čtyřúhelníky a pětiúhelníky. V posledním kroku připomíná možnost rozdělení úsečky na dvě umístěním dalšího bodu.

Nápověda pomocným objektem v prvním kroku barevně zvýrazní rozdělení na čtyři shodné obdélníky a zvýrazní osy souměrnosti. V druhém kroku nabídne rozdělení na trojúhelník shodné podle osové souměrnosti.

Nápověda animací zdůrazňuje přechod mezi dělením na trojúhelníky a obdélníky za zachování shodnosti. V druhém kroku nápověda animuje přechod mezi obdélníky a pětiúhelníky, které naopak shodné nejsou.

Pro řešení by měl žák buď navrhnout rozdělení na pětiúhelníky, z nichž alespoň dva budou symetrické, nebo rozdělení na pětiúhelníky, ze kterých se symetrické dají udělat posunem po připravených úsečkách.

Pracovní list 3a – Vlastnosti čtyřúhelníků a úhlů, pravý úhel

Žák má na zadaném čtyřúhelníku se zvýrazněným úhlem mezi uhlopříčkami najít všechny možnosti, kdy úhlopříčky budou svírat pravý úhel. Úloha patří do skupiny řešených prostým pohybem. V tomto pracovním listu jsou povoleny nástroje pro práci s přímkami a nástroj „Mnohoúhelník".

Textové nápovědy vedou žáka k systematickému zkoumání jednotlivých čtyřúhelníků. V prvním kroku navrhuje dělení podle délek stran nebo podle vnitřních úhlů, v druhém kroku nápověda vypisuje čtyřúhelníky a v třetím připomíná zkoumat, zda daný druh mnohoúhelníku může, či nemůže mít kolmé úhlopříčky.

Nápověda pomocným objektem v prvním kroku zvýrazňuje délky stran a velikosti vnitřních úhlů, v druhém kroku potom spustí komice z vrcholů A a C na úhlopříčku BD.

Nápověda animací ukazuje různé druhy čtyřúhelníků při změně velikosti vnitřního úhlu u vrcholu A. Každý krok zobrazuje jiný z čtyřúhelníků, až poslední zobrazuje nekonvexní čtyřúhelník.

Pro částečné řešení by měl žák nalézt alespoň jeden další vyhovující čtyřúhelník mimo čtverce a kosočtverce. Pro úplné řešení by měl žák nalézt všechny.

Pracovní list 3b – Úhlopříčky v mnohoúhelníku a dělení roviny

Na připraveném čtyřúhelníku, pětiúhelníku, šestiúhelníku a šestiúhelníku měli žáci odvodit, kolik přidáním jednoho vrcholu do mnohoúhelníku přibude úhlopříček. Úloha patří do skupiny, kde žáci měli formulovat slovní odpověď. Pracovní list měl povoleny nástroje pro práci body, přímkami a mnohoúhelníky.

Textové nápovědy vedly k zamyšlení nad počtem vrcholů a počtem úhlopříček. Druhým rokem bylo připomenutí, zda tvrzení platí o mnohoúhelnících s větším počtem vrcholů.

Nápověda pomocným objektem v prvním kroku doplnila do zadaných mnohoúhelníků úhlopříčky a v druhém kroku barevně označila rozdíl v počtu úhlopříček od mnohoúhelníku s menším počtem vrcholů.

Nápověda animací přecházela mezi mnohoúhelníky se čtyřmi až sedmi vrcholy, kde se s postupným přidáváním počtu vrcholů barevně obarvovaly nově přidané úhlopříčky.

Pro částečné řešení musí žák zapsat do řešení, že počet úhlopříček roste rychleji než počet vrcholů. Pro úplné řešení by měl zapsat kolik úhlopříček přidáním vrcholu vznikne.

Pracovní list 3c – Vzájemná poloha přímky a úsečky, středová souměrnost

Na připraveném sedmiúhelníku a osmiúhelníku je dán vnitřní bod a volný bod na každé ze stran. Úlohou žáků je nastavit vrcholy mnohoúhelníku tak, aby každá spojnice zadaného vnitřního bodu a bodu na straně protínala alespoň jednu stranu. Rozšiřující otázkou je, zda má úloha vůbec nějaké řešení. Úloha patří do skupiny, kde si žáci mají samostatně odvodit řešení, ale není třeba slovní odpověď. Pracovní list má povoleny nástroje pro práci s body, přímkami a úsečkami, kružnice a středovou souměrnost.

Textové nápovědy vedou ke zkoumání situace kolem jednoho vrcholu nebo strany. V dalších krocích odhalují, jak z nalezeného vzoru přeskládat celý mnohoúhelník.

Nápověda pomocným objektem zvýrazňuje jednu ze spojnic a pomocí šipek navádí žáky k pozorování vztahu mezi bodem uvnitř mnohoúhlneíku a koncovými body strany.

Nápověda animací v prvním kroku rýsuje detail mnohoúhelníku, kde se pohybem vrcholu protne spojnice mezi sledovanými body a stranou. V druhém kroku se animace rozšiřuje o řešení bodově souměrné a splňující podmínku existence dvou bodů na stranách mnohoúhelníku.

Pro částečné řešení by žáci měli nalézt řešení pro alespoň dvě strany mnohoúhelníku. Pro úplné řešení je třeba nejen uspořádat osmiúhelník odpovídajícím způsobem. Řešení úlohy se sedmiúhelníkem není nutné.

Příloha 5 – Seznam výzkumných materiálů a dat odevzdaných na datovém nosiči

1) Pracovní listy – soubory systému GeoGebra (.ggb)
    - Pracovní list 1a
    - Pracovní list 1b
    - Pracovní list 1c
    - Pracovní list 2a
    - Pracovní list 2b
    - Pracovní list 2c
    - Pracovní list 3a
    - Pracovní list 3b
    - Pracovní list 3c