MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Veronika Krejčí

Skalární součin ve školské matematice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Německý jazyk a literatura

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování

Ráda bych poděkovala Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Název práce: Skalární součin ve školské matematice

Autor: Veronika Krejčí

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce se věnuje tématu skalárního součinu ve školské matematice. Text je určen pro středoškolské učitele matematiky. První část je věnována analýze středoškolských učebnic, ze které vyplývá potřeba vybudovat nový přístup k zavedení skalárního součinu. V druhé části je vybudována teorie ke správnému zavedení. Třetí a čtvrtá část se věnuje aplikaci skalárního součinu.

Klíčová slova: skalární součin, nadrovina, vzdálenost, odchylka

Title: Dot product in school mathematics

Author: Veronika Krejčí

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The theme of the bachelor thesis is the dot product in school mathematics. The bachelor thesis is adressed to the teachers, who teach at the secondary school. The first part consist of an analysis of the textbooks, the result of the analysis is the reason to write this bachelor thesis and to build a new introduction to the theme of the dot product. In the second part we build the new introduction. The third and the fourth part consist of application of the dot product.

Keywords: dot product, hyperplane, distance, angle

Obsah

Úvod

Bakalářská práce je věnována zavedení skalárního součinu ve školské matematice. Na úvod bychom rádi představili program práce. Dříve než začneme se zavedením skalárního součinu, zanalyzujeme středoškolské učebnice a zhodnotíme, zda je potřeba vybudovat novou teorii. Začínáme-li vykládat, je potřeba žákům osvětlit téma, kterým se budeme zabývat a odůvodnit, proč nás dané téma zajímá, dále propojit s již osvojenou látkou, ze které nový pojem odvodíme. Následovat by měli příklady, protipříklady a aplikace. Postup práce je přirozený a aplikovatelný na různé vyučovací styly. Ačkoliv je postup práce logický, budeme moci při analýze učebnic pozorovat, že k němu není vždy přihlíženo a některé kroky bývají vynechány. Myslíme si, že výuka matematiky není o diktování vzorců. Žáci by měli společně s učitelem matematiku tvořit a vybudovat společně pevné základy, na které mohou dále stavět.

Za cíl si klademe, napsat práci tak, aby ji čtenář mohl číst plynule, každý krok výpočtu či odvození mu byl jasný, a věděl, jaké nástroje používá a proč je používá. Nejvyšším oceněním práce by bylo, pokud by čtenář při čtení řádků již předvídal, jaké kroky budou následovat. Zároveň, aby byl text pochopitelný pro žáky, ale také přinášel něco navíc pro učitele.

1 Skalární součin v učebnicích

Při závádění nových pojmů by mělo platit všeobecně známé schéma, které zmiňuje také Z. Halas ve svém příspěvku *Cesta ke skalárnímu součinu* [Hal].

Nové téma by mělo být vždy uvedeno motivací, která upoutá žákovu pozornost a navodí atmosféru k nově vzniklému problému. V matematice můžeme motivovat látku několika způsoby – nejlépe příklady z prostředí blízkému žákovi, historií matematiky nebo vtipem. Dalším způsobem je motivace matematická. Ze zkušeností svého okolí musím konstatovat, že matematická motivace je nejméně oblíbená mezi žáky a často neupoutá jejich pozornost. Existují však témata, u kterých se matematické motivaci nevyhneme. V onom případě je obzvlášť nutné pojem či nový vztah odvodit.

Po řádně provedené motivaci již žáci pochopí, proč potřebujeme problém vyřešit. Nový vztah odvodíme a následně definujeme. V tomto kroku je vhodné zdůvodnit výběr samotného názvu.

Dalším krokem je část procvičovací, uvedeme příklady a protipříklady a na nejvyšším stupni aplikujeme v úlohách.

Výchozím bodem pro hodnocení učebnic bude splnění jednotlivých bodů z předchozích odstavců. Správně postavená učebnice by měla obsahovat motivaci, odvození včetně názvu, definici, příklady, protipříklady a aplikaci.

Protože se primárním zdrojem informací postupně stává internet, který je vítán především kvůli rychlosti, snadnosti ovládání a dostupnosti velkého množství informací, s čímž se váže také příležitost udělat chybu, kterou si pak žák může špatně osvojit, budeme se zabývat nejen tištěnými učebnicemi, ale také internetovými portály, které se dané tematice věnují.

1.1 Pozorování

1.1.1 realisticky.cz

Začněme internetovou učebnicí [real], která je určena především pro začínající učitele. Nabízí témata základoškolské i středoškolské matematiky. Téma skalárního součinu je zaměřeno především na praktické počítání příkladů, které jsou gradovány. Autor klade důraz na interpretaci výsledků, která tvoří základ pro odvození nových vztahů, vzorců a pojmů.

Téma skalárního součinu je uvedeno příkadem na výpočet souřadnic vektoru pomocí goniometrických funkcí. Dále autor připomíná součin reálného čísla a vektoru. Žáky by mohlo zajímat, jak spočítat součin dvou vektorů. Způsobem nápodoby ke vztahu pro normu vektoru zavádí skalární součin:

$|u|^2 = u \cdot u = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1u_1 + u_2u_2$
Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $u = (u_1; u_2)$*,*
$v = (v_1; v_2)$*?*
$u \cdot v = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1v_1 + u_2v_2$

([real], s. 1)

Je zavedena definice a zdůvodněn původ přívlastku skalární, který dává autor do souvislosti s fyzikou a skaláry. Kapitola končí příklady na procvičení.

Zmíněná matematická motivace není zdařilá. Skalární součin by měl být chápán jako matematický aparát, který nám pomůže při vyřešení konkrétních matematických problémů, výše uvedená motivace však tento parametr nesplňuje. Bylo by vhodné uvést, proč bychom měli vektor vektorem násobit. Zavedení způsobem nápodoby se také nepovedl. Pozorujme citaci výše a zaměřme se hned na první řádek. Spočítat velikost vektoru sice umíme, avšak známe pouze vzorec vycházející z Pýthagorovy věty, tedy
$|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 = u_1u_1 + u_2u_2$. Čím však může autor podložit, že předešlý vzorec je roven výrazu $\vec{u} \cdot \vec{u}$, či výrazu $(u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2)$?

1.1.2 Matematika.cz

Internetová učebnice [mat.cz] není klasickou výkladovou učebnicí. Dle podtitulku *tady to pochopíš :-)* má učebnice primárně doplnit a vyjasnit učivo nabyté ze školních lavic, nikoliv ho poprvé vykládat.

Autor učivo nemotivuje, přímo rozepíše skalární součin do souřadnic a poté zavádí vzorec $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Zdůrazňuje především geometrickou interpetaci skalárního součinu jako délku projekce vektoru $\vec{v}$ do normovaného vektoru $\vec{u}$, tyto dva vektory svírají úhel α.

Pokud skalárně násobíme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tak pokud výsledek vydělíme délkou vektoru $\vec{v}$, získáme délku úsečky AD, což je velikost průmětu vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$.

([mat.cz])

Myslím si, že povaha serveru je určující, a proto neobsahuje ani motivaci, ani řádné zavedení, ale pouze definici. Kladně můžeme hodnotit geometrickou interpretaci.

1.1.3 Matematika pro SŠ, Didaktis

Učebnice [Von] je jednou z nejpoužívanějších učebnic pro gymnázia a střední školy. Analytické geometrii věnuje kolektiv autorů dvě samostatné učebnice – pro rovinu a prostor. Učebnice jsou výkladové, pro procvičení můžeme využít samostatné pracovní sešity.
Kapitola je motivována příkladem letištního radaru, který využívá soustředných kružnic a polopřímek, pomocí nichž můžeme určit vzdálenost letadla od stanice. V prostoru je skalární součin motivován rovněž fyzikálně – pravidly pravé a levé ruky. Samotný skalární součin je zaveden definicí (1) a v poznámce na okraji definován jako zobrazení. Autoři zmiňují také vlastnosti skalárního součinu a upozorňují na důležitost přívlastku *skalární*, jeho význam však nevysvětlují.

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \tag{1}$$

Následující podkapitola je věnována odchylce mezi vektory. Odchylka je motivována fyzikálně pomocí vektoru dostředivého zrychlení, který je kolmý k vektoru rychlosti. Podobně jako u zavedení skalárního součinu nalezneme v poznámce na okraji odvození vzorce pro odchylku dvou vektorů.

Motivační příklad pro uvedení tématu je vybrán vhodně, tato motivace není matematická, ale fyzikální. Naopak zavedení skalárního součinu definicí o ničem nevypovídá a skalární součin "spadl z nebe". Ani původ názvu není vysvětlen, přestože je zmíněna distributivita skalárního součinu a je zdůrazněno, že výsledkem skalárního součinu je reálné číslo.

1.1.4 Matematika pro gymnázia, Prometheus

Učebnice [KoBo] je zřejmě nejpoužívanější učebnicí matematiky pro gymnaziální žáky, kteří jsou připravováni pro studium na vysoké škole. Proto je kladen důraz na definice, věty a důkazy. Učebnice je zaměřena na výklad i procvičování.

Také autoři této učebnice motivují velikost vektoru fyzikálními úvahami. Skalární součin zavádějí jako definici a jeho význam zdůrazňují:

Skalární součin, který teď zavedeme je velmi důležitý.

Skalární součin dvou vektorů $u = (u_1; u_2), v = (v_1; v_2)$ *v rovině je číslo* $u_1 v_1 \cdot u_2 v_2$.

Skalární součin dvou vektorů $u = (u_1; u_2; u_3), v = (v_1; v_2; v_3)$ *v prostoru je číslo* $u_1 v_1 \cdot u_2 v_2 \cdot u_3 v_3$.

([KoBo], s. 40)

Skutečný význam skalárního součinu odhalí podkapitola *Odchylka dvou vektorů*. Pomocí souřadnic vektorů a vzorce pro skalární součin autoři odvodí vzorec $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. V aplikačních úlohách se žáci naučí využívat skalární součin v jednoduchých důkazech známých vět (kosinová věta) a ve fyzikálních příkladech.

Rovněž tato učebnice nesplňuje schéma uvedené v úvodu kapitoly 1. Téma je uvedeno bez náležité motivace a zavedeno definicí. Vlastnosti skalárního součinu jsou zmíněny, avšak nevyužity k vysvětlení názvu. Geometrická interpretace skalárního součinu rovněž chybí.

1.1.5 Přehled středoškolské matematiky

Učebnice [Pol] je přehled středoškolské matematiky. Vzhledem k zavádění pojmů je vhodná pro maturanty nebo vysokoškolské studenty, kteří si potřebují zopakovat látku ze střední školy.

Autor uvadí téma skalárního součinu zavedením definice. Pracuje s obecným vzorcem, souřadnice využívá až v nadcházející kapitole. Žádná motivace definici nepředchází.

Skalárním součinem $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *dvou nenulových vektorů* $\vec{u}, \vec{v}$ *nazýváme reálné číslo, které dostaneme jako součin velikostí vektorů* $\vec{u}, \vec{v}$ *a kosinu velikosti úhlu* φ *těchto vektorů:* $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$.

([Pol], s. 558)

Původ názvu je motivován fyzikálně podle skalárních veličin, které jsou jednoznačně určeny svými hodnotami. První příklady jsou zaměřeny především na porozumění definici a aplikační příklady jsou zasazeny do geometrického a fyzikálního prostředí.

U přehledové literatury není motivace a zavedení nezbytné, autor pravděpodobně předpokládá, že se žák již s danou problematikou seznámil ve škole. Za zmínku však stojí pořadí úvah. Autor nejprve skalární součin definuje, poté vysvětluje původ přívlastku *skalární* a až v dalším kroku přistupuje k vlastnostem skalárního součinu. Mezi vlastnostmi neopomíná ani distributivitu, kterou sice připodobní součinu dvou mnohočlenů v oboru reálných čísel, avšak ji nevyužívá k vysvětlení názvu.

1.1.6 Matika pro spolužáky

Učebnice [Liš] vytvořili žáci královéhradeckého gymnázia. Tato skutečnost se projeví také ve formulacích, které jsou blízké jazyku mluvenému. Učebnice je určena pravděpodobně pro slabší žáky.

Skalární součin je motivován jako matematický aparát, který využijeme v analytické geometrii při výpočtu odchylky mezi dvěma vektory a při určování vzájemné polohy dvou přímek nebo rovin anebo ve fyzice při počítání práce a zrychlení. Autoři žádné odvození nenabízí a přímo komentují proces skalárního součinu:

Skalární součin ze dvou vektorů vyrobí číslo (skalár), tedy nikoliv vektor.

([Liš], s. 44)

Dále definují skalární součin:

Skalární součin si označíš tečkou mezi vektory $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *a vypočítá se:*
v rovině jako: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$ *v prostoru jako:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

([Liš], s. 44)

Motivace je povedená, avšak úvahy by mohly být řazeny opačně, nejprve se pokusit odvodit vzorec pro výpočet odchylky a poté pojemnovat skalární součin (více v kapitole 2). Opět je zdůvodněn původ přívlastku *skalární* a na zdůvodnění *součinu* bylo zapomenuto.

1.1.7 Matematika pro gymnázia, SPN

Učebnice [MeSi] byla vydána v roce 1979, její způsob zavedení skalárního součinu se liší od zavedení v současných středoškolských učebnicích. V úlohách kladou autoři důraz na geometrickou interpretaci výsledků a propojení numerického a grafického řešení.

Úvod kapitoly *Skalární součin dvou vektorů* je věnována odchylce vektorů. Je zaveden vzorec:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \tag{2}$$

Následují příklady na dosazování do vzorce (2). Po procvičení je zaveden skalární součin:

Číslo $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, *tj. číslo* $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, *má v matematice i v jejích aplikacích velký význam, proto se pro něj zavedl speciální název i matematický symbol.*

([MeSi], s. 80)

Pořadí úvah při zavedení skalárního součinu je ze všech zmíněných učebnic nejzdařilejší. Dále bychom měli také vyzdvihnout důraz na geometrickou interpretaci. Chybí však zdůvodnění celého názvu.

1.2 Srovnání

Srovnáme-li zavedení a motivace ve vybrané literatuře, zjistíme, že možností je několik. Začněme motivací. Nejčastěji vybírají autoři učebnic motivaci matematickou nebo fyzikální. Z našeho hlediska je fyzikální motivace vhodnější, jelikož se blíží reáliím, které jsou žákům vlastní.

Ve vybrané literatuře se nejčastěji uplatňuje zavedení definicí. Takové pojetí vídáme nejčastěji u učebnic určených pro gymnaziální žáky. Jiný způsob zavedení pozorujeme v literatuře [real] a [MeSi]. V internetové učebnici [real] je skalární součin zaveden nápodobou výpočtu normy vektoru. V učebnici [MeSi] je skalární součin odvozen ze vzorce pro výpočet odchylky dvou vektorů.

Dále můžeme pozorovat, že některé učebnice se snaží osvětlit původ názvu, avšak pouze jeho části - přívlastku *skalární*. Ani jedna ze zmíněných učebnic však nezdůvodňuje výběr slova *součin*.

Zajímavý kontrast práce s kosinovou větou můžeme pozorovat v literatuře [KoBo] a [MeSi]. V učebnici [KoBo] uvádí autoři kosinovou větu jako příklad jednoduché věty, kterou můžeme dokázat využitím skalárního součinu. Naopak učebnice [MeSi] pracuje s kosinovou větou jako výchozí pro zavedení skalárního součinu.

Pořadí úvah je v současných učebnicích podobné, nejprve je zaveden skalární součin, který je využit pro zavedení vzorce pro odchylku dvou vektorů. Jediná učebnice [MeSi] řadí úvahy opačně. Nejprve autoři zavedou vzorec pro odchylku dvou vektorů, ve které skalární součin nejprve nepojmenují, ale následně kvůli jeho důležitosti a využitelnosti zavedou název i symbol.

Srovnáme-li hlavní zaměření kapitol ve vybrané literatuře, pozorujeme rozdíly mezi současnými učebnicemi a učebnicí [MeSi]. Současné učebnice (s výjimkou internetového portálu [mat.cz]) jsou zaměřeny především na numerické výpočty, které jsou zasazené do fyzikálního nebo matematického prostředí. Skalární součin slouží často jako vhodný matematický aparát při důkazech vzorců, vztahů a vět. Autoři učebnic [mat.cz] a [MeSi] však mimo hledisko numerické kladou důraz především na geometrickou interpretaci.

Výsledky porovnejme a shrňme v následující tabulce:

učebnice	*motivace*	*zavedení*	*název - skalární*	*název - součin*	*geom. interpr.*
real	X	nápodoba	ANO	NE	NE
mat.cz	X	definice	NE	NE	ANO
Von	FYZ	definice	NE	NE	NE
KoBo	X	definice	NE	NE	NE
Pol	X	definice	ANO	NE	ANO
Liš	MAT	definice	ANO	NE	NE
MeSi	X	odvozeno	NE	NE	ANO

1.3 Závěr

Pro žáky je velice důležité, aby nově nabyté poznatky dokázali použít v praxi. Některá středoškolská téma je obtížnější uchopit tak, abychom je mohli propojit s praktickým životem. Obzvláště v takovém případě je důležité nový pojem odvodit a využít matematickou motivaci.

Jak jsme se mohli přesvědčit, žádná z vybrané literatury nesplňuje všechna kritéria při zavedení nového pojmu. Největší problémy se objevily při motivaci, odvození a pořadí úvah. V následující kapitole se pokusíme zavést skalární součin a naplnit všechna zmíněná kritéria.

2 Zavedení skalárního součinu

V kapitole se inspiruji článkem [Hal], který si dovolím rozvést a doplnit o motivační úvahy.

Syntetická i analytická geometrie se zabývají mimo jiné řešením metrických úloh. Můžeme popisovat délky a velikosti geometrických útvarů a úhly mezi nimi. Analytická geometrie je metodou, která využívá **souřadnice** při popisu těchto geometrických útvarů a využívá přitom poznatků ze syntetické geometrie jako například Pýthagorovu větu či kosinovou větu.

Nejdůležitějším aspektem při orientaci v novém geometrickém prostoru je popsat základní geometrické objekty, kterými jsou ve vektorovém prostoru body a vektory. Polohu bodů můžeme popisovat pomocí souřadnic vzhledem k dané soustavě souřadnic. Na středních školách obvykle volíme kartézskou soustavu souřadnic. Nejelementárnější otázkou metrické geometrie je vzdálenost dvou bodů. Víme, že dva body určují vektor, který je druhým základním geometrickým objektem. Vzájemný vztah dvou vektorů může vyjadřovat jejich odchylka.

Vzdálenosti a odchylky dalších geometrických útvarů (přímka, rovina) budeme převádět na jednodušší úlohy. Vyřešme s pomocí souřadnic nejprve elementární úlohy:

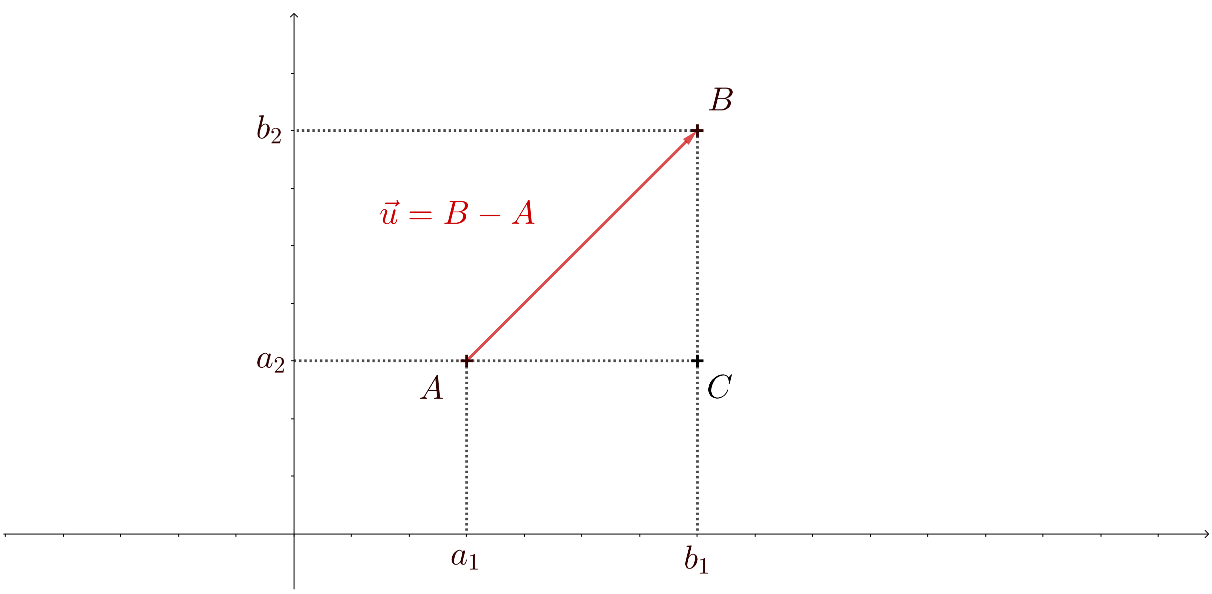
- vzdálenost dvou bodů,
- odchylku dvou vektorů.

2.1 Vzdálenost dvou bodů

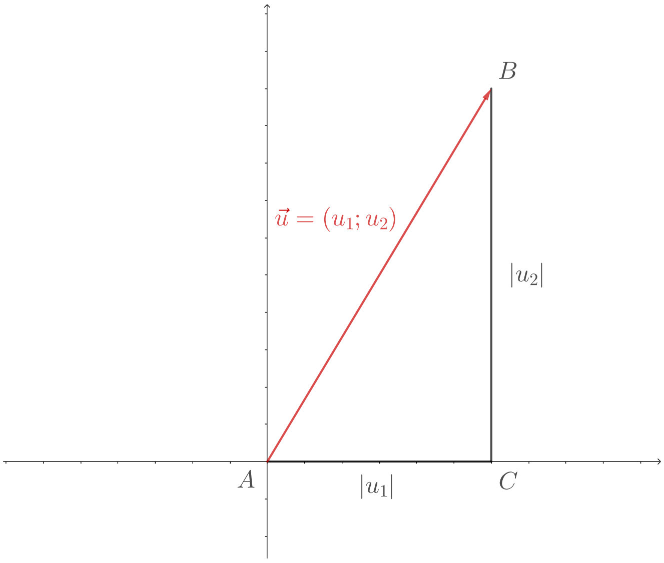
První elementární úloha, kterou potřebujeme vyřešit, je vzdálenost dvou bodů.

Body A, B můžeme popsat pomocí souřadnic: $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$.
Jejich vzdálenost je rovna délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde $C = [b_1; a_2]$, $|AC| = |b_1 - a_1|$, $|BC| = |b_2 - a_2|$.

Proto podle Pýthagorovy věty platí $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.



Víme, že body A, B určují vektor AB, kde A je počátečním bodem a B je koncovým bodem vektoru. Nechť $AB = \vec{u}$, pak $\vec{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (u_1; u_2)$.

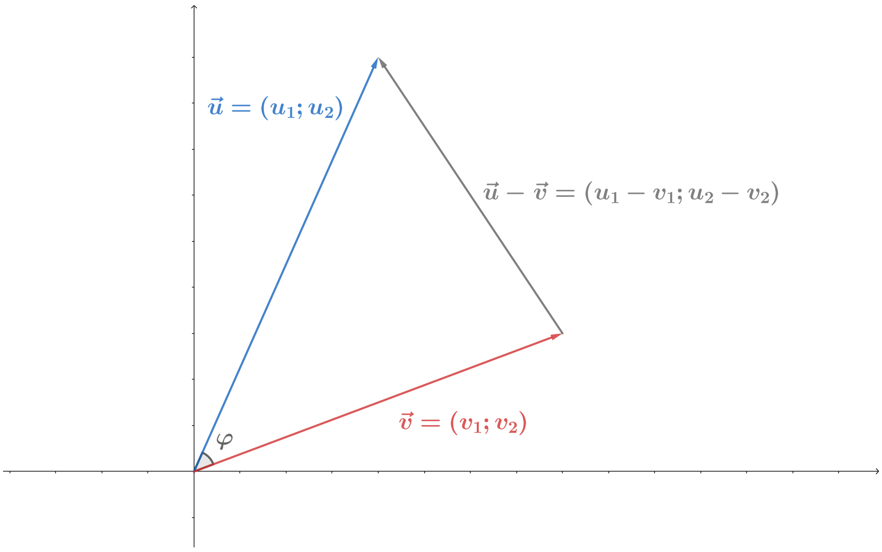


Vzdálenost bodů A, B je rovna velikosti vektoru $\vec{u}$. Velikost vektoru budeme nazývat **norma vektoru** a značit $\|\vec{u}\|$. Tedy

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

2.2 Odchylka dvou vektorů

Druhou elementární úlohou je výpočet odchylky dvou vektorů. Nechť mají vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ společný počáteční bod a úhel mezi nimi označme φ. Pak spojíme-li koncové body vektorů, získáme trojúhelník, jehož strany mají délky $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.



Díky znalosti délek stran trojúhelníku můžeme určit velikost úhlu φ pomocí kosinové věty:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\varphi$$

Při odvození využijme znalostí z předchozí podkapitoly a délky stran trojúhelníku vyjádřeme v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 &= u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\varphi \\
{\color{red}u_1^2} - 2u_1v_1 + {\color{red}v_1^2} + {\color{red}u_2^2} - 2u_2v_2 + {\color{red}v_2^2} &= {\color{red}u_1^2} + {\color{red}u_2^2} + {\color{red}v_1^2} + {\color{red}v_2^2} - 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\varphi \\
-2(u_1v_1 + u_2v_2) &= -2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\varphi \\
u_1v_1 + u_2v_2 &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\varphi \\
u_1v_1 + u_2v_2 &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\varphi
\end{aligned}$$

V posledním kroku získáme vztah pro kosinus úhlu φ, kde φ je odchylka vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

2.3 Skalární součin

V předchozí kapitole jsme vyřešili elementární problémy metrické geometrie a odvodili následující vztahy:

Norma vektoru

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{3}$$

Odchylka dvou vektorů

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \tag{4}$$

Využijme nově nabytých znalostí a prozkoumejme výsledné vztahy. Pro jednoduchost přeznačme $u_1v_1 + u_2v_2$ na $(\vec{u}; \vec{v})$. Všimněme si, že výraz pod odmocninou z rovnosti (3) můžeme zapsat pomocí výrazu v čitateli ze vztahu (4), tedy $u_1u_1 + u_2u_2 = (\vec{u}; \vec{u})$.

Dále poznamenejme, že oba výrazy obsahují součet, jehož první sčítanec je součin x-ových souřadnic vektorů a jehož druhý sčítanec je součin y-ových souřadnic vektorů. Zdá se, že tato struktura by mohla být klíčová, prozkoumejme proto její vlastnosti.

2.3.1 Vlastnosti

Při zkoumání vlastností výrazu $(\vec{u}; \vec{v})$ využijeme již nabytých znalostí o vektorech. V úvodu do analyické geometrie se žáci naučili vektory sčítat. Prozkoumejme, jak se výraz zachová, pokud dosadíme do jedné z jeho složek součet dvou vektorů:

$$\begin{aligned}
(\vec{u}; \vec{v} + \vec{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \\
&= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 \\
&= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2)
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\boxed{(\vec{u};\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w})}$$

Zjistili jsme, že výraz $(\vec{u};\vec{v})$ je **distributivní vůči sčítání**. Tato vlastnost je charakteristická pro součin. Narozdíl od součinu, není výsledkem výrazu $(\vec{u};\vec{v})$ vektor, jak bychom mohli u součinu dvou vektorů očekávat. V kapitole 2.3.2 uvidíme, že tento výsledek bude mít vliv na pojmenování výrazu.

S výrazem by se nám dobře počítalo, pokud by byl symetrický, podívejme se, zda takovou vlastnost má:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2$$

$$\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{v};\vec{u})}$$

Výraz je skutečně symetrický. Dále umíme vektory libovolně násobit skalárem, prozkoumejme, jak se bude výraz chovat, vynásobíme-li jednu z jeho složek skalárem, $c \in R$:

$$\begin{aligned}(c\cdot\vec{u};\vec{v}) &= (c\cdot u_1)v_1 + (c\cdot u_2)v_2 \\ &= c\cdot u_1\cdot v_1 + c\cdot u_2\cdot v_2 \\ &= c\cdot(u_1v_1 + u_2v_2)\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\boxed{(c\cdot\vec{u};\vec{v}) = c\cdot(\vec{u};\vec{v})}$$

Z vlastnosti symetrie pak vyplývají důsledky pro první a třetí vlastnost:

$$(\vec{u};\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w}) \implies (\vec{u}+\vec{w};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{w}+\vec{v})$$

$$(c\cdot\vec{u};\vec{v}) = c\cdot(\vec{u};\vec{v}) \implies (\vec{u};c\cdot\vec{v}) = c\cdot(\vec{u};\vec{v})$$

2.3.2 Název

V předchozí kapitole jsme ukázali, že výraz $(\vec{u};\vec{v})$ je distributivní vůči sčítání a připomněli jsme, že ačkoliv je tato vlastnost charakteristická pro součin, nemůžeme výraz považovat za binární operaci součin, neboť výsledkem součinu dvou vektorů by musel být vektor. Musíme proto název odlišit vhodným přívlastkem.

Výsledkem výrazu je reálné číslo, proto bychom mohli zvolit název *číselný součin*. Tento přívlastek by však mohl připomínat součin dvou čísel, proto by byla volba nevhodná.

Ve fyzice používáme pro jednotku určenou jediným číslem označení skalár (z lat. *scala*, žebřík, přeneseně stupnice), odvodíme-li ze základu tohoto slova přívlastek, získáme název **skalární součin**. Při zápisu můžeme jednoduše využít značení pro součin a napsat tečku mezi vektory:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$$

2.4 Geometrická interpretace skalárního součinu

Při geometrické interpretaci využijeme vztah, který jsme odvodili pro výpočet odchylky dvou vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi$$

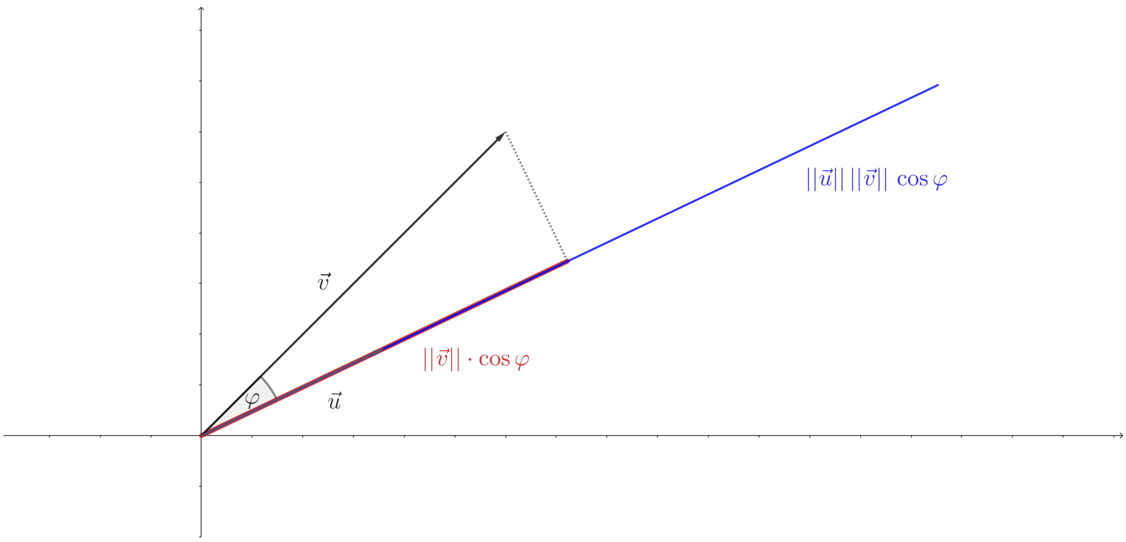
Víme, že projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$ má orientovanou délku $\|\vec{v}\| \cos \varphi$:

$$\boxed{|proj(\vec{v}; \vec{u})| = \|\vec{v}\| \cos \varphi} \;[1]$$

Abychom získali hodnotu skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, musíme délku projekce[2] $\|\vec{v}\| \cos \varphi$ vynásobit normou vektoru $\vec{u}$. Velikost vektoru $\vec{u}$, do jehož směru promítáme ovlivní hodnotu skalárního součinu. Délka projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$ se natáhne či zkrátí podle velikosti vektoru $\vec{u}$. Uvažujme tři následující případy:

- V případě, že $\|\vec{u}\| > 1$, pak skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ je roven délce projekce, která je zvětšena na násobek $\|\vec{u}\|$, tedy

  $\|\vec{u}\| > 1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi = \|\vec{u}\| \cdot |\, proj(\vec{v}; \vec{u})\, |$

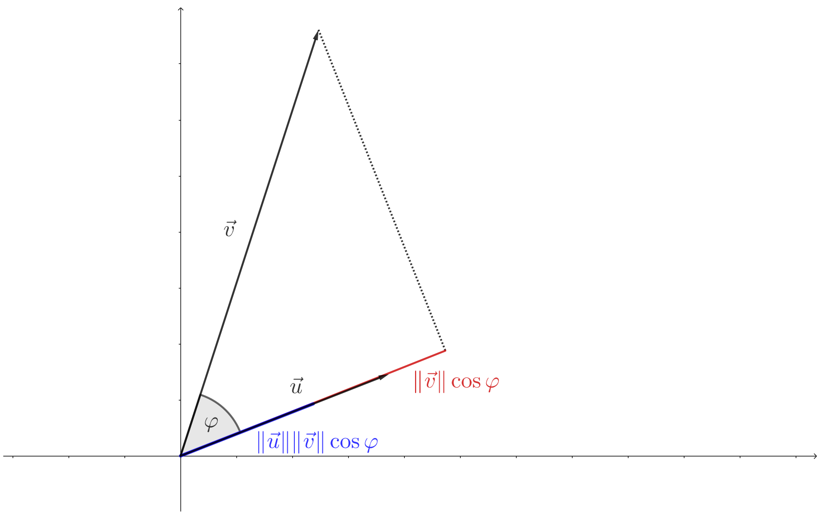


- V případě, že $\|\vec{u}\| < 1$, pak skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ je roven délce projekce, která je zkrácena na násobek $\|\vec{u}\|$, tedy

  $0 < \|\vec{u}\| < 1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi = \|\vec{u}\| \cdot |\, proj(\vec{v}; \vec{u})\, |$

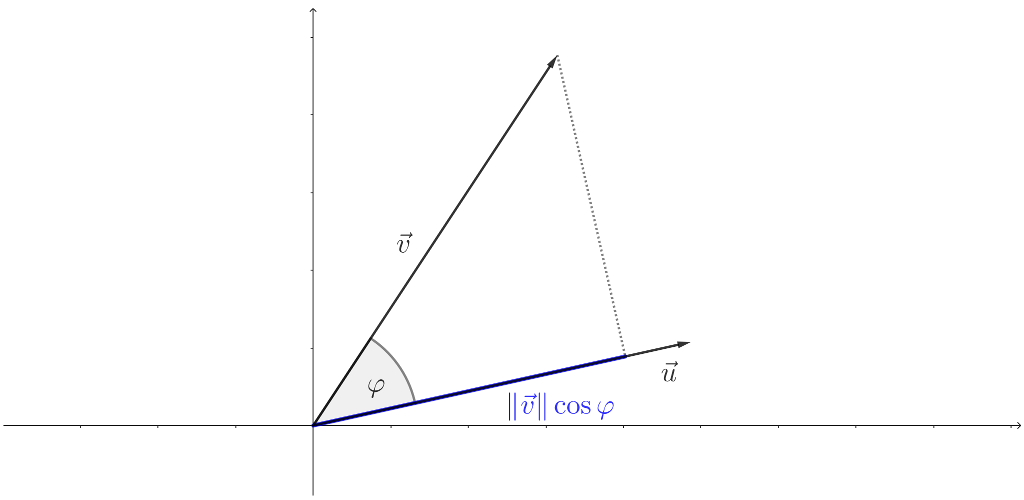
[1] Značení **orientované** délky projekce

[2] Hovoříme-li o délce projekce, máme na mysli orientovanou délku projekce



- V případě, že $\|\vec{u}\| = 1$, pak skalární součin je roven délce projekce, tedy

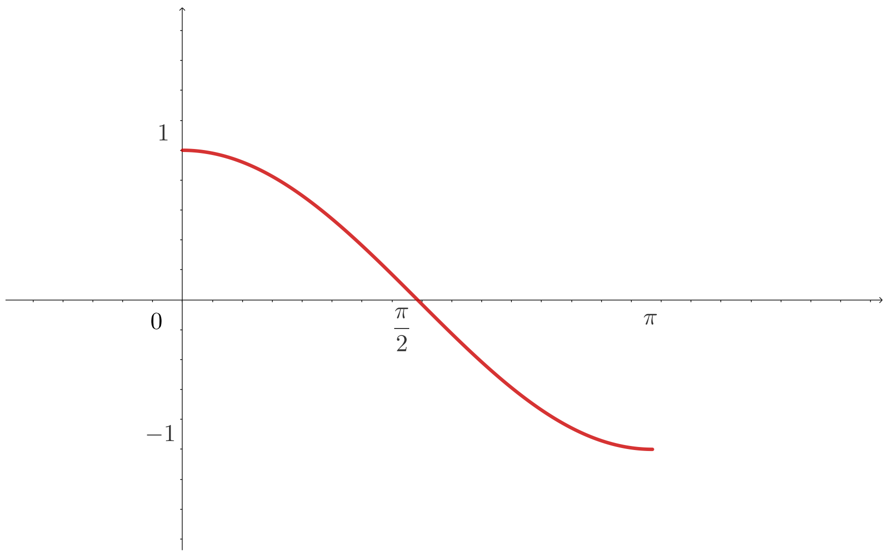
  $\|\vec{u}\| = 1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cos\varphi = |\, proj(\vec{v}; \vec{u})\,|$



Hodnota skalárního součinu

Prozkoumejme, kdy bude skalární součin nabývat hodnot kladných, záporných a nulových. Víme, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos\varphi$. Délky vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ jsou vždy nezáporné, tudíž rozhodujícím parametrem bude hodnota $\cos\varphi$.

Odchylka mezi vektory může nabývat hodnot mezi $[0; \pi]$. Znázorněme si tedy graf goniometrické funkce kosinus na tomto intervalu.



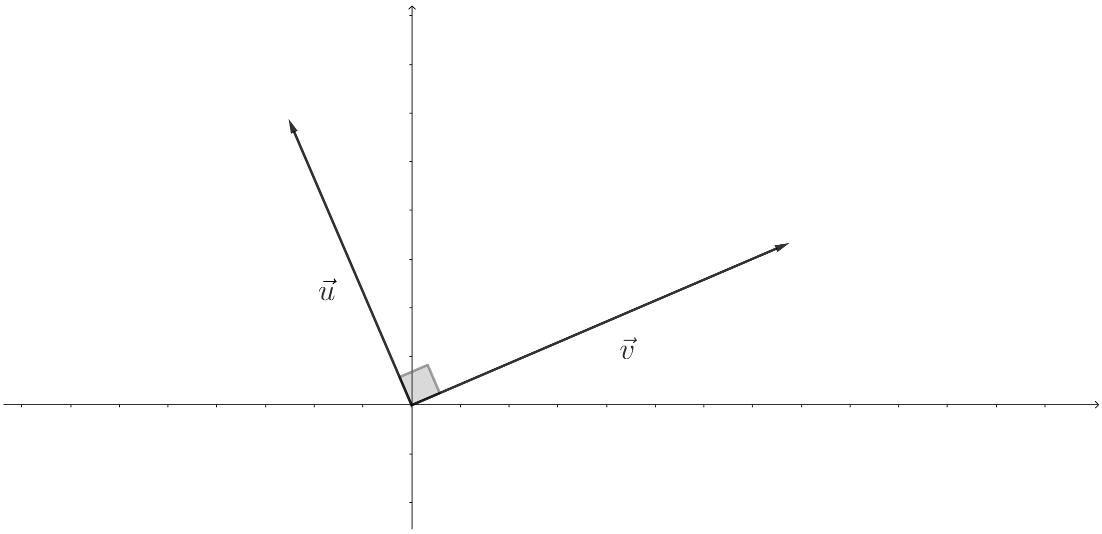
Jak jsme již zmínili, znaménko skalárního součinu odpovídá znaménku kosinu úhlu φ. Vidíme, že kosinus nabývá kladných hodnot na intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$, tedy také skalární součin bude na tomto intervalu nabývat kladných hodnot. V bodě $\frac{\pi}{2}$ je skalární součin vektorů roven nule, na intervalu $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ nabývá skalární součin záporných hodnot. Výsledky pozorování shrňme v následující tabulce a doplňme typ úhlu, který vektory svírají:

skalární součin	interval	typ úhlu
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\{\frac{\pi}{2}\}$	pravý úhel
$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$	$(0; \frac{\pi}{2})$	ostrý úhel
$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$	tupý úhel

Na grafu můžeme dále pozorovat, kdy bude skalární součin nabývat nejmenších a největších hodnot. Pokud budou mít normy vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ konstatní velikost, potom bude opět rozhodujícím faktorem hodnota kosinu. Na intervalu $[0; \pi]$ bude skalární součin nabývat největších hodnot pro $\cos \varphi = 1$, tedy skalární součin nabývá největších hodnot v případě, kdy se odchylka mezi vektory blíží nule. Naopak nejmenší hodnota skalárního součinu bude pro $\cos \varphi = -1$, tedy mezi vektory, které svírají přímý úhel.

Ve školské matematice se nejčastěji setkáme s geometrickou interpretací skalárního součinu dvou na sebe kolmých vektorů. V tomto případě je délka orientované projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$ nulová, tudíž také skalární součin bude roven nule. Zformulujme větu:

Věta (o kolmých vektorech). *Nechť vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nenulové a navzájem kolmé, potom skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ je roven nule.*



Tuto větu používáme ve školské matematice často, a proto si uveďme také jiné typy důkazů:

1.

Důkaz. Dosaďme do vzorce pro odchylku dvou vektorů $\varphi = 90^o$.

$$\begin{aligned} \cos 90^o &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \\ 0 &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \end{aligned}$$

Tedy

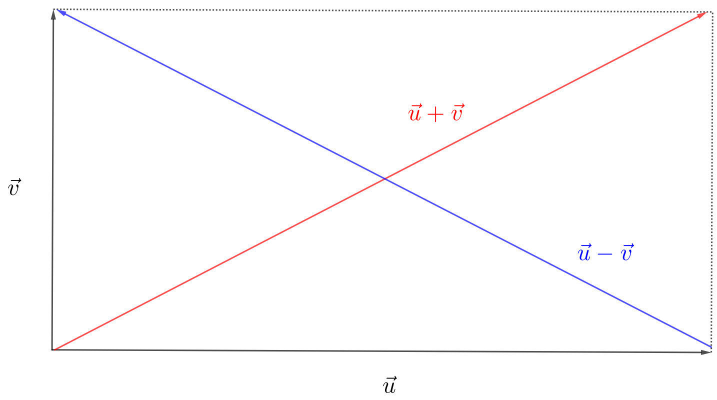
$$0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

□

2.

Důkaz. Doplňme k vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$, které svírají pravý úhel, vektory jejich součtu a rozdílu. Získáme obdélník, jehož úhlopříčky odpovídají normám vektorů $\vec{u} + \vec{v}$ a $\vec{u} - \vec{v}$. Z planimetrie víme, že úhlopříčky obdélníku jsou stejně dlouhé, proto platí:

$$\begin{aligned} ||\vec{u} + \vec{v}|| &= ||\vec{u} - \vec{v}|| \\ ||\vec{u} + \vec{v}||^2 &= ||\vec{u} - \vec{v}||^2 \\ ||\vec{u}||^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 \\ 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$



$\square$

3 Aplikace skalárního součinu

V předchozí kapitole jsme se věnovali elementárním úlohám metrické geometrie – vzdálenosti dvou bodů a odchylce dvou vektorů. Nyní budeme nově nabyté znalosti aplikovat. Zaměříme se na vzdálenost bodu a nadroviny, tedy bodu a přímky v rovině a bodu a roviny v prostoru. Dříve než začneme s odvozováním vzorce pro vzdálenost bodu a nadroviny, musíme najít rovnici, která nadrovinu popíše.

3.1 Obecná rovnice nadroviny

Nadrovinou prostoru dimenze n rozumíme podprostor dimenze $(n-1)$, tedy přímka je nadrovinou dvoudimenzionálního prostoru a rovina je nadrovinou třídimenzionálního prostoru. Abychom mohli určovat vzdálenost bodu a nadroviny, potřebujeme nadrovinu popsat rovnicí.

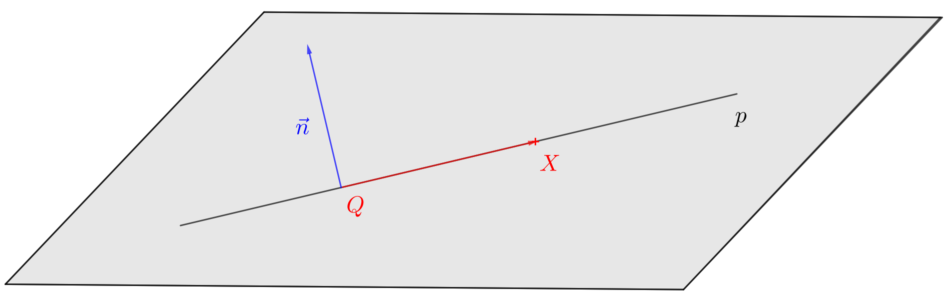
Nejprve se podívejme, jak je téma obecné rovnice nadroviny zpracováno v některých učebnicích. Autoři učebnice [KoBo] rozdělují téma podle dimenze. Jak obecnou rovnici přímky v rovině, tak roviny v prostoru odvozují díky znalosti skalárního součinu. Využívají větu o kolmých vektorech, jejichž skalární součin je roven nule.

Nahlédneme-li do internetového portálu [mat.cz], nalezneme druhý přístup k odvození obecné rovnice nadroviny, kdy vyloučením parametru z parametrické rovnice odvodíme obecnou rovnici.

Při vyučování je vhodné ukázat obě varianty. Díky prvnímu přístupu, který uplatňuje učebnice [KoBo], můžeme objasnit geometrickou interpretaci a ukázat využití skalárního součinu. Naopak druhý přístup z internetového portálu [mat.cz] může pomoci žákům, kteří mají horší geometrickou představivost, a zároveň si žáci procvičí úpravu rovnic.

3.1.1 Obecná rovnice nadroviny v rovině

Jak jsme již zmínili v úvodu kapitoly, nadrovinou roviny je přímka. Při hledání obecné rovnice přímky p využijeme dvou na sebe kolmých vektorů, směrového vektoru QX a normálového vektoru $\vec{n}$ přímky p.



Nechť $Q \in p$, $Q = [q_1; q_2]$. Na přímce p hledáme libovolný bod $X = [x; y]$, kde $X \neq Q$. Vektor $X - Q$ bude směrovým vektorem přímky p. Normálový vektor, který je kolmý na každý směrový vektor přímky p, označíme $\vec{n} = (a; b)$. Dále využijeme znalost věty o kolmých vektorech (kapitola 2.4).

Získáváme rovnici přímky p, určenou směrovým a normálovým vektorem:

$$\boxed{\vec{n} \cdot (X - Q) = 0}$$

Vektory vyjádříme v souřadnicích, kde $X = [x; y]$, $Q = [q_1; q_2]$, $\vec{n} = (a; b)$.

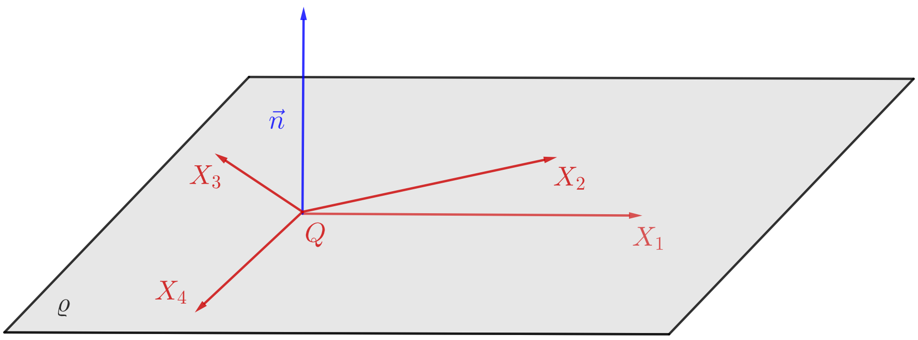
$$\begin{aligned}
(X - Q) \cdot \vec{n} &= (x - q_1; y - q_2) \cdot (a; b) = 0 \\
(X - Q) \cdot \vec{n} &= a \cdot (x - q_1) + b \cdot (y - q_2) = 0 \\
(X - Q) \cdot \vec{n} &= ax + by - aq_1 - bq_2 = 0
\end{aligned}$$

Označme $c = -aq_1 - bq_2$, a dostaneme obecnou rovnici přímky v rovině.

$$\boxed{p : ax + by + c = 0}$$

3.1.2 Obecná rovnice nadroviny v prostoru

Nadrovinou třídimenzionálního prostoru je rovina. Podobně jako v předchozí podkapitole, využijeme kolmosti směrového vektoru na normálový vektor roviny ϱ.



Rovinu ϱ popíšeme bodem $Q \in \varrho$ a normálovým vektorem $\vec{n}$. K bodu Q nalezneme libovolný bod X, který náleží rovině ϱ, získáme tak směrový vektor roviny ϱ, označme $Q - X$. Dále budeme postupovat obdobně jako v případě obecné rovnice nadroviny v rovině.

Nechť v prostoru $X = [x; y; z]$, $Q = [q_1; q_2; q_3]$, $\vec{n} = (a; b; c)$.
Potom

$$\begin{aligned}
(X - Q) \cdot \vec{n} &= 0 \\
(x - q_1) \cdot a + (y - q_2) \cdot b + (z - q_3) \cdot c &= 0 \\
ax + by + cz - (aq_1 + bq_2 + cq_3) &= 0
\end{aligned}$$

Přeznačíme-li $d = -aq_1 - bq_2 - cq_3$, dostaneme tvar obecné rovnice nadroviny.

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

3.2 Vzdálenost bodu od nadroviny

Vzdálenost dvou geometrických útvarů můžeme vždy převést na jednodušší úlohu vzdálenosti dvou bodů. Tento postup často obsahuje mnoho mezivýpočtů, podívejme se například do učebnice [KoBo].

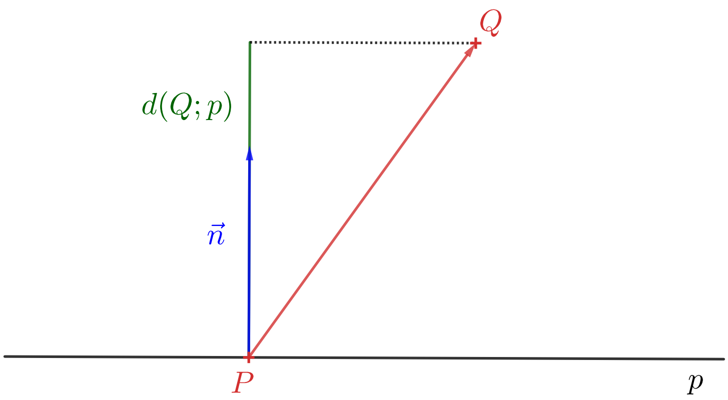
Postup řešení:
1. Bodem P vedeme přímku p kolmou k rovině ϱ.
2. Určíme průsečík R přímky p a roviny ϱ.
3. Určíme vzdálenost $m = |PR|$.

([KoBo], s. 131)

Provádíme-li výpočet vzdálenosti zmíněným způsobem, musíme provést tři kroky výpočtu. Často bychom však ocenili jednodušší cestu, například pokud bychom odvodili vztah, do kterého bychom dosadili pouze souřadnice bodu a obecnou rovnici nadroviny, a usnadnili bychom si tím výrazně práci při řešení úloh. Navíc můžeme při odvození vztahu využít geometrickou interpretaci skalárního součinu.

Obecné řešení v rovině

Zvolme libovolný bod $P \in p$, pak vzdálenost bodu Q od nadroviny p je orientovaná délka projekce vektoru PQ do směru normálového vektoru přímky p, kde $\|\vec{n}\| = 1$. Vzdálenost je vždy kladná nebo nulová, a proto uzavřeme výraz do absolutní hodnoty.



Aplikujme znalost geometrické interpretace skalárního součinu:

$$\begin{aligned} d(Q;p) &= |proj(Q-P;\vec{n})| \\ &= \left|(Q-P)\cdot\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\right| \end{aligned}$$

Nechť $Q = [q_1; q_2]$, $P = [p_1; p_2]$, $\vec{n} = (a; b)$.

Dosaďme souřadnice do předchozí rovnosti:

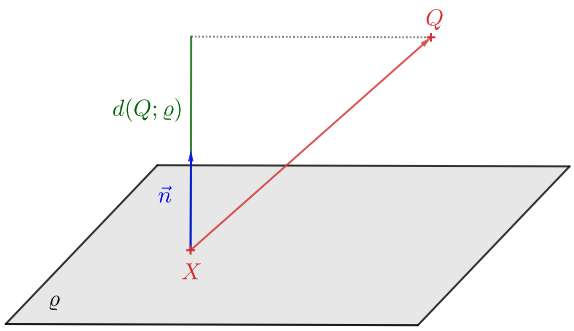
$$\begin{aligned}
d(Q;p) &= \left|(q_1-p_1;q_2-p_2)\cdot\frac{(a;b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \\
d(Q;p) &= \left|\frac{(q_1-p_1)\cdot a+(q_2-p_2)\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \\
d(Q;p) &= \left|\frac{aq_1+bq_2-(ap_1+bp_2)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|
\end{aligned}$$

Oranžově označený výraz nahradíme, $c=-(ap_1+bp_2)$. Můžeme si všimnout, že v čitateli získáme obecnou rovnici nadroviny, do níž stačí dosadit souřadnice bodu Q a vektoru $\vec{n}$, pak získáme vzorec pro vzdálenost libovolného bodu Q od nadroviny ϱ ve dvoudimenzionálním prostoru.

$$\boxed{d(Q;p)=\left|\frac{aq_1+bq_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}$$

Obecná rovnice nadroviny v prostoru

Ve třídimenzionálním prostoru proběhne naprosto stejná úvaha, proto ji provedeme bez podrobného komentáře a omezíme počet kroků při výpočtu.



$$d(Q;\varrho)=\left|(Q-X)\cdot\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\right|$$

Nechť $X\in\varrho$, $X=[x;y;z]$, $Q=[q_1;q_2;q_3]$, $\vec{n}=(a;b;c)$.
Dosaďme souřadnice do rovnosti, upravme výraz a získáme obecný vzorec pro vzdálenost bodu od nadroviny v prostoru.

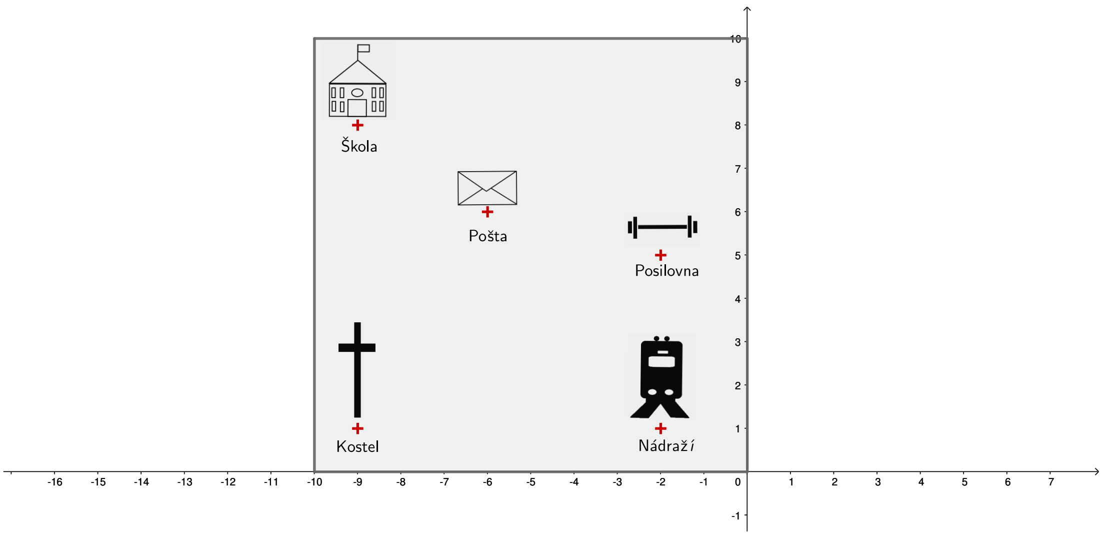
$$\boxed{d(Q;\varrho)=\left|\frac{aq_1+bq_2+cq_3+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|}$$

4 Aplikační úlohy

4.1 Jednoduché úlohy

4.1.1 Norma vektoru

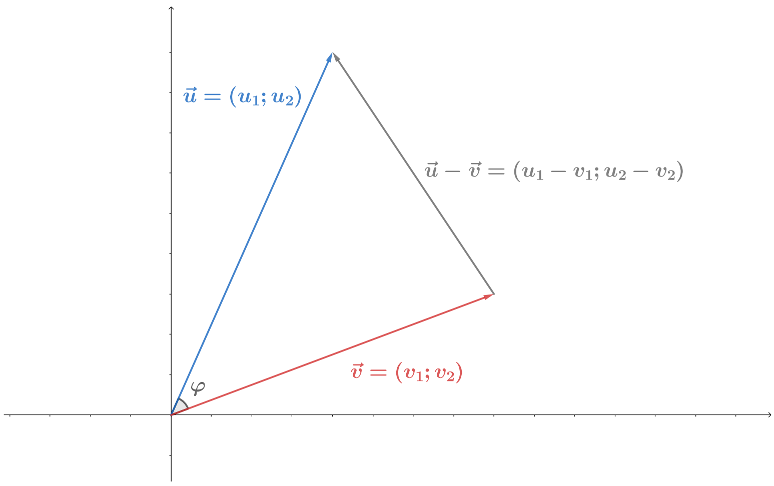
Na obrázku vidíte plánek města. Určete přímou vzdálenost mezi
a) posilovnou a nádražím
b) nádražím a kostelem
c) kostelem a poštou
d) poštou a školou.
Předpokládejte, že jednotka na mapě je 100 metrů. Zaokrouhlete na celé metry.



Řešení: a) 400 metrů, b) 700 metrů, c) 583 metrů d) 361 metrů

4.1.2 Odchylka dvou vektorů

Jsou dány vektory $\vec{u} = (4; 9)$, $\vec{v} = (8; 3)$. Umístěte vektory do počátku kartézské soustavy souřadnic. Určete velikost úhlu, který vektory svírají.

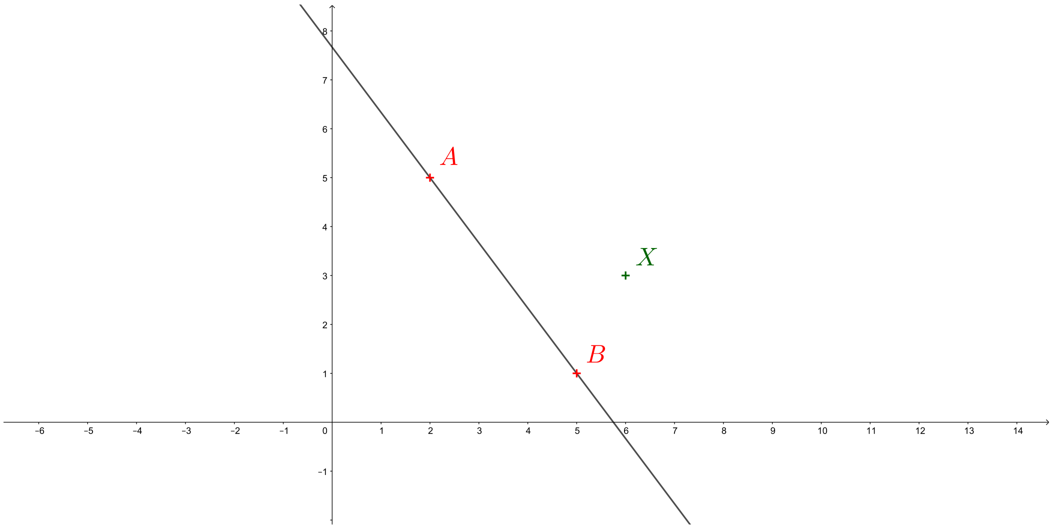


Řešení: Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ svírají úhel $45^o 29'$.

4.1.3 Vzdálenost bodu od nadroviny

Vzdálenost bodu od přímky v rovině

Přímka p je popsána body $A = [2; 5], B = [5; 1]$. Najděte obecnou rovnici přímky p a určete vzdálenost od bodu $X = [6; 3]$.



Řešení: $p : 4x + 3y - 23 = 0,\ d(X; p) = 2$

Vzdálenost bodu od roviny v prostoru

Rovina ϱ je určena body $A = [-4; 0; 0], B = [0; 4; 0], C = [0; 3; 3]$. Najděte obecnou rovnici roviny a určete vzdálenost mezi rovinou ϱ a bodem $X = [0; 0; 1]$.

Řešení:
$\varrho : 3x - 3y - 4z + 12 = 0,\ d(X; \varrho) = \frac{8}{\sqrt{34}}$

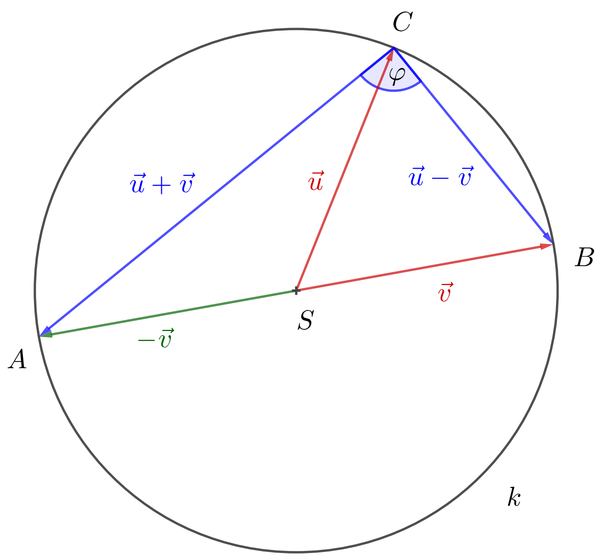
4.2 Zajímavé úlohy

Na ukázku uvedeme tři úlohy, další podobné geometrické úlohy, které lze řešit pomocí skalárního součinu, můžete naleznout ve článcích [Cal] a [Elb].

Úloha 4.2.1 je žákům již známá věta, úloha poslouží k opakování látky a umožní žákům nahlédnout na věty jiným způsobem.

4.2.1 Tháletova věta

Nechť AB je průměrem kružnice k, pak trojúhelník ABC je pravoúhlý, jestliže bod C leží na kružnici k a zároveň $C \neq A \neq B$. Dokažte tvrzení.



Řešení

Označme vektor $SB = \vec{v}$, $SC = \vec{u}$, pak víme, že vektor $CB = \vec{u}-\vec{v}$ a $CA = \vec{u}+\vec{v}$. Dále označme φ úhel mezi vektory $\vec{u}-\vec{v}$ a $\vec{u}+\vec{v}$. Nyní budeme chtít ukázat, že úhel $\varphi = 90^o$.

Násobme skalárně vektory $\vec{u}-\vec{v}$ a $\vec{u}+\vec{v}$, jestliže víme, že $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = r$, kde r je poloměr kružnice k:

$$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = r^2 - r^2 = 0$$

Ukázali jsme, že skalární součin vektorů $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ je roven nule, tedy odchylka mezi nimi je rovna 90^o a trojúhelník ABC je pravoúhlý.

4.2.2 Vzájemná poloha bodu a kružnice

Tato úloha bude obsahovat dvě podúlohy.

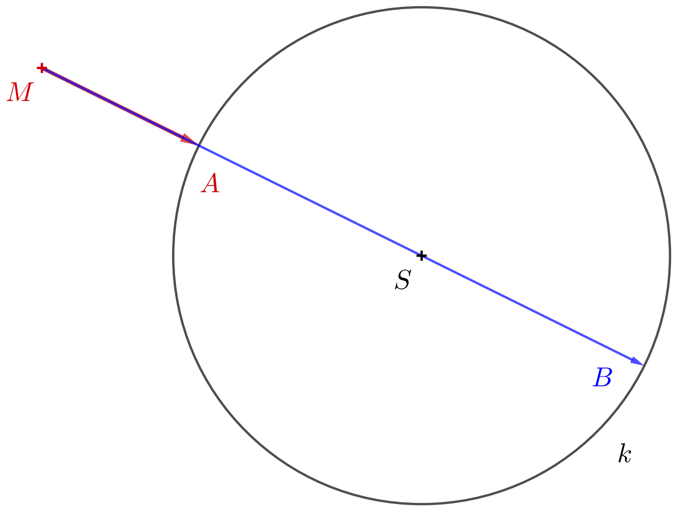
1. MB prochází středem kružnice

Určete vzájemnou polohu bodu M a kružnice $k = (S; r)$, jestliže znáte souřadnice bodů A, B, M, kde úsečka MB prochází středem kružnice a $A \in MB \cap k$.

Řešení

Úlohu rozdělíme na tři případy, kdy bod M leží vně kružnice k, uvnitř kružnice k nebo náleží kružnici k. Úlohu si nejprve znázorníme obrázky a poté odvodíme vztahy, pro jednotlivé případy.

1. *bod M leží vně kružnice k*

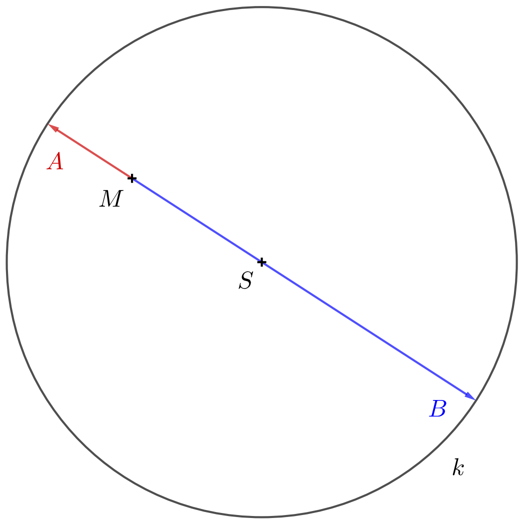


V případě, kdy bod M leží vně kružnice k směřují vektory MA, MB stejným směrem, tudíž odchylka mezi vektory je rovna 0^o. Vztah můžeme vyjádřit pomocí vzorce pro odchylku dvou vektorů, tedy

$$\begin{aligned} MA \cdot MB &= \|MA\|\|MB\| \cos 0^o \\ MA \cdot MB &= \|MA\|\|MB\| \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na další dva případy a poté výsledné vztahy porovnejme.

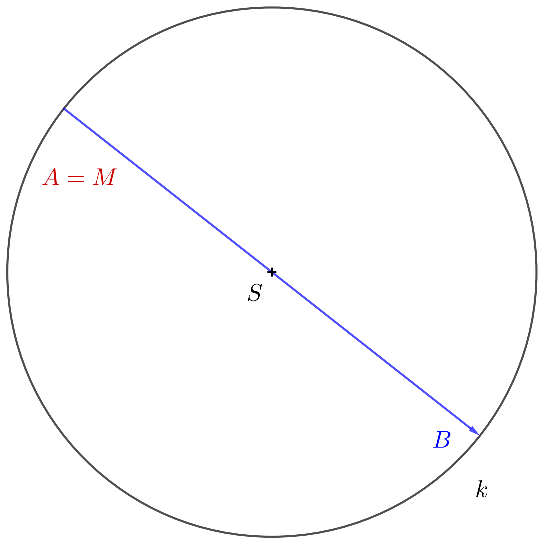
2. *bod M leží uvnitř kružnice k*



V případě, kdy bod M leží uvnitř kružnice k, směřují vektory MA, MB opačným směrem, tedy odchylka mezi vektory je rovna 180^o:

$$\begin{aligned} MA \cdot MB &= \|MA\| \|MB\| \cos 180^o \\ MA \cdot MB &= -\|MA\| \|MB\| \end{aligned}$$

3. $M \in k$



Ve třetím případě, kdy bod M náleží kružnici k, bude vektor MA nulový, tedy skalární součin vektorů bude rovněž nulový:

$$MA \cdot MB = 0$$

Závěrem shrňme a interpretujme výsledky. Úlohu jsme rozdělili na tři případy a získali tři vztahy:

- M leží vně $k \implies MA \cdot MB = \|MA\|\|MB\|$,
- M leží uvnitř $k \implies MA \cdot MB = -\|MA\|\|MB\|$,
- $M \in k \implies MA \cdot MB = 0$.

Získali jsme tedy jednoduchý nástroj, jak určit vzájemnou polohu bodu a kružnice, stačí pokud zjistíme znaménko skalárního součinu $MA \cdot MB$.

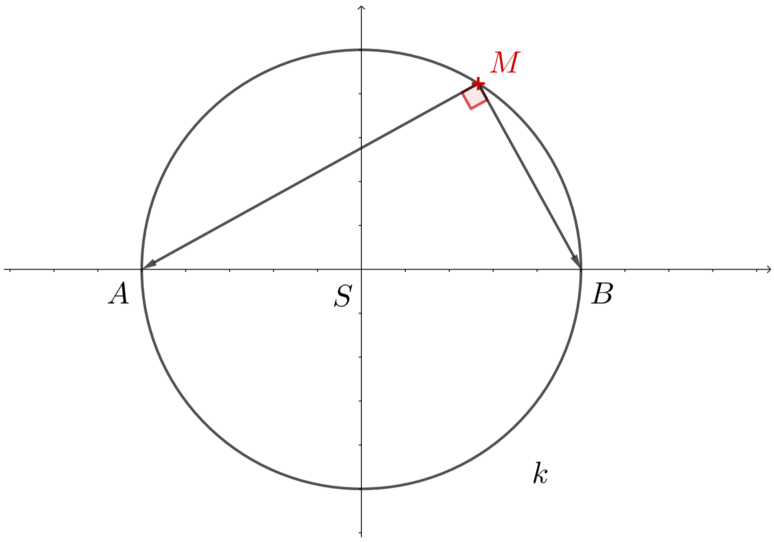
2. MB neprochází středem kružnice

Určete vzájemnou polohu bodu M a kružnice $k = (S; r)$, jestliže znáte souřadnice bodů A, B, M, kde A, $B \in k$ a úsečka MB neprochází středem kružnice.

Řešení

BÚNO: $S = [0; 0]$, $A = [-r; 0]$, $B = [r; 0]$, $M = [x; y]$.
Úlohu si opět rozdělíme na tři případy:

1. $M \in k$



V případě, kdy $M \in k$ můžeme uplatnit Tháletovu větu a větu o kolmých vektorech:

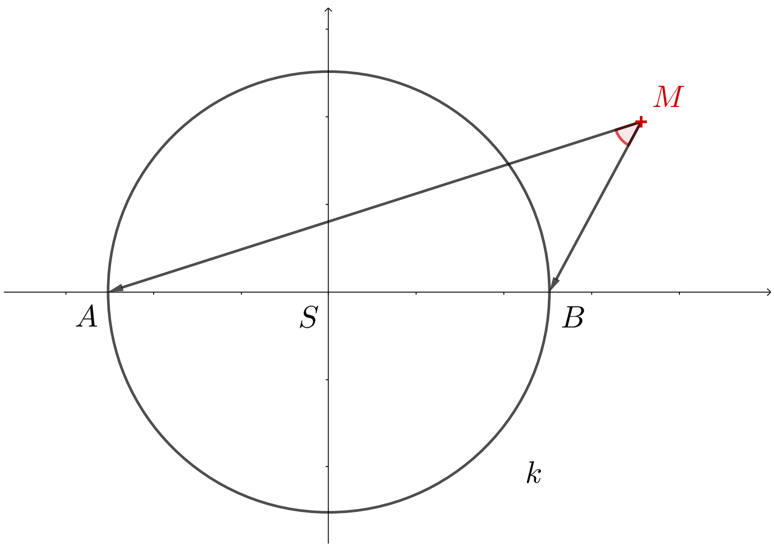
$$\begin{aligned}
0 &= MA \cdot MB \\
0 &= (-r - x; -y) \cdot (r - x; -y) \\
0 &= (-r - x) \cdot (r - x) + y^2 \\
0 &= x^2 + y^2 - r^2
\end{aligned}$$

Výpočtem jsme získali rovnici kružnice k, tedy platí, jestliže $M \in k$, pak dosadíme-li souřadnice bodu M do rovnice kružnice k, získáme rovnost.

2. *M leží vně kružnice k*

V případě, kdy bod M leží vně kružnice k, svírají vektory MA, MB ostrý úhel. Z geometrické interpretace víme, že skalární součin $MA \cdot MB$ bude kladný:

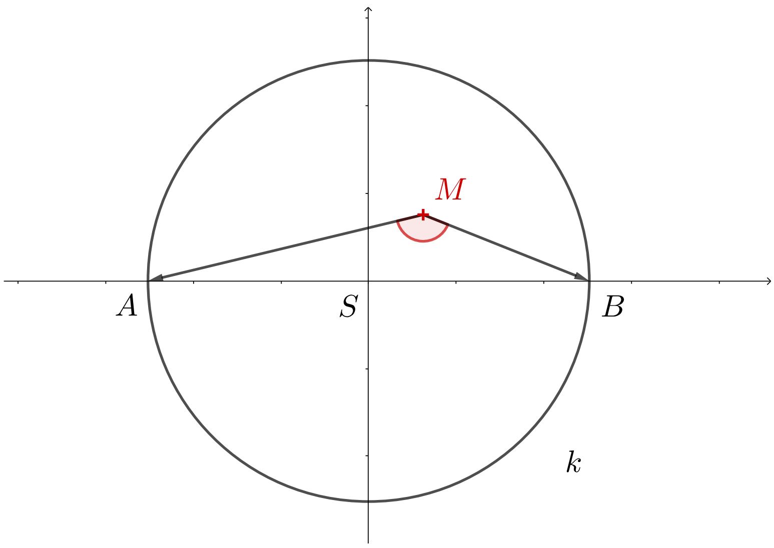
$$MA \cdot MB = x^2 + y^2 - r^2 > 0$$



3. *M leží uvnitř kružnice*

V případě, kdy bod M leží uvnitř kružnice k, svírají vektory MA, MB tupý úhel. Z geometrické interpretace víme, že skalární součin $MA \cdot MB$ bude záporný:

$$MA \cdot MB = x^2 + y^2 - r^2 < 0$$



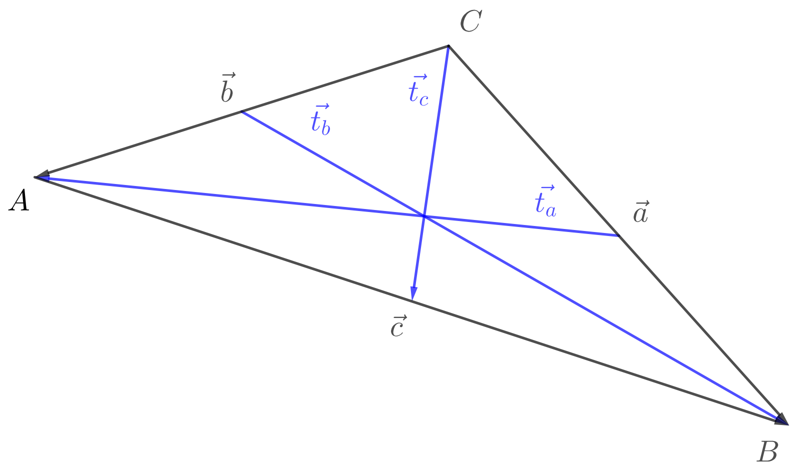
Závěrem připomeňme pojem **mocnost bodu ke kružnici**:

Libovolnému bodu M lze přiřadit reálné číslo m, pro něž platí:
1. $|m| = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky dané kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem M.
2. $m > 0$ pro body M vně kružnice,
$m = 0$ pro body $M \in k$
$m < 0$ pro body M uvnitř kružnice.
Číslo m se nazývá mocnost bodu M ke kružnic k. ([Pom], s. 84)

4.2.3 Délka těžnic

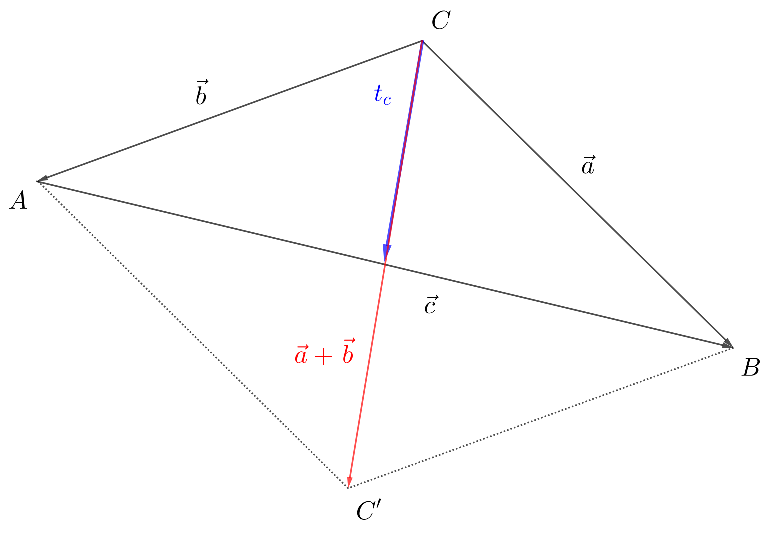
Určete délky těžnic trojúhelníku ABC, jestliže $AB = \vec{c}$, $AC = \vec{b}$, $CB = \vec{a}$. Délky stran trojúhelníku ABC budeme značit a, b, c.

Zadání příkladu se inspiruje článkem [Cal], první část řešení jsme převořili do jednodušší formy, druhá část výpočtu je inspirována řešením ubedeném v článku.



Řešení

Abychom mohli určit délky těžnic, musíme nejprve popsat vektory $\vec{t_a}$, $\vec{t_b}$, $\vec{t_c}$. Při popisu vektorů $\vec{t_a}$, $\vec{t_b}$ a $\vec{t_c}$ využijme znalostí z planimetrie.



Víme, že úhlopříčky v rovnoběžníku se navzájem půlí. Doplníme-li trojúhelník ABC na rovnoběžník $AC'BC$, pak úsečka CC' půlí úsečku AB. Dále můžeme pozorovat, že vektor $CC' = \vec{a} + \vec{b}$ a $\frac{1}{2}CC' = \vec{t_c}$.
Tedy

$$\boxed{\vec{t_c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$$

Dále se budeme inspirovat řešením ze článku [Cal]. Víme, že

$$\begin{aligned}\|\vec{t_c}\|^2 &= \vec{t_c}\cdot\vec{t_c}\\ \|\vec{t_c}\|^2 &= \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})^2 = \frac{1}{4}(a^2+2\vec{a}\,\vec{b}+b^2) \qquad (5)\end{aligned}$$

Vztah pro délku těžnice bychom rádi vyjádřili pomocí délek stran, proto musíme rovnost upravit a vyjádřit skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ pomocí délek stran trojúhelníku ABC. Skalární součin dvou vektorů umíme vyjádřit pomocí vztahu pro odchylku dvou vektorů (6) nebo kosinové věty (7).

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a\cdot b\cdot\cos\varphi \qquad (6)\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\varphi \qquad (7)\end{aligned}$$

Vyjádřeme z rovnosti (6) $\cos\varphi$, dosaďme do rovnosti (7).

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a\cdot b\cdot\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= -\frac{1}{2}\,(c^2-a^2-b^2)\end{aligned}$$

Nyní se vraťme k rovnosti (5) a dosaďme za skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$$\begin{aligned}\|\vec{t_c}\|^2 &= \frac{1}{4}\,(a^2+2(-\frac{1}{2})(c^2-a^2-b^2)+b^2)\\ \|\vec{t_c}\|^2 &= \frac{1}{4}\,(2a^2+2b^2-c^2)\end{aligned}$$

Získali jsme vztah pro délku těžnice t_c.

$$\boxed{\|\vec{t_c}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}$$

Délky těžnic t_a, t_b bychom spočítali obdobně.

Závěr

Před provedením analýzy středoškolských učebnic jsme nastínili jednoduchý obecný princip, kterým bychom se měli inspirovat při zavedení nových pojmů. Mezi body tohoto postupu patří motivace, odvození, včetně odvození názvu a následná aplikace pojmu. Zjistili jsme, že žádná z vybraných učebnic nesplňuje všechny kroky. Usoudili jsme, že má smysl v práci pokračovat a pokusili se zavést skalární součin v logické posloupnosti.

Při analýze učebnic jsme uvedli, že matematická motivace není pro žáky nejvhodnější kvůli abstraktnosti, v průběhu zavedení jsme přístup přehodnotili. Pojem abstrakce je často negativně konotován, avšak i my jsme při práci postupovali od konkrétního k obecnému, a prošli tak přirozeně procesem abstraktizace.

Budeme-li matematiku tvořit, jsme schopni jednotlivá témata matematiky propojovat a budovat tak celistvý systém. V případě zavedení skalárního součinu jsme využili znalosti z planimetrie a uplatnili je v analytické geometrii, kde pracujeme se stejnými geometrickými objekty, které popisujeme pomocí souřadnic.

Závěrem bychom rádi povzbudili všechny učitele matematiky, aby se společně s žáky pokusili matematiku tvořit, přestože se často může zdát, že čas stojí proti nám. Pokud však vybudujeme pevné základy, další práce bude probíhat plynule a bude se zdát mnohem jednodušší.

Seznam literatury

[Cal] Calda E.: *Skalární součin vektorů.* MFI 15 (2005-2006), str. 14-20
Dostupné z: `http://mfi.upol.cz/old/MFI_15_pdf/Mat_15_6.pdf`

[Elb] Elbelová J.: *Využití skalárního součinu v geometrických úlohách.* Učitel matematiky 16(3), 2008

[Hal] Halas Z.: *Cesta ke skalárnímu součinu.* In: Hromadová J., Slavík A.: *Cesty k matematice III*, Matfyzpress, Praha, 2018. Str. 23-31. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2018/sbornik.pdf`

[KoBo] Kočandrle M., Boček L.: *Analytická geometrie.* Matematika pro gymnázia, 3. vyd., Prometheus, Praha, 2009.

[Liš] Liška M., Valenta T., Král L. a kol.: *Matika pro spolužáky*, 1. vyd., ProSpolužáky.cz s. r. o., Hradec Králové, 2018.

[mat.cz] *Matematika.cz* [online]. 19. 2. 2020
Dostupné z: `https://matematika.cz/skalarni-soucin`

[mat.cz] *Matematika.cz* [online]. 2. 4. 2020
Dostupné z: `https://matematika.cz/obecna-rovnice-primky`

[MeSi] Medek V. a Sivošová A.: *Sešit 5.* Matematika pro gymnázia, 1. vyd., SPN, Praha, 1979.

[Pol] Polák J.: *Přehled středoškolské matematiky*, 9. přeprac. vyd., Prometheus, Praha, 2008.

[Pom] Pomykalová E.: *Planimetrie.* Matematika pro gymnázia, 5. vyd., Prometheus, Praha, 2010.

[real] *realisticky.cz* [online]. 7. 11. 2019 [cit. 2019-12-3].
Dostupné z:
`http://www.realisticky.cz/ucebnice/01`

[Von] Vondra J.: *Matematika pro SŠ, 7. díl A.*, 2. vyd., Brno: Didaktis, 2018.