Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky (41-KMDM)

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metodické přístupy k odvozování vzorců pro míru v geometrii v českých učebnicích matematiky

Approaches to the deduction of formulas for measure in geometry in Czech mathematics textbooks

Anežka Procházková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělání

2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Metodické přístupy k odvozování vzorců pro míru v geometrii v českých učebnicích matematiky potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 23.7.2020

Ráda bych poděkovala vedoucí práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za její cenné rady a za čas, který věnovala mé práci.

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce je prostřednictvím analýzy vybraných učebnic matematiky v České republice shrnout různé přístupy k výpočtu obsahů, objemů a povrchů v geometrii. Práce je rozdělena do dvou částí. První část práce se věnuje geometrii a její míře a geometrickým útvarům. Jsou zde definovány a vysvětleny základní pojmy týkající se míry v geometrii. Dále následuje shrnutí základních poznatků o geometrických útvarech, které jsou použity ve druhé části práce. V druhé části práce jsou shromážděny různé přístupy k odvození vzorců, které jsem našla v českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň základní školy. Přístupy jsou popsány takovým způsobem, aby byly přístupné nejen učitelům, ale i žákům. Tato část je rozdělena podle geometrických útvarů, které jsou představeny v první části. Práce se věnuje obsahu trojúhelníku, rovnoběžníku, lichoběžníku a kruhu. Dále povrchu a objemu krychle, kvádru, obecnému hranolu, jehlanu, válci, kuželu a kouli. Součástí této části je i přiblížení Cavalieriho principu, který se objevoval v některých přístupech.

KLÍČOVÁ SLOVA

obsah, objem, povrch, míra v geometrii, učebnice matematiky

ABSTRACT

This bachelor's thesis aims to analyse selected mathematics school books published in the Czech Republic and summarize different approaches to calculating the area, volume and surface area in geometry. The thesis has been divided into two sections. The first section focuses on geometry, geometric measure and geometric figures, defining and explaining key terms related to the measure in geometry. The section also summarizes key information on the geometric figures addressed in the second section of the thesis. The second section includes different approaches to formula derivation, as used in Czech mathematics school books for lower secondary schools. The approaches are described in ways comprehensible to both teachers and pupils. The second section has been divided according to the geometric figures introduced in the first section, dealing with the area of a triangle, parallelogram, trapezium and circle, as well as the surface area and volume of a cube, cuboid, general prism, pyramid, cylinder, cone and sphere. The final section also explores Cavalieri's principle, which was used in some of the investigated approaches.

KEYWORDS

area, volume, surface, measure in geometry, mathematics school books

Obsah

Úvod 7

1 Základní pojmy 8

1.1 Geometrie 8

1.2 Míra v geometrii 8

1.3 Geometrické útvary 13

1.3.1 Mnohoúhelníky 13

1.3.2 Kruh a kružnice 18

1.3.3 Mnohostěny 18

1.3.4 Rotační tělesa 21

2 Přístupy k odvození vzorců pro míru v geometrii z českých učebnic matematiky 25

2.1 Obsah trojúhelníku 25

2.2 Obsah rovnoběžníku 29

2.3 Obsah lichoběžníku 31

2.4 Obsah kruhu 34

2.5 Povrch krychle a kvádru 40

2.6 Objem krychle a kvádru 41

2.7 Povrch hranolu obecně 42

2.8 Objem hranolu obecně 43

2.9 Povrch jehlanu 47

2.10 Objem jehlanu 47

2.11 Povrch válce 50

2.12 Objem válce 52

2.13 Povrch kuželu 52

2.14 Objem kuželu ... 54

2.15 Objem koule ... 55

2.16 Povrch koule ... 56

2.17 Cavalieriho princip ... 58

Závěr ... 64

Seznam použité literatury ... 65

Úvod

Geometrie je oblast matematiky, která bývá pro mnohé žáky obtížná. Z vlastní zkušenosti, ať už mé z dob studií na základní či střední škole, tak i své učitelské praxe, vím, že ovládat geometrii není pro žáky vždy snadné. Geometrie je však pro život velice důležitá a pro míru v geometrii to platí dvojnásob. Např. potřebujeme vědět, kolik litrů vody se vejde do sudu nebo kolik barvy je potřeba na vymalování místnosti. Je potřeba, aby geometrie byla žákům podávána správnou, poučnou i zábavnou formou. Pak určitě osloví více žáků.

Míru v geometrii však mnozí žáci za problematickou nepovažují, protože získají dojem, že se stačí naučit vzorce a umět do nich dosadit údaje. V takovém případě však často neumějí vzorce použít. Proto považuji za vhodné, aby se žáci učili vzorce s porozuměním, a aby tedy s nimi nebyli jen seznamováni, ale viděli také, jak vzorce vznikají a jaké jsou mezi nimi vztahy.

Cílem mé práce je prostřednictvím analýzy vybraných učebnic matematiky v České republice shrnout různé přístupy k výpočtu obsahů, objemů a povrchů v geometrii. Budu se zaměřovat na způsoby, které ukazují, jak lze vzorce pro míru vytvořit, a které jsou současně přístupné žákům. Výsledný text může sloužit jako metodický materiál pro učitele 2. stupně

V první části práce se věnuji pojmům, které jsou pro moje téma významné, a shrnuji základní poznatky o geometrických útvarech, které jsou použity ve druhé části práce. Pro komplexní uchopení tématu by jistě bylo účelné zabývat se i historií pojmů z míry v geometrii. Jedná se však o problematiku natolik obsáhlou, že by vyžadovala zvláštní práci. Proto se jí věnovat nebudu. Krátce se historii věnuje Bartlová (2011) v diplomové práci *Míry geometrických útvarů v učivu matematiky druhého stupně základní školy*. Historický vývoj určování obsahů a objemů od počátků ve starověkém Egyptě až po moderní přístupy popisuje ve své práci Vojtěská (2015).

Pro druhou část práce jsem provedla analýzu různých českých učebnic matematiky 2. stupně s cílem najít vhodné metodické přístupy k odvození vzorců. Své poznatky jsem sepsala do souhrnné sbírky přístupů k odvození vzorců pro míru v geometrii. Tuto část jsem rozdělila podle geometrických útvarů, které jsem představila v první části.

1 Základní pojmy

1.1 Geometrie

Slovo geometrie znamená v doslovném překladu zeměměřičství. Kořeny geometrie spadají do dob starého Egypta a Mezopotámie, kdy kočovníci, kteří se chtěli usadit, potřebovali změřit pozemky. V této době začali používat první geometrickou terminologii a vytvářeli první vzorce pro obsahy a objemy geometrických útvarů.

Když se řekne geometrie, mnozí si pod tímto pojmem představí pouhé rýsování. Vymezení geometrie mohou znít například takto:

> Geometrie je matematický obor, který se zabývá množinami bodů v rovině a v prostoru (geometrickými útvary). (Dell´Acqua, 1988, s. 75)

> Geometrie, měřictví, jest nauka o veličinách a útvarech prostorových. Pojmu těchto útvarů nabýváme abstrakcí z předmětů hmotných. Nehledíme-li ku hmotě a máme-li z vlastností tělesa na zřeteli pouze jeho tvar, velikost a polohu, myslíme si těleso matematické, kteréž tedy není nic jiného, než určitě a dokonale omezená část prostoru. (Otto, 1896, s. 29)

Geometrii na základní škole můžeme dělit na dvě oblasti – planimetrii a stereometrii.

Planimetrie je část matematiky, která se zabývá dvourozměrným prostorem, tj. geometrickými útvary v rovině. Ve své práci se z rovinné geometrie budu věnovat trojúhelníku, rovnoběžníku, lichoběžníku a kruhu.

Stereometrie je část matematiky, která se zabývá trojrozměrným prostorem, tj. geometrickými útvary v prostoru. V této práci se z prostorové geometrie budu věnovat hranolu, válci, jehlanu, kuželu a kouli.

1.2 Míra v geometrii

> Mezi matematické pojmy, které se vyvinuly z potřeb společnosti, nutno bezesporu zařadit např. pojmy úsečka a její délka, geometrický útvar a jeho obsah, těleso a jeho objem. Podnětem pro studium těchto pojmů byly otázky, které vznikaly např. při vyměřování a zavodňování pozemků, při plánování staveb a cest, při směně atp. Sám termín geometrie poukazuje dostatečně výmluvně na souvislost

této disciplíny s praktickou činností lidí. Dnes sice existují celá odvětví geometrie, kde se „obejdeme bez čísel“, ale přesto je otázka zavedení velikosti geometrických útvarů prakticky i teoreticky důležitá. (Kuřina, 1985, s. 72)

Zobrazení F množiny všech měřitelných útvarů na množinu všech nezáporných čísel nazýváme mírou, právě když pro jeho funkční hodnoty, které budeme nazývat velikost geometrického útvaru, platí:

1. Určitý geometrický útvar má velikost jedna.
2. Shodné měřitelné útvary mají sobě rovné velikosti.
3. Velikost sjednocení dvou nepřekrývajících se měřitelných útvarů je rovna součtu velikostí těchto útvarů. (Kuřina, 1985, s. 73)

Chceme-li tedy změřit úsečku, je třeba, aby byla zvolena jednotka délky. Změřená délka musí být nezáporné číslo a není závislá na poloze úsečky. Přesuneme-li úsečku jinam, její délka je stále stejná a zároveň je shodná s délkou úsečky na původním místě. Pokud chceme úsečky graficky sečíst, velikost grafického součtu je rovna součtu velikostí úseček. Toto jsou charakteristické vlastnosti míry.

Základním měřitelným útvarem v rovině je každý rovinný útvar, který je omezený a jehož hranicí v rovině je jednoduchá uzavřená křivka. Měřitelným útvarem v rovině je každý útvar, který lze získat z konečného počtu základních měřitelných útvarů pomocí množinových operací. (Kuřina, 1985, s. 88)

Pod pojmem měřitelný útvar si tedy můžeme představit úsečku v případě přímky, měřitelnými útvary v rovině jsou např. mnohoúhelníky a v prostoru např. tělesa. Mezi základní míry v geometrii patří délka úsečky, velikost úhlu, obvod a obsah obrazce, povrch a objem tělesa.

Délka úsečky

Zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel se nazývá míra úseček a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno dané úsečce, se nazývá délka úsečky (délku úsečky AB zapisueme $|AB|$), právě když

1.$(\exists AB)\ |AB| = 1$

slovy: existuje úsečka, která má délku 1

2. $(\forall AB, CD)\ AB \cong CD \Rightarrow |AB| = |CD|$

   slovy: pro každé dvě úsečky platí: jestliže jsou shodné, pak jejich délky jsou si rovny

3. $(\forall AB, CD)\ |AB + CD| = |AB| + |CD|$

   slovy: pro každé dvě úsečky platí: délka jejich grafického součtu se rovná součtu jejich délek. (Bělík, 2005, s. 34)

Délka neboli velikost úsečky je vzdálenost jejích koncových bodů. Její velikost můžeme získat měřením. Úsečky měříme vždy v určitých jednotkách, např. v milimetrech, centimetrech, palcích, ve stopách a v mnoha dalších.

Jak je psáno v definici velikosti délky úsečky výše, jedná se o zobrazení. Každé úsečce přiřazujeme v určité míře právě jedno číslo. Jde o zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel, protože velikost je buď kladná, nebo nula (tzv. nulová úsečka).

Velikost úhlu

Zobrazení množiny všech úhlů do množiny všech nezáporných reálných čísel se nazývá míra úhlů a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno úhlu α, se nazývá velikost úhlu α [velikost úhlu α značíme $v(\alpha)$], právě když platí, že

1. $(\exists \alpha)\ \ v(\alpha) = 1$

   slovy: existuje úhel, jehož velikost se rovná číslu jedna

2. $(\forall \alpha, \beta)\ \alpha \cong \beta \Rightarrow v(\alpha) = v(\beta)$

   slovy: jestliže dva úhly jsou navzájem shodné, pak jejich velikosti jsou si rovny

3. $(\forall \alpha, \beta)\ v(\alpha + \beta) = \ v(\alpha) + v(\beta)$

   slovy: velikost grafického součtu dvou úhlů se rovná součtu velikostí těchto úhlů. (Bělík, 2005, s. 44)

Velikost úhlu je výsledkem jeho měření. Jedná se o nezáporné reálné číslo. Nejpoužívanější jednotky jsou stupně a radiány a odpovídají tzv. stupňové míře a obloukové míře.

Jednotkový úhel stupňové míry je úhlový stupeň, který značíme °. Jedná se o $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Menšími jednotkami v stupňové míře jsou minuty (1´) a vteřiny (1´´). Pro ně platí vztah: 1° = 60´ = 3 600´´.

Umístíme-li vrchol úhlu do jednotkové kružnice, tj. do kružnice s jednotkovým poloměrem, velikost úhlu je délka oblouku příslušící danému úhlu. Tuto míru nazýváme obloukovou. Jednotkový úhel se nazývá radián.

> Je-li velikost úhlu v míře stupňové α, označíme jeho velikost v míře obloukové $arc\ \alpha$ („arkus alfa“; arcus = oblouk). $arc\ \alpha$ (v radiánech) je tedy délka oblouku jednotkové kružnice, který přísluší ke středovému úhlu o velikosti α v míře stupňové. Ze vztahu pro výpočet délky kružnicového oblouku $\left|\widehat{AB}\right| = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$ plyne: $arc\ \alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ (rad). (Pomykalová, 2000, s. 69)

Mezi historicky významné jednotky patří ještě grady neboli úhlový stupeň setinný. Grad je $\frac{1}{100}$ pravého úhlu.

Obvod

Obvod určujeme u rovinných geometrických útvarů. Jedná se o délku hranice útvaru. U mnohoúhelníku je obvod součet délek všech jeho stran. Je-li obrazec ohraničen uzavřenou křivkou, např. kruh, obvodem je délka této křivky. Značíme ho zpravidla písmenem *o*. Základní jednotkou je metr, ale většinou počítáme v jednotkách, které jsou pro danou situaci nejvhodnější.

Obsah

Obsah určujeme u rovinných geometrických útvarů.

> Obsah *S* obrazce je kladné číslo přirazené geometrickému obrazci tak, že platí:
>
> 1) Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
>
> 2) Skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřekrývají, rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.

3) Obsah čtverce o straně 1 (mm, cm …) je 1 (mm^2, cm^2, …).

(Pomykalová, 2000,s. 66)

Obsah útvaru je číslo, které určuje velikost plochy, kterou zaujímá daný útvar. Základní jednotkou je metr čtvereční, ale přirozeně závisí na kontextu. Např. obsah narýsovaného čtverce bychom počítali spíše v centimetrech čtverečních, obsah pozemku v metrech čtverečních či arech.

Povrch

Povrch určujeme u prostorových těles, přičemž povrchem S „tělesa rozumíme obsah jeho hranice" (Pomykalová, 2009, s. 150). Značíme ho zpravidla písmenem *S*.

Povrch tělesa můžeme chápat jako velikost plochy, ze které je dané těleso vytvořeno. Rozvineme-li všechny plochy, které tvoří povrch tělesa, do roviny, získáme jeho síť. Ta se skládá z rovinných obrazců. Sečteme-li obsahy těchto obrazců, získáme povrch tělesa. Sítě těles jsou k vidění na obr. 5, obr. 7 a obr. 9. Zvláštním tělesem je mimo jiné koule, jejíž síť nelze znázornit, protože její ohraničení tvoří tzv. kulová plocha.

Základní jednotka povrchu je metr čtvereční a od něj se odvozují i jiné jednotky, které jsou pro dané těleso vhodné, např. milimetry čtvereční, kilometry čtvereční, ary, hektary atd.

Objem

Objem určujeme u prostorových těles a značíme ho zpravidla písmenem *V*.

Objem tělesa je kladné číslo přiřazené útvaru tak, že platí:

1) Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.

2) Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.

3) Objem krychle o straně 1 (m, cm, …), je roven 1 (m^3, cm^3, …).

(Pomykalová, 2009, s. 149)

Objem tělesa je velikost prostoru, které těleso zabírá. Laicky řečeno, kolik se „toho do tělesa vejde", např. dítěti lze objem vysvětlit jako množství vody, které se dá do tělesa nalít.

Základní jednotkou objemu je metr krychlový, ale pro lepší představu je dobré si převádět na litry, mililitry atd.

V této práci se budeme zabývat pouze obsahy, povrchy a objemy některých útvarů a těles.

1.3 Geometrické útvary

Geometrické útvary mohou být dvourozměrné nebo trojrozměrné. Dvourozměrný útvar má dva rozměry – délku a šířku. Takové útvary nazýváme rovinné obrazce. Trojrozměrný útvar má o jeden rozměr více – délku, šířku a výšku. Trojrozměrné útvary budeme nazývat tělesa.

Obrazcem v rovině je rovinný útvar, který je ohraničený uzavřenou čárou.

> Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha. (Pomykalová, 2009, s. 123)

Útvary, s nimiž se žáci základní školy seznamují, můžeme rozdělit na čtyři kategorie: mnohoúhelníky, kružnice (kruh), mnohostěny a rotační tělesa. V dalším textu je blíže popíšu a bez důkazu uvedu jejich základní vlastnosti.

1.3.1 Mnohoúhelníky

Mnohoúhelník je rovinný obrazec, který můžeme definovat jako průnik úhlů.

> Je dáno n různých bodů $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Množinu všech úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ nazýváme lomená čára $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Lomenou čáru $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$ nazýváme uzavřenou lomenou čáru. Geometrický útvar tvořený uzavřenou lomenou čarou a částí roviny, kterou tato lomená čára ohraničuje, se nazývá mnohoúhelník. (Bartoňová a Květoň, 2007, s. 29)

Body $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ jsou vrcholy mnohoúhelníku, úsečky A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_nA_1 jsou strany mnohoúhelníku. Písmeno n značí počet vrcholů, tedy i stran. Uhlopříčka je úsečka, která spojuje bod s jiným bodem mnohoúhelníku, který není jeho sousední, tj. nejsou oba krajní body stejné strany mnohoúhelníku. Vzorec pro výpočet uhlopříček vypadá takto: $u = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, kde n je počet vrcholů (stran) a u je počet uhlopříček.

Mnohoúhelník, který má všechny strany shodné, se nazývá pravidelný. Pokud má všechny strany shodné, má shodné i všechny vnitřní úhly. Pravidelným trojúhelníkem je rovnostranný trojúhelník a pravidelný čtyřúhelník je čtverec. Další mnohoúhelníky již nemají speciální název a hovoříme pouze o pravidelném n-úhelníku. Pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici. Další zajímavou vlastností u pravidelného n-úhelníku je, že je osově souměrný. Pokud má navíc sudý počet stran, je i středově souměrný.

Trojúhelník

Trojúhelník definují učebnice různě.

Definice trojúhelníku jako sjednocení úseček *AB, BC, AC*:

> Zvolíme tři různé body *A, B, C,* které neleží na téže přímce. Sestrojíme úsečky *AB, BC* a *CA*. Část roviny ohraničená těmito třemi úsečkami se nazývá trojúhelník *ABC*. (Müllerová, 1999, s. 77)

Definice trojúhelníku jako průnik polorovin:

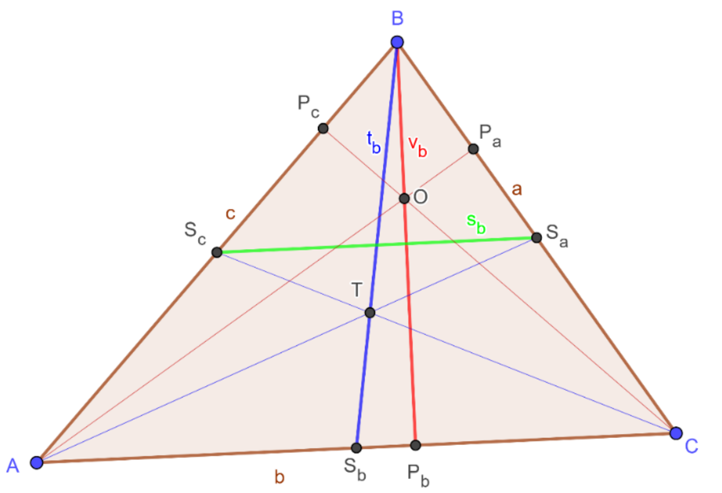
> Trojúhelník *ABC* je průnik polorovin *ABC, BCA, CAB*; přitom body *A, B, C* jsou různé a neleží v jedné přímce. (Pomykalová, 2000, s. 23)

Definice trojúhelníku jako průnik konvexních úhlů:

Trojúhelník *ABC* je průnik konvexních úhlů *ABC, BCA, CAB*, kde *A*, *B*, *C* jsou různé body. Pro konvexní úhel platí, že úsečka, která spojuje libovolné jeho dva body, náleží celá příslušnému úhlu.

Součet každých dvou délek stran trojúhelníku musí být větší než délka třetí strany. Tato vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost a je to nutná podmínka, aby trojúhelník existoval. V trojúhelníku leží proti větší straně větší vnitřní úhel, proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strana. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

Každý trojúhelník má tři střední příčky, tři těžnice a tři výšky. Střední příčka je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Každá střední příčka je rovnoběžná s třetí stranou trojúhelníku, která není spojena střední příčkou. Délka střední příčky se rovná polovině délky protější strany. Na obr. 1 je jedna ze středních příček úsečka $S_cS_a = s_b$. Těžnice je úsečka, která spojuje vrchol a střed protilehlé strany. Všechny těžnice se protínají v jednom bodě, který se nazývá těžiště. Těžiště rozděluje těžnici v poměru 2 : 1. Na obr. 1 je jedna z těžnic úsečka $BS_b = t_b$, těžiště je označeno písmenem T. Výška je úsečka, která spojuje vrchol a patu kolmice, která je spuštěna z vrcholu k protilehlé straně. Slovem výška bývá označována i délka této úsečky. Tato velikost je nejkratší vzdálenost vrcholu a protější strany. Dále může pojem výška označovat přímku, která je vedená vrcholem a kolmá k protilehlé straně. Výšky jako přímky se protínají v jednom bodě, které se nazývá ortocentrum. Na obr. 1 je jedna z výšek úsečka $BP_b = v_b$, ortocentrum je označeno písmenem O. V ostroúhlém trojúhelníku se ortocentrum nachází uvnitř trojúhelníku, v tupoúhlém vně a v pravoúhlém ve vrcholu u pravého úhlu.



OBR. 1: TROJÚHELNÍK A JEHO VLASTNOSTI

Pro obvod trojúhelníku platí vzorec $O = a + b + c$, kde a, b, c jdou délky stran trojúhelníku.

Shodné trojúhelníky mají shodné délky odpovídajících si strany a stejné velikosti odpovídajících si vnitřních úhlů. Zda jsou trojúhelníky shodné, můžeme určit pomocí vět o shodnosti trojúhelníků.

- Věta *sss*: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech odpovídajících stranách.
- Věta *sus*: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.

- Věta *usu*: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v úhlech k této straně přilehlých.
- Věta Ssu: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich.

Čtyřúhelník

Čtyřúhelník je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy a čtyřmi stranami, a tudíž má i čtyři vnitřní úhly. Součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku je 360°.

Můžeme rozlišit např. rovnoběžníky a lichoběžníky.

Rovnoběžník je geometrický útvar, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné a zároveň stejně velké. S nejjednoduššími rovnoběžníky se žáci setkávají již na prvním stupni. Jsou jimi čtverec a obdélník.

> Čtverec se nazývá rovnoběžník, jehož sousední strany mají stejnou délku a jsou k sobě kolmé. Ve čtverci $ABCD$ platí: $AB \parallel CD, AD \parallel BC, |AB| = |BC|, |\sphericalangle DAB| = 90°, |\sphericalangle ABC| = 90°$. (Odvárko a Kadleček, 2004, s. 202)

Pro obvod čtverce platí $O = 4 \cdot a$, kde *a* je délka strany čtverce. Jeho obsahem se již v práci zabývat nebudeme, vycházíme z toho, že žáci umí obsah vypočítat z 1. stupně. Obsah čtverce je dán vzorcem $S = a \cdot a$.

> Obdélník se nazývá rovnoběžník, jehož sousední strany mají různou délku a jsou k sobě kolmé. V obdélníku $ABCD$ platí: $AB \parallel CD, AD \parallel BC, |AB| \neq |BC|, |\sphericalangle DAB| = 90°, |\sphericalangle ABC| = 90°$. (Odvárko a Kadleček, 2004, s. 200)

Pro obvod obdélníku platí $O = 2 \cdot (a + b)$, kde *a* a *b* jsou délky sousedních stran obdélníku. Obsah obdélníku se dá spočítat vzorcem $S = a \cdot b$.

V učebnicích základní školy jsou zpravidla čtverec a obdélník dva různé útvary, avšak na střední škole některé učebnice (např. Pomykalová, 2000, s. 48) uvádějí, že čtverec je zvláštní případ obdélníku.

Rovnoběžníky, jejichž sousední strany nejsou k sobě kolmé, nazýváme kosočtverce a kosodélníky.

Základní vlastnosti rovnoběžníku (viz obr. 2):

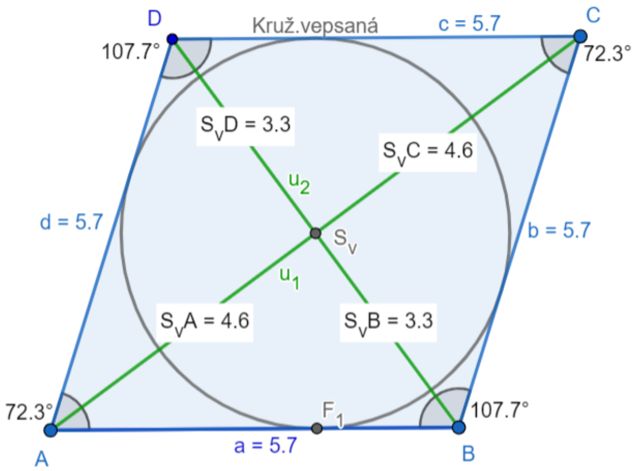
- Protější strany jsou shodné. Protější vnitřní úhly jsou shodné.
- Součet dvou vnitřních úhlů, které mají společné rameno, je 180°.
- Uhlopříčky rovnoběžníku jsou shodné a navzájem se půlí. U čtverce a kosočtverce zároveň půlí jejich úhly a uhlopříčky jsou na sebe kolmé.

Lichoběžník je geometrický útvar, jehož dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany jsou různoběžné. Rovnoběžné strany nazýváme základny, různoběžné strany nazýváme ramena. Jsou-li ramena lichoběžníku stejně velká, jedná se o rovnoramenný lichoběžník. Je-li jedno rameno kolmé k základně, jedná se o pravoúhlý lichoběžník.

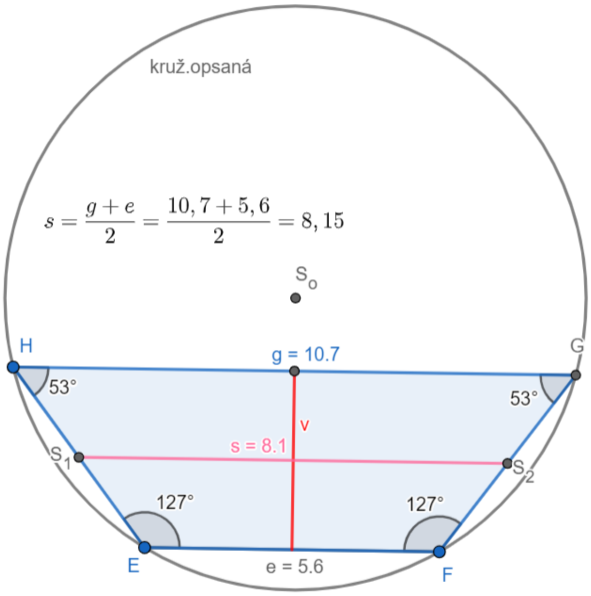
Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, se nazývá tečnový (obr. 2). Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici, se nazývá tětivový (obr. 3).

Základní vlastnosti lichoběžníku (viz obr. 3):

- Výška lichoběžníku je úsečka, která je kolmá k základnám a jejíž velikost je stejná jako vzdálenost základen.
- Rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný podle osy, která spojuje středy stran základen. Jeho úhly, které jsou přilehlé k téže základně, jsou shodné.
- Střední příčka je úsečka, která spojuje středy ramen lichoběžníku. Je rovnoběžná se základnami a její délka se rovná aritmetickému průměru základen.



OBR. 2: ROVNOBĚŽNÍK A JEHO VLASTNOSTI



OBR. 3: LICHOBĚŽNÍK A JEHO VLASTNOSTI

1.3.2 Kruh a kružnice

Kružnice je množina všech bodů *X*, které mají od daného středu *S* vzdálenost *r*, tj. pro libovolný bod *X* kružnice *k* platí $|SX| = r$. (Müllerová, 2005b, s. 9)

Kruh *K* je množina všech bodů *X*, pro něž platí $|SX| \leq r$. (Müllerová, 2005b, s. 9)

Kružnici zpravidla značíme *k*(*S*, *r*). Písmeno *k* značí název kružnice. Bod *S* je střed kružnice, číslo *r* je poloměr kružnice.

Tětiva je úsečka, která spojuje dva body na kružnici. Tětiva, která prochází středem, se nazývá průměr. Značíme ho *d*. Vztah mezi průměrem a poloměrem je $d = 2r$.

Obvod kruhu neboli délku kružnice spočítáme vzorcem $O = 2 \cdot \pi \cdot r$, kde *r* je poloměr kruhu či kružnice a π je konstanta, která se nazývá Ludolfovo číslo. Přibližná hodnota $\pi \doteq 3{,}141592654$, pro účely výpočtu zpravidla používáme hodnotu $\pi \doteq 3{,}14$. Vzorec lze zapsat i s průměrem kružnice *d*, pro který platí, že $d = 2r$. Obvod kruhu (délku kružnice) vypočítáme podle vztahu $O = \pi \cdot d$. Obsahu kruhu se bude věnovat praktická část práce.

1.3.3 Mnohostěny

Tělesa, jejichž hranice je tvořena mnohoúhelníky, se nazývají mnohostěny. Jinak řečeno, pokud stěny mnohostěnu položíme do roviny na jeden rovinný obrazec, tj. sestrojíme síť mnohostěnu, skládá se z několika mnohoúhelníků. Můžeme je pojmenovat podle počtu stěn: čtyřstěn, pětistěn, šestistěn, osmistěn atd.

Mnohostěny mají jednu zajímavou vlastnost a tou je souvislost počtu vrcholů, hran a stěn. Platí pro ně tzv. Eulerův vzorec.

> Nechť je dán mnostěn $\mathcal{M}$. Označme s počet stěn $\mathcal{M}$, v počet vrcholů $\mathcal{M}$ a h počet hran $\mathcal{M}$. Eulerovu charakteristiku mnohostěnu $\mathcal{M}$ rozumíme číslo $E_{\mathcal{M}} = s + v - h$. Eulerova charakteristika libovolného konvexního mnohostěnu je rovna dvěma. (Fürst a kol., 2004, s. 132)

Eulerův vzorec vypadá takto: $v + s = h + 2$, kde v je počet vrcholů, s je počet stěn a h je počet hran.

Pravidelný mnohostěn je těleso, které má všechny stěny shodné (tj. každá stěna je pravidelný n-úhelník) a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Pravidelných mnohostěnů, kterým říkáme platónská tělesa, je pět (odvození tohoto tvrzení lze nalézt v učebnici Pomykalové, 2009, s. 129).

Dále se budeme věnovat hranolům a jehlanům.

Hranol

> n-boký hranol je těleso, jehož podstavy jsou dva shodné n-úhelníky ležící v rovnoběžných rovinách a které má n stejně dlouhých bočních hran. Pravidelný hranol je hranol, jehož podstavu tvoří pravidelný mnohoúhelník. (Jedličková a kol., 2016, s. 15)

Hranol má dvě podstavy a plášť. Obě podstavy leží v rovnoběžných rovinách a jsou shodné. Plášť hranolu tvoří rovnoběžníky, říkáme jim boční stěny hranolu.

Hranoly pojmenováváme podle toho, kolik stran má podstava, tj. kolik má hranol bočních stěn. Hranol s trojúhelníkovou podstavou se nazývá trojboký, s čtyřúhelníkovou čtyřboký, s pětiúhelníkovou pětiboký atd.

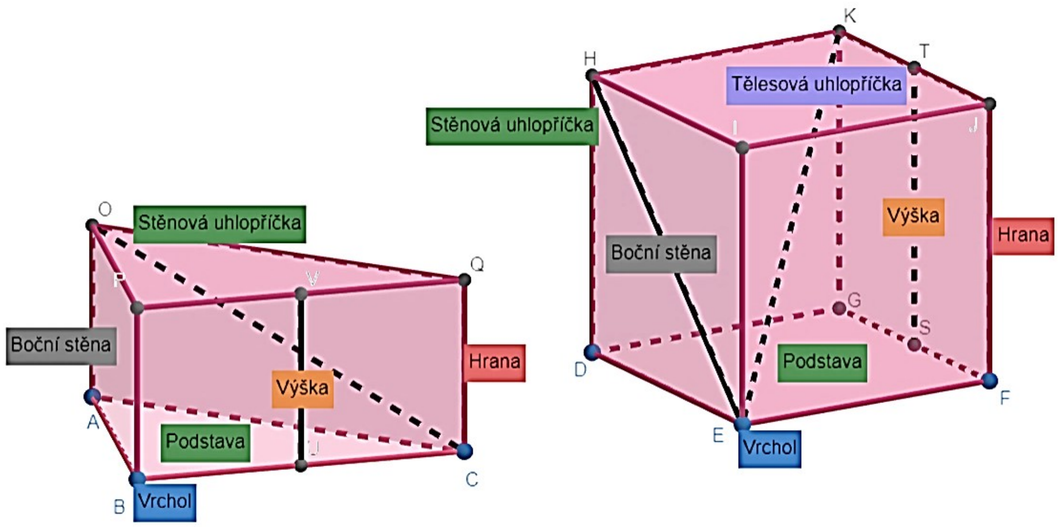
Kolmý hranol je hranol, který má boční stěny kolmé k podstavě. V opačném případě se jedná o kosý hranol. Pokud je hranol kolmý a zároveň je jeho podstavou pravidelný n-úhelník, nazývá se pravidelný n-boký hranol.

Rovnoběžnostěn je čtyřboký hranol, který má rovnoběžné jak podstavy, tak i protilehlé boční stěny, tedy boční stěny mohou být i podstavami. Skládá se z dvanácti hran, osmi vrcholů, čtyř tělesových uhlopříček a šesti stěn (viz obr. 4). Tělesové uhlopříčky jsou shodné a protínají se v jednom bodě, z toho plyne, že se navzájem půlí. Nejtypičtějším příkladem rovnoběžnostěnu je krychle a kvádr. Jedná se o kolmý rovnoběžnostěn.

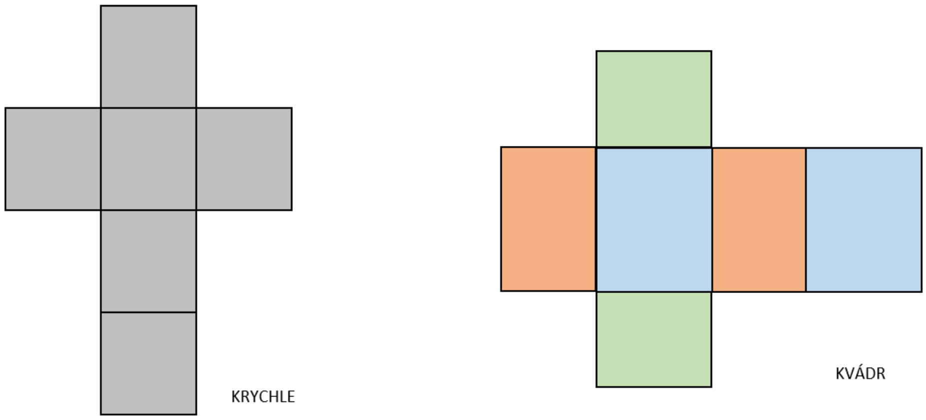
Krychle a kvádr jsou čtyřboké hranoly s čtvercovou, resp. obdélníkovou podstavou. Krychli můžeme brát jako speciální příklad kvádru.

> Kvádr se nazývá hranol, jehož podstava je obdélník nebo čtverec. Kvádr je čtyřboký hranol, protější stěny kvádru jsou shodné obdélníky nebo čtverce. (Odvárko a Kadleček, 2004, s. 241)
>
> Krychle se nazývá kvádr, který má všechny tři rozměry stejné. Krychle je pravidelný čtyřboký hranol, všechny stěny krychle jsou shodné čtverce. (Odvárko a Kadleček, 2004, s. 243)

Síť krychle se skládá z šesti shodných čtverců. Síť kvádru se skládá ze tří různých obdélníků, z nichž každý se v síti objevuje právě dvakrát (obr. 5)



OBR. 4: HRANOLY A JEJICH VLASTNOSTI



OBR. 5: SÍŤ KRYCHLE A KVÁDRU

Jehlan

Jehlan je geometrické těleso, jehož podstavou je mnohoúhelník. Stěny jehlanu jsou tvořeny trojúhelníky, které mají jeden společný bod – hlavní vrchol jehlanu. Vzdálenost hlavního vrcholu jehlanu od roviny podstavy je výška jehlanu. Boční stěny jehlanu tvoří plášť.

Jehlany pojmenováváme stejně jako hranoly, tj. podle toho, kolik stran má podstava. Jehlan s trojúhelníkovou podstavou se nazývá trojboký, s čtyřúhelníkovou čtyřboký, s pětiúhelníkovou pětiboký atd.

Pokud v podstavě můžeme udělat střed středové souměrnosti a tento střed lze spojit kolmicí s vrcholem, mluvíme o kolmém jehlanu. V opačném případě jde o kosý jehlan. Pokud je jehlan kolmý a zároveň jeho podstavou je pravidelný n-úhelník, nazývá se pravidelný n-boký jehlan.

Nejjednodušší jehlan je čtyřstěn. Je to těleso, jehož hranice je tvořena čtyřmi trojúhelníky. Pokud jeden trojúhelník zvolíme jako podstavu, zbylé trojúhelníky budou boční stěny, jedná se tedy o trojboký jehlan. Má z jehlanů nejmenší možný počet stěn.

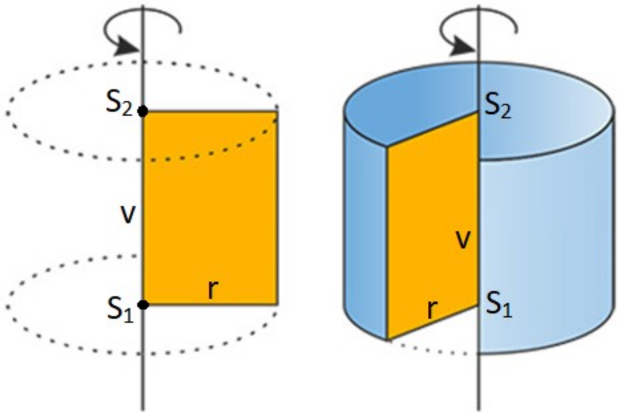
1.3.4 **Rotační tělesa**

Rotační tělesa vznikají rotací rovinného útvaru kolem osy (přímky). Mezi nejdůležitější zástupce rotačních těles patří válec, kužel a koule.

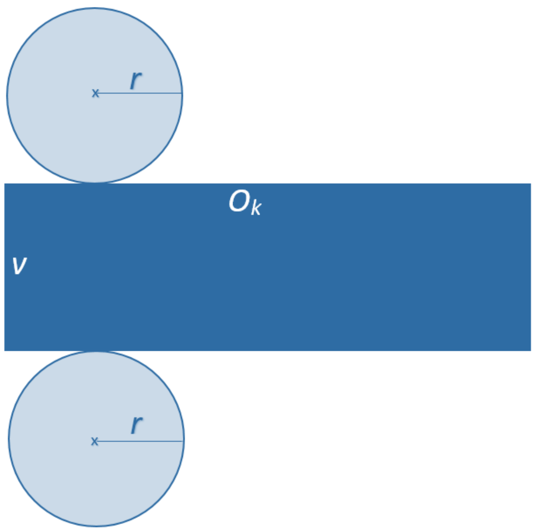
Válec

Válec vzniká rotací obdélníku (příp. čtverce) kolem přímky, která obsahuje jednu jeho stranu. Vznik válce můžeme vidět na obr. 6. Jedna strana obdélníku je výška válce (na obr. 6 a obr. 7 vyznačen písmenem v), druhá strana představuje poloměr podstavy (na obr. 6 a obr. 7 je vyznačen písmenem r).

Síť válce se skládá ze dvou podstav a pláště. Podstavy mají tvar kruhu. Kruhy jsou shodné a leží v rovnoběžných rovinách. Plášť má tvar obdélníku či čtverce (na obr. 7 je vyznačen tmavě modrou barvou). Délka jedné strany obdélníku představuje výšku válce (na obr. 7 je vyznačena písmenem v), délka druhé strana je obvod podstavy, tj. kruhu.



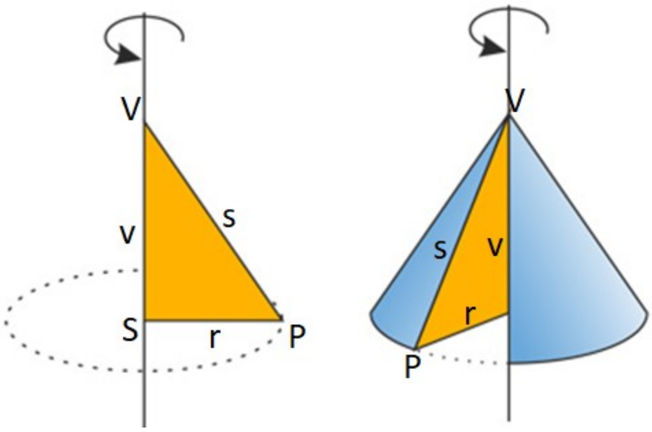
OBR. 6: VZNIK VÁLCE (DOSTUPNÉ Z HTTPS://POLYHEDR.COM/ARTICLES/336-NETS-SOLIDS-OF-REVOLUTION.HTML)



OBR. 7: SÍŤ VÁLCE

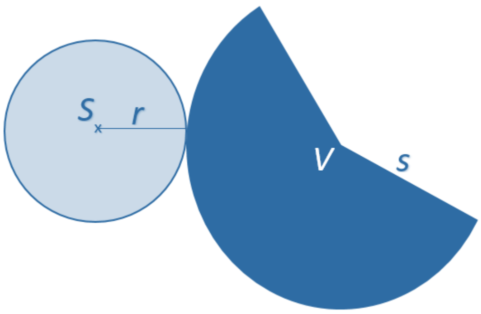
Kužel

Kužel vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku. Trojúhelník se otáčí kolem jedné své odvěsny (na obr. 8 je tato odvěsna označena *v*).



OBR. 8: VZNIK KUŽELE (DOSTUPNÉ Z HTTPS://POLYHEDR.COM/ARTICLES/336-NETS-SOLIDS-OF-REVOLUTION.HTML)

Kužel se skládá z pláště a jedné podstavy. Plášť vzniká rotací druhé odvěsny (na obr. 8 je pojmenována *r*), která rotuje kolem stejné odvěsny jako trojúhelník kužel. Plášť má tvar kruhové výseče, jejíž poloměr je dán délkou odvěsny, která je osou rotace. Tato úsečka, která určuje vzdálenost vrcholu kužele od roviny podstavy, se též nazývá výška kužele (na obr. 8 je pojmenována *v*). Podstavou kužele je kruh o poloměru délky druhé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Zároveň je to i poloměr podstavy kužele. Délka přepony rotujícího pravoúhlého trojúhelníku představuje délku strany kužele (na obr. 8 je pojmenována *s*). Síť kuželu je znázorněna na obr. 9.

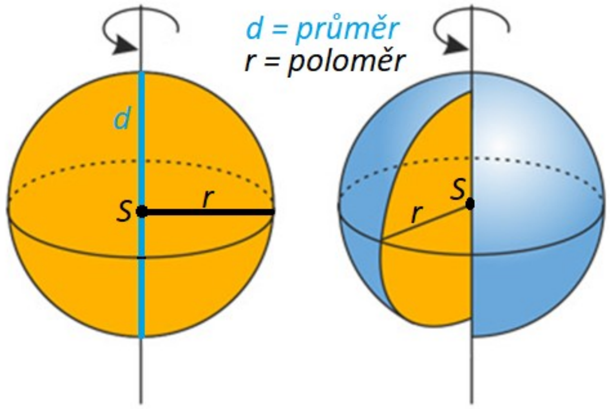


OBR. 9: SÍŤ KUŽELU

Koule

> Koule je množina všech bodů v prostoru, které mají od bodu *S* (střed koule) vzdálenost menší nebo rovnu hodnotě *r* (poloměr koule). (Binterová, 2010, s. 29)

Koule vznikne rotací kruhu kolem svého průměru (viz obr. 10). Bod *S* je střed kruhu a zároveň i koule. Poloměr kruhu *r* je i poloměr koule. Průměr koule je úsečka, která spojuje dva body, které leží na kulové ploše a prochází středem koule. Povrch koule neboli hranice koule se nazývá kulová plocha. Ta vznikne rotací kružnice (půlkružnice) kolem svého průměru. Síť koule se nedá v rovině sestrojit.



OBR. 10: VZNIK KOULE (DOSTUPNÉ Z HTTPS://POLYHEDR.COM/ARTICLES/336-NETS-SOLIDS-OF-REVOLUTION.HTML)

2 Přístupy k odvození vzorců pro míru v geometrii z českých učebnic matematiky

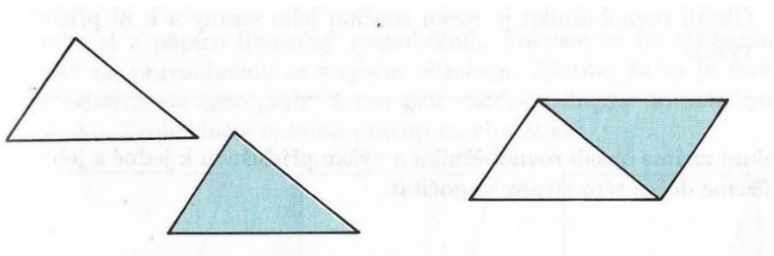
V této kapitole budou shromážděny různé přístupy k odvození vzorců, které jsem našla v českých učebnicích matematiky. Přístupy jsem vybírala z celkem devíti řad různých učebnic. Pracovala jsem s učebnicemi z nakladatelství Nová škola – starší řada (Rosecká), Nová škola – duhová řada (Jedličková a kol.), Prometheus pro nižší gymnázia (Herman a kol.), Prometheus pro základní školy (Odvárko a Kadleček), Fraus (Binterová a kol.), Fortuna (Coufalová), Prodos (Molnár a kol.), H-mat (Hejný a kol.) a Kvarta (Müllerová a kol.) (viz seznam literatury). Pracovala jsem jak s tištěnými učebnicemi, tak i s jejich interaktivními online verzemi. Informace jsem vyhledávala i v některých pracovních sešitech a metodických příručkách pro učitele. Některé přístupy se v učebnicích opakovaly, do práce jsem je však uvedla jen jednou. Cílem práce není popsat, jakým způsobem jsou vzorce v jednotlivých učebnicích odvozovány, ale přinést souhrn různých přístupů bez ohledu na to, v které z učebnic se nacházejí. Přístupy budou popsány takovým způsobem, aby byly přístupné nejen učitelům, ale i žákům. Pro označení útvarů budeme používat obvyklé značení, které bylo použito i v obrázcích výše.

2.1 Obsah trojúhelníku

Přístup 1: Pomocí dvou shodných trojúhelníků (Herman a kol., 1995)

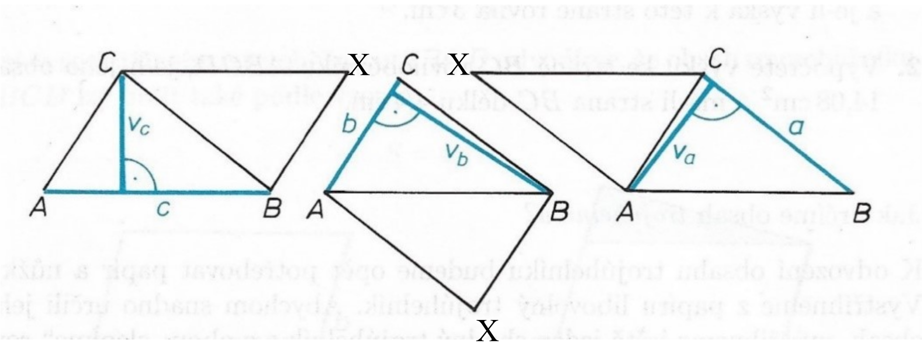
Pozn. Pro tento způsob je nutné znát způsob výpočtu obsahu rovnoběžníku.

Z papíru vystřihneme dva shodné libovolné trojúhelníky, z nichž vytvoříme rovnoběžník (obr. 11). Obsah rovnoběžníku je roven součinu délky strany a velikosti výšky k příslušné straně. Vytvořený rovnoběžník je složen ze dvou shodných trojúhelníků, tedy obsah každého z nich je polovina obsahu rovnoběžníku.



OBR. 11: SLOŽENÍ ROVNOBĚŽNÍKU ZE DVOU TROJÚHELNÍKŮ (HERMAN A KOL., 1995, S. 100)

Vystřižené trojúhelníky můžeme poskládat na různé rovnoběžníky (obr. 12). „Přilepíme-li“ je k sobě stranou označenou a, vznikne rovnoběžník o stranách c a b a obsah rovnoběžníku vypočítáme $S_r = c \cdot v_c$. Obsah trojúhelníku ABC je pak roven polovině obsahu rovnoběžníku $ABCX$, tedy $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$. Analogicky pro další možnosti přiložení obou trojúhelníků, jak to ukazuje obr. 12.

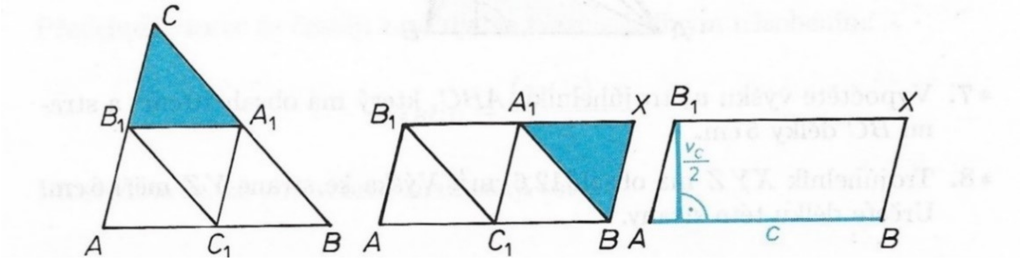


OBR. 12: ZPŮSOBY VYTVOŘENÍ ROVNOBĚŽNÍKU (HERMAN A KOL., 1995, S. 100)

Obsah trojúhelník ABC lze tedy vyjádřit jako: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$.

Přístup 2: Pomocí středních příček (Herman a kol., 1995)

Při odvození vzorce si lze vystačit i s jedním vystřiženým trojúhelníkem. Do trojúhelníku narýsujeme všechny tři střední příčky, které rozdělí trojúhelník na čtyři shodné části. To lze dokázat pomocí věty *sss* o shodnosti trojúhelníků. Vezmeme si např. trojúhelníky B_1A_1C a AC_1B_1 (obr. 13). Víme, že střední příčka je úsečka, která spojuje středy stran a má poloviční velikost strany trojúhelníku s ní rovnoběžné. Pak můžeme říci, že délka úsečky B_1A_1 je stejná jako délka úsečky AC_1, dále $|B_1C| = |AB_1|$ a $|B_1C_1| = |CA_1|$. Tím je dokázáno, že trojúhelníky B_1A_1C a AC_1B_1 jsou shodné. Stejným způsobem bychom dokázali i shodnost ostatních dvojic trojúhelníků.



OBR. 13: DĚLENÍ TROJÚHELNÍKU PŘES STŘEDNÍ PŘÍČKY (HERMAN A KOL., 1995, S. 101)

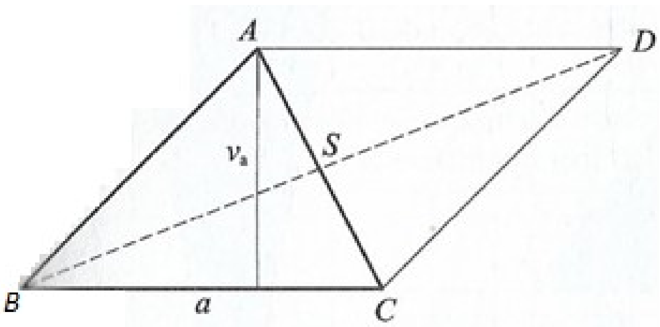
Jednu část odstřihneme a přidáme ji ke zbytku tak, že vznikne rovnoběžník o straně c a výšce, která má délku poloviny výšky v_c v původním trojúhelníku (obr. 13). Obsah rovnoběžníku je roven obsahu trojúhelníku, a tedy platí: $S = c \cdot \frac{v_c}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$.

Přístup 3: Pomocí středové souměrnosti a znalosti obsahu rovnoběžníku (Coufalová, 2007a)

Pro tento přístup odvození vzorce je třeba znát středovou souměrnost.

> Středová souměrnost se nazývá zobrazení určené bodem S, ve kterém obrazem bodu S je opět bod S a každému bodu $A \neq S$ je přiřazen bod A' takový, že bod S je střed úsečky AA'. Bod S se nazývá střed souměrnosti. Středová souměrnost je shodné zobrazení. Obrazem útvaru ve středové souměrnosti je útvar s ním shodný. (Odvárko a Kadleček, 2004, s. 219)

Pomocí středové souměrnosti, lze doplnit trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$ (obr. 14). Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem CDA: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Z toho plyne, že obsahy těchto dvou trojúhelníků jsou stejné: $S(\triangle ABC) = S(\triangle CDA)$. Obsah rovnoběžníku $ABCD$ je roven součtu obsahu obou trojúhelníků: $S(\triangle ABCD) = S(\triangle ABC) + S(\triangle CDA) = S(\triangle ABC) + S(\triangle ABC) = 2 \cdot S(\triangle ABC)$, odtud $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$. Použijeme-li jiné strany a k nim příslušné výšky, dojdeme ke stejnému vzorci, pouze s jinými délkami: $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a =$ $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$.



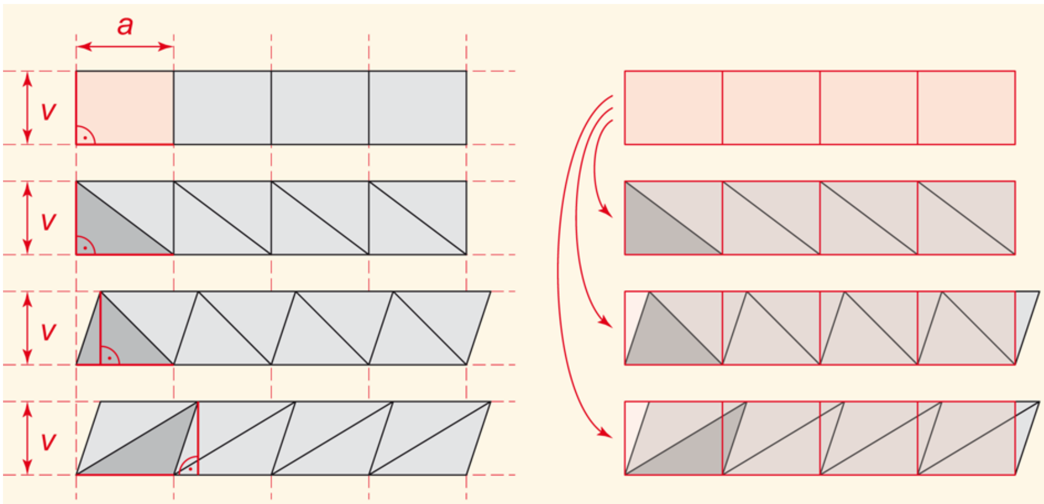
OBR. 14: TROJÚHELNÍK DOPLNĚNÝ NA ROVNOBĚŽNÍK (COUFALOVÁ, 2007A, S. 217)

Přístup 4: Pomocí řady obdélníků a trojúhelníků (Jedličková a kol., 2015)

Máme několik druhů dlaždic, kterými máme vydláždit danou plochu. První řadu máme vydláždit obdélníky, druhou řadu pravoúhlými trojúhelníky, třetí řadu ostroúhlými a čtvrtou řadu tupoúhlými trojúhelníky (obr. 15). Všechny trojúhelníky mají stejnou výšku, která je stejně dlouhá jako jedna strana obdélníku. Druhá strana obdélníku má stejnou délku jako strany trojúhelníků, které jsou kolmé k výšce. Uvažujme, jakou plochu ve všech čtyřech případech pokryjeme.

Představme si, že řadu z obdélníků přeneseme na ostatní řady (viz pravý sloupec na obr. 15). Všímejme si, jak zakrývá řady z trojúhelníků. Řada pravoúhlých trojúhelníků je přesně pokryta. U ostroúhlých a tupoúhlých trojúhelníků z jedné strany obdélníková řada „kousek" přesahuje a na druhé straně o ten samý „kousek" trojúhelníky nezakrývá.

Obdélníkové dlaždice pokryjí stejnou plochu jako dvojnásobný počet trojúhelníkových dlaždic, tzn., že trojúhelník o straně a k ní příslušné výšce v_a, má poloviční obsah než obdélník se stranami a a v. Obsah obdélníku vypočítáme $S_o = a \cdot v$, obsah trojúhelníku je tedy $S_\triangle = \frac{S_o}{2} = \frac{a \cdot v}{2}$. Jelikož lze v každém trojúhelníku sestrojit tři různé výšky, obsah můžeme určit pomocí kterékoli z nich: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

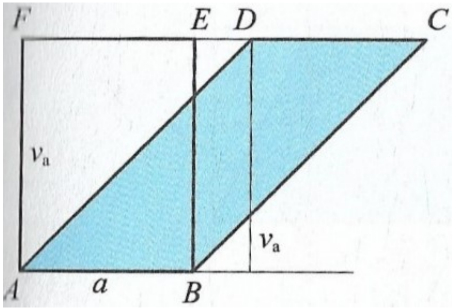


OBR. 15: ŘADY DLAŽDIC Z TROJÚHELNÍKŮ A OBDÉLNÍKŮ (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2015, S. 41)

2.2 Obsah rovnoběžníku

Přístup 1 (Coufalová, 2007a)

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a obdélník $ABEF$ (obr. 16). V obrázku můžeme vidět i další obrazce: čtyřúhelník $ABCF$, trojúhelník ADF a trojúhelník BCE. Při odvozování vzorce budeme sledovat obsahy těchto útvarů.



OBR. 16: ROVNOBĚŽNÍK A OBDÉLNÍK (COUFALOVÁ, 2007A, S. 213)

Čtyřúhelník $ABCF$ je složen z rovnoběžníku $ABCD$ a trojúhelníku ADF. Pro obsahy platí: $S(ABCF) = S(ABCD) + S(\triangle\, ADF)$. Čtyřúhelník $ABCF$ je také složen z obdélníku $ABEF$ a trojúhelníku BCE. Pro obsahy platí: $S(ABCF) = S(ABEF) + S(\triangle\, BCE)$. Z těchto dvou rovností plyne rovnost $S(ABCD) + S(\triangle\, ADF) = S(ABEF) + S(\triangle\, BCE)$. Trojúhelníky ADF a BCE jsou shodné, z toho plyne, že mají stejný obsah: $S(\triangle\, ADF) = S(\triangle\, BCE)$. Z toho plyne, že $S(ABCD) = S(ABEF)$. Obsah obdélníku $ABEF$ vypočítáme $S(ABEF) = $ $= a \cdot v_a$. Tedy obsah rovnoběžníku $ABCD$ vypočítáme jako součin velikosti jeho strany a k ní příslušné výšky, tedy i $S(ABCD) = a \cdot v_a$.

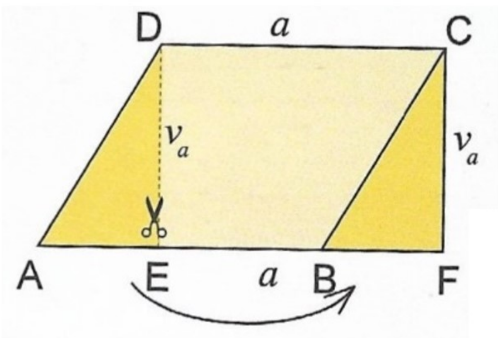
Přístup 2: Pomocí přeměny rovnoběžníku na obdélník (Rosecká, 2008)

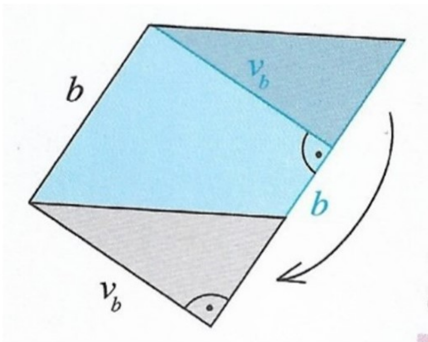
Máme rovnoběžník $ABCD$. Bodem D vedeme výšku ke straně a. Patu výšky označíme E. Rovnoběžník „rozstřihneme" podle úsečky ED, tím se rovnoběžník rozdělí na pravoúhlý trojúhelník AED a pravoúhlý lichoběžník $EBCD$. Vezmeme-li „odstřihnutý" trojúhelník a přiložíme ho úsečkou AD k úsečce BC, vznikne obdélník $EFCD$, který má stejný obsah jako rovnoběžník $ABCD$ (obr. 17 vlevo).

Obsah obdélníku je roven součinu délek sousedních stran, v našem případě má jedna strana délku a a druhá strana má délku v_a. Obsah obdélníku a zároveň i rovnoběžníku je $S = a \cdot v_a$.

Jiným rozstřižením a slepením rovnoběžníku odvodíme, že obsah můžeme počítat i pomocí strany b a výšky v_b, vzorec má tvar $S = b \cdot v_b$ (obr. 17 vpravo).

Ještě je nutné dokázat, že trojúhelníky („odstřižený a přilepený“) jsou shodné. Dokážeme to pomocí věty *Ssu* o shodnosti trojúhelníků. Úsečka AD je shodná s úsečkou BC, protože to jsou protilehlé strany rovnoběžníku. Úsečka ED je shodná s úsečkou FC, protože obě mají délku v_a a zároveň mají trojúhelníky shodné úhly AED a BFC o velikosti 90°.



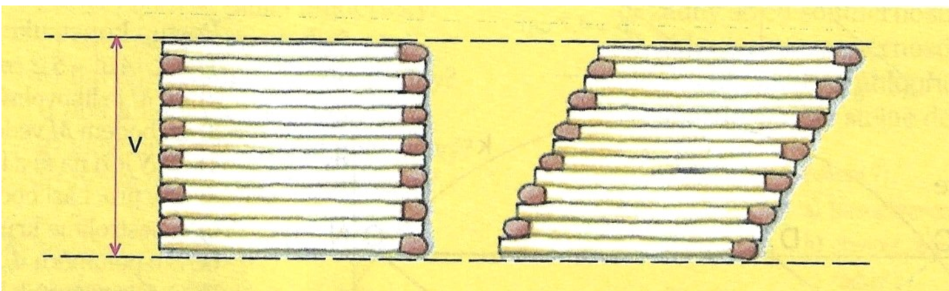


OBR. 17: STŘÍHÁNÍ ROVNOBĚŽNÍKU (ROSECKÁ, 2008, S. 48)

Přístup 3: Pomocí sirek (Molnár a kol., 1999)

Odvození vzorce pro obsah rovnoběžníku lze ukázat na rovnoběžníku složeném ze sirek. Vyskládáme si nad sebe několik sirek, čímž vznikne obdélník. Jeden rozměr obdélníku je délka sirky, druhý rozměr je výška vyskládaných sirek. Obdélník změníme na rovnoběžník posunem sirek do jedné strany (obr. 18). Rovnoběžník samozřejmě není přesný, ale lze si představit, že při stále menší tloušťce sirky dostáváme stále přesnější rovnoběžník. Obsah obdélníku je stejný jako obsah rovnoběžníku. Pro výpočet tedy platí, že $S = a \cdot v_a$.

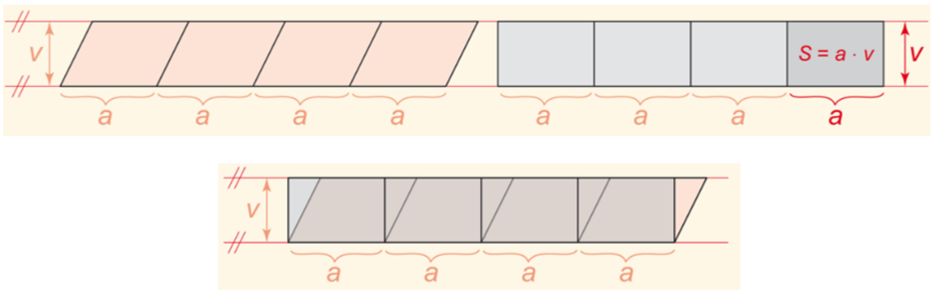
Tento přístup je odvozen z tzv. Cavalieriho principu, o kterém se více rozepíšu v oddíle 2.17.



OBR. 18: OBDÉLNÍK A ROVNOBĚŽNÍK ZE SIREK (MOLNÁR A KOL., 1999, S. 110)

Přístup 4: Pomocí řady rovnoběžníků (Jedličková a kol., 2015)

Máme část dlažby, která je vydlážděna obdélníkovými a kosodélníkovými dlaždicemi. Obdélníkové dlaždice mají rozměry a a v. Obsah obdélníkové dlaždice je tedy $S = a \cdot v$. Dlaždice ve tvaru kosodélníku má také jednu stranu o délce a a dále víme, že vzdálenost strany a a protilehlé strany je výška rovnoběžníku v. Přemístíme-li obdélníkové dlaždice na kosodélníkové, zjistíme, že útvary se překrývají až na přečnívající trojúhelníky na krajích (obr. 19). Podle věty *sus* o shodnosti trojúhelníků dokážeme, že jsou trojúhelníky shodné.



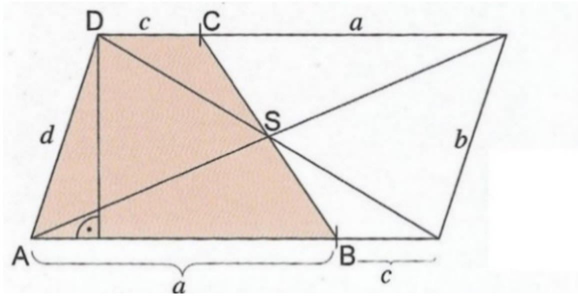
OBR. 19: OBDÉLNÍKOVÉ A ROVNOBĚŽNÍKOVÉ DLAŽDICE (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2015, S. 66)

Pokud přečnívající trojúhelník přesuneme na druhou stranu, kde naopak trojúhelník chybí, získáme tak obdélník. Znamená to, že obdélník se stranami a a v má stejný obsah jako rovnoběžník se stranou a a výškou v. Obsah rovnoběžníku vypočítáme $S = a \cdot v$. Nezapomeňme, že rovnoběžník má dvě výšky, vzorec lze tedy psát i jako $S = b \cdot v$, kde v je tentokrát výška ke straně b.

2.3 Obsah lichoběžníku

Přístup 1: Pomocí rozdělení rovnoběžníku na dva shodné lichoběžníky (Rosecká, 2008)

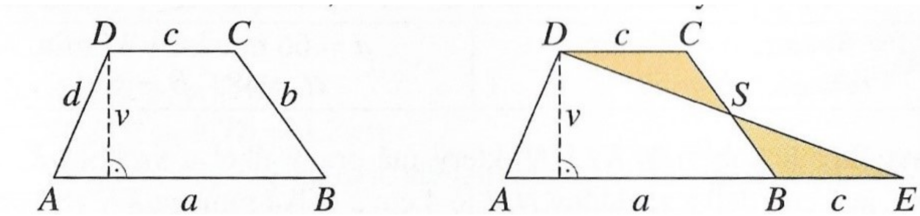
Z papíru vystřihneme libovolný rovnoběžník. Sestrojíme jeho uhlopříčky a jejich průsečík označíme S. Rovnoběžník rozdělíme na dvě části (viz obr. 20). Tím získáme dva lichoběžníky a položením na sebe zjistíme, že jsou shodné. Obsah lichoběžníku je polovinou obsahu původního rovnoběžníku. Pro sestavení vzorce je třeba pojmenovat strany a výšku. Základny lichoběžníku pojmenujeme a a c a jeho výšku k základně pojmenujeme v. Úplně stejně pojmenujeme druhý lichoběžník. Znovu z vystřižených lichoběžníků sestavíme rovnoběžník. Délka jedná strany je rovna součtu délek základen lichoběžníku $a + c$, výška v je stejná. Pro obsah lichoběžníku platí $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{v}{2} \cdot (a + c)$.



OBR. 20: ROZDĚLENÍ ROVNOBĚŽNÍKU (ROSECKÁ, 2008, S. 62)

Přístup 2: Pomocí trojúhelníku složeného z částí lichoběžníku (Odvárko a Kadleček, 2012)

Na obr. 21 je lichoběžník a útvar složený z lichoběžníku, který vznikl „odříznutím" trojúhelníku a přiložením na jiné místo. Úhly *DCS* a *EBS* mají stejnou velikost a zároveň délky úseček *BS* a *CS*, *BE* a *CD* jsou také stejné. Podle věty *sus* o shodnosti trojúhelníků můžeme říct, že jsou trojúhelníky shodné, tudíž mají i stejný obsah. Porovnáme-li obsah lichoběžníku *ABCD* a obsah trojúhelníku *AED*, zjistíme, že jsou stejné. Pro výpočet obsahu trojúhelníku *AED* potřebujeme znát velikost strany a výšky k ní příslušné. Velikost úsečky *AE* je rovna součtu délek stran $a + c$, výšku označíme v. Pro obsah trojúhelníku *AED* platí $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$. Již víme, že obsah tohoto trojúhelníku je roven obsahu lichoběžníku, tedy vzorec pro obsah lichoběžníku je $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$, kde a a c jsou délky základen lichoběžníku a v je jeho výška.

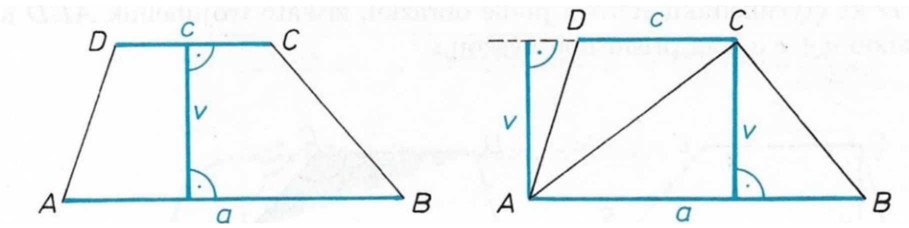


OBR. 21: ODŘÍZNUTÍ TROJÚHELNÍKU Z LICHOBĚŽNÍKU (ODVÁRKO A KADLEČEK, 2012, S. 68)

Přístup 3: Pomocí rozdělení lichoběžníku na trojúhelníky (Herman a kol., 1995)

Lichoběžník si rozdělíme na dva útvary, jejichž obsah dokážeme najít (obr. 22). Rozdělíme ho uhlopříčkou *AC* na dva trojúhelníky. Jeden bude o straně a a výšce v, jeho obsah je tedy $S_{ABC} = \frac{a\cdot v}{2}$. Druhý trojúhelník má stranu c a výšku v, jeho obsah je $S_{ACD} = \frac{c\cdot v}{2}$. Obsah lichoběžníku je roven součtu obsahů obou trojúhelníků $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2}$.

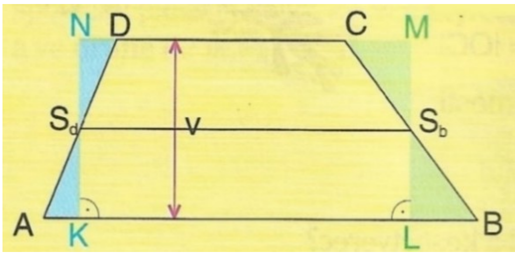
Po úpravě získáme vzorec ve tvaru $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$.



OBR. 22: ROZDĚLENÍ LICHOBĚŽNÍKU NA DVA TROJÚHELNÍKY (HERMAN A KOL., 1995, S. 103)

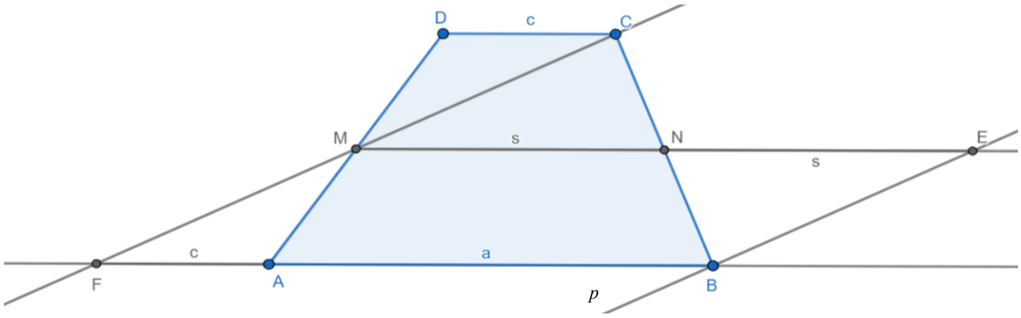
Přístup 4: Pomocí obdélníku složeného z částí lichoběžníku (Molnár a kol., 1999)

Je dán lichoběžník *ABCD* a jeho střední příčka S_dS_b. „Odříznutím a přiložením" trojúhelníků podle obr. 23 získáme dva obdélníky o stejných obsazích. O délce střední příčky platí, že je rovna aritmetickému průměru délek jeho základen, tedy $|S_dS_b| = \frac{|AB|+|CD|}{2}$. Toto tvrzení můžeme dokázat pomocí obr. 24.



OBR. 23: ODVOZENÍ VZORCE PŘES STŘEDNÍ PŘÍČKU LICHOBĚŽNÍKU (MOLNÁR A KOL., 1999, S. 115)

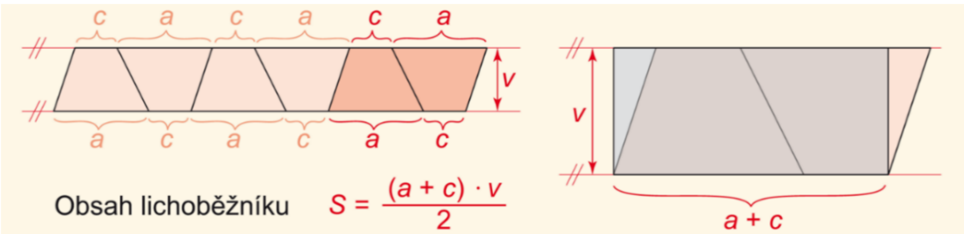
Máme lichoběžník *ABCD*, bod *M* je střed úsečky *AD* a bod *N* je střed úsečky *BC*. Bod *F* je průsečík přímek *AB* a *MC*. Bod *E* je průsečík přímky *MN* a přímky *p,* která je rovnoběžná s přímkou *MC* a prochází bodem *B*. Trojúhelníky *FAM* a *CDM* jsou shodné podle věty *usu* $(|\measuredangle AMF| = |\measuredangle CMD|, |AM| = |MD|, |\measuredangle FAM| = |\measuredangle MDC|)$. Z toho plyne, že úsečka *FA* má stejnou délku jako úsečka *CD*, tedy $|FA| = c$. Délka úsečky *FB* je *a* + *c*. Trojúhelníky *MNC* a *ENB* jsou shodné podle věty *usu* $(|\measuredangle ENB| = |\measuredangle MNC|, |CN| = |NB|, |\measuredangle NCM| = $ $= |\measuredangle NBE|)$. Z toho plyne, že úsečka *MN* má stejnou délku jako úsečka *NE*, tedy $|NE| = s$. Úsečky *FB* a *EM* jsou protilehlé strany rovnoběžníku *FBEM* a jejich velikost musí být stejná, tedy $|FB| = a + c = |MN| + |NE| = s + s = 2s$. Z toho plyne, že $s = \frac{a+c}{2}$. Obsah lichoběžníku je stejný jako součet obsahů obdélníků, po dosazení získáme vzorec $S_{ABCD} = S_{S_dS_bMN} + S_{KLS_bS_d} = S_{KLMN} = |KL| \cdot |LM| = |S_dS_b| \cdot v = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot v$.



OBR. 24: DŮKAZ DÉLKY STŘEDNÍ PŘÍČKY

Přístup 5: Pomocí řady lichoběžníků (Jedličková a kol., 2015)

Máme řadu, která je vydlážděná stejnými dlaždicemi tvaru lichoběžníku (obr. 25). Všimněme si, že dva spojené lichoběžníky dávají dohromady rovnoběžník. Rovnoběžník má délku strany $a + c$ a výšku příslušnou k této straně v. Obsah rovnoběžníku je $S_r = (a + c) \cdot v$. Jelikož je rovnoběžník tvořen dvěma shodnými lichoběžníky, obsah lichoběžníku je polovinou obsahu rovnoběžníku: $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$.



OBR. 25: ŘADA LICHOBĚŽNÍKOVÝCH DLAŽDIC (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2015, 67)

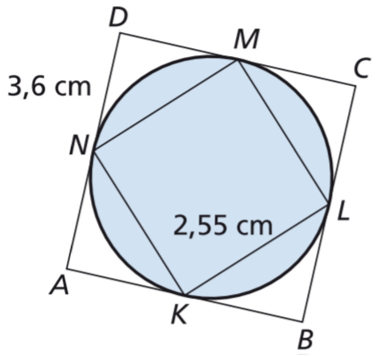
2.4 Obsah kruhu[1]

Přístup 1: Pomocí opsaných a vepsaných obrazců

V historii se k výpočtu obsahu kruhu využívaly vepsané a opsané mnohoúhelníky (Binterová a kol., 2009). V některých učebnicích jsou uvedeny určité náznaky, které však nejsou dovedeny až na úroveň výpočtů. Uvedeme příklad.

[1] Tato práce se zabývá obsahy, povrchy a objemy, a proto v ní nejsou zahrnuty přístupy pro odvození vzorce pro obvod kruhu. Některé způsoby lze najít v práci Pecinové (2015).

V učebnici (Binterová a kol., 2009) je následující vstupní úloha do problematiky obsahu kruhu. Je dán kruh a dva čtverce, z nichž jeden je kružnici opsán a druhý vepsán (obr. 26). Úkolem je zjistit přibližnou hodnotu obsahu kruhu. Čtverec *KLMN* vepsaný kružnici má obsah menší než čtverec *ABCD*, který je kružnici opsán. Obsah kruhu je mezi těmito hodnotami. Je tedy třeba vypočítat obsah obou čtverců a přibližný obsah kruhu je mezi těmito hodnotami. Otázkou je, jak určit obsah kruhu přesněji.



OBR. 26: VEPSANÝ A OPSANÝ ČTVEREC KRUŽNICI (BINTEROVÁ A KOL., 2009, S. 30)

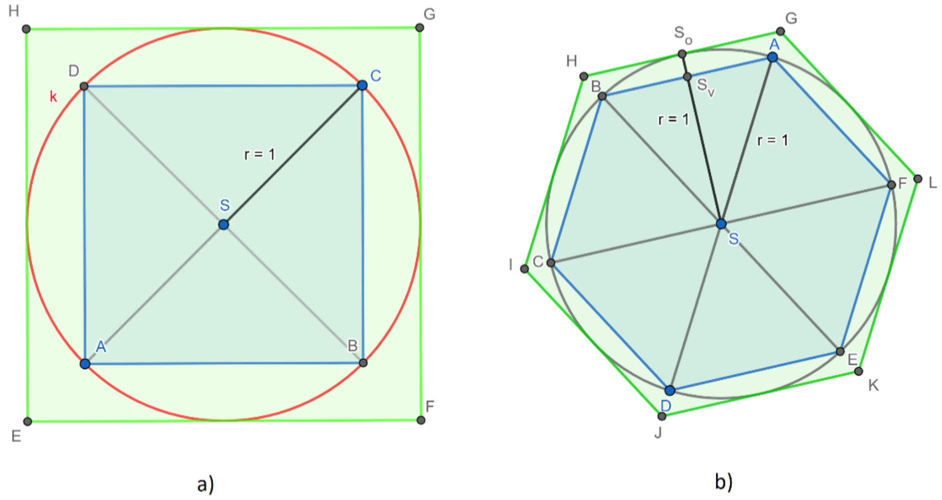
Pomocí dynamických matematických softwarů pro matematické konstrukce[2] lze ukázat, jaký je přibližný rozdíl mezi obsahem mnohoúhelníků a obsahem kruhu. Pomocí programu lze zkoušet, jaký je rozdíl mezi obsahem kruhu a obsahem čtverce, pětiúhelníku, šestiúhelníku, sedmiúhelníku atd.

Výpočty v učebnici uvedeny nejsou, my je zde nyní ilustrativně provedeme. Máme kruh o poloměru 1, kterému vepíšeme a opíšeme čtverec (obr. 27a). Obsah vepsaného čtverce můžeme spočítat přes pravoúhlé trojúhelníky, na které je rozdělený čtverec. Trojúhelníky *ABS, BCS, CDS* a *DAS* jsou shodné. Délka jejich odvěsen je rovna poloměru kružnice. Obsah jednoho trojúhelníku je $S_\Delta = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5$. Čtverec je složen ze čtyř těchto trojúhelníků, obsah vepsaného čtverce je $S_v = 4 \cdot 0{,}5 = 2$. Délka strany opsaného čtverce je rovna průměru kruhu, jeho obsah je $S_o = 2 \cdot 2 = 4$. Obsah kruhu S_k je mezi obsahem vepsaného a opsaného čtverce, tj. $2 < S_k < 4$.

Nyní kruhu vepíšeme a opíšeme pravidelný šestiúhelník (obr. 27b). Pravidelný šestiúhelník je tvořen šesti rovnostrannými trojúhelníky. Obsah vepsaného šestiúhelníku spočítáme

[2] V učebnici jsou uvedeny programy Cabri nebo Geonext. K této nabídce můžeme přidat ještě software GeoGebra.

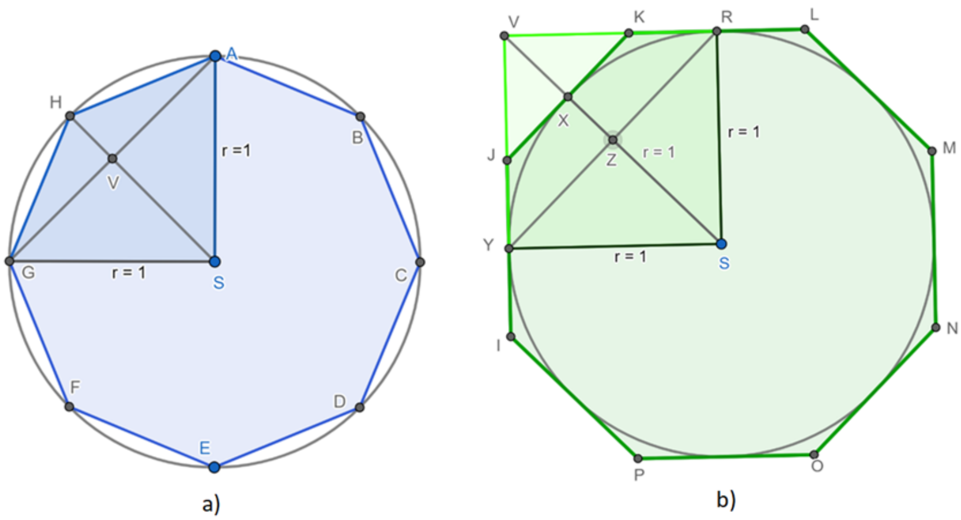
přes pravoúhlý trojúhelník SAS_v. Velikost úsečky S_vA je rovna polovině poloměru kruhu, tedy $|S_vA| = 0{,}5$. Pomocí Pythagorovy věty lze dopočítat výšku trojúhelníku ABS: $|SS_v| = \sqrt{|AS|^2 - |S_vA|^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obsah trojúhelníku ABS je $S_\Delta = \frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Obsah vepsaného šestiúhelníku je $S_v = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 2{,}6$. Obsah opsaného šestiúhelníku spočítáme přes pravoúhlý trojúhelník SGS_o. Velikost úsečky S_oS je rovna poloměru kruhu, tedy $|S_oS| = 1$. Dále platí $|GS_0| = \frac{1}{2}|GH| = \frac{1}{2}|GS|$. Pomocí Pythagorovy věty lze dopočítat délku strany trojúhelníku: $|SG|^2 = |S_oS|^2 + |GS_o|^2$. Po dosazení a úpravách získáme $|SG| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Obsah trojúhelníku HSG je $S_\Delta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Obsah opsaného šestiúhelníku je $S_o = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 3{,}46$. Obsah kruhu S_k je mezi obsahem vepsaného a opsaného šestiúhelníku, tj. $2{,}6 < S_k < 3{,}46$. Rozsah pro obsah kruhu se oproti čtverci zmenšil.



OBR. 27: VEPSANÉ A OPSANÉ MNOHOÚHELNÍKY KRUHU

Nakonec kruhu vepíšeme a opíšeme pravidelný osmiúhelník. Pravidelný osmiúhelník je tvořen osmi rovnoramennými trojúhelníky. Obsah vepsaného osmiúhelníku spočítáme pomocí trojúhelníku HSA (obr. 28a). Velikost úsečky AG spočítáme pomocí Pythagorovy věty: $|AG|^2 = |GS|^2 + |SA|^2$, kde $|GS| = |SA| = r = 1$. Po dosazení a úpravách získáme $|AG| = \sqrt{2}$. Platí, že $|AG| = |AV| + |VG|$ a zároveň $|AV| = |VG|$, proto $|AV| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Úsečka AV je výškou trojúhelníku HSA. Obsah trojúhelníku AHS

je $S_\Delta = \frac{|SH|\cdot|AV|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Obsah vepsaného osmiúhelníku je $S_v = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq 2{,}83$. Pro zjištění obsahu opsaného osmiúhelníku si nad úsečku *YS*, kde *Y* je střed strany osmiúhelníku, sestrojíme čtverec (viz obr. 28b). Z výpočtů u vepsaného osmiúhelníku víme, že úsečka $|SV| = |YR| = |AG| = \sqrt{2}$. Ve čtverci najdeme trojúhelníky *JKV* a *YRV*, které jsou podobné podle věty *uuu*. Koeficient podobnosti získáme poměrem úsečky $|VX| = |SV| - |SX| = \sqrt{2} - 1$ a $|VZ| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $k = \frac{|VX|}{|VZ|} = \frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 - \sqrt{2}$. Protože jsou trojúhelníky podobné, pak jsou podobné ve stejném poměru i úsečky YR a JK, tedy $|JK| = k \cdot |YR| = \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2$. Obsah trojúhelníku *SJK* je $S_\Delta = \frac{|JK|\cdot|SX|}{2} =$ $= \frac{(2\sqrt{2}-2)\cdot 1}{2} = \sqrt{2} - 1$. Obsah opsaného osmiúhelníku je $S_v = 8 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 3{,}31$. Obsah kruhu S_k je mezi obsahem vepsaného a opsaného osmiúhelníku, tj. $2{,}83 < S_k < 3{,}31$. Opět se rozsah pro obsah kruhu oproti šestiúhelníku zmenšil.



OBR. 28: VEPSANÝ A OPSANÝ OSMIÚHELNÍK KRUHU

Smyslem těchto úloh je ukázat, že přibližný obsah kruhu lze získat pomocí vepsaných a opsaných pravidelných mnohoúhelníků. Postupně zjišťujeme, že čím více stran má mnohoúhelník, tím je přibližný obsah přesnější.

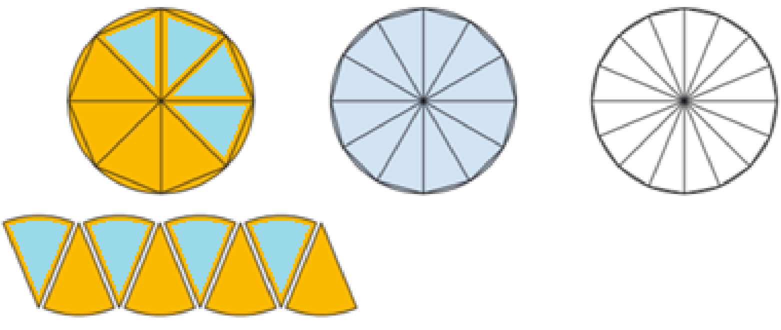
Všimněme si, že čím přesnější obsah je, tím se horní i dolní mez nerovnosti blíží k číslu π. Pro ještě bližší porovnání jsou v tabulce 1 výsledky výpočtů obsahů dalších mnohoúhelníků, které jsou opsány a vepsány kruhu o poloměru 1 cm. Tímto způsobem mohou žáci zjistit, že existuje konstanta, pomocí které lze vypočítat obsah kruhu. Zvolený poloměr 1 nám však neumožňuje, aby žáci dospěli i k poznatku, že tato konstanta se násobí druhou mocninou poloměru.

TABULKA 1: PŘIBLIŽNÉ OBSAHY VEPSANÝCH A OPSANÝCH PRAVIDELNÝCH N-ÚHELNÍKŮ KRUHU

n (počet vrcholů)	Obsah vepsaného *n*-úhelníku	Obsah vepsaného *n*-úhelníku
4	2	4
6	2,60	3,46
8	2,83	3,31
10	2,94	3,25
12	3,00	3,22
20	3,17	3,09
50	3,146	3,133
100	3,1426	3,1395

Přístup 2: **Pomocí rozkladu na trojúhelníky (Binterová a kol., 2009) (Herman a kol., 2012a)**

Na obr. 29 je znázorněn jeden ze způsobů, jak lze přibližně určit obsah kruhu a dospět i ke vzorci. Kruh rozstříháme na kruhové výseče, které poskládáme do řady (viz obr. 29). Změříme si poloměr a postupně zkoumáme vztahy mezi obsahy složených obrazců. Jak vidíme na obr. 29, útvar složený z osmi výsečí připomíná tvar rovnoběžníku. Na čím více dílů tímto způsobem kruh rozdělíme, tím více se útvar složený z výsečí bude přibližovat tvaru obdélníku. Přesnému odvození vzorce se učebnice Binterová a kol. (2009) nevěnuje.



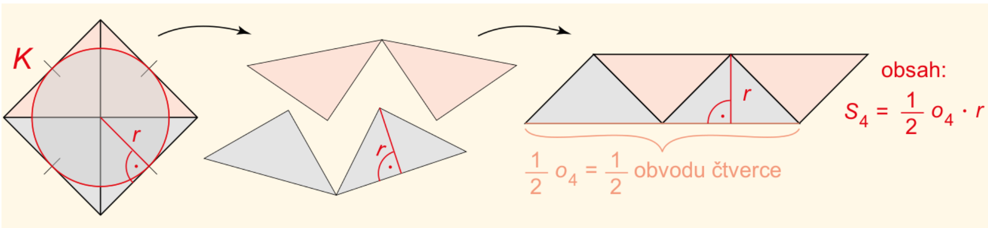
OBR. 29: ROZKLAD KRUHU NA TROJÚHELNÍKY (BINTEROVÁ A KOL., 2009, S. 30)

Stejný přístup obsahuje i učebnice Hermana a kol. (2012a), která již vzorec odvozuje. Útvar, který se blíží obdélníku, má dvě různé strany. Jedna strana, která je tvořena oblouky výsečí, má délku rovnu polovině obvodu kruhu, tedy πr, protože je tvořena polovinou výsečí, na které byl kruh rozdělen. Druhá strana má délku poloměru kruhu r. Obsah obdélníku, tj. kruhu, je $S = \pi r \cdot r = \pi r^2$.

Pozn. Pro tento i další přístupy je nutné, aby žáci již znali výpočet obvodu kruhu.

Přístup 3: Pomocí opisování mnohoúhelníku (Jedličková a kol., 2016)

Máme kruh K, kterému opíšeme čtverec. Rozložíme jej na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky, které poskládáme do rovnoběžníku (viz obr. 30). Obsah rovnoběžníku je $S = a \cdot v_a$, kde a je jeho strana a v_a je výška k této straně. U našeho rovnoběžníku je a úsečka, jejíž délka se rovná polovině obvodu čtverce (O_4), a výška rovnoběžníku je poloměr kruhu (r). Vzorec pro obsah sestavíme ve tvaru $S = a \cdot v_a = \frac{1}{2} O_4 \cdot r$.



OBR. 30: ČTVEREC OPSANÝ KRUHU (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2016, S. 40)

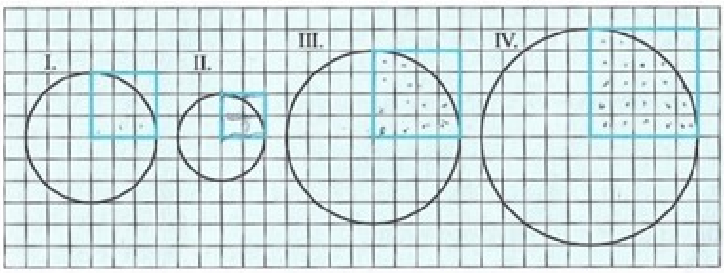
Nyní kruhu opíšeme pravidelný osmiúhelník. Opět ho rozdělíme na osm rovnoramenných trojúhelníků, které složíme do rovnoběžníku. Jeho obsah vypočítáme stejně jako u čtverce $S = \frac{1}{2} O_8 \cdot r$. Takto můžeme pracovat s jakýmkoliv pravidelným mnohoúhelníkem se sudým počtem stran. Obsah mnohoúhelníku bude vždy roven součinu poloviny obvodu mnohoúhelníku a poloměru kruhu.

Čím více stran bude mít opsaný mnohoúhelník, tím více se budeme přibližovat obsahu kruhu. Postupně se mění i složený rovnoběžník. Čím více stran, tím více se blížíme obdélníku. Vzorec pro obsah kruhu se dá zapsat jako $S = \frac{1}{2} O_K \cdot r$. Pro obvod kruhu platí $O_k = 2 \cdot \pi \cdot r$. Můžeme tedy sestavit vzorec pro obsah kruhu $S = \frac{1}{2} O_K \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = = \pi \cdot r^2$.

Přístup 4: Pomocí čtvercové sítě (Coufalová, 2007b)

Máme dány kruhy v čtvercové síti, pomocí níž určíme jejich přibližné obsahy (obr. 31). Nejprve u každého kruhu zjistíme počet čtverců sítě, jejichž větší část náleží kruhu, a tento počet vynásobíme obsahem jednoho čtverce sítě. Tím získáme přibližný obsah kruhu.

Přibližné obsahy kruhů (*S*) porovnáme s obsahy čtverců sestrojenými nad poloměrem daného kruhu (r^2). Spočítáme podíl $S : r^2$ u každého kruhu a tyto hodnoty porovnáme. Žáci by si měli všimnout, že tento podíl se pohybuje kolem příslušné hodnoty π, kterou už by měli znát. Z tohoto vztahu už snadno odvodíme vzorec $S = \pi \cdot r^2$.



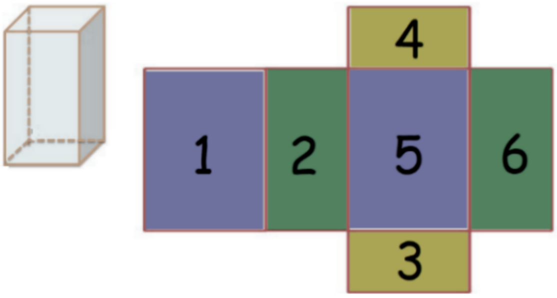
	I.	II.	III.	IV.
S	28	12	52	80
r^2	9	4	16	25
$S : r^2$	3,11	3	3,25	3,2

OBR. 31: KRUHY V ČTVERCOVÉ SÍTI (COUFALOVÁ, 2007B, S. 87)

2.5 Povrch krychle a kvádru

Přístup 1: Pomocí rozložené krabičky (Binterová a kol., 2007)

Máme krabičku tvaru kvádru, kterou rozložíme, čímž získáme síť kvádru. Všimejme si, z jakých obdélníků je krabička složena (obr. 32).



OBR. 32: ROZLOŽENÁ KRABIČKA TVARU KVÁDRU

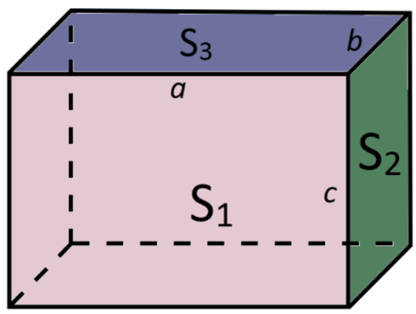
Vidíme, že některé obdélníky jsou shodné, konkrétně obdélníky *1* a *5*, *2* a *6*, *3* a *4*. Představme si, že chceme krabičku obalit, je tedy nutné zjistit, kolik je k obalení potřeba papíru. Vypočítáme obsahy všech obdélníků. Povrch kvádru *S* je součet všech těchto obsahů, tedy $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$. Avšak víme, že některé obdélníky jsou shodné, a můžeme tak zápis zjednodušit $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_3 + +S_1 + S_2 = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + +2 \cdot S_3$.

Pokud bychom to samé udělali s krabičkou ve tvaru krychle, síť by byla tvořena 6 shodnými čtverci. Povrch krychle S lze tedy zapsat jako $S = 6 \cdot S_č$, kde $S_č$ je obsah čtverce.

Přístup 2: Pomocí obsahů stěn bez pomoci krabičky (Müllerová a kol., 1998)

Povrch kvádru zjistíme tak, že vypočítáme obsahy všech jeho stěn a sečteme je. Každá stěna kvádru je obdélník, jehož obsah dovedeme spočítat. Je nutné si uvědomit, že vždy protější stěny kvádru jsou shodné obdélníky, které mají i stejné obsahy. Musíme tedy určit obsahy tří stěn, které vycházejí ze stejného vrcholu (obr. 33). Pro obsah jeho přední stěny S_1 platí: $S_1 = a \cdot c$. Pro obsah jeho boční stěny S_2 platí: $S_2 = b \cdot c$. Pro obsah jeho horní stěny S_3 platí $S_3 = a \cdot b$. Povrch hranolu S je součet obsahů těchto tří stěn, který vynásobíme dvěma, protože jsou vždy dvě stěny kvádru shodné: $S = 2 \cdot (S_1 + S_2 + S_3) = 2 \cdot (ac + bc + ab)$.

Krychle má 6 stěn ve tvaru shodných čtverců, mají tedy i shodný obsah. Obsah čtverce o straně a vypočítáme $S = a^2$. Pro výpočet jejího povrchu tedy platí vzorec $S = 6 \cdot a^2$.



OBR. 33: STĚNY KVÁDRU

2.6 Objem krychle a kvádru

Přístup 1: Pomocí jednotkových krychlí (Binterová a kol., 2007)

Objem krychle a kvádru můžeme určit pomocí počtu krychlí, které můžeme do tělesa „vyskládat“. Máme-li např. kvádr, do kterého se vejde 24 krychlí, jeho objem je 24 krychlí. Podle velikosti vkládané krychle se dá určit objem celého tělesa. Má-li krychle např. rozměry

$1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1$ cm, její objem je 1 cm^3. Pokud do tělesa vložíme 24 těchto krychlí, jeho objem bude 24 cm^3.

Přístup 2: Pomocí vrstev (Binterová a kol., 2007)

Představme si skleněné akvárium, které má tvar kvádru. Když chceme zjistit, kolik vody se vejde do akvária, musíme nejdříve pokrýt dno, které má tvaru obdélníku o stranách a a b. Pokryjeme tedy obsah $S = a \cdot b$. Voda pak stoupá po vrstvách až do výšky akvária (kvádru), která má délku c. Jinak řečeno, obsah S se do akvária naskládá c-krát. Objem kvádru je tedy $V = a \cdot b \cdot c$, kde a, b, c jsou délky hran kvádru. Pokud by akvárium mělo tvar krychle o hraně a, dno by mělo obsah $S = a \cdot a$ a voda by stoupala do výšky a. Objem krychle je tedy $V = a \cdot a \cdot a$, kde a je délka hrany krychle.

Přístup 3: Zobecňování z konkrétního případu (Müllerová a kol., 1998)

Je dána krabička tvaru kvádru s rozměry 4 cm, 3 cm a 2 cm. Zjistíme, kolik se do takové krabičky vejde krychlí s hranou délky 1 cm. Jedna stěna krabičky má tvar obdélníku s rozměry 4 cm a 3 cm. Rozdělíme-li tento obdélník na čtverce o straně 1 cm, dostaneme celkem 12 čtverců. Pokud na každý čtverec položíme 1 krychli, vznikne tak vrstva, která má objem 12 cm^3. Protože je výška krabičky 2 cm, je nutné na první vrstvu položit ještě jednu takovou. Pokud má jedna vrstva objem 12 cm^3, dvě vrstvy mají objem 24 cm^3.

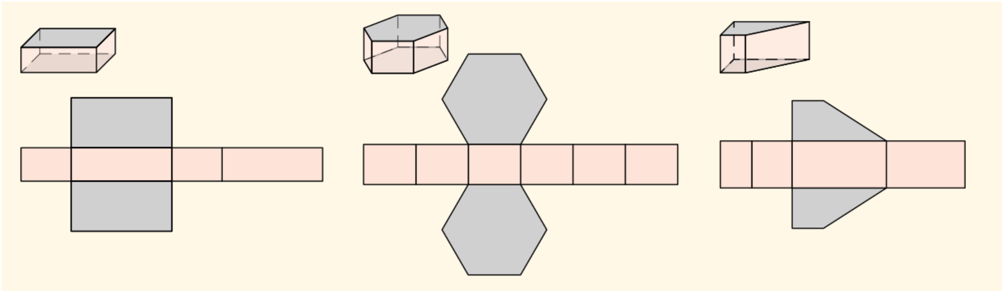
Z výše naznačeného přístupu je možné odvodit vzorec pro výpočet objemu. Počet krychlí položených v jedné vrstvě je dán součinem dvou rozměrů – např. a a b. Tyto vrstvy pak na sebe pokládáme c-krát, kde c je třetí rozměr kvádru. Objem kvádru je tedy roven součinu jeho rozměrů neboli $V = a \cdot b \cdot c$.

Objem krychle se počítá stejně, místo třech různých délek hran máme pouze jednu, $a = b = c$. Vzorec tedy vypadá $V = a \cdot a \cdot a$.

2.7 Povrch hranolu obecně

Přístup 1: Pomocí sítě hranolu (Jedličková a kol., 2016)

Pro povrch hranolu budeme potřebovat jeho síť. Síť hranolu se skládá ze dvou podstav a pláště. Na obr. 34 jsou zobrazeny příklady sítí hranolu. Světlou barvou je vyznačen plášť a tmavou barvou podstavy hranolu. Mnohoúhelníky, které tvoří síť, jsou různé podle typu hranolu. Máme-li čtyřboký hranol, plášť se skládá ze čtyř obdélníků a podstavy jsou také obdélníky. Máme-li šestiboký hranol, plášť se skládá z šesti obdélníků a podstavy jsou šestiúhelníky. Apod.



OBR. 34: SÍTĚ HRANOLŮ (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2016, S. 17)

Obecně pro povrch pláště platí vzorec $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_p označuje obsah podstavy a S_{pl} obsah pláště. Obsah pláště můžeme ještě vyjádřit pomocí obvodu podstavy a výšky hranolu. Plášť má vždy tvar obdélníku, pro jeho obsah je třeba znát jeho rozměry. Jedna délka je délka boční hrany hranolu a druhá má délku obvodu podstavy, protože plášť „obmotává“ hranol kolem jeho podstav. Obsah pláště je dán vzorcem $S_{pl} = v_h \cdot o_p$, kde v_h je výška hranolu a o_p je obvod podstavy. Vztah pro výpočet povrchu hranolu můžeme zapsat $S = 2 \cdot S_p + v_h \cdot o_p$.

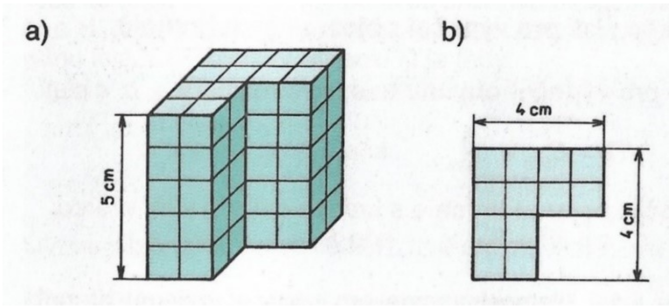
2.8 Objem hranolu obecně

Přístup 1: Pomocí jednotkových krychlí (Müllerová a kol., 2005a)

Z krychlí o objemu 1 cm^3 je sestaveno těleso tvaru hranolu (obr. 35). Jeho podstava je znázorněna na obr. 35. Jeden čtverec podstavy má obsah 1 cm^2. Podstava je složena z dvanácti takových čtverců, její obsah je tedy 12 cm^2. První vrstva tělesa je tvořena dvanácti krychlemi, a tedy její objem je 12 cm^3. Těleso je složeno z pěti takových vrstev. Z toho plyne, že celkový objem hranolu je $12 \cdot 5 = 60$ cm^3. Pro objem hranolu platí: $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška hranolu.

Přístup 2 (Herman a kol., 2012b)

Vycházíme z toho, že známe vzorec pro objem kvádru $V_k = a \cdot b \cdot c$. Je nutné si uvědomit, že součin $a \cdot b$ je roven obsahu podstavy kvádru. Zbylá strana c je výškou kvádru v.



OBR. 35: HRANOL Z KRYCHLÍ (MÜLLEROVÁ A KOL., 2005A, S. 123)

Vzorec můžeme tedy přepsat na $V_k = S_p \cdot v$. Stejný vzorec platí pro libovolný hranol. Máme-li hranol obsahu postavy S_p a výšce v, jeho objem V lze vyjádřit vzorcem $V = S_p \cdot v$.

To, že vzorec platí nejen pro kvádr, ale pro libovolný hranol, ukazuje učebnice pomocí trojbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách a a b a výška je v.

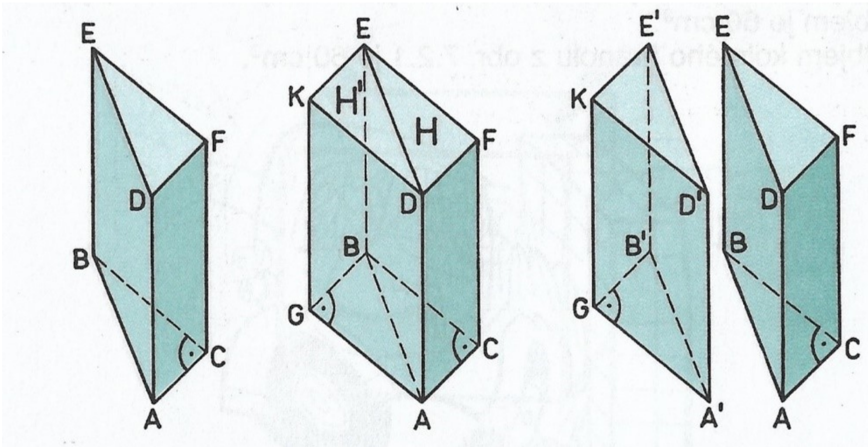
„Přilepíme-li" k takovému hranolu jeho kopii, získáme kvádr, jehož podstavou je obdélník o délkách stran a a b. Objem kvádru je součin $a \cdot b \cdot v$ a je dvojnásobkem objemu trojbokého hranolu, pro který tedy platí $V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot v$. Součin $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ vyjadřuje obsah trojúhelníku, který je podstavou trojbokého hranolu. Vzorec můžeme zapsat $V = S_p \cdot v$.

Obdobně můžeme vzorec potvrdit u hranolu s podstavou ostroúhlého nebo tupoúhlého trojúhelníku. V takovém případě můžeme trojúhelník rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky. Vzorec pro trojboký hranol s podstavou pravoúhlého jsme dokazovali výše, proto vzorec $V = S_p \cdot v$ platí pro libovolný trojboký hranol.

Vzorec platí pro jakýkoliv hranol s podstavou mnohoúhelníku, protože každý mnohoúhelník lze rozdělit na trojúhelníky. Z toho plyne, že každý hranol lze rozdělit na trojboké hranoly a pro ně jsme již vzorec dokázali.

Podobně i učebnice (Müllerová a kol., 2005a) ukazuje platnost vzorce pomocí trojbokého hranolu, ale využívá k tomu hranol konkrétních rozměrů. Je dán trojboký hranol s podstavou pravoúhlého trojúhelníků s obsahem $S_{ph} = 12$ cm^2 a výškou hranolu $v = 9$ cm. Pokud budeme mít tyto hranoly dva a slepíme je k sobě jako na obr. 36, získáme kvádr o obsahu podstavy $S_{pk} = 2 \cdot S_{ph} = 2 \cdot 12 = 24$ cm^2 a výškou $v = 9$ cm. Objem kvádru je

$V_k = 24 \cdot 9 = 216$ cm^3. Protože kvádr byl složen ze dvou trojbokých jehlanů, objem jehlanu je polovina objemu kvádru $V_h = 216 : 2 = 108$ cm^3. Podle vzorce $V = S_p \cdot v$, je objem trojbokého hranolu $V_h = 12 \cdot 9 = 108$ cm^3. Hodnoty jsou stejné, a tím jsme ověřili, že vzorec platí pro jakýkoliv hranol.



OBR. 36: SKLÁDÁNÍ TROJBOKÝCH HRANOLŮ DO KVÁDRU (MÜLLEROVÁ A KOL., 2005A, S. 124)

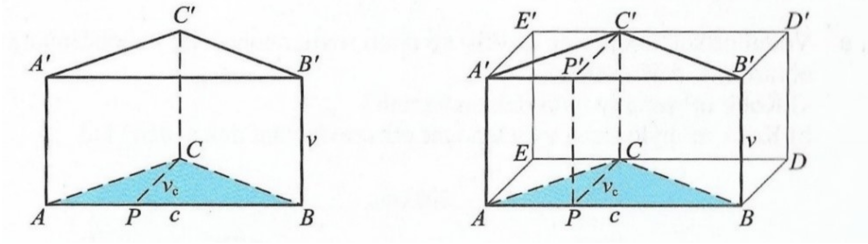
Přístup 3: Pomocí opsaného hranolu (Coufalová, 2007a)

Je dán trojboký hranol s podstavou o obsahu $S_p = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$ a výškou v (obr. 37). Trojbokému hranolu opíšeme kvádr jako na obr. 37. Podstavou kvádru je obdélník, který je opsaný trojúhelníkové podstavě hranolu. Obsah obdélníku je $S_o = c \cdot v_c$. Objem opsaného kvádru je $V_k = c \cdot v_c \cdot v = S_o \cdot v = 2 \cdot S_p \cdot v$.

Podle obrázku je $V_k = 2 \cdot V_h$. Po úpravě rovnice získáme vzorec pro výpočet objemu hranolu.

$$2 \cdot V_h = 2 \cdot S_p \cdot v$$

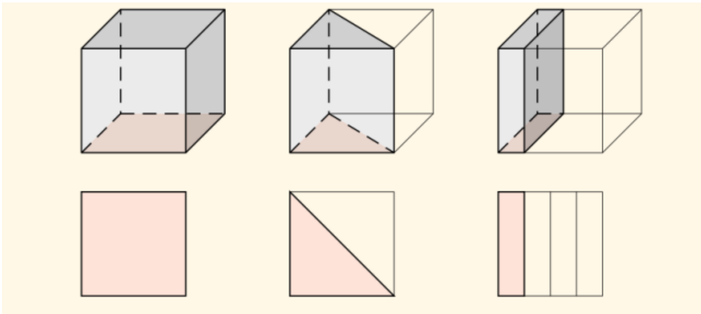
$$V_h = S_p \cdot v$$



OBR. 37: TROJBOKÝ JEHLAN A OPSANÝ KVÁDR (COUFALOVÁ, 2007A, S. 259)

Přístup 4: Pomocí stavby z různých druhů těles (Jedličková a kol., 2016)

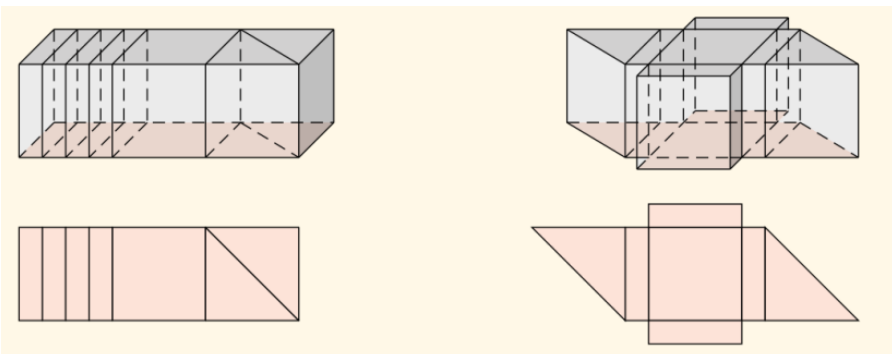
Vzorec pro výpočet objemu hranolu odvodíme pomocí dílků z dětské stavebnice. Každý z dílků má tvar hranolu (obr. 38), přičemž výšky hranolů jsou stejné. Podstavy hranolů jsou znázorněny také na obr. 38. Všechny hranoly vznikly ořezáním krychle.



OBR. 38: DÍLY ZE STAVEBNICE A JEJICH PODSTAVY (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2016, S. 23)

Z těchto dílků můžeme poskládat jiná tělesa tvaru hranolu (obr. 39). První těleso je kvádr a druhé dvanáctiboký hranol. Pro obě stavby jsme použili stejné dílky, musí mít tedy stejné objemy. Pod tělesy na obr. 39 jsou zobrazeny jejich podstavy. Vidíme, že jsou složené ze stejných útvarů, z toho plyne, že tělesa mají i podstavy o stejném obsahu.

Pro objem kvádru platí vzorec $V = a \cdot b \cdot c$, kde a, b jsou délky stran obdélníku podstavy a c je třetí rozměr kvádru. Podstava kvádru má obsah $S_p = a \cdot b$ a výška v se rovná délce strany c. Vzorec pro objem kvádru lze tedy napsat jako $V = S_p \cdot v$. Protože dvanáctiboký hranol má stejný obsah podstavy jako kvádr a výšku mají také stejně velkou, i pro hranol platí vzorec $V = S_p \cdot v$.



OBR. 39: SESTAVENÁ TĚLESA (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2016, S. 23)

2.9 Povrch jehlanu

Všechny sledované učebnice se odvození vzorce pro povrch jehlanu věnují stejným způsobem a velice stručně. Přístup vychází ze sítě jehlanu, který se skládá z podstavy a z pláště. Záleží na typu jehlanu. Analyzované učebnice většinou obsahují obrázky sítě trojbokého a čtyřbokého jehlanu. Máme-li trojboký jehlan, podstava má tvar trojúhelníku a plášť se skládá ze tří trojúhelníků. U čtyřbokého hranolu je podstavou obdélník a plášť tvoří čtyři trojúhelníky atd. Protože síť má pokaždé jiný počet částí, používáme obecný vzorec $S = S_{pl} + S_p$, kde S_{pl} je obsah pláště a S_p je obsah podstavy.

Učebnice (Rosecká a Míček, 2009) se věnuje i konkrétním typům jehlanu. Je u nich ovšem uveden jen vzorec a obrázek (obr. 40).

2.10 Objem jehlanu

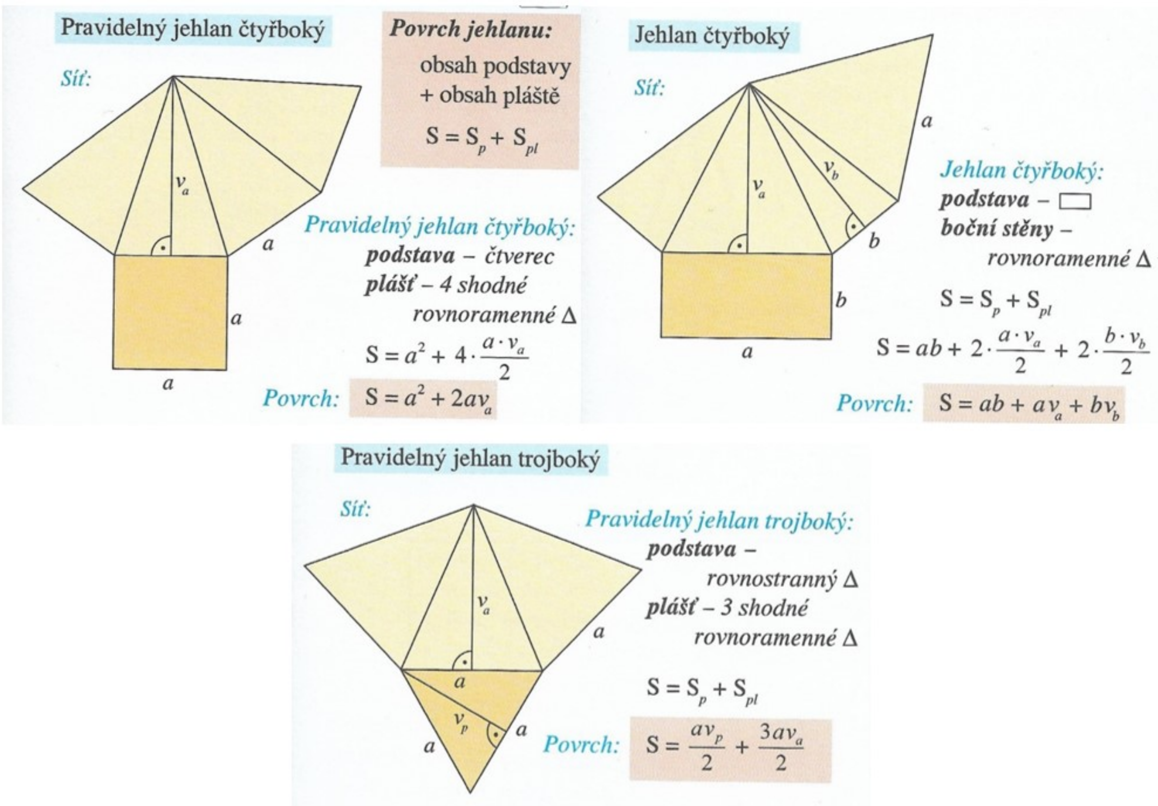
Přístup 1: Pomocí pokusu (Rosecká a Míček, 2009)

Vzorec pro objem jehlanu odvodíme pokusem. Budeme potřebovat odměrnou nádobu, vodu, těleso ve tvaru jehlanu a hranolu o stejné podstavě a výšce. Do nádoby nalijeme vodu a poté do ní vložíme hranol a sledujeme, o jakou výšku h voda v nádobě stoupla. Hranol vyndáme a do nádoby vložíme jehlan se stejnou výškou a podstavou. Opět sledujeme, o kolik voda stoupla. Porovnáme-li, o jakou výšku se zvedla hladina, zjistíme s jistou mírou nepřesnosti, že při vložení hranolu se hladina zvýšila třikrát více ve srovnání se zvýšením hladiny při vložení jehlanu. Z toho plyne, že objem jehlanu je třetina objemu hranolu. Obecný vzorec pro výpočet objemu jehlanu je tedy $V = \frac{S_p \cdot v}{3} = \frac{1}{3} S_p \cdot v$, kde v je výška jehlanu a S_p je obsah podstavy.

Přístup 2: Pomocí opsaného hranolu (Herman a kol., 2010)

Pro odvození objemu jehlanu budeme potřebovat tyto vlastnosti objemu:

> Tělesa, která mají stejný „tvar“ a „velikost“ (tzn., liší se jen umístěním v prostoru), mají stejný objem. Objem tělesa, které je rozděleno na několik částí, se rovná součtu objemů jednotlivých částí. Dva jehlany, které mají shodné podstavy i shodné výšky, mají týž objem. (Herman a kol., 2010 s. 67)

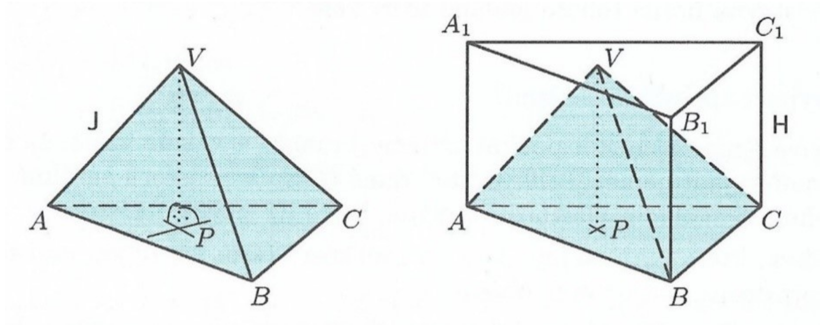


OBR. 40: POVRCHY JEHLANŮ (ROSECKÁ A MÍČEK, 2009, S. 61)

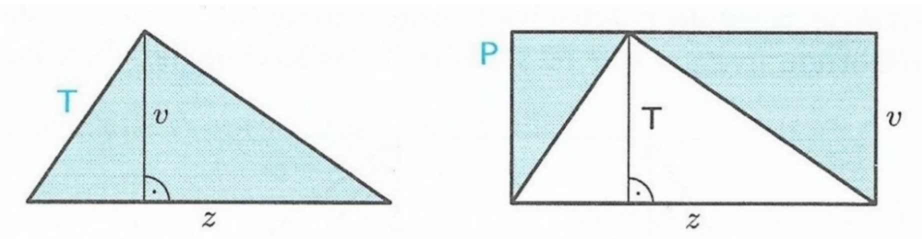
Máme trojboký jehlan $ABCV$ (budeme ho nazývat jehlan *J*) a „opíšeme" mu trojboký hranol $ABCA_1B_1C_1$ (budeme ho nazývat hranol *H*) (viz obr. 41). Naším úkolem je zjistit, jakou část objemu hranolu tvoří jehlan.

Přesuneme se z prostoru do roviny. Je dán trojúhelník *T,* kterému „opíšeme" pravoúhelník *P* (obr. 42). Zjistíme, jakou část obsahu opsaného pravoúhelníku *P* tvoří trojúhelník *T*. Jak vidíme z obr. 42, jedná se o polovinu.

Vrátíme se zpátky do prostoru a budeme zjišťovat, jestli do hranolu H lze umístit dva jehlany, které mají objem V_j. Takové dva jehlany mohou být např. umístěny jako J_1 a J_2 na obr. 43. Jehlany se nepřekrývají, pouze se stýkají ve hraně A_1C. Objem jehlanu J_1 je stejný jako objem *J*, protože mají shodné podstavy i shodné výšky. To samé můžeme říct o jehlanech *J* a J_2. Odstraníme-li tyto jehlany z hranolu H, zbude nám těleso J_3 (viz obr. 43). Těleso J_3 je zase trojboký jehlan.



OBR. 41: JEHLAN A OPSANÝ KVÁDR (HERMAN A KOL., 2010, S. 68)

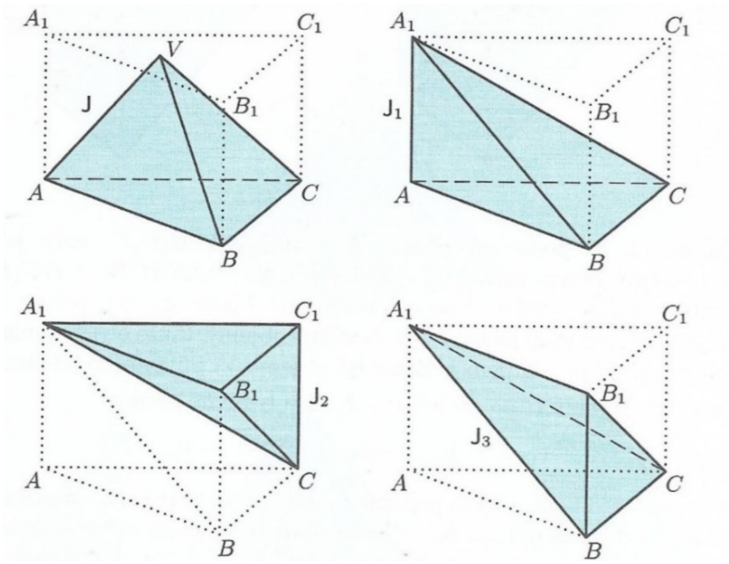


OBR. 42: PODSTAVA JEHLANU A KVÁDRU (HERMAN A KOL., 2010, S. 68)

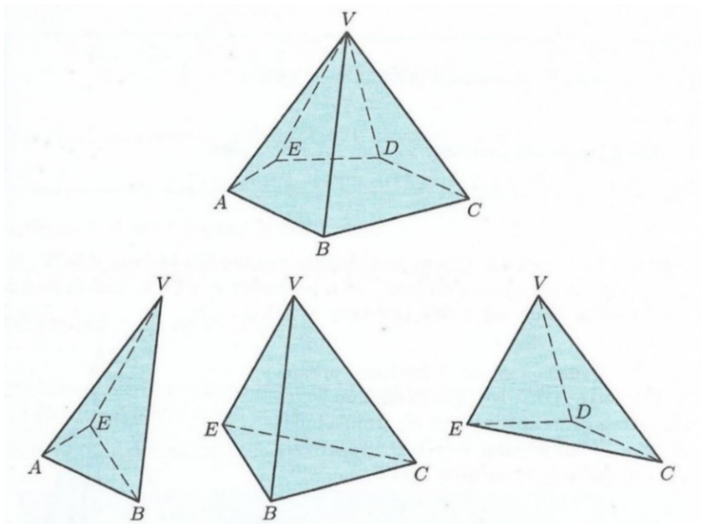
Porovnáme jehlany J_2 a J_3. Opět můžeme využít vlastnosti pro stejný objem jehlanů. Jehlan J_2 má podstavu B_1CC_1, jehlan J_3 má podstavu B_1BC_1. Tyto podstavy jsou shodné. Shodnou mají i výšku. Z toho plyne, že jehlany J_2 a J_3 mají stejný objem. Protože jehlany J_1, J_2 a J_3 mají stejné objemy a dohromady tvoří objem hranolu, dostáváme rovnost $V_H = 3 \cdot V_J$, odkud $V_j = \frac{1}{3} \cdot V_H$. Objem hranolu vypočítáme jako $V_H = S_p \cdot v$, kde v je výška hranolu a S_p je obsah podstavy.

Odvodili jsme vzorec pro trojboký jehlan a je ještě třeba ukázat, že platí pro jakýkoliv jehlan. Vezmeme si např. pětiboký jehlan. Na obr. 44 můžeme vidět, že ho lze opět rozdělit na tři jehlany. Všechny mají podstavu ve tvaru trojúhelníku a stejnou výšku. Jehlan $ABEV$ má objem V_1, jehlan $EBCV$ má objem V_2 a jehlan $ECDV$ má objem V_3. Pro objemy platí: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{ABE} \cdot v$, $V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{BCE} \cdot v$, $V_3 = \frac{1}{3} \cdot S_{CDE} \cdot v$, kde v je výška jehlanů.

Podle pravidla pro součet objemů platí: $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{3} \cdot S_{ABE} \cdot v + \frac{1}{3} \cdot S_{BCE} \cdot v +$ $+ \frac{1}{3} \cdot S_{CDE} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot (S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE}) \cdot v = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$.



OBR. 43: DĚLENÍ KVÁDRU NA JEHLANY (HERMAN A KOL., 2010, S. 69)



OBR. 44: ROZDĚLENÍ PĚTIBOKÉHO JEHLANU (HERMAN A KOL., 2010, S. 71)

Přístup 3: Cavalieriho principem (Hejný a kol., 2016)

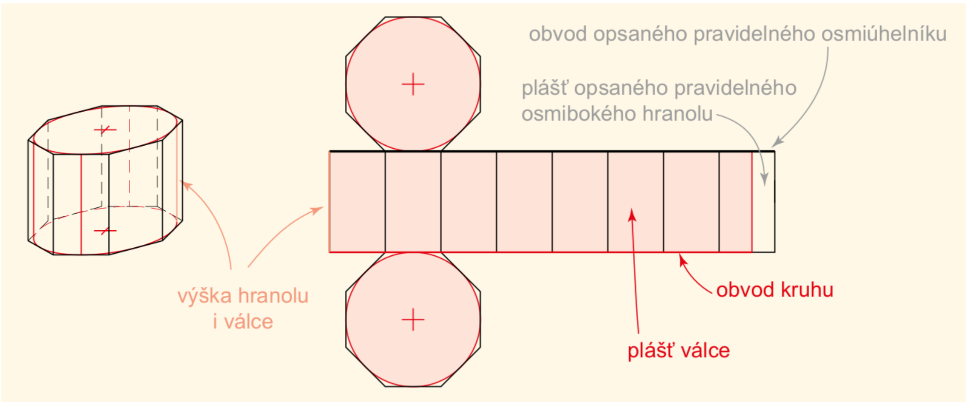
Tento přístup je popsán v oddíle 2.17.

2.11 Povrch válce

Přístup 1: Pomocí opsaného hranolu (Jedličková a kol., 2016)

Při odvozování vzorce pro obsah kruhu jsme pracovali s kružnicí a pravidelnými mnohoúhelníky, které jsme jí opisovali. Postupně jsme zvětšovali počet vrcholů mnohoúhelníku, a tím se více přibližovali k přesnému obsahu kruhu.

Podobně můžeme postupovat i v případě válce. Podstava válce je kruh, kterému budeme postupně opisovat pravidelné mnohoúhelníky. Pokud tak učiníme u horní i dolní podstavy, začneme tak tvořit pravidelný hranol, který opisuje válec. Na obr. 45 můžeme vidět osmiúhelník opsaný kruhu podstavy, čímž vznikne pravidelný osmiboký hranol. Čím více vrcholů bude mít mnohoúhelník, tím se povrch hranolu bude přibližovat povrchu válce.



OBR. 45: OPSANÝ HRANOL VÁLCI (JEDLIČKOVÁ A KOL., 2016, S. 45)

Povrch hranolu vypočítáme jako součet obsahů podstav a pláště, můžeme tedy taky vypočítat i povrch válce. Podstavy tvoří shodné kruhy, jejichž obsah vypočítáme $S_p = \pi \cdot r^2$, kde r je poloměr těchto kruhů. Plášť opsaného hranolu má tvar obdélníku. Jedna strana se rovná výšce hranolu, která je zároveň i výškou válce. Druhá strana se rovná obvodu podstavy. Čím více má podstava hranolu vrcholů, tím více se blíží kruhu. Obvod podstavy je obvod kruhu s poloměrem r. Obsah pláště je $S_{pl} = v \cdot 2\pi r$. Pokud dáme vše dohromady, sestavíme vzorec pro povrch válce: $S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + v \cdot 2\pi r = 2\pi r \cdot r + 2\pi r \cdot v =$ $= 2\pi r \cdot (r + v)$.

Přístup 2: Pomocí sítě válce (Herman a kol., 2012a)

Síť válce je složena ze dvou podstav a rozvinutého pláště. Podstavy jsou tvaru kruhu a plášť je rozvinut do obdélníku. Pro povrch válce platí $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} je obsah pláště. Pro podstavu tvaru kruhu platí $S_p = \pi \cdot r^2$, kde r je poloměr podstavy. Plášť tvaru obdélníku má rozměry $2\pi r$ a v, kde v je výška válce a r je poloměr podstavy. Po doplnění do vzorce jsme získali vzorec pro výpočet povrchu válce: $S = 2 \cdot S_p + S_{pl} =$ $= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + v \cdot 2\pi r = 2\pi r \cdot r + 2\pi r \cdot v = 2\pi r \cdot (r + v)$.

2.12 **Objem válce**

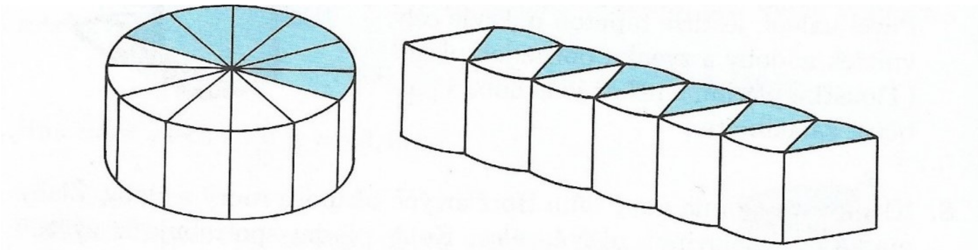
Přístup 1: Pomocí opsaného hranolu (Jedličková a kol., 2016)

Pro odvození vzorce pro objem válce použijeme stejnou myšlenku jako pro povrch válce. Válci opíšeme hranol. Čím více vrcholů bude jeho podstava mít, tím se objem hranolu bude přibližovat povrchu objemu válce.

Hranol má objem $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška hranolu. Čím více se bude hranol blížit válci, tím se podstava bude více blížit kruhu. Pro obsah podstavy platí: $S_p = \pi \cdot r^2$. Výška hranolu se s postupným zvětšováním počtu vrcholů opsaného hranolu nemění, tedy výška válce je stejná jako výška hranolu. Objem válce se rovná: $V = S_p \cdot v = \pi \cdot r^2 \cdot v$.

Přístup 2: Pomocí sestavení „hranolu“ z částí válce (Herman a kol., 2012a)

Tento přístup je analogický přístupu pro odvození obsahu kruhu. Válec rozdělíme na sudý počet stejných částí a sestavíme z nich nové těleso (obr. 46). Objem nového tělesa je roven objemu válce. Výška tělesa v je stejná jako výška válce a obsah podstavy tělesa S_p je taktéž stejný jako u válce. Na čím větší počet je rozdělen válec, tím víc se nové těleso blíží hranolu o výšce v a podstavě s obsahem S_p. Hranol má objem $V = S_p \cdot v$. Obsah podstavy se rovná $S_p = \pi \cdot r^2$. Vzorec pro objem válce je $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$.



OBR. 46: ROZDĚLENÝ VÁLEC (HERMAN A KOL., 2012A, S. 74)

2.13 **Povrch kuželu**

Přístup 1: Pomocí sítě kuželu – výpočet obsahu pláště přes přímou úměrnost (Odvárko a Kadleček, 2001)

Síť kuželu se skládá z kruhu, který je jeho podstavou, a z kruhové výseče, která je rozvinutým pláštěm kuželu. Povrch kuželu spočítáme jako součet obsahu jeho podstavy a obsahu pláště. Obsah podstavy získáme vzorcem $S_p = \pi r^2$. Vzorec pro obsah pláště musíme odvodit. Na obr. 47 si všímejme vztahu mezi obsahem výseče a délkou kruhového oblouku. Vezmeme-li si výseč, která má polovinu obsahu kruhu, délka oblouku je polovinou obvodu kruhu. Vezmeme-li si výseč, která má čtvrtinu, osminu… obsahu kruhu, délka oblouku je čtvrtinou, osminou, … obvodu kruhu. Z toho plyne, že poměr obsahu kruhové výseče a obsahu kruhu je stejný jako poměr délky oblouku O_o a obvodu celého kruhu O_k, tj. $S_{pl} : S_k = O_o : O_k$ Zapíšeme tento poměr pro náš rozvinutý plášť.

Máme kužel, který má délku strany s a poloměr podstavy r. Obsah kruhu je $S_k = \pi s^2$, obvod kruhu $O_k = 2\pi s$. Délka oblouku je rovna obvodu podstavy: $O_o = O_p = 2\pi r$

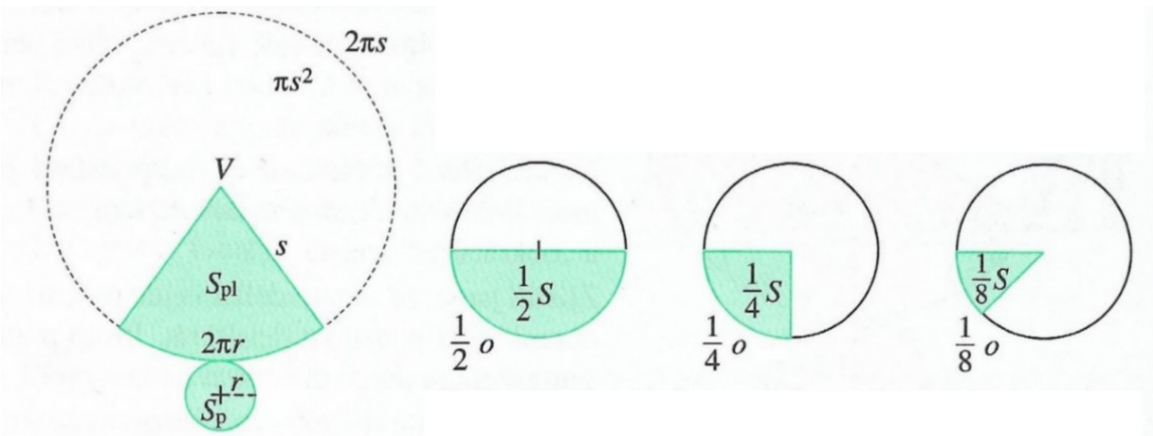
$$S_{pl} : S_k = O_o : O_k$$

$$S_{pl} : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s$$

$$\frac{S_{pl}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$S_{pl} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2 = \frac{r\pi s^2}{s} = r\pi s$$

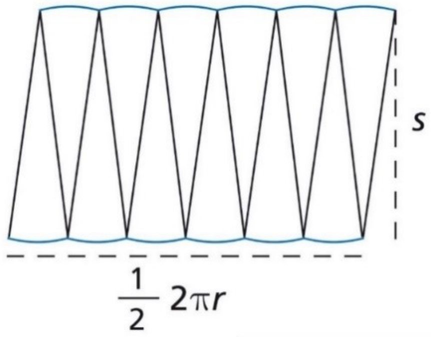
Získali jsme vzorec pro výpočet obsahu pláště a obsahu podstavy a můžeme dát dohromady vzorec pro povrch kuželu: $S = S_{pl} + S_p = r\pi s + \pi r^2 = \pi r(s + r)$.



OBR. 47: PLÁŠŤ KUŽELU (ODVÁRKO A KADLEČEK, 2001, S. 20)

Přístup 2: Pomocí sítě kuželu – výpočet obsahu pláště přes rozdělení na trojúhelníky (Binterová, 2010)

Pro povrch kuželu potřebujeme znát obsah podstavy a obsah pláště. Podstava je kruh a obsah kruhu vypočítáme $S_p = \pi r^2$. Pro odvození vzorce výpočtu obsahu pláště použijeme obr. 48. Plášť tvoří kruhová výseč. Rozdělíme-li si ji na pravidelné „trojúhelníky" a poskládáme je do „obdélníku" jako na obr. 48, můžeme odvodit vzorec přes obsah obdélníku. Na čím více trojúhelníků výseč rozdělíme, tím více se bude sestavený útvar blížit obdélníku. Jedna strana obdélníku má délku strany kužele s, druhá strana se rovná polovině obvodu podstavy. Obvod podstavy je obvod kruhu, tedy $O = 2\pi r$. Dáme-li vše dohromady, získáme vzorec pro obsah pláště $S_p = s \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi rs$.



OBR. 48: PLÁŠŤ KUŽELU ROZDĚLENÝ NA „TROJÚHELNÍKY" (BINTEROVÁ A KOL., 2010, S. 27)

2.14 **Objem kuželu**

Přístup 1: Pomocí objemu jehlanu (Odvárko a Kadleček, 2001)

Vycházíme z toho, že známe vzorec pro výpočet jehlanu. Máme-li trojboký jehlan s postavou o obsahu S_p a výškou v, jeho objem vypočítáme $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$. Vezmeme-li si jehlan s podstavou pravidelného šestiúhelníku o obsahu S_p a výškou v, jeho objem je také $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$. Vzorec pro objem jehlanu bude stále stejný pro jakýkoliv jehlan. Všímejme si tvaru podstav. Čím více vrcholů bude mít mnohoúhelník tvořící podstavu, tím více se bude blížit kruhu. Objem kuželu se tedy dá vypočítat také vzorcem $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$, kde v je výška kuželu a S_p je podstava kuželu ve tvaru kruhu. Obsah kruhu je dán vzorcem $S_p = \pi r^2$. Vzorec pro objem kuželu můžeme tedy upřesnit na tvar $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$.

Přístup 2: Cavalieriho principem (Hejný a kol., 2017b)

Tento přístup je popsán v oddíle 2.17.

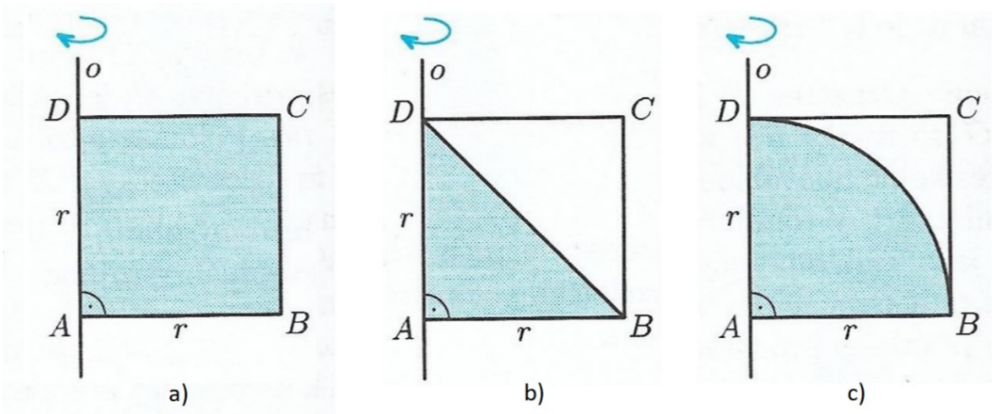
2.15 Objem koule

Přístup 1: Pomocí opsaného válce a vepsaného kuželu polokouli (Herman a kol., 2010)

Pro odvození vzorce pro objem koule nám pomůže odhad objemu polokoule. Máme čtverec *ABCD* (obr. 49a). Necháme-li tento čtverec otáčet kolem osy *o*, která prochází body *A* a *D*, získáme válec s poloměrem podstavy *r* a výškou také *r*. Pro jeho objem platí $V_v = \pi r^2 \cdot r = = \pi r^3$. Ve čtverci *ABCD* sestrojíme pravoúhlý trojúhelník *ABD* (viz obr. 49b), který také necháme otáčet kolem osy *o*. Otáčením vznikne kužel o poloměru podstavy *r* a výškou *r*. Pro jeho objem platí $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$. Sestrojíme ve čtverci *ABCD* čtvrtkruh, který je omezený úsečkami *AB* a *AD* a obloukem *BD* (viz obr. 49c). Otáčením čtvrtkruhu kolem osy *o* vznikne polokoule o objemu V_p.

Vzniklý válec je polokouli „opsán“ a kužel je polokouli „vepsán“, proto pro jejich objemy platí $V_k < V_p < V_v$, po dosazení $\frac{1}{3}\pi r^3 < V_p < \pi r^3$. Objem koule V je dvojnásobek objemu polokoule. Pro V tedy platí $\frac{2}{3}\pi r^3 < V < 2\pi r^3$.

Herman a kol. (2010) dále bez důkazu uvádějí, že „chyby“ obou odhadů jsou stejné, neboť V je aritmetickým průměrem obou nalezených hodnot. Vzorec pro objem koule s poloměrem *r* je $V = \left(\frac{2}{3}\pi r^3 + 2\pi r^3\right) : 2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

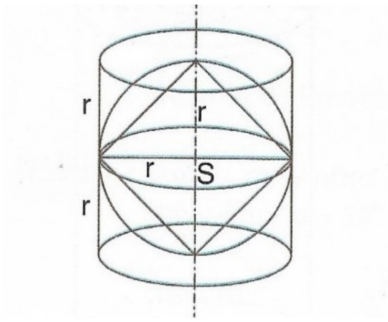


OBR. 49: ROTACE ČTVERCE, TROJÚHELNÍKU A ČTVRTKRUHU (HERMAN A KOL., 2010, S. 118)

Přístup 2: Pomocí opsaného válce a vepsaných rotačních kuželů (Molnár a kol., 2001)

Je dána koule o poloměru r, které je opsán rotační válec a vepsány dva rotační kužely (obr. 50). Objem válce je $V_v = \pi r^2 \cdot v = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, kde výška válce je zároveň průměr koule. Objem dvou kuželů je $2 \cdot V_k = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$, kde výška kuželu je zároveň poloměr koule. Objem koule V je menší než objem vepsaného válce a větší než objem dvou vepsaných kuželů, platí tedy $\frac{2}{3} \cdot \pi r^3 < V < \frac{6}{3}\pi r^3$. V učebnici je dále jen uveden vzorec pro objem koule je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ bez bližšího zdůvodnění.

Archimedes, jeden z největších matematiků, ve svém díle „O kouli a válci" formuloval tvrzení, která vedou k odvození vztahu $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ze vzorce pro objem kužele a válce. (Tvrdá, 2011, s. 29)



OBR. 50: VEPSANÉ KUŽELY A OPSANÝ VÁLEC KOULI (MOLNÁR A KOL., 2001, S. 88)

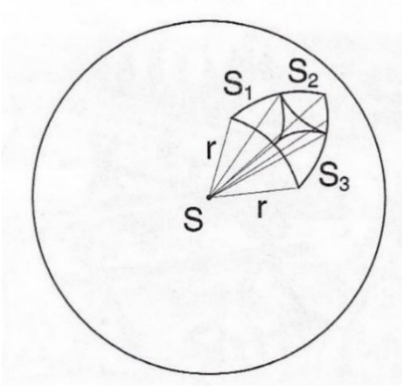
Přístup 3: Cavalieriho principem (Hejný a kol, 2017b)

Tento přístup je popsán v oddíle 2.17.

2.16 **Povrch koule**

Přístup 1: Pomocí rozdělení na trojboké jehlany (Molnár a kol., 2001)

Kouli o poloměru *r* rozdělíme na *x* trojbokých jehlanů s velmi malou podstavou o obsahu S_x a výškou *r* (viz obr. 51). Podstava má tvar „zahnutého" trojúhelníku, což budeme zanedbávat a tělesa budeme považovat za trojboké jehlany (se zvyšujícím se počtem těchto jehlanů budou jejich podstavy stále více kopírovat kouli). Vycházíme z toho, že známe vzorec pro objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ a objem jehlanu $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v$. Objem koule je součet objemů trojbokých jehlanů: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \cdots = \frac{1}{3}r \cdot (S_1 + S_2 + \cdots)$. Sečteme-li obsahy $S_1, S_2, \ldots$, tedy obsahy podstav jehlanů, získáme povrch koule S. Jestliže $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot S$, pak $S = 4\pi r^2$.

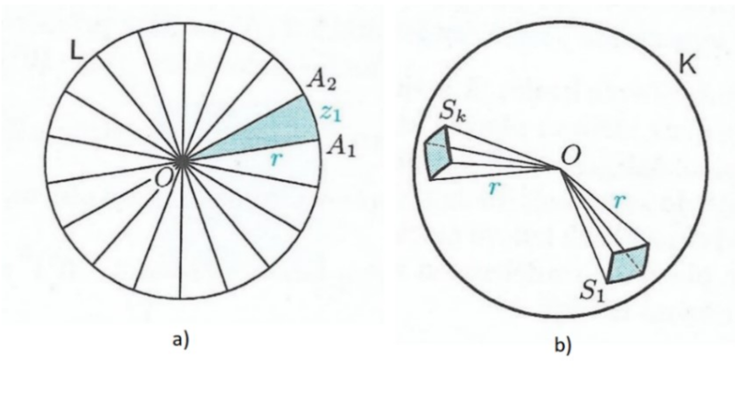


OBR. 51: TROJBOKÝ JEHLAN V KOULI (MOLNÁR A KOL., 2001, S. 88)

Přístup 2: Pomocí rozdělení na čtyřboké jehlany (Herman a kol., 2010)

Přístup používá myšlenku, která byla použita pro odvození vzorce pro obsah kruhu v oddíle 2.4 u přístupu 2. Kruh jsme dělili na stále větší počet kruhových výsečí, ze kterých jsme sestavili útvar podobný obdélníku.

Vezmeme si kruh, který rozdělíme na *n* shodných kruhových výsečí (obr. 52a). Představíme-li si výseč jako „rovnoramenný trojúhelník", který má základnu $|A_1A_2| = z_1$, můžeme spočítat jeho přibližný obsah. Obsah „trojúhelníku" SA_1A_2 je $S_\Delta = \frac{z_1 \cdot r}{2}$. Určíme-li takto obsah u všech výsečí a sečteme-li je, získáme obsah kruhu: $S_k = \frac{z_1 \cdot r}{2} + \frac{z_1 \cdot r}{2} + \cdots + \frac{z_n \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$. Součet $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ je součet všech oblouků, který tvoří obvod kruhu, který je dán vzorcem $o = 2\pi r$. Obsah kruhu je $S_k = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r = \pi r^2$.

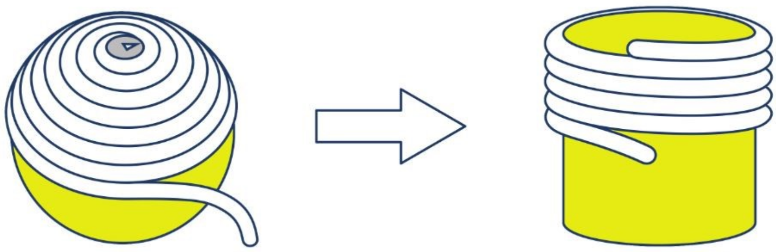


OBR. 52: ROZDĚLENÍ NA VÝSEČE A ČTYŘBOKÉ JEHLANY (HERMAN A KOL., 2010, S. 120)

Podobně odvodíme vzorec pro povrch koule za předpokladu, že známe vzorec pro objem koule. Kouli rozdělíme na n shodných pravidelných čtyřbokých „jehlanů“, jejichž podstavy budou mírně zakřivené (viz obr. 52b). Součet obsahů podstav „jehlanů“ S_k tvoří povrch koule. Objem koule je $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \cdots \frac{1}{3}S_n \cdot r = \frac{1}{3}r \cdot (S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = = \frac{1}{3}r \cdot S$. Ze vzorce pro objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ a $V = \frac{1}{3}r \cdot S$ dostaneme, že $S = 4\pi r^2$.

Přístup 3: Pomocí obmotávání koule a válce (Hejný a Šalom, 2018)

Vzorec odvodíme pomocí experimentu. Máme dvě tělesa, jedno tvaru koule a druhé tvaru válce, který má poloměr podstavy *r* stejný jako poloměr koule. Pomocí provázku obmotáme celý povrch koule. Stejnou délkou provázku, kterou byla obmotaná koule, obmotáme i plášť válce (viz obr. 53). Zjišťujeme, do jaké výšky h se obmotal válec. I když může být měření nepřesné (předměty nemusí mít úplně stejné poloměry, těleso tvaru koule může mít nějaké nedokonalosti a samozřejmě záleží i na šikovnosti při obalování), měli bychom získat výšku, která se rovná průměru koule. Ze znalosti povrchu válce, přesněji jeho pláště, víme, že $S_{pl} = 2\pi r \cdot v$. Povrch koule je jako povrch obmotané části válce, tedy $S = 2\pi r \cdot 2r = = 4\pi r^2$.



OBR. 53: OBMOTÁVÁNÍ KOULE A VÁLCE (HEJNÝ A ŠALOM, 2018, S. 30)

2.17 Cavalieriho princip

V této kapitole přiblížím metodu výpočtu objemu těles zvanou Cavalieriho princip.

> Uvažujme dvě tělesa T_1, T_2 a rovinu α. Jestliže pro každou rovinu rovnoběžnou s α má její průnik s tělesem T_1 stejný obsah jako její průnik s tělesem T_2, pak obě tělesa mají stejný objem. (Dell´Acqua, 1988, s. 24)

Jednoduše můžeme říci, že dvě tělesa, která mají podstavy se stejným obsahem a výšky stejně velké, mají stejný objem, pokud mají řezy rovnoběžné s podstavami a vedené ve stejné vzdálenosti od podstav stejné obsahy.

Cavalieriho princip můžeme znázornit pomocí mincí. Poskládáme-li ze stejného počtu stejných mincí tři sloupce, znichž jeden bude srovnán do válce, druhý a třetí bude nějak naklopen (obr. 54), získáme tři různá tělesa, která mají stejný objem.

OBR. 54: VĚŽE Z MINCÍ (HEJNÝ A KOL., 2016, S. 46)

Cavalieriho princip můžeme zformulovat i pro dvourozměrné útvary:

> Předpokládejme, že mezi dvěma rovnoběžkami jsou v rovině umístěny dva útvary. Pokud každá přímka rovnoběžná se zmíněnými dvěma rovnoběžkami protíná oba útvary v úsečkách stejné délky, mají oba útvary stejný obsah. (Hejný a kol., 2017a, s. 73)

Tento princip pro odvození vzorce použil Molnár a kol. (1999) (viz oddíl 2.2, přístup 3), ovšem bez zdůvodnění.

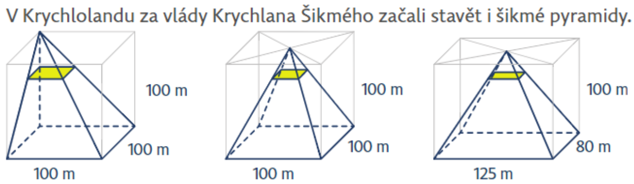
V učebnicích, ze kterých jsem čerpala, se Cavalieriho princip pro odvození vzorce pro objem těles objevoval u řady učebnic Hejného metody. Tyto přístupy jsem se rozhodla zařadit souhrnně do tohoto oddílu.

Objem jehlanu (Hejný a kol. 2016)

Žáci si nejdříve na základě úlohy 4 na s. 51 mají pomocí vytvoření vlastního modelu uvědomit, že ze tří shodných jehlanů lze sestavit krychli. Ve třídě vznikne několik jehlanů a pomocí skládání určitého počtu jehlanů se žáci budou snažit vytvořit krychli. Pak můžeme říct, že objem jehlanu je třetina objemu krychle.

V další části si mají žáci uvědomit, že objem jehlanu není závislý na tom, kde je v horní podstavě krychle umístěn hlavní vrchol (viz první dva jehlany na obr. 55), ani na tvaru podstavy, pokud má stejný obsah (viz třetí jehlan na stejném obrázku). Jestliže je zahrada ve výšce $\frac{4}{5}$ plánované výšky, pak výška jehlanu, jehož podstavou je zahrada, je $\frac{1}{5}$ plánované výšky. Rozměry zahrad se také zmenší na $\frac{1}{5}$ rozměrů podstavy. Obsah první zahrady je $S_1 = \left(\frac{1}{5} \cdot 100\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 100\right) = 400$ m², obsah druhé zahrady je $S_2 = \left(\frac{1}{5} \cdot 100\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 100\right) =$ $= 400$ m² a obsah třetí zahrady je $S_1 = \left(\frac{1}{5} \cdot 125\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 80\right) = 400$ m². Díky výpočtu rozloh zahrad (které se shodují) a použití Cavalieriho principu můžeme říct, že všechny tři jehlany mají stejný objem. Objem prvního jehlanu už žáci znají (viz výše), dospívají tedy k poznatku, že objem čtyřbokého jehlanu najdeme vynásobením obsahu podstavy a výšky tělesa a objem jehlanu není závislý na tom, kde je v horní podstavě krychle umístěn hlavní vrchol (viz první dva jehlany na obr. 55), ani na tvaru podstavy, pokud má stejný obsah (viz třetí jehlan na stejném vydělením třemi, tedy $V = \frac{S_p \cdot v}{3}$.

V Krychlolandu za vlády Krychlana Šikmého začali stavět i šikmé pyramidy.



a) Za života Krychlana Šikmého se všechny pyramidy dostavěly pouze do výšky 80 m ($\frac{4}{5}$ plánované výšky). Nahoře byly zřízeny zahrady. Zjistěte rozlohy zahrad.

b) Po smrti panovníka byly zahrady zrušeny a pyramidy dostavěny. Která z nich měla největší objem?

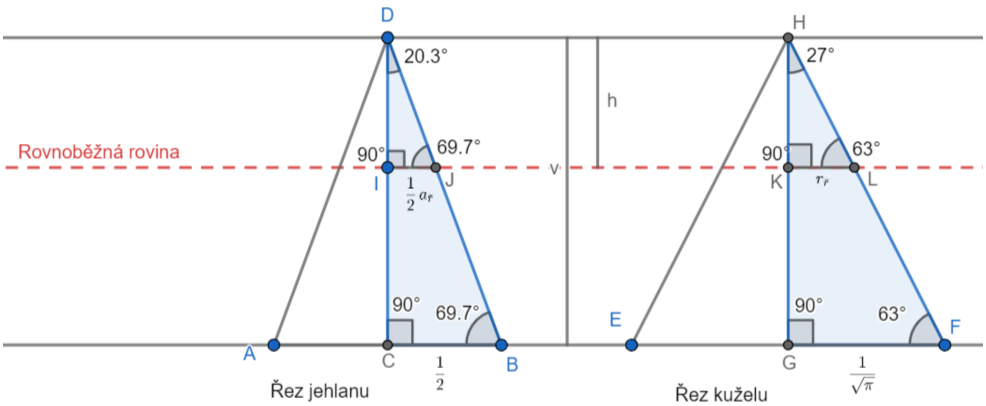
OBR. 55: ZADÁNÍ ÚLOHY VEDOUCÍ K OBJEMU JEHLANU (HEJNÝ A KOL., 2016, S. 54)

Objem kuželu (Hejný a kol., 2017b)

Učebnice nabádá k ověření následujícího tvrzení Cavalieriho principem (s. 68): „U hranolu i válce je objem = podstava · výška. U jehlanu je objem = $\frac{1}{3}$ · podstava · výška. A stejně to bude i u kuželu, protože kužel je kulatý jehlan.“ Ověření pro kužel nyní provedeme.

Máme jehlan s čtvercovou podstavou a kužel se stejnou výškou. Jejich podstavy leží v jedné rovině. Abychom mohli použít Cavalieriho princip, je zapotřebí, aby podstavy měly stejný obsah. Nechť např. $S_{p(k)} = S_{p(j)} = 1$. Pak délka strany čtverce je $a = 1$ a poloměr kruhu je $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Proložíme tělesy rovinu, která je rovnoběžná s rovinou podstav. Průnikem roviny a jehlanu získáme čtverec o straně $a_\text{ř}$ a průnikem roviny a kuželu dostaneme kruh o poloměru $r_\text{ř}$. Je třeba dokázat, že obsahu řezu $S_{\text{ř}(j)}$ je stejný jako obsahu řezu kuželu $S_{\text{ř}(k)}$.

Proložíme-li tělesy rovinu, která je kolmá k rovině podstav a prochází vrcholy těles. Průnikem těles a roviny získáme dva rovnoramenné trojúhelníky *ABD* a *EFH* (obr. 56). Podle věty *uuu* o podobnosti trojúhelníků můžeme říct, že trojúhelníky *CBD* je podobný trojúhelníku *IJD* a trojúhelník *GFH* je podobný trojúhelníku *KLH*. Pro trojúhelníky *CBD* a *IJD* platí: $\frac{\frac{1}{2}a_\text{ř}}{\frac{1}{2}} = \frac{v}{h}$, po úpravách získáme $a_\text{ř} = \frac{v}{h}$, pak $S_{\text{ř}(j)} = (a_\text{ř})^2 = \frac{v^2}{h^2}$. Pro trojúhelníky *GFH* a *KLH* platí: $\frac{r_\text{ř}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{v}{h}$, po úpravách získáme $r_\text{ř} = \frac{v}{\sqrt{\pi} \cdot h}$, pak $S_{\text{ř}(k)} = \pi \cdot (r_\text{ř})^2 =$ $= \pi \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{\pi} \cdot h}\right)^2 = \frac{v^2}{h^2}$. Vidíme, že oba obsahy se rovnají. Díky Cavalieriho principu můžeme říct, že objem kuželu V_k je roven objemu jehlanu V_j, tedy $V_k = V_j = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška tělesa.

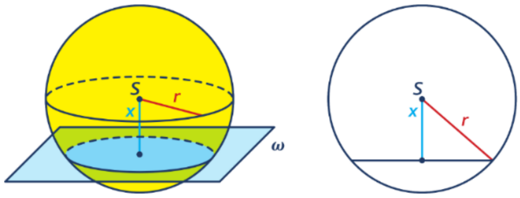


OBR. 56: ŘEZ JEHLANU A KUŽELU

Objem koule (Hejný a kol., 2017b)

Odvození vzorce pro objem koule předchází následující dvě úlohy (viz obr. 57 a obr. 58). Pomocí Pythagorovy věty zjistíme délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníku na obr. 57 vpravo. Označme tuto stranu r_1, pak $r_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$. Úsečka r_1 je zároveň poloměr kruhu, který je řezem koule rovinou ω. Obsah řezu neboli kruhu S_1 je tedy $S_1 = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 =$ $= \pi(r^2 - x^2)$.

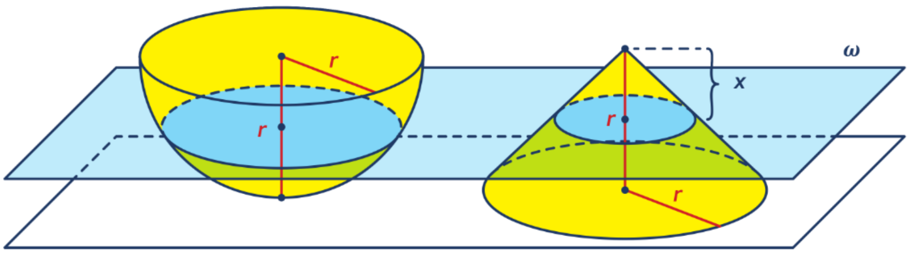
Kouli o poloměru r rozřízneme rovinou ω, která je od středu koule S vzdálená x. Na obrázku vpravo je řez touto koulí (rovinou procházející středem S a kolmou k ω). Zjistěte obsah řezu.



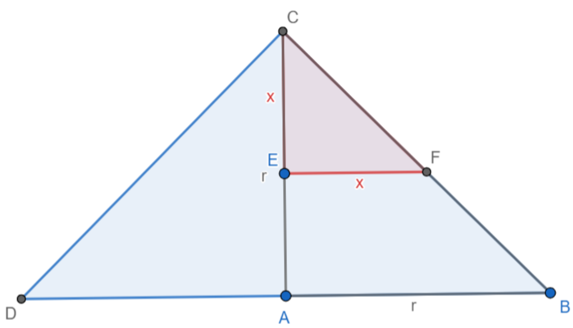
OBR. 57: ZADÁNÍ 1. ÚLOHY VEDOUCÍ K OBJEMU KOULE (HEJNÝ A KOL., 2017B, S. 69)

Dále budeme řešit úlohu na obr. 58. Zjistíme obsah řezu kuželu S_2. Vrcholem kuželu vedeme rovinu kolmou na podstavu. Rovina protne kužel v rovnoramenném trojúhelníku *DBC* (obr. 59). Trojúhelníky *ABC* a *EFC*, které leží v trojúhelníku *DBC* jsou podobné podle věty *uuu* a z toho plyne, že $|EF| = x$. Délka x je poloměrem řezu kuželu a jeho obsah je tedy $S_2 = \pi \cdot x^2$. Součet obsahů obou řezů je $\pi(r^2 - x^2) + \pi \cdot x^2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot x^2 + \pi \cdot x^2 = = \pi \cdot r^2$. Z toho plyne, že součet obsahů nezávisí na výšce x. Položíme-li rovinu (rovnoběžnou s rovinou ω) do jakékoliv výšky, součet řezů se bude vždy rovnat $\pi \cdot r^2$, což je obsah kruhu o poloměru r.

Zjistěte, v jaké výšce máme volit rovinu ω, aby součet obsahů obou kruhů byl co nejmenší.



OBR. 58: ZADÁNÍ 2. ÚLOHY VEDOUCÍ K OBJEMU KOULE (HEJNÝ A KOL., 2017B, S. 69)



OBR. 59: ŘEZ KUŽELU

Nyní přichází na řadu Cavalieriho princip. Ke kuželu a polokouli přidáme válec, který má podstavu o poloměru *r* a výšku taktéž o velikosti *r*. Budeme-li rovinou řezat i válec, řezem válce bude vždy kruh o obsahu $\pi \cdot r^2$. Pro řezy platí $S_1 + S_2 = S_3$, kde S_3 je obsah řezu válce. Z Cavalieriho principu platí, že mají-li dvě tělesa shodné podstavy a výšky a řezy rovinou ve stejné výšce mají stejný obsah, mají stejný objem. Z rovnice $S_1 + S_2 = S_3$ po úpravě získáme $S_1 = S_3 - S_2$, z čehož plyne, že obsah řezu polokoule je roven rozdílu obsahu řezu válce a kuželu. Vyřízneme-li z válce kužel, jeho objem bude stejný jako objem polokoule. Předpokládá se, že známe vzorec pro objem válce $V_v = \pi r^3$ a objem kuželu $V_k = \frac{1}{3}\pi r^3$. Objem polokoule je pak $V_p = V_v - V_k = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$, a tedy vzorec pro objem koule má tvar $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo prostřednictvím analýzy vybraných českých učebnic matematiky shrnout různé přístupy k výpočtu obsahů, objemů a povrchů v geometrii. Pracovala jsem s devíti různými řadami učebnic. Mým cílem nebylo přístupy hodnotit z hlediska využitelnosti či vhodnosti, ani mi nešlo o hodnocení samotných učebnic, ale zamýšlela jsem přístupy shromáždit, popsat a případně matematicky rozpracovat. Didaktické zhodnocení by mohlo být námětem navazujících diplomových prací.

Domnívám se, že cíl práce byl splněn. Ke každé míře jsem našla zpravidla více metodických přístupů, které byly poměrně pestré. Každý přístup se snaží o zprostředkování určitého porozumění výpočtu příslušné míře, ne každý však dosahuje až abstraktní úrovně. Jen některé vzorce lze na úrovni základní školy korektně dokázat, u dalších by byl potřebný aparát vyšší matematiky (důkazy tvrzení však cílem této práce nebyly, některé lze najít např. v práci Tvrdé, 2011). Proto učebnice různou měrou rezignují na matematickou korektnost ve prospěch názornosti.

U geometrických útvarů v rovině učebnice nabízely více přístupů než u těles. Ke každému obrazci jsem našla 4-5 různých přístupů, přičemž nejčastěji se vyskytovaly přístupy, které byly založeny na dělení útvaru na určité části a na jejich přesunutí, díky kterému vznikl jiný útvar. Přístupy bylo pro odvození povrchu těles byly většinou založeny na sítích těles. U těles se v přístupech často objevovalo opisování a vepisování jiných těles, jejichž objem či povrch dokážeme spočítat. V některých učebnicích se vzorce vůbec neodvozovaly. Tak tomu bylo zpravidla u koule, kde většina učebnic (šest z devíti) odkazovala přímo na vzorec pro povrch i objem bez snahy o odvození.

Při analyzování učebnic jsem se setkala s Cavalieriho principem. Tato metoda výpočtu objemu, příp. obsahu, je široce uplatnitelná, a proto jsem se rozhodla jí věnovat zvláštní oddíl, ve kterém jsem vysvětlila její princip a ukázala příklady přístupů z vybraných učebnic, které s tímto principem pracují. Jednalo se zejména o učebnice Hejného metody.

Domnívám se, že předložená práce může sloužit i jako metodický materiál pro učitele 2. stupně. Některé přístupy pro mě byly velmi zajímavé a určitě je využiji i ve své výuce. V tomto tématu bych chtěla pokračovat i v diplomové práci. Zajímalo by mě, který z přístupů k odvození vzorce vede k dobrému porozumění u žáků.

Seznam použité literatury

BARTLOVÁ, Eliška, 2011. *Míry geometrických útvarů v učivu matematiky druhého stupně základní školy* [online]. Brno [cit. 2020-07-06]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/efmf43/>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Růžena Blažková.

BARTOŇOVÁ, Eva a Pavel KVĚTOŇ, 2007. *Matematika III: základy geometrie*. Orlová: Obchodní akademie Orlová. ISBN 978-80-87113-06-6.

BĚLÍK, Miroslav, 2005. *Geometrie s didaktikou: učební text pro studium učitelství prvního stupně základní školy.* 1. vydání. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

DELL´ACQUA, Alba, 1988. *Encyklopedie matematiky*. Praha: Mladá fronta.

FÜRST, Tomáš, Josef MOLNÁR a Karel POHANĚL, 2004. *Průvodce trojrozměrným prostorem*. Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN 80-244-0817-1.

KUŘINA, František, 1985. Míra geometrických útvarů. KOUŘIM, Jaroslav, Jiří HEJL, Jitka KUČEROVÁ, František KUŘINA a Ondřej ŠEDIVÝ. *Základy elementární geometrie: pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, s. 72-95.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK, 2004. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-276-7.

Ottův slovník naučný: Ilustrovaná encyklopedie obecných znalostí. Praha: J. Otto, 1896. 10. sv.

PECINOVÁ, Iva. *Měření délek*. Praha, 2015. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce Alena Šarounová.

POMYKALOVÁ, Eva, 2000. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-719-6174-4.

POMYKALOVÁ, Eva, 2009. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. 4. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-807-1963-899.

TVRDÁ, Monika. *Objem těles*. Praha, 2011. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce Zdeněk Halas.

VOJTĚSKÁ, Kateřina. *Obsahy a objemy v matematice: vývoj a srovnání metod*. Brno, 2015. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická. Vedoucí práce Vojtěch Žádník.

Seznam učebnic, ze kterých byly čerpány přístupy:

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ, 2007. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia: geometrie – učebnice*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-656-7.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ, 2009. *Matematika 8 pro základní školy a víceletá gymnázia: geometrie – učebnice*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-686-4.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ, 2010. *Matematika 9 pro základní školy a víceletá gymnázia: geometrie – učebnice*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-691-8.

COUFALOVÁ, Jana, 2007a. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 978-80-7168-993-5.

COUFALOVÁ, Jana, 2007b. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 978-80-7168-994-2.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda C*. Praha: H-mat, 2016. ISBN 978-80-905756-3-9.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda CD, příručka učitele.* Praha: H-mat, 2017a. ISBN 978-80-905756-9-1.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda E*. Praha: H-mat, 2017b. ISBN 978-80-88247-00-5.

HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda F*. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-06-7.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA, 1995. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus. ISBN 80-858-4986-0.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA, 2010. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-225-0.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA, 2012a. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Kruhy a válce.* Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-023-2.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA, 2012b. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Hranoly*. 2. vydání. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-257-1.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ, 2015. *Matematika: rovinné útvary*. Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-761-2.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ, 2016. *Matematika: hranoly a válce*. Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-867-1.

MÜLLEROVÁ, Jana, Jaroslav RÁDL, Vlastimil MACHÁČEK a Jiří BRANT, 1998. *Matematika pro 6. ročník základní školy: GEOMETRIE*. Praha: Kvarta. ISBN 80-85570-78-5.

MÜLLEROVÁ, Jana, Vlastimil MACHÁČEK, Jiří BRANT, Jiří KŮST a František MACHÁŇ, 2005a. *Matematika pro 7. ročník základní školy: GEOMETRIE*. Praha: Kvarta. ISBN 80-85570-86-6.

MÜLLEROVÁ, Jana, Vlastimil MACHÁČEK, Emil KRAEMER a Jiří BRANT, 2005b. *Matematika pro 8. ročník základní školy: GEOMETRIE*. Praha: Kvarta. ISBN 80-85570-94-7.

MOLNÁR, Josef, Libor LEPÍK, Hana LIŠKOVÁ a Jan SLOUKA, 1999. *Matematika 7: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos. ISBN 80-7230-031-8.

MOLNÁR, Josef, Libor LEPÍK, Hana LIŠKOVÁ, Jan SLOUKA a Bronislava Růžičková, 2001. *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos. ISBN 80-7230-108-X.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK, 2001. *Matematika pro 9. ročník základní školy: 3. díl*. Praha: Prometheus. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6212-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK, 2012. *Matematika pro 7. ročník základní školy: 3. díl*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-430-8.

ROSECKÁ, Zdena, 2008. *Geometrie pro 7. ročník*. Brno: Nová škola. ISBN 80-85607-75-1.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt Míček, 2009. *Geometrie pro 9. ročník*. Brno: Nová škola. ISBN 80-8289-020-4.