MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Libuša Petrášová

Stochastická analýza s aplikacemi ve financích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Stochastická analýza s aplikacemi ve financích

Autor: Libuša Petrášová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Diplomová práce má za úkol nabídnout užitečnou koncepci v rámci stochastické analýzy pro finanční aplikace. Poskytuje důkaz Doob-Meyerovy věty nejprve pro omezené martingaly, následně platnost věty ukazuje pro lokální martingaly. V práci je také dokázána silná markovská vlastnost Wienerova procesu a několik jejích významných důsledků. V neposlední řadě se na základě vybudovaného aparátu poskytne metodika řešení různých finančních úloh.

Klíčová slova: Doob-Meyerův rozklad, silná markovská vlastnost Wienerova procesu, lokalizace

Title: Stochastic analysis with applications in finance

Author: Libuša Petrášová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The purpose of the thesis is to provide a useful concept in the framework of stochastic analysis applicable in finance. The thesis offers proof for Doob-Meyer theorem for boundend martingales which is then extended for local martingales. It also proves the strong Markov theorem for Wiener process and some of its significant consequences. The built framework is then used for creating a method for solution of different tasks in applied finance.

Keywords: Doob-Meyer decomposition, strong Markov property of Wiener process, localization

Názov práce: Stochastická analýza s aplikáciami vo financiách

Autor: Libuša Petrášová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Diplomová práca má za úlohu poskytnúť užitočnú koncepciu v rámci stochastickej analýzy pre finančné aplikácie. Poskytuje dôkaz Doob-Meyerovej vety najprv pre obmedzené martingaly, potom platnosť vety ukazuje pre lokálne martingaly. V práci sa tiež dokáže silná markovská vlastnosť Wienerovho procesu a niekoľko jej významných dôsledkov. V neposlednom rade sa na základe vybudovaného aparátu poskytne metodika riešenia rôznych finančných úloh.

Kľúčové slová: Doob-Meyerov rozklad, silná markovská vlastnosť Wienerovho procesu, lokalizácia

Rada by som sa poďakovala svojmu vedúcemu práce Mgr. Petrovi Dostálovi, Ph.D. za konzultácie, dobré rady a pripomienky, ústretovosť a čas, ktorý mi venoval, svojej rodine a Tomášovi za pomoc a podporu.

Obsah

Úvod

Diplomová práca je motivovaná snahou poskytnúť materiál študentom, zaujímajúcim sa o časť stochastickej analýzy vhodnej pre aplikácie vo financiách. Jedným z cieľov práce je tiež zistiť, s čím je človek konfrontovaný za predpokladu, že má k dispozícii znalosti stochastickej analýzy pre L_2-martingaly. Jednotlivé partie boli zaradené tak, aby pomohli vytvoriť rámec pre riešenie úloh z oblasti finančných aplikácií.

V prvej kapitole našej práce budeme smerovať k Doob-Meyerovej vete o rozklade obmedzených spojitých martingalov. V kapitole dva sa budeme zaoberať markovskou vlastnosťou, ukážeme si silnú markovskú vlastnosť Wienerovho procesu a niektoré z jej mnohých dôsledkov, vrátane princípu zrkadlenia Wienerovho procesu. Odvodíme tiež združené rozdelenie súčasnej hodnoty Wienerovho procesu a jeho odpovedajucého historického maxima v danom čase. V tretej kapitole sa budeme venovať lokalizácii, zavedieme pojem lokálneho martingalu, platnosť Doob-Meyerovej vety ukážeme aj pre lokálne martingaly. Vo štvrtej kapitole potom na základe vybudovaných znalostí vytvoríme metodiku predstavujúcu návod ako je možné pristupovať k riešeniu rôznych úloh z oblasti finančných aplikácií.

1. Doob-Meyerov rozklad obmedzeného martingalu

V tejto kapitole budeme pracovať na filtrovanom pravdepodobnostom priestore $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, P)$, kde $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ označuje filtráciu. Ak nebude uvedené inak, budeme filtráciu $\mathscr{F}$ uvažovať úplnú a náhodne procesy a veličiny reálne. Na úvod si zadefinujeme, čo budeme rozumieť pod pojmom lokálne konečné delenie $\mathbb{R}_+$.

Definícia 1.1 (Lokálne konečné delenie)**.** Nech $0 \in \Delta \subset [0,\infty)$ je nekonečná lokálne konečná množina (t.j. pre ľubovoľné $a, b \geq 0$ je $\Delta \cap [a,b]$ konečná) a

$$\Delta = \{0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < ...\} \text{ a } \delta_n \nearrow \infty \text{ pre } n \to \infty. \tag{1.1}$$

Potom budeme množinu Δ nazývať *lokálne konečné delenie* $\mathbb{R}_+$.

Definícia 1.2 (Elementárna kvadratická variácia)**.** Nech $X = (X_t)_{t\geq 0}$ je reálny náhodný proces, Δ nech je delenie ako v (1.1). *Elementárnu kvadratickú variáciu* procesu X vzhľadom k Δ definujeme ako náhodný proces $([X]_t^\Delta)_{t\geq 0}$, spĺňajúci

$$[X]_t^\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} (X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}})^2, t \geq 0. \tag{1.2}$$

Poznámka 1.3. *Pre zavedenú elementárnu variáciu si povšimneme:*

1. *pre pevné $t \in [0,\infty)$ je počet nenulových sčítancov v sume* (1.2) *konečný,*
2. $[X]_0^\Delta = 0$ *a proces* $[X]^\Delta$ *je na* $[0,\infty)$ *nezáporný,*
3. *proces* $[X]^\Delta$ *je v bodoch delenia* Δ *neklesajúci, t.j. pre* $m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$ *a* $\delta_m, \delta_n \in \Delta$ *je*
$$0 \leq [X]_{\delta_m}^\Delta \leq [X]_{\delta_n}^\Delta.$$

Lemma 1.4. *Nech Δ je lokálne konečné delenie $\mathbb{R}_+$. Pre reálny náhodný proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ platí*

$$X_t^2 = X_0^2 + [X]_t^\Delta + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}). \tag{1.3}$$

Dôkaz. Pre $t \in \mathbb{R}_+$ je $X_{\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}) = X_{t\wedge\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}})$, pretože ak

- $\delta_{k-1} < t$ je $t \wedge \delta_{k-1} = \delta_{k-1}$,
- $\delta_{k-1} \geq t$ je $t \wedge \delta_{k-1} = t$, $t \wedge \delta_k = t$ teda $(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}) = 0$.

Celkovo platí

$$\begin{aligned} X_t^2 - X_0^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}})(X_{t\wedge\delta_k} + X_{t\wedge\delta_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} X_{t\wedge\delta_k}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{t\wedge\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}})^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{t\wedge\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}). \end{aligned}$$

□

Pripomenieme koncept jednoduchého procesu (viz Dupačová, Hurt a Štěpán, 2002, strana 261), pomocou ktorého zavedieme elementárny stochastický integrál.

Definícia 1.5 (Jednoduchý proces)**.** Na $\mathbb{R}_+$ uvažujme delenie Δ ako v (1.1) a nech ξ_j sú $\mathscr{F}_{\delta_{j-1}}$ - merateľné reálne náhodné veličiny, $j \in \mathbb{N}$, ξ_0 nech je $\mathscr{F}_{\delta_0}$- merateľná. Proces $(G_t)_{t\geq 0}$, kde pre $t \geq 0$ definujeme

$$G_t = \xi_0 \mathbb{1}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \mathbb{1}_{(\delta_{j-1},\delta_j]}(t) \tag{1.4}$$

nazývame *$\mathscr{F}$- jednoduchým náhodným procesom* voči deleniu Δ.

Poznámka 1.6. *Jednoduchý proces G definovaný v* (1.4) *je $\mathscr{F}$-adaptovaný a zľava spojitý.*

Definícia 1.7 (Elementárny stochastický integrál)**.** Uvažujme filtrovaný pravdepodobnostný priestor $(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P)$, na ňom $\mathscr{F}$- jednoduchý proces G definovaný v (1.4), reálny náhodný proces Y a delenie $\mathbb{R}_+$ zavedené v (1.1). Proces $S^\Delta(G,Y)$ definovaný ako

$$S_t^\Delta(G,Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{\delta_{k-1}}(Y_{t\wedge\delta_k} - Y_{t\wedge\delta_{k-1}}), \quad t \geq 0 \tag{1.5}$$

budeme nazývať *elementárny stochastický integrál* procesu G voči Y vzhľadom k deleniu Δ.

Takto definovaný proces (1.5) je Riemanovská suma procesu G voči Y odpovedajúca deleniu Δ. V nasledujúcom tvrdení uvidíme, že takto zavedený elementárny stochastický integrál podľa martingalu zachováva martingalovú vlastnosť.

Tvrdenie 1.8. *Buď M $\mathscr{F}$-martingal, X $\mathscr{F}$-adaptovaný proces a nech je proces $S^\Delta(X,M)$ integrovateľný, teda pre každé $t \in [0,\infty)$*

$$S_t^\Delta(X,M) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{\delta_{k-1}}(M_{t\wedge\delta_k} - M_{t\wedge\delta_{k-1}}) \in \mathbb{L}_{\mathbb{1}}. \tag{1.6}$$

Potom je proces $S^\Delta(X,M)$ $\mathscr{F}$-martingalom.

Dôkaz. Pretože X je $\mathscr{F}$-adaptovaný a M je $\mathscr{F}$- martingal, je tiež $S^\Delta(X,M)$ $\mathscr{F}$-adaptovaný proces. Aby sme overili, že proces $S^\Delta(X,M)$ je $\mathscr{F}$-martingalom, ostáva ukázať, že pre ľubovoľné $0 \leq s \leq t < \infty$ je $E[S_t^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} S_s^\Delta(X,M)$.

1. Predpokladajme najprv, že $\delta_{l-1} \leq s \leq t \leq \delta_l$ pre nejaké $l \in \mathbb{N}$. Vzhľadom k definícii $S^\Delta(X,M)$ v (1.6) je zrejme $S_t^\Delta(X,M) - S_s^\Delta(X,M) = X_{\delta_{l-1}}(M_t - M_s)$. Ďalej $X_{\delta_{l-1}} \in \mathbb{L}(\mathscr{F}_{\delta_{l-1}}) \subseteq \mathbb{L}(\mathscr{F}_s)$ a

$$E[S_t^\Delta(X,M) - S_s^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} X_{\delta_{l-1}} E[M_t - M_s|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} 0.$$

2. Teraz nech $\delta_{l-1} \leq s \leq \delta_l \leq \delta_k \leq t$, potom z predchádzajúceho a z vlastností podmienenej strednej hodnoty je

$$E[S_t^\Delta(X,M) - S_s^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} E[S_t^\Delta(X,M) - S_{\delta_k}^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s]$$
$$+ \sum_{j=l+1}^{k} E[S_{\delta_j}^\Delta(X,M) - S_{\delta_{j-1}}^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s] + E[S_{\delta_l}^\Delta(X,M) - S_s^\Delta(X,M)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} 0.$$

□

V zmysle vyššie zavedených pojmov teda v rozklade (1.4) procesu X^2 označíme špeciálny prípad elementárneho integrálu procesu X podľa neho samého

$$S_t^\Delta(X,X) =: \mathscr{S}_t^\Delta(X) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - [X]_t^\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{\delta_{k-1}}(X_{t\wedge\delta_k} - X_{t\wedge\delta_{k-1}}).$$

Z tvrdenia 1.8 vyplýva, že pre voľbu $X = M$ je proces $\mathscr{S}^\Delta(M)$ $\mathscr{F}$-martingalom, ak je integrovateľný.

Dôsledok 1.9. *Buď M L_2-integrovateľný $\mathscr{F}$-martingal a proces $\mathscr{S}^\Delta(M)$ nech je integrovateľný. Potom pre Δ, Ξ lokálne konečné delenia $\mathbb{R}_+$ platí*

1. *proces $M^2 - [M]^\Delta$ je $\mathscr{F}$-martingal,*
2. *proces $[M]^\Delta - [M]^\Xi$ je $\mathscr{F}$-martingal.*

Dôkaz. 1. Podľa lemmy 1.4 je $M_t^2 - [M]_t^\Delta = M_0^2 + 2\mathscr{S}^\Delta(M)$, z tvrdenia 1.8 vyplýva, že pre $\mathscr{F}$-martingal M je i proces $\mathscr{S}_t^\Delta(M)$ $\mathscr{F}$-martingalom a teda je $\mathscr{F}$-martingalom aj jeho dvojnásobok. Naviac M_0^2 je zrejme $\mathscr{F}$-martingalom a súčet $\mathscr{F}$-martingalov je $\mathscr{F}$-martingal.

2. Z bodu 1. už vieme, že $M^2 - [M]^\Delta$ a $M^2 - [M]^\Xi$ sú $\mathscr{F}$-martingaly. Potom je $\mathscr{F}$-martingalom aj ich rozdiel $M^2 - [M]^\Xi - M^2 + [M]^\Delta = [M]^\Delta - [M]^\Xi$.

□

Lemma 1.10. *Nech M je spojitý $\mathscr{F}$-martingal obmedzený hodnotou $K \in \mathbb{R}$, t.j.*

$$\forall t \geq 0 \quad |M_t| \leq K < \infty.$$

Nech Δ označuje lokálne konečné delenie $\mathbb{R}_+$, potom pre ľubovoľné $t \geq 0$ platí

$$E([M]_t^\Delta)^2 \leq 6K^4. \tag{1.7}$$

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $t \in \Delta$, inak by sme uvažovali delenie $\Delta \cup \{t\}$ čo by sa však vzhľadom k (1.2) nijak neprejavilo na ľavej strane (1.7). Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $t = \delta_n$. Z dôsledku 1.9 vieme, že proces $M^2 - [M]^\Delta$ je $\mathscr{F}$-martingal. Pretože M je obmedzený hodnotou K, dostávame pre $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

$$E\Big[[M]_t^\Delta - [M]_{\delta_k}^\Delta|\mathscr{F}_{\delta_k}\Big] \overset{\text{si}}{=} E\Big[M_t^2 - M_{\delta_k}^2|\mathscr{F}_{\delta_k}\Big] \overset{\text{si}}{\leq} E[M_t^2|\mathscr{F}_{\delta_k}] \overset{\text{si}}{\leq} K^2.$$

Označme $X \overset{\text{def}}{=} [M]^\Delta$, potom

$$E[X_t - X_{\delta_k}|\mathscr{F}_{\delta_k}] \overset{\text{si}}{\leq} K^2. \tag{1.8}$$

Vieme, že $X_0 = [M]_0^\Delta = 0$, teda špeciálne pre $k = 0$ dostávame

$$E[X_t - X_{\delta_0}|\mathscr{F}_{\delta_0}] \overset{\text{si}}{=} E[X_t|\mathscr{F}_{\delta_0}] \overset{\text{si}}{\leq} K^2. \tag{1.9}$$

Podľa rovnice (1.3) platí

$$X_t^2 = [X]_t^\Delta + 2\mathscr{S}_t^\Delta(X). \tag{1.10}$$

V nasledujúcej časti ukážeme, že stredná hodnota oboch členov na pravej strane rovnosti (1.10) je zhora obmedzená.

1. Pre elementárnu variáciu $[X]_t^\Delta$ je

$$[X]_t^\Delta = \sum_{k=1}^{n} (M_{\delta_k} - M_{\delta_{k-1}})^4 \overset{\text{si}}{\leq} (2K)^2 \sum_{k=1}^{n} (M_{\delta_k} - M_{\delta_{k-1}})^2 = (2K)^2 X_t.$$

Odtiaľ a využitím (1.9) máme pre strednú hodnotu elementárnej variácie

$$E[X]_t^\Delta \leq 4K^2 EX_t \leq 4K^4. \tag{1.11}$$

2. Pre elementárnu kvadratickú variáciu X vieme, že $X_0 = 0$, preto

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (\tilde{X}_n - \tilde{X}_k)(\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1}) = \tilde{X}_n \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{X}_k(\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k \tilde{X}_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{X}_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1})(\tilde{X}_{k-1}),
\end{aligned}$$

kde $\tilde{X}_k \overset{\text{def}}{=} X_{\delta_k}$. Pre strednú hodnotu elementárneho integrálu podľa (1.8) a bodu 2 platí

$$\begin{aligned}
&E\mathscr{S}_t^\Delta(X) = E \sum_{k=1}^{n} (X_t - X_{\delta_k})(X_{\delta_k} - X_{\delta_{k-1}}) \\
&= E \sum_{k=1}^{n} E[X_t - X_{\delta_k}|\mathscr{F}_{\delta_k}](X_{\delta_k} - X_{\delta_{k-1}}) \leq K^2 E \sum_{k=1}^{n} (X_{\delta_k} - X_{\delta_{k-1}}) \leq K^4.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Kombináciou výsledkov (1.11) a (1.12) pre vzťah (1.10) máme

$$E([M]_t^\Delta)^2 = EX_t^2 = E[X]_t^\Delta + 2E\mathscr{S}_t^\Delta(X) \leq 4K^4 + 2K^4 = 6K^4.$$

□

V nasledujúcej časti najprv pripomenieme modul spojitosti a niektoré jeho vlastnosti.

Definícia 1.11 (Modul spojitosti funkcie)**.** Nech $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ a $\delta > 0$. Položme

$$mod_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x,y \in I, |x - y| \leq \delta\}.$$

Funkciu $mod_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ nazývame *modulom spojitosti* funkcie f na I.

Poznámka 1.12. *Z definície modulu spojitosti priamo vyplýva*

$$\forall x,y \in I : |f(x) - f(y)| \leq mod_f(|x - y|).$$

Tvrdenie 1.13. *Funkcia f je rovnomerne spojitá na intervale I práve vtedy, keď pre modul spojitosti platí*

$$\lim_{\delta\to 0+} mod_f(\delta) = 0.$$

Dôkaz. Viz Neubrunn, Šalát a Švec (1987, Veta 2.4.3).

□

Pre naše potreby si ešte uvedieme definíciu analógie modulu spojitosti pre náhodný proces do určitého času $t \geq 0$.

Definícia 1.14 (Modul spojitosti procesu do času t)**.** Buď X náhodný proces, $\delta > 0$ a $t \in (0,\infty)$. Potom definujeme *modul spojitosti procesu X do času t* ako

$$mod_{X;t}(\delta) = \sup\{|X_s - X_r|; s,r \in [0,t], |s-r| \leq \delta\}.$$

Ide teda o analógiu definície 1.11, kde by sme namiesto pôvodnej funkcie f definovanej na I uvažovali jej restrikciu $f|_{[0,t]}$ na uzavretý interval $[0,t] \subseteq I$.

Poznámka 1.15. *Trajektórie spojitého procesu sú na ľubovoľnom uzavretom intervale $[0,t]$, $t \in \mathbb{R}$ rovnomerne spojité, preto pre každé $t \geq 0$*

$$mod_{X;t}(\delta) \to 0, \ \ \delta \to 0.$$

Definujeme ešte, čo budeme rozumieť pod pojmom norma lokálne konečného delenia $\mathbb{R}_+$ do nejakého konečného času.

Definícia 1.16 (Norma lokálne konečného delenia)**.** Pre lokálne konečné delenie $\Delta = \{\delta_0 < \delta_1 < \ldots\}$ si zavedieme jeho *normu do času* $T > 0$ ako

$${}^T|\Delta| = \max\{|T \wedge \delta_k - T \wedge \delta_{k-1}|, k \in \mathbb{N}\}.$$

Takto definovaná norma delenia teda nie je nič iné, než norma delenia $\Delta \cap [0,T] \cup \{T\}$, t.j. delenia Δ intervalu [0,T] obohateného o bod T.

Lemma 1.17. *Nech M je spojitý $\mathscr{F}$ - martingal obmedzený hodnotou $K \in \mathbb{R}$ a uvažujme Δ, Ξ lokálne konečné delenia $\mathbb{R}_+$. Potom, pre každé $t \geq 0$ je*

$$E|[M]_t^\Delta - [M]_t^\Xi|^2 \leq 16\sqrt{6}K^2\sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Delta| \vee \ {}^t|\Xi|)\Big)}. \tag{1.13}$$

V dôkaze lemmy 1.17 budeme čiastočne využívať niektoré myšlienky z Karatzas a Shreve (1991, Lemma 5.9.) a Dupačová a kol. (2002, Theorem 1.6.1.).

Dôkaz. Označme $D = [M]^\Delta - [M]^\Xi$. Podľa dôsledku 1.9 je proces D spojitý $\mathscr{F}$-martingal.

Pre delenia Δ, Ξ uvažujme ich zjednotenie $\Delta \cup \Xi = \Lambda = \{0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq ...\}$. Podľa dôsledku 1.9 platí pre D a lokálne konečné delenie Λ, že $D^2 - [D]^\Lambda$ je $\mathscr{F}$-martingal, teda pre každé $t \geq 0$ je $ED_t^2 = E[D]_t^\Lambda$.

Zvoľme $t > 0$. Využitím nerovnosti $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ dostávame

$$\begin{aligned}
E[D]_t^\Lambda &= E\sum_{k=1}^{\infty}(D_{t\wedge\lambda_k} - D_{t\wedge\lambda_{k-1}})^2 \\
&= E\sum_{k=1}^{\infty}\Big([M]_{t\wedge\lambda_k}^\Delta - [M]_{t\wedge\lambda_{k-1}}^\Delta - ([M]_{t\wedge\lambda_k}^\Xi - [M]_{t\wedge\lambda_{k-1}}^\Xi)\Big)^2 \\
&\leq E\sum_{k=1}^{\infty} 2([M]_{t\wedge\lambda_k}^\Delta - [M]_{t\wedge\lambda_{k-1}}^\Delta)^2 + 2([M]_{t\wedge\lambda_k}^\Xi - [M]_{t\wedge\lambda_{k-1}}^\Xi)^2 \\
&= 2E\Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda + 2E\Big[[M]^\Xi\Big]_t^\Lambda.
\end{aligned}$$

Pre ED_t^2 teda platí

$$ED_t^2 = E[D]_t^\Lambda \leq 2E\Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda + 2E\Big[[M]^\Xi\Big]_t^\Lambda. \tag{1.14}$$

Uvažujme najprv prvý výraz z pravej strany nerovnosti (1.14). Podľa definície elementárnej kvadratickej variácie je

$$\Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty}([M]_{t\wedge\lambda_k}^\Delta - [M]_{t\wedge\lambda_{k-1}}^\Delta)^2. \tag{1.15}$$

Buď $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \leq t$, k nemu nájdeme $l \in \mathbb{N}$, že $\delta_{l-1} \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k \leq \delta_l$, pretože $\Delta \subseteq \Lambda$. Potom pre jednotlivé sčítance v (1.15) platí

$$\begin{aligned} [M]_{\lambda_k}^\Delta - [M]_{\lambda_{k-1}}^\Delta &= (M_{\lambda_k} - M_{\delta_{l-1}})^2 - (M_{\lambda_{k-1}} - M_{\delta_{l-1}})^2 \\ &= (M_{\lambda_k} - M_{\lambda_{k-1}})(M_{\lambda_k} + M_{\lambda_{k-1}} - 2M_{\delta_{l-1}}). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pretože $\delta_{l-1} \leq \lambda_k \leq t \wedge \delta_l$ je $\lambda_k - \delta_{l-1} \leq {}^t|\Delta|$, potom z vlastnosti modulu spojitosti v poznámke 1.12 je $M_{\lambda_k} + M_{\lambda_{k-1}} - 2M_{t_l} \leq 2mod_M({}^t|\Delta|)$. Pomocou (1.15) a (1.16) dostávame

$$\begin{aligned} \Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda &\leq \max_{k\in\mathbb{N}}|M_{t\wedge\lambda_k} + M_{t\wedge\lambda_{k-1}} - 2M_{t\wedge t_l}|^2 \sum_{k=1}^{\infty}(M_{t\wedge\lambda_k} - M_{t\wedge\lambda_{k-1}})^2 \\ &\leq (2mod_{M;t}({}^t|\Delta|))^2[M]_t^\Lambda = 4mod_{M;t}^2({}^t|\Delta|)[M]_t^\Lambda. \end{aligned}$$

Aplikovaním Hölderovej nerovnosti na strednú hodnotu potom máme

$$E\Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda \leq 4\sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Delta|)\Big)}\sqrt{E([M]_t^\Lambda)^2}.$$

Z tvrdenia 1.10 naviac vieme, že $\sqrt{E([M]_t^\Lambda)^2} \leq \sqrt{6K^4} = K^2\sqrt{6}$, z čoho vyplýva

$$E\Big[[M]^\Delta\Big]_t^\Lambda \leq 4K^2\sqrt{6}\sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Delta|)\Big)}. \tag{1.17}$$

Analogický výsledok platí pre druhý člen v nerovnosti (1.14), kde nahradíme Δ delením Ξ. Dohromady z (1.14) a (1.17) máme

$$ED_t^2 \leq 8K^2\sqrt{6}\sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Delta|)\Big)} + 8K^2\sqrt{6}\sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Xi|)\Big)}. \tag{1.18}$$

Nakoniec z monotónnosti modulu spojitosti je $mod_{M;t}({}^t|\Delta|) \leq mod_{M;t}({}^t|\Delta| \vee^t |\Xi|)$, čo platí i keď na ľavej strane nahradíme Δ delením Ξ.

□

Dôsledok 1.18. *Buď M proces ako v lemme 1.17 a nech $\{\Delta\}_n, \{\Xi\}_n$ sú postupnosti lokálne konečných delení $\mathbb{R}_+$ také, že ${}^t|\Delta_n|$, ${}^t|\Xi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pre každé $t \geq 0$. Potom platí*

$$E|[M]_t^{\Delta_n} - [M]_t^{\Xi_n}|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dôkaz. Pripomeňme, že podľa predpokladu je M spojitý $\mathscr{F}$-martingal obmedzený konštantou K. Podľa lemmy 1.17 je pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $t \geq 0$

$$E|[M]_t^{\Delta_n} - [M]_t^{\Xi_n}|^2 \leq 16\sqrt{6}K^2 \sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4(^t|\Delta_n| \vee \ ^t|\Xi_n|)\Big)}. \qquad (1.19)$$

Vieme, že trajektórie procesu M sú spojité, na uzavretom intervale $[0,t]$ rovnomerne spojité, a teda modul spojitosti konverguje k nule podľa poznámky 1.15. Podľa Lebesgueovej vety o majorante to teda platí i pre pravú stranu nerovnosti (1.19).

□

Veta 1.19 (Doobova maximálna nerovnosť)**.** *Buď $(X_t)_{t\geq 0}$ sprava spojitý nezáporný $\mathscr{F}$ - martingal. Potom platí*

$$E\Big(\sup_{0\leq s\leq t} X_s\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E(X_t^p), \quad p > 1.$$

Dôkaz. Dôkaz Doobovej nerovnosti je možné nájsť napríklad v Karatzas a Shreve (1991, Theorem 3.8).

□

Tvrdenie 1.20 (L_1 limita martingalov je martingal)**.** *Buď $\{M^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť $\mathscr{F}$-martingalov takých, že pre každé $t \geq 0$ platí $M_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} M_t$ v $\mathbb{L}_1$ a M_t je $\mathscr{F}_t$-merateľná vždy keď $t \geq 0$. Potom je aj proces M $\mathscr{F}$-martingal.*

Dôkaz. Potrebujeme ukázať martingalovú vlastnosť procesu M, t.j. $E[M_t|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} M_s$. Vieme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $t \geq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} E|E[M_n(t)|\mathscr{F}_s] - E[M(t)|\mathscr{F}_s| \leq \lim_{n\to\infty} E|M_n(t) - M(t)| = 0,$$

pretože podľa Jensenovej nerovnosti pre podmienenú strednú hodnotu platí

$$|E[M_n(t) - M(t)|\mathscr{F}_s]| \stackrel{\text{si}}{\leq} E[|M_n(t) - M(t)||\mathscr{F}_s],$$

čiže $E[M_n(t)|\mathscr{F}_s] \to E[M(t)|\mathscr{F}_s]$ v $\mathbb{L}_1$.

Nakoniec máme $E[M(t)|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} \lim_{n\to\infty} E[M_n(t)|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{si}}{=} \lim_{n\to\infty} M_n(s) \stackrel{\text{si}}{=} M(s)$. Poznamenajme, že vyššie uvedené limity uvažujeme v pravdepodobnosti.

□

Pripomeňme, že filtrácia $\mathscr{F}$ je úplná, ak sú všetky P-nulové množiny obsiahnuté v σ-algebre $\mathscr{F}_0$, skrátene

$$\{N \in \mathscr{F}; P(N) = 0\} \subset \mathscr{F}_0.$$

Tento predpoklad úplnosti o niečo zoslabíme a ďalej v texte budeme predpokladať, že filtrácia $\mathscr{F}$ spĺňa

$$\{N \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n; P(N) = 0\} \subseteq \mathscr{F}_0. \qquad (1.20)$$

Lemma 1.21. *Na priestore $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, P)$ s filtráciou $\mathscr{F}$ spĺňajúcou (1.20) uvažujme postupnosť spojitých $\mathscr{F}$-adaptovaných procesov $\Big\{X^{(n)}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že platí*

$$\forall t \geq 0 \quad E\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{s\leq t} |X_s^{(k)} - X_s^{(k+1)}| < \infty. \qquad (1.21)$$

Potom existuje spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný proces X, pre ktorý platí

$$\forall t \geq 0 \quad E\sup_{s\leq t} |X_s^{(n)} - X_s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dôkaz. Z predpokladu (1.21) vyplýva, že pre každé $t \geq 0$ je

$$S_t \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(k)} - X_s^{(k+1)}| \stackrel{\text{si}}{<} \infty. \tag{1.22}$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti pre ľubovoľné $t \geq 0$ dostaneme

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \sup_{s \leq t} |X_s^{(k)} - X_s^{(k+p)}| = \sup_{p \in \mathbb{N}} \sup_{s \leq t} \left| \sum_{j=1}^{p} (X_s^{(k+j-1)} - X_s^{(k+j)}) \right| \leq \sum_{l=k}^{\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(l)} - X_s^{(l+1)}|$$

a vďaka (1.22) platí $\sum_{l=k}^{\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(l)} - X_s^{(l+1)}| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ P-s.i.

Označme $A_m = \{\omega \in \Omega; S_m(\omega) < \infty\}$. Podľa (1.22) je pre každé m $P(A_m) = 1$. Odtiaľ ale $P(N_m) = 0$ kde $N_m = \Omega \setminus A_m$ a N_m patrí do $\mathscr{F}_0$ podľa predpokladu na filtráciu (1.20). Označme $A = \cap_{m \in \mathbb{N}} A_m$, a teda na množine A pre každé $t \geq 0$ na intervale $[0,t]$ postupnosť $\{X^{(n)}(\omega)\}$ konverguje rovnomerne.

Definujme $X = \lim_{n \to \infty} X^{(n)} \mathbb{1}_A$, potom je X spojitý náhodný proces a pre každé $t \geq 0$ na intervale $[0,t]$ je $X^{(n)} \rightrightarrows X$ P-s.i.

Podľa trojuholníkovej nerovnosti pre proces X platí

$$\sup_{s \leq t} |X_s^{(n)} - X_s| \stackrel{\text{si}}{\leq} \sum_{l=k}^{\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(l)} - X_s^{(l+1)}|,$$

odkiaľ, spolu s využitím predpokladu (1.21), dostávame

$$E \sup_{s \leq t} |X_s^{(n)} - X_s| \leq \sum_{l=k}^{\infty} E \sup_{s \leq t} |X_s^{(l)} - X_s^{(l+1)}| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Náhodné procesy $X^{(n)}$ sú $\mathscr{F}$-adaptované, teda pre každé $t \geq 0$ $X_t^{(n)} \in \mathbb{L}(\mathscr{F}_t)$. Množina A je definovaná ako zjednotenie množín z $\mathscr{F}_0$, teda $\mathbb{1}_A \in \mathbb{L}(\mathscr{F}_t)$. Pre proces X máme $X = \lim_{n \to \infty} X^{(n)} \mathbb{1}_A \in \mathbb{L}(\mathscr{F}_t)$ a teda X je $\mathscr{F}$-adaptovaný.

□

Pozorovanie 1.22. *Nech M je spojitý $\mathscr{F}$-martingal obmedzený hodnotou $K \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$. Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pre lubovoľné Δ, ∇ lokálne konečné delenia $\mathbb{R}_+$ spĺňajúce ${}^t|\Delta|$, ${}^t|\nabla| < \delta$ platí*

$$E(\sup_{s \leq t} |[M]_s^{\Delta} - [M]_s^{\nabla}|)^2 < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Dôkaz. Z dôsledku 1.9 vieme, že proces $[M]^{\Delta} - [M]^{\nabla}$ je $\mathscr{F}$-martingal. Buď $t \geq 0$, podľa Doobovej nerovnosti 1.19 platí

$$E(\sup_{s \leq t} |[M]_s^{\Delta} - [M]_s^{\nabla}|)^2 \leq 4E\Big([M]_t^{\Delta} - [M]_t^{\nabla}\Big)^2.$$

Pre pravú stranu uvedenej nerovnosti máme podľa lemmy 1.17

$$E\Big([M]_t^{\Delta} - [M]_t^{\nabla}\Big)^2 \leq 16\sqrt{6} K^2 \sqrt{E\Big(mod_{M;t}^4({}^t|\Delta| \vee^t |\nabla|)\Big)}.$$

Pre dané $\varepsilon > 0$ teda stačí zvoliť δ tak, aby $E(mod_{M;t}^4(\delta)) < \frac{\varepsilon^2}{(4 \cdot 16)^2 \cdot 6 \cdot K^4}$.

□

Definícia 1.23 (Kvadratická variácia procesu)**.** Povieme, že spojitý náhodný proces X má *kvadratickú variáciu*, ak existuje spojitý neklesajúci proces $\langle X\rangle$ tak, že $\langle X\rangle_0 = 0$ a pre ľubovoľnú postupnosť lokálne konečných delení $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takú, že pre každé $t \geq 0$ ${}^t|\Delta_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ platí

$$[X]_t^{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \langle X\rangle_t, \tag{1.24}$$

kde uvedenou konvergenciou rozumieme konvergenciu v pravdepodobnosti, t.j.

$$\forall\varepsilon \geq 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|[X]_t^{\Delta_n} - \langle X\rangle_t| \geq \varepsilon) = 0.$$

Veta 1.24 (Doob-Meyerova)**.** *Uvažujme* $(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P)$ *filtrovaný pravdepodobnostný priestor s filtráciou* $\mathscr{F}$ *spĺňajúcou* (1.20)*. Nech* M *je spojitý* $\mathscr{F}$ *- martingal obmedzený hodnotou* $K \in \mathbb{R}$*, teda pre každé* $t \geq 0$ *je* $|M_t| \leq K < \infty$*. Potom* M *má kvadratickú variáciu* $\langle M\rangle$ *takú, že* $\langle M\rangle$ *je* $\mathscr{F}$*-adaptovaná a* $M^2 - \langle M\rangle$ *je spojitý* $\mathscr{F}$*-martingal.*

Dôkaz. 1. Uvažujme delenia $\Delta_n = \{\frac{k}{n}; k \in \mathbb{N}_0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom pre ľubovoľné $t \geq 0$ je ${}^t|\Delta_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$ ak $n \to \infty$. Majme dané $\varepsilon > 0$. Podľa pozorovania 1.22 existuje $\delta > 0$, že pre $i,j \in \mathbb{N}$ spĺňajúce ${}^t|\Delta_i|,{}^t|\Delta_j| < \delta$ platí

$$E\Big(\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_i} - [M]_s^{\Delta_j}|\Big)^2 \leq \varepsilon.$$

Pre $t \geq 0$ nech sú $\varepsilon_k = 4^{-k}$. Podľa pozorovania 1.22 postupne nájdeme $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq n_{k-1}$ také, že platí

$$E\Big(\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_{n_{k+1}}} - [M]_s^{\Delta_{n_k}}|\Big)^2 < 4^{-k}.$$

Aplikovaním Jensenovej nerovnosti je potom

$$E\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_{n_{k+1}}} - [M]_s^{\Delta_{n_k}}| \leq \sqrt{E\Big(\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_{n_{k+1}}} - [M]_s^{\Delta_{n_k}}|\Big)^2} \leq 2^{-k}.$$

Dostali sme teda, že pre každé $t \geq 0$ je

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\sup_{s\leq t} \Big|[M]_s^{\Delta_{n_{k+1}}} - [M]_s^{\Delta_{n_k}}\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Podľa lemmy 1.21 existuje spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný proces $\langle M\rangle$ taký, že pre každé $t \geq 0$

$$E\sup_{s\leq t} |\langle M\rangle_s - [M]_s^{\Delta_{n_k}}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{1.25}$$

Z trojuholníkovej nerovnosti zároveň pre každé $t \geq 0$ platí

$$E\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_n} - \langle M\rangle_s| \leq E\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_n} - [M]_s^{\Delta_{n_k}}| + E\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_{n_k}} - \langle M\rangle_s|.$$

Podľa pozorovania 1.22 (konvergencia v $\mathbb{L}_2$ implikuje konvergenciu v $\mathbb{L}_1$) sa prvý člen na pravej strane pre $n, k \to \infty$ limitne blíži k nule. Druhý člen konverguje k nule z už dokázaného vzťahu (1.25). Pre každé $t \geq 0$ celkovo dostávame

$$E\sup_{s\leq t} |[M]_s^{\Delta_n} - \langle M\rangle_s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.26}$$

Pretože konvergencia v $\mathbb{L}_1$ implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti, pre danú postupnosť delení $\{\Delta_n\}$ sme našli spojitý proces $\langle M \rangle$ taký, že $[M]^{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \langle M \rangle$.

2. Uvažujme teraz ďalšiu postupnosť lokálne konečných delení ∇_n, ktorá pre ľubovoľné $t \geq 0$ spĺňa ${}^t|\nabla_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ a označme $D_n = \Delta_n \cup \nabla_n$. Potom, podľa pozorovania 1.22 platí

$$E\Big(\sup_{s\leq t} |[M]_s^{D_n} - [M]_s^{\Delta_n}|^2\Big) \to 0$$

a vzhľadom k (1.26) máme $[M]^{D_n} \xrightarrow{P} \langle M \rangle$. Proces $\langle M \rangle$ je teda kvadratická variácia procesu M.

3. Ďalej ukážeme, že proces $M^2 - \langle M \rangle$ je $\mathscr{F}$-martingal. Z dôsledku 1.9 vieme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $M^2 - [M]^{\Delta_n}$ $\mathscr{F}$-martingal. Z už dokázaného je následne

$$\lim_{n\to\infty} E|(M_s^2 - [M]_s^{\Delta_n}) - (M_s^2 - \langle M \rangle_s)| = \lim_{n\to\infty} E|\langle M \rangle_s - [M]_s^{\Delta_n}| = 0.$$

Podľa tvrdenia 1.20 je limita $\mathscr{F}$-martingalov v $\mathbb{L}_1$ $\mathscr{F}$-martingal.

$\square$

2. Markovská vlastnosť Wienerovho procesu a dôsledky

Značenie. Pre σ-algebru $\mathscr{A}$ budeme označovať $\mathbb{L}(\mathscr{A}) = \{X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))\}$ množinu $\mathscr{A}$-merateľných reálnych náhodných veličín. Pre reálnu náhodnú veličinu Y budeme značiť $\mathbb{L}(Y) = \mathbb{L}(\sigma(Y))$.

Definícia 2.1 (Markovský proces)**.** Buď $\Big(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P\Big)$ stochastická báza a nech X je $\mathbb{R}^m$ - hodnotový $\mathscr{F}$ - adaptovaný proces, $m \in \mathbb{N}$. Nech pre všetky $0 \leq s \leq t < \infty$ a pre každú $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ borelovsky merateľnú funkciu takú, že $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ platí

$$E[h(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} E[h(X_t)|X_s]. \tag{2.1}$$

Potom hovoríme, že proces X je $\mathscr{F}$*- markovský.*
Pre proces X označme $\mathscr{F}^X$ jeho kanonickú filtráciu. Budeme hovoriť, že proces X je *markovský* ak je $\mathscr{F}^X$-markovský.

Poznámka 2.2. *Stručne pripomeňme, že podľa Lachout (2004, Věta 7.17. a Definice 7.18.), pre reálnu integrovateľnú náhodnú veličinu $Z \in \mathbb{L}(Y)$ existuje funkcia g, merateľná voči stavovej σ-algebre veličiny Y taká, že $Z = g(Y)$, ktorá je určená P_Y-jednoznačne a $E[Z|Y = y] = g(y)$.*

V kontexte definície markovského procesu 2.1 je potom podmienka (2.1) ekvivalentná tomu, že pre $\mathscr{F}$- markovský proces X a merateľnú funkciu h, $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ existuje $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ borelovsky merateľná funkcia, pre ktorú platí

$$E[h(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} g(X_s) \tag{2.2}$$

a pre $x \in \mathbb{R}^m$ je

$$g(x) = E[h(X_t)|X_s = x]. \tag{2.3}$$

Ak totiž platí (2.2), dostávame (2.1), pretože

$$E[h(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} g(X_s) \overset{\text{si}}{=} E[g(X_s)|X_s] \overset{\text{si}}{=} E[E[h(X_t)|\mathscr{F}_s]|X_s] \overset{\text{si}}{=} E[h(X_t)|X_s].$$

Aby sme rozhodli, či je daný proces markovský, stačí miesto práce priamo s definíciou overiť jednoduchšiu podmienku uvedenú v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 2.3. *Uvažujme proces X ako v definícii 2.1 a predpokladajme, že pre každé $0 \leq s \leq t$ a ľubovoľnú $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ je*

$$P(X_t \in A|\mathscr{F}_s) \overset{si}{=} P(X_t \in A|X_s). \tag{2.4}$$

Potom je X $\mathscr{F}$-markovský proces.

Dôkaz. Potrebujeme overiť, že pre ľubovoľnú borelovsky merateľnú funkciu h, pre ktorú je $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ platí (2.1).

1. Uvažujme množinu $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ a funkciu $h = \mathbb{1}_A$. Z predpokladu (2.4) dostávame

$$E[h(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} E[\mathbb{1}_A(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} P(X_t \in A|\mathscr{F}_s) \overset{\text{si}}{=} P(X_t \in A|X_s) \overset{\text{si}}{=} E[h(X_t)|X_s].$$

2. Ďalej pre $k \in \mathbb{N}$ ľubovoľné, $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ a $\alpha_i \in \mathbb{R}_+, i = 1,...,k$ uvažujme jednoduchú funkciu $h = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, potom z vlastností podmienenej strednej hodnoty

$$E[h(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E[\mathbb{1}_{A_i}(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E[\mathbb{1}_{A_i}(X_t)|X_s] \overset{\text{si}}{=} E[h(X_t)|X_s].$$

3. Pre $h \geq 0$ borelovsky merateľnú funkciu, pre ktorú $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ uvažujme postupnosť jednoduchých funkcií

$$h_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^n} \leq h < \frac{k}{2^n}]} + n\mathbb{1}_{[h \geq n]}.$$

Potom $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} h_n = h$. Pre každé n teda z predošlého kroku 2 máme $E[h_n(X_t)|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} E[h_n(X_t)|X_s]$. Podľa vety o monotónnej konvergencii pre podmienenú strednú hodnotu dostávame pre h vlastnosť (2.1).

4. Nakoniec pre h borelovsky merateľnú, pre ktorú $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ uvažujeme jej rozklad na kladnú a zápornú časť $h = h^+ + h^-$, kde $h^+ \geq 0, h^- \geq 0$. Z kroku 3 dostávame platnosť (2.1) pre h^+ a h^-, a teda markovská vlastnosť platí i pre ich súčet h.

Ukázali sme, že za predpokladu (2.4) pre merateľnú funkciu h takú, že $h(X_t) \in \mathbb{L}_1$ platí (2.1) a proces je $\mathscr{F}$- markovský.

□

Uvedieme si definíciu Wienerovho procesu, s ktorou budeme pracovať ak nebude uvedené inak.

Definícia 2.4 (Wienerov proces)**.** Proces $W = (W_t)_{t\geq 0}$ sa nazýva *Wienerov*, ak

1. $W_0 = 0$ a W má spojité trajektórie,
2. pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sú prírastky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny a pre ľubovoľné $0 \leq s < t$ je $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$.

Podmienku 2. môžme ekvivalentne nahradiť ako

2'. W je centrovaný gaussovský s autokovarianciou $cov(W_s,W_t) = s \wedge t,\ s,t \geq 0$.

Poznámka 2.5. *Dôkaz ekvivalencie podmienok 2 a 2' z definície je možné nájsť v Dupačová a kol. (2002, Theorem 1.2.1., strana 238).*

Pozorovanie 2.6. *Uvažujeme jednorozmerný Wienerov proces W, potom W je markovský.*

Dôkaz. Podľa tvrdenia 2.3 stačí overiť, že pre ľubovoľnú $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ je $P(W_t \in A|\mathscr{F}_s^W) \overset{\text{si}}{=} P(W_t \in A|W_s)$. Dôkaz prebieha podľa Karatzas a Shreve (1991, Problem 2.5.9). Uvažujme množinu $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a ukážme

$$P\Big((W_t - W_s, W_s) \in D|\mathscr{F}_s^W\Big) \overset{\text{si}}{=} P\Big((W_t - W_s, W_s) \in D|W_s\Big). \qquad (2.5)$$

Vieme, že náhodná veličina $W_t - W_s$ a σ-algebra $\mathscr{F}_s^W$ sú nezávislé, zároveň zrejme $W_s \in \mathbb{L}(\mathscr{F}_s^W)$. Preto pre voľbu $D = B \times C$, kde $B, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dostávame

$$\begin{aligned} P((W_t - W_s, W_s) \in B \times C|\mathscr{F}_s^W) &\overset{\text{si}}{=} E[\mathbb{1}_B(W_t - W_s)\mathbb{1}_C(W_s)|\mathscr{F}_s^W] \\ &\overset{\text{si}}{=} \mathbb{1}_C(W_s)E[\mathbb{1}_B(W_t - W_s)|\mathscr{F}_s^W] \overset{\text{si}}{=} \mathbb{1}_C(W_s)P(W_t - W_s \in B) \\ &\overset{\text{si}}{=} \mathbb{1}_C(W_s)E[\mathbb{1}_B(W_t - W_s)|W_s] \overset{\text{si}}{=} P((W_t - W_s, W_s) \in B \times C|W_s), \end{aligned}$$

takže (2.5) platí pre tento špeciálny prípad. Pretože tieto množiny D, pre ktoré platí (2.5) tvoria Dynkinov systém (obsahujúci všetky merateľné obdĺžniky), podľa Dynkinovho lemmatu (napríklad Lachout (2004, Veta A.4.)) (2.5) platí pre každú $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Teda špeciálne, pre množiny $D = \{(x,y) : x + y \in A\}$ dostávame platnosť tvrdenia 2.3 pre Wienerov proces a Wienerov proces je markovský. $\square$

Poznámka 2.7. *Obdobné tvrdenie platí aj pre viacrozmerný prípad.*

Wienerov proces W je markovský, teda pre ľubovoľnú h borelovskú, pre ktorú je $h(W_t) \in \mathbb{L}_1$, existuje borelovsky merateľná funkcia g, že $E[h(W_t)|\mathscr{F}_s^W] = g(W_s)$. Ukážme si tvar funkcie g pre $h = \mathbb{1}_{(-\infty,c)}$, t.j. podľa poznámky 2.2 a vety 7.20, Lachout (2004)

$$g(w) = P\Big(W_t < c|W_s = w\Big) = P\Big(W_t - W_s + W_s < c|W_s = w\Big) = P(W_t - W_s < c - w)$$

a ak označíme Φ distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia, vieme (z vlastností Wienerovho procesu), že

$$g(w) = \Phi\Big(\frac{c-w}{\sqrt{t-s}}\Big).$$

2.1 Silná markovská vlastnosť a princíp zrkadlenia Wienerovho procesu

V nasledujúcej vete a niektorých jej dôsledkoch budeme využívať σ-algebru udalostí do markovského času. Definícia a niektoré vlastnosti tohto pojmu sú zhrnuté v sekcii 2.2 *Apendix* na konci tejto kapitoly.

Veta 2.8 (Silná markovská vlastnosť Wienerovho procesu)**.** *Buď W $\mathscr{F}$-Wienerov proces, $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ nech je $\mathscr{F}$ - markovský čas a označme $W^{[\tau]}$ proces definovaný ako*

$$W_t^{[\tau]} \stackrel{\text{def}}{=} (W_{t+\tau} - W_\tau)\mathbb{1}_{[\tau<\infty]}, \; t \geq 0.$$

Potom platí

$$P_{W^{[\tau]}|\mathscr{F}_\tau} \stackrel{si}{=} P_W \quad na \quad [\tau < \infty]. \tag{2.6}$$

Dôkaz. Podmienka (2.6) hovorí, že pre ľubovoľnú množinu $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,\infty)}$ je

$$P(W^{[\tau]} \in A|\mathscr{F}_\tau)\mathbb{1}_{[\tau<\infty]} \stackrel{\text{si}}{=} P(W \in A)\mathbb{1}_{[\tau<\infty]}.$$

Pretože veličina $\mathbb{1}_{[\tau<\infty]}$ je $\mathscr{F}_\tau$-merateľná, môžme ju dať do vnútra podmienky na ľavej strane a podľa definície podmienenej pravdepodobnosti teda potrebujeme ukázať, že

$$\forall F \in \mathscr{F}_\tau, \, P(F) > 0, \, F \subseteq [\tau < \infty] \Rightarrow P_{W^{[\tau]}|F} = P_W. \tag{2.7}$$

1. Najprv uvažujme $\tau : \Omega \to T$, kde $T \subseteq [0,\infty]$ je spočetná množina a buď F ako v (2.7) naľavo. Množina T je spočetná, našu množinu F teda môžme zapísať ako

$$F = \bigcup_{t\in T} F_t, \quad \text{kde} \quad F_t = F \cap [\tau = t] \in \mathscr{F}_t.$$

W je $\mathscr{F}$-Wienerov proces, vďaka nezávislosti $W^{[t]}$ na $\mathscr{F}_t$ je $P_{W^{[t]}|F_t} = P_W$. Podľa definície je $F_t \subseteq [\tau = t]$, takže $P_{W^{[\tau]}|F_t} = P_{W^{[t]}|F_t} = P_W$. Použitím vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame pre množinu F

$$P_{W^{[\tau]}|F} = \sum_{t\in T} P_{W^{[\tau]}|F_t} P(F_t|F) = \sum_{t\in T} P_{W^{[t]}|F_t} P(F_t|F) = P_W. \tag{2.8}$$

2. Uvažujme teraz $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Definujme náhodné časy $\tau_n : \Omega \to \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$ predpisom

$$\tau_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lceil \tau.2^n \rceil}{2^n} \geq \tau, \ \ \tau_n \searrow \tau \text{ pre } n \to \infty. \tag{2.9}$$

Pre $n \in \mathbb{N}$ sú τ_n $\mathscr{F}$ - markovské časy pretože pre každé $t \geq 0$ platí

$$[\tau_n \leq t] = \left[\frac{\lceil \tau.2^n \rceil}{2^n} \leq \frac{\lfloor t.2^n \rfloor}{2^n}\right] = \left[\tau \leq \frac{\lfloor t.2^n \rfloor}{2^n}\right] \in \mathscr{F}_{\frac{\lfloor t.2^n \rfloor}{2^n}} \subseteq \mathscr{F}_t.$$

Pre každé n je $[\tau < \infty] = [\tau_n < \infty]$, zvoľme F ako v (2.7), potom je $F \in \mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau_n}$ a z prvej časti dôkazu už pre τ_n vieme, že $P_{W^{[\tau_n]}|F} = P_W$. Zvoľme $t \in \mathbb{R}_+^m$ a $u \in \mathbb{R}^m$, platí teda

$$E\Big[\exp\{i(u_1 W_{t_1}^{[\tau_n]} + \ldots + u_1 W_{t_m}^{[\tau_n]}\}|F\Big] = E\Big[\exp\{i(u_1 W_{t_1} + \ldots + u_m W_{t_m})\}\Big]. \tag{2.10}$$

Wienerov proces je spojitý, časy τ_n na množine F konvergujú k τ, teda z Lebesgueovej vety o majorante platí (2.10) i v prípade, keď tam miesto τ_n píšeme τ. Pretože pre procesy je ich rozdelenie určené systémom konečne rozmerných rozdelení, máme $P_{W^{[\tau]}|F} = P_W$, kde ako množinu F sme uvažovali $\mathscr{F}_\tau \ni F \subseteq [\tau < \infty]$. $\square$

Značenie. Na priestore spojitých funkcií $C(\mathbb{R}_+)$ budeme označovať cylindrickú σ-algebru (generovanú projekciami) ako $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$.

Ak k predpokladom vety 2.8 o silnej markovskej vlastnosti Wienerovho procesu pridáme podmienku s.i. konečnosti markovského času τ, dostávame nasledujúce pozorovanie.

Pozorovanie 2.9. *Nech platia predpoklady vety 2.8 a nech naviac $\tau \stackrel{si}{<} \infty$, potom je $W^{[\tau]}$ nezávislý s $\mathscr{F}_\tau$ a $W^{[\tau]}$ je $\mathscr{F}^{[\tau]}$ - Wienerov proces.*

Dôkaz. Buď $F \in \mathscr{F}_\tau$ a $F' = F \cap [\tau < \infty] \in \mathscr{F}_\tau$, $P(F \triangle F') = 0$. Potom pre ľubovoľnú množinu $C \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$ je

$$P(W^{[\tau]} \in C; F) = P(W^{[\tau]} \in C; F') = P(W^{[\tau]} \in C|F')P(F') = P(W \in C)P(F).$$

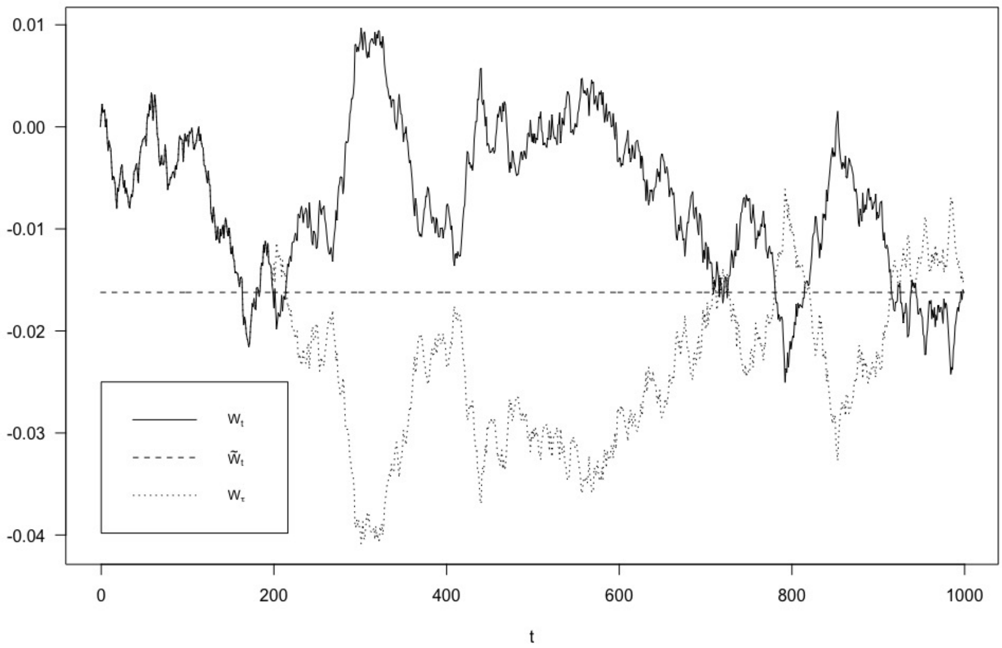
$\square$

Priamym dôsledkom silnej markovskej vlastnosti je princíp zrkadlenia Wienerovho procesu.

Dôsledok 2.10 (Princíp zrkladlenia Wienerovho procesu)**.** *Buď W $\mathscr{F}$-Wienerov proces, $\tau \stackrel{si}{<} \infty$ nech je $\mathscr{F}$-markovský čas a definujme proces $\tilde{W}$ predpisom*

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= W_t && \text{pre } t \leq \tau, \\ &= 2W_\tau - W_t && \text{pre } t > \tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Potom je $\tilde{W}$ $\mathscr{F}$-Wienerov proces.



Obr. 2.1: Ilustrácia princípu zrkadlenia Wienerovho procesu.

Dôkaz. Označme si $W_t^{(\tau)} = W_{t\wedge\tau}$ a $W_t^{[\tau]} = (W_{t+\tau} - W_\tau)\mathbb{1}_{[\tau<\infty]}$. Potom môžme písať

$$W_t = W_t^{(\tau)} + W_{(t-\tau)^+}^{[\tau]} = f_t(W^{(\tau)},W^{[\tau]},\tau),$$
$$\tilde{W}_t = W_t^{(\tau)} - W_{(t-\tau)^+}^{[\tau]} = f_t(W^{(\tau)}, - W^{[\tau]},\tau),$$

kde $f_t : C(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_t(x,y;s) = x_t + y_{(t-s)^+}$. Zobrazenie $f = (f_t)_{t\geq 0}$, je merateľné v zmysle $f \in \mathbb{L}(\mathscr{C}(\mathbb{R}_+)^{\otimes 2} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\mathscr{C}(\mathbb{R}_+))$, čo ukážeme v závere dôkazu. Ďalej vieme, že $\mathscr{F}_\tau \supseteq \sigma(W^{(\tau)},\tau)$ a podľa pozorovania 2.9 je proces $W^{[\tau]}$ nezávislý s $\mathscr{F}_\tau$. Pre $B \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+)$ celkovo dostávame, že $\tilde{W}$ je Wienerov proces pretože

$$P(\tilde{W} \in B) = P\Big(f(W^{(\tau)}, - W^{[\tau]},\tau) \in B\Big) = P\Big((W^{(\tau)}, - W^{[\tau]},\tau) \in f^{-1}B\Big) =$$
$$P_{W^{(\tau)},-W^{[\tau]},\tau}(f^{-1}B) = (P_{W^{[\tau]}} \otimes P_{W^{(\tau)},\tau})(f^{-1}B) = P_{W^{(\tau)},W^{[\tau]},\tau}(f^{-1}B) = P(W \in B).$$

Na záver ešte overíme merateľnost zobrazenia f. K tomu stačí ukázať, že f_t je merateľné pre každé $t \geq 0$.

Uvažujme teda nejaké $t \in [0,\infty)$ ľubovoľné, pevné. Položme $g_t(x) := x_t$ a $h_t(y,s) := y_{(t-s)^+}$, potom merateľnosť $f_t = x_t + y_{(t-s)^+} = g_t(x) + h_t(y,s)$ dostaneme akonáhle ukážeme merateľosť g_t a h_t.

Pre $g_t(x) = x_t$ je merateľnosť zrejmá priamo z definície cylidrickej σ-algebry. Ďalej si pre $n, k \in \mathbb{N}$ označme $h_t^{(n,k)}$ ako

$$h_t^{(n,k)} : (y,s) \mapsto g_{k2^{-n}}(y) \cdot \mathbb{1}_{[k<2^n(t-s)\leq k+1]}.$$

Pretože $\mathbb{1}_{[k<2^n(t-s)\leq k+1]} \in \mathbb{L}(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$, ($t$ uvažujeme pevné) máme merateľnosť $h_t^{(n,k)}$. Nakoniec teda pre $n \to \infty$ bude teda aj limita merateľných funkcií $h_t^{(n,k)}$ merateľná, kde

$$\lim_{n\to\infty} h_t^{(n,k)}(y,s) = y_{(t-s)^+}. \tag{2.12}$$

Celkovo teda pre každé $t \geq 0$ $f_t \in \mathbb{L}(\mathscr{C}(\mathbb{R}_+)^{\otimes 2} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$.

$\square$

Zo silnej markovskej vlastnosti a práve ukázaného princípu zrkadlenia Wienerovho procesu vyplývajú niektoré užitočné vlastnosti Wienerovho procesu, ktoré si uvedieme vo zvyšku tejto kapitoly. Jednou z nich je nasledujúce pozorovanie o rozdelení suprema Wienerovho procesu.

Pozorovanie 2.11. *Buď W Wienerov proces a definujme W^* ako*

$$W_t^* = \max_{s \leq t} W_s, \quad t \geq 0. \tag{2.13}$$

Zvoľme $c > 0$ a ďalej nech τ_c označuje čas prvého vstupu Wienerovho procesu W do množiny $[c,\infty)$. Potom platí

$$P(W_t^* \geq c) = P(\tau_c \leq t) = 2P(W_t \geq c) = P(|W_t| \geq c).$$

Inými slovami

$$W_t^* \sim |W_t|, \quad t \geq 0.$$

Dôkaz. Pre rozdelenie času τ_c môžme písať pre každé $t \geq 0$

$$P(\tau_c \leq t) = P(\tau_c \leq t, W_t \geq c) + P(\tau_c \leq t, W_t < c). \tag{2.14}$$

Pre prvý člen pravej strany uvedenej rovnosti platí $P(\tau_c \leq t, W_t \geq c) = P(W_t \geq c)$. Ďalej uvažujme proces $\tilde{W}$ definovaný v (2.11). Potom pre druhý člen rovnosti (2.14) si uvedomíme, že $[\tau_c \leq t, W_t < c] = [\tilde{W}_t > c]$ a pretože $\tilde{W}$, má rovnaké rozdelenie ako proces W, tak celkovo dostávame

$$P(W_t^* \geq c) = P(\tau_c \leq t) = P(W_t \geq c) + P(\tilde{W}_t > c) = 2P(W_t > c) = P(|W_t| > c).$$

$\square$

Ďalším z dôsledkov silnej markovskej vlastnosti 2.8 je, že Wienerov proces nadobúda ľubovoľnú reálnu hodnotu $c \in \mathbb{R}$ v P-s.i. konečnom čase.

Veta 2.12 (Rozdelenie τ_c)**.** *Nech τ_c, $c > 0$, je čas prvého vstupu Wienerovho procesu do $[c,\infty)$, t.j. $\tau_c = \inf\{t \geq 0; W_t = c\}$. Potom $P(\tau_c < \infty) = 1$ a rozdelenie veličiny τ_c je dané hustotou f_{τ_c}, kde pre $t \geq 0$*

$$f_{\tau_c}(t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-\frac{c^2}{2t}\}.$$

Dôkaz. Pretože je $[\tau_c \leq t] = [W_t^* \geq c]$, podľa pozorovania 2.11 máme

$$P(W_t^* \geq c) = P(|W_t| \geq c) = 2P(W_t \geq c) = 2\Big(1 - \Phi(\tfrac{c}{\sqrt{t}})\Big), \tag{2.15}$$

kde Φ označuje distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia. Odtiaľ

$$P(\tau_c < \infty) = \lim_{t\to\infty} P(\tau_c \leq t) = \lim_{t\to\infty} 2\Big(1 - \Phi(\tfrac{c}{\sqrt{t}})\Big) = 1.$$

Distribučná funkcia je absolútne spojitá a tak hustotu f_{τ_c} dostaneme jej deriváciou, ktorá je pre t kladné

$$f_{\tau_c}(t) = \tfrac{d}{dt}P(\tau_c \leq t) = \tfrac{d}{dt}2\Big(1 - \Phi(\tfrac{c}{\sqrt{t}})\Big) = \tfrac{c}{\sqrt{t}^3}\varphi(\tfrac{c}{\sqrt{t}}) = \tfrac{c}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\tfrac{c^2}{2t}\},$$

kde φ značí hustotu normovaného normálneho rozdelenia.

$\square$

Pomocou princípu zrkadlenia odvodíme ešte združené rozdelenie veličín W_t a W_t^*. Uvažujme $t > 0$, $a \leq b$, $b \geq 0$ a bude nás zaujímať $P(W_t \leq a, W_t^* \geq b)$. Označme si $\tau_b = \inf\{t \geq 0; W_t = b\}$. Uvedomíme si, že $[\tau_b \leq t] = [W_t^* \geq b]$ a že pre uvažované a,b platí $2b - a > b$. Z princípu zrkadlenia Wienerovho procesu potom dostávame

$$P(W_t \leq a, W_t^* \geq b) = P(W_t \geq 2b - a, \tau_b \leq t) = P(W_t \geq 2b - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b-a}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx.$$

Pre $b > \max\{a,0\}$ počítajme

$$-\frac{\partial^2 P(W_t \leq a, W_t^* \geq b)}{\partial a \partial b} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}}{\partial b} = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}.$$

Hľadaný kandidát na hustotu bude

$$f_{W_t,W_t^*}(a,b) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} \mathbb{1}_{[b > \max\{a,0\}]}. \tag{2.16}$$

Spätnou integráciou tejto funkcie je možné overiť, že sa jedná o hustotu.

2.2 Apendix

Zadefinujeme si, čo rozumieme pod pojmom σ-algebra udalostí do markovského času. Viac k vlastnostiam tohoto pojmu je možné nájsť napríklad v Dupačová a kol. (2002, Section 1.3, strana 244).

Definícia 2.13 (σ-algebra udalostí do markovského času)**.** Buď τ $\mathscr{F}$-markovský čas. Potom *σ-algebrou do markovského času* τ budeme nazývať

$$\mathscr{F}_\tau = \{F \in \mathscr{F}_\infty,\ F \cap [\tau \leq t] \in \mathscr{F}_t\ \forall t \geq 0\}. \tag{2.17}$$

Uvedieme si ešte niektoré tvrdenia vzhľadom k definovanému pojmu σ-algebry udalostí do markovského času, ktoré je možné nájsť napríklad v Dupačová a kol. (2002, časť 1.3.1).

Tvrdenie 2.14. *Nech τ je $\mathscr{F}$-markovský čas, potom τ je $\mathscr{F}$-merateľná náhodná veličina.*

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia je uvedený v Dupačová a kol. (2002, Lemma 1.3.1 a), strana 245).

$\square$

Tvrdenie 2.15. *Nech τ je $\mathscr{F}$-markovský čas a X $\mathscr{F}$-progresívny proces. Potom X_τ je $\mathscr{F}_\tau$-merateľná náhodná veličina definovaná na $[\tau < \infty]$, t.j.$[X_\tau \in B] \cap [\tau < \infty] \in \mathscr{F}_\tau$ pre každú $B \in \mathscr{B}$.*

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia je uvedený v Dupačová a kol. (2002, Lemma 1.3.9 c), strana 248).

$\square$

3. Lokalizácia

V tejto kapitole sa budeme venovať lokalizácii spojitých martingalov a ukážeme Doob-Meyerovu vetu pre rozklad lokálneho martingalu. Lokálne martingaly potom využijeme na konštrukciu stochastického integrálu, konkrétne znalosti integrácie podľa L_2-martingalov rozšírime a uvedieme stochastický integrál podľa lokálnych martingalov a spojitých semimartingalov.

3.1 Lokálny martingal

V úvode ukážeme vetu o zastavení (obvykle uvádzanú pod názvom „Stopping theorem“), ktorá hovorí, že ak martingal zastavíme v markovskom čase, zastavený proces bude tiež martingalom.

Veta 3.1 (Stopping theorem)**.** *Buď M sprava spojitý $\mathscr{F}$-martingal a τ nech je $\mathscr{F}$-markovský čas. Potom zastavený proces $M^{(\tau)} = (M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ je $\mathscr{F}$-martingal.*

Vetu budeme dokazovať bez nutnosti použitia pojmu σ-algebry do markovského času. Platnosť vety si najprv ukážeme pre prípad diskrétnych martingalov.

Tvrdenie 3.2. *Nech I je lokálne konečná podmnožina $[0,\infty)$ a proces $(M_t)_{t\in I}$ je $\mathscr{F}$-martingal, kde $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in I}$. Buď τ $\mathscr{F}$-markovský čas. Potom je zastavený proces $M_{t\wedge\tau}$ $\mathscr{F}$-martingal.*

Dôkaz. Pre každé $t \in I$ je $\tau \wedge t \leq t$, $\tau \wedge t$ je $\mathscr{F}$-markovský, potom pre ľubovoľné $s \in I$, $s \leq t$ máme $[\tau \wedge t = s] \in \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$. Pre proces M potom platí

$$M_{\tau\wedge t} = \sum_{s\in I, s\leq t} M_s \mathbb{1}_{[\tau\wedge t = s]} \in \mathbb{L}_1(\mathscr{F}_t),\ t \in I.$$

Pretože τ je $\mathscr{F}$-markovský, máme pre $s \in I$ $[\tau > s] \in \mathscr{F}_s$. Celkovo pre $t \in I$ také, že $s < t$, $(s,t) \cap I = \emptyset$ dostávame

$$E[M_{\tau\wedge t} - M_{\tau\wedge s}|\mathscr{F}_s] = \mathbb{1}_{[\tau>s]} E[M_t - M_s|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} 0.$$

$\square$

Dôkaz. (Veta 3.1) Uvažujme $s,t \in [0,\infty)$ a postupnosť indexových množín I_n, kde pre $n \in \mathbb{N}$ položíme $I_n \overset{\text{def}}{=} \{\frac{k}{2^n}; k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s,t\}$. Označme $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, potom I je hustá v $\mathbb{R}_+$. Proces $(M_p)_{p\in I_n}$ je diskrétnym $\mathscr{F}$-martingalom pre ľubovoľné n. Definujme si pre $n \in \mathbb{N}$ náhodné časy τ_n ako

$$\begin{aligned} \tau_n := {} & \tfrac{\lceil \tau 2^n \rceil}{2^n}, && \tau < \infty, \\ = {} & \infty, && \tau = \infty. \end{aligned}$$

Pre takto definované časy už vieme z (2.9), že $\tau_n \searrow \tau$ a τ_n sú $\mathscr{F}$-markovské časy. Podľa tvrdenia 3.2 je tiež zastavený proces $(M_{p\wedge\tau_n})_{p\in I_n}$ $\mathscr{F}_p$-martingal. Naviac, pretože proces M je spojitý, $M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} M_{t\wedge\tau} \in \mathbb{L}_1$. Potom ale tiež $E[M_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_s] \xrightarrow{\mathbb{L}_1} E[M_{t\wedge\tau}|\mathscr{F}_s]$ a keďže už vieme, že $E[M_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} M_{s\wedge\tau_n}$, celkovo dostávame $E[M_{\tau\wedge t}|\mathscr{F}_s] \overset{\text{si}}{=} M_{\tau\wedge s}$. Nakoniec $M_{\tau\wedge t}$ je limitou $M_{\tau_n\wedge t}$ a podľa dôkazu tvrdenia 3.2 je $M_{\tau_n\wedge t} \in \mathscr{F}_t$, teda proces $M_{\tau\wedge t}$ je $\mathscr{F}$-adaptovaný.

$\square$

Definícia 3.3 (Lokálny martingal)**.** Nech X je spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný náhodný proces. Ak existuje neklesajúca postupnosť $\mathscr{F}$-markovských časov $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré $P[\lim_{n\to\infty}\tau_n=\infty]=1$ tak, že pre každé $n\geq 1$ je proces $X^{(\tau_n)}-X_0$ $\mathscr{F}$-martingal, potom hovoríme, že proces X je *lokálny $\mathscr{F}$-martingal.*

Poznámka 3.4.

1. *Postupnosť τ_n markovských časov z definície lokálneho martingalu budeme nazývať **lokalizujúca postupnosť**.*

2. *Každý martingal je lokálny martingal, opačne to neplatí. Ukážeme príklad lokálneho martingalu, ktorý nie je martingal. Takýto proces nazveme **striktný** lokálny martingal.*

Pozorovanie 3.5. *Pre lokálne $\mathscr{F}$-martingaly M,N je i proces $M+N$ lokálny $\mathscr{F}$-martingal.*

Dôkaz. Ku každému z lokálnych martingalov M,N existuje lokalizújuca postupnosť, τ_n,τ_n^*. Položme $\nu_n=\tau_n\wedge\tau_n^*$, potom ν_n je $\mathscr{F}$-markovský čas a pre $0\leq s\leq t$, $n\in\mathbb{N}$ máme pomocou vety 3.1

$$E\Big[(M+N)_t^{(\nu_n)}|\mathscr{F}_s\Big]=E\Big[M_t^{(\nu_n)}+N_t^{(\nu_n)}|\mathscr{F}_s\Big]\overset{\text{si}}{=}(M+N)_s^{(\nu_n)}.$$

□

Ukážeme si ešte príklad lokálneho martingalu, ktorý nie je martingalom.

Príklad 3.6 (Striktný lokálny martingal)**.**

Nech W je $\mathscr{F}$-Wienerov proces definovaný v 2.5 a τ_1^W nech je čas prvého vstupu procesu W do množiny $[1,\infty)$, t.j. $\tau_1^W=\inf\{t\geq 0; W_t=1\}$. Vieme, že τ_1^W je $\mathscr{F}$- markovský čas. Podľa vety 2.12 je $\tau_1^W\overset{\text{si}}{<}\infty$. My budeme bez ujmy na všeobecnosti uvažovať, že čas τ_1^W je konečný iste. V opačnom prípade, kde $\tau_1^W(\omega)=\infty$ by sme na množine miery 0 položili pre tieto scenáre $\tilde{W}_t(\omega)=t$, teda $\tilde{W}_t=W_t\mathbb{1}_{[\tau_1^W<\infty]}+t\mathbb{1}_{[\tau_1^W=\infty]}$. Potom pre tento proces $\tilde{W}$ je $\tau_1^{\tilde{W}}<\infty$ iste.

W je spojitý $\mathscr{F}$-martingal a teda, podľa vety 3.1, je zastavený proces $W^{(\tau_1^W)}$ $\mathscr{F}$-martingalom, naviac $W_0^{(\tau_1^W)}=0$ a $\lim_{t\to\infty}W_t^{(\tau_1^W)}=1$.
Uvažujme ďalej spojitú rastúcu funkciu $f:[0,1)\to[0,\infty)$

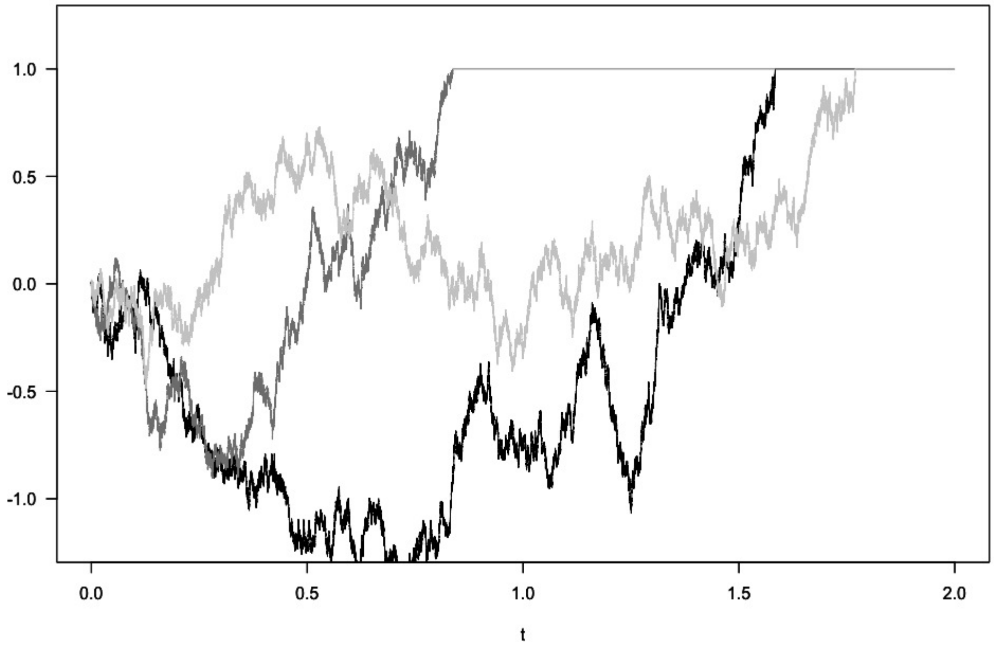
$$f(x)=\frac{x}{1-x},\quad x\in[0,1)$$

a označme

$$L_s=\begin{cases}W_{f(s)}^{(\tau_1^W)}=W_{\frac{s}{1-s}}^{(\tau_1^W)} & \text{pre}\quad s\in[0,1),\\ 1 & \text{pre}\quad s\in[1,\infty).\end{cases}\tag{3.1}$$

Potom je proces $(L_s)_{s\in[0,1)}$ martingal vzhľadom k filtrácii $(\mathscr{G}_s)_{s\in[0,1)}$, kde

$$\mathscr{G}_s=\begin{cases}\mathscr{F}_{\frac{s}{1-s}} & s\in[0,1),\\ \mathscr{F}_\infty & s\in[1,\infty)\end{cases}$$



Obr. 3.1: Wienerov proces zastavený v čase τ_1^W.

a platí

$$\lim_{s\to 1_-} L_s = \lim_{t\to\infty} W_{t\wedge\tau_1^W} = 1. \tag{3.2}$$

Proces L je spojitý, adaptovaný na $\mathscr{G}$

$$E[L_r|\mathscr{G}_s] \overset{\text{si}}{=} L_s, \quad 0 \leq s < r < 1. \tag{3.3}$$

Zároveň máme $E[L_1] = 1 \neq E[L_0] = 0$, teda $(L_s)_{s\geq 0}$, nie je martingal. Ukážeme však, že ide o lokálny martingal.

Potrebujeme nájsť lokalizujúcu postupnosť markovských časov $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tak aby pre každé $n \in \mathbb{N}$ bol zastavený proces $L^{(\alpha_n)}$ martingal.
Pre $n \in \mathbb{N}$ označme

$$\alpha_n = \inf\{s \geq 0, |L_s| \geq n\}.$$

Pretože proces L je spojitý a $\mathscr{G}$-adaptovaný, $\alpha_n \nearrow \infty$ a α_n sú $\mathscr{G}$-markovské časy. Ukážeme, že α_n je pre L lokalizujúca postupnosť, t.j. pre každé $n \in \mathbb{N}$, $s \leq r$ je

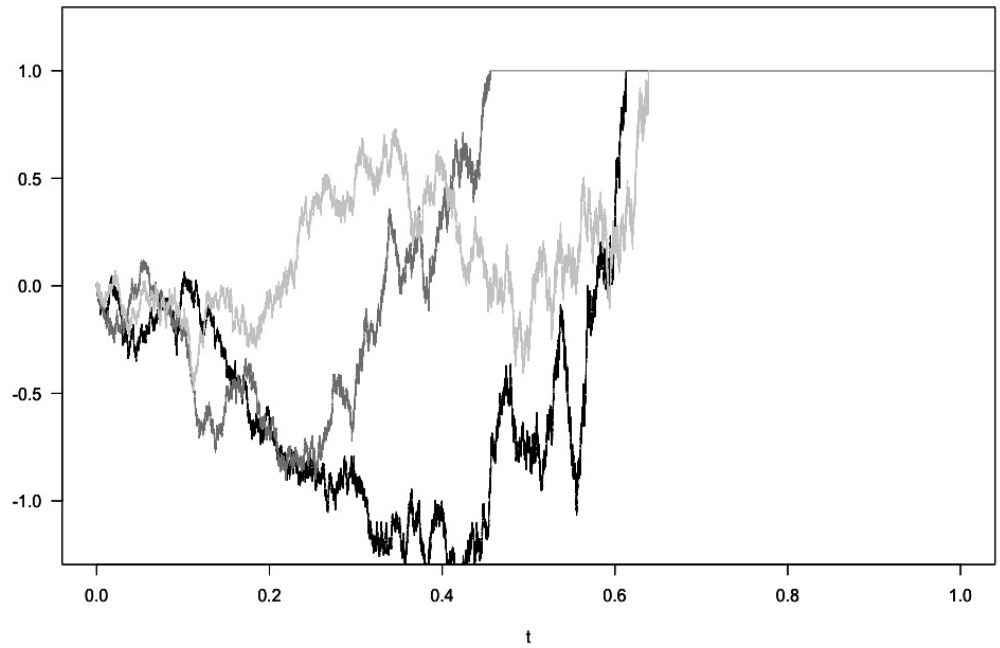
$$E[L_{r\wedge\alpha_n}|\mathscr{G}_s] \overset{\text{si}}{=} L_{s\wedge\alpha_n}. \tag{3.4}$$

Už vieme z 3.3, že (3.4) platí pre $r < 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať $r = 1$, keďže hodnoty procesu L sú na $[1,\infty)$ konštantné. Chceme teda overiť, že pre každé n je

$$E[L_{1\wedge\alpha_n}|\mathscr{G}_s] \overset{\text{si}}{=} L_{s\wedge\alpha_n}, \; s < 1. \tag{3.5}$$

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ môžme písať podľa definície procesu L (3.1), že platí

$$L_{1\wedge\alpha_n} = L_{\alpha_n}\mathbb{1}_{[\alpha_n<1]} + 1\cdot\mathbb{1}_{[\alpha_n\geq 1]} \xrightarrow[s\to 1-]{\mathbb{L}_1} W^{(\tau_1^W)}_{\frac{s\wedge\alpha_n}{1-s\wedge\alpha_n}}.$$



Obr. 3.2: Proces L.

Nakoniec dostávame postupne z (3.4) pre $r < 1$ a predchádzajúceho

$$L_{s\wedge\alpha_n} \overset{\text{si}}{=} E\Big[W^{(\tau_1^W)}_{\frac{r\wedge\alpha_n}{1-r\wedge\alpha_n}}|\mathscr{G}_s\Big] \xrightarrow[r\to 1-]{\mathbb{L}_1} E[L_{1\wedge\alpha_n}|\mathscr{G}_s],\ s<1.$$

Overili sme teda martingalovú vlastnosť a $L^{(\alpha_n)}$ je $\mathscr{G}$-martingalom pre každé n. Celkovo je teda proces L striktným lokálnym martingalom.

V kapitole 1 sme si ukázali vetu o Doob-Meyerovom rozklade obmedzeného spojitého martingalu. Teraz dokážeme podobné tvrdenie aj pre lokálne martingaly.

Veta 3.7 (Doob-Meyerov rozklad spojitého lokálneho martingalu)**.** *Buď M spojitý lokálny $\mathscr{F}$-martingal a nech filtrácia $\mathscr{F}$ splĺňa požiadavku* (1.20)*. Potom existuje až na nerozlíšiteľnosť jednoznačne určený spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný proces K, $K_0 = 0$ s neklesajúcími trajektóriami, taký, že $M^2 - K$ je lokálny $\mathscr{F}$-martingal.*

Poznámka 3.8. *Proces K z vety 3.7 je v role kvadratickej variácie procesu M.*

Dôkaz. Pre $n \in \mathbb{N}$ uvažujme nasledujúcu postupnosť náhodných časov

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n\}.$$

Pretože M je spojitý proces, časy τ_n sú markovské, $\tau_n \uparrow \infty$ a postupnosť τ_n tento proces lokalizuje, teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ je zastavený proces $M^{(\tau_n)}$ spojitý obmedzený martingal.

Pretože je τ_n neklesajúca postupnosť markovských časov, pre každé $t \geq 0$ platí

$$M^2_{t\wedge\tau_n} = M^2_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_{n+1}},$$

odkiaľ

$$(M^{(\tau_n)})^2 = \left((M^{(\tau_{n+1})})^2\right)^{(\tau_n)}. \tag{3.6}$$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ podľa vety o Doob-Meyerovom rozklade 1.24 pre obmedzené martingaly $M^{(\tau_n)}$ existuje kvadratická variácia $\langle M^{(\tau_n)}\rangle$ tak, že proces

$$(M^{(\tau_n)})^2 - \langle M^{(\tau_n)}\rangle \tag{3.7}$$

je spojitý $\mathscr{F}$-martingal. Z platnosti vzťahu (3.6) potom

$$(M^{(\tau_n)})^2 - \langle M^{(\tau_n)}\rangle \overset{\text{si}}{=} \left((M^{(\tau_{n+1})})^2\right)^{(\tau_n)} - \langle M^{(\tau_n)}\rangle. \tag{3.8}$$

Zároveň, aplikovaním vety 1.24 na obmedzený martingal $M^{(\tau_{n+1})}$ existuje kvadratická variácia $\langle M^{(\tau_{n+1})}\rangle$ taká, že $(M^{(\tau_{n+1})})^2 - \langle M^{(\tau_{n+1})}\rangle$ je spojitý $\mathscr{F}$-martingal. Odtiaľ a podľa (3.8) teda dostávame pre každé $n \in \mathbb{N}$

$$\langle M^{(\tau_{n+1})}\rangle^{(\tau_n)} \overset{\text{si}}{=} \langle M^{(\tau_n)}\rangle. \tag{3.9}$$

Označme $A_n = \{\omega \in \Omega; \langle M^{(\tau_{n+1})(\omega)}\rangle(\omega)^{(\tau_n)(\omega)} = \langle M^{(\tau_n)(\omega)}\rangle(\omega)\}$, potom podľa (3.9) je $P(A_n) = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Z predpokladu, ktorý máme na filtráciu $\mathscr{F}$, je pre každé n $A_n \in \mathscr{F}_0$. Označme $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, potom teda i $A \in \mathscr{F}_0$. Pre $\omega \in A$ a $t \geq 0$ je

$$\langle M^{(\tau_n)}\rangle_t(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} K_t(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Položme $K_t(\omega) := 0$ pre každé $t \geq 0$ a $\omega \in \Omega \setminus A$, potom opätovným využitím vzťahu (3.9) je

$$K^{(\tau_n)} \overset{\text{si}}{=} \langle M^{(\tau_n)}\rangle,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Pomocou (3.10) a (3.7) dostávame $(M^2)^{(\tau_n)} - K^{(\tau_n)}$ je spojitý $\mathscr{F}$-martingal. Podľa definície lokálneho martingalu 3.3 je $M^2 - K$ spojitý lokálny $\mathscr{F}$-martingal.
Uvažujme teraz ďalší spojitý neklesajúci proces K^*, pre ktorý je $M^2 - K^*$ $\mathscr{F}$-martingal. Potom je proces $K - K^*$ spojitý, je rozdielom dvoch neklesajúcich procesov teda má lokálne konečnú variáciu a tiež je lokálnym martingalom. Potom ale tento proces musí byť konštantný, pretože oba procesy K, K^* začínajú v nule. Proces K je preto jednoznačne určený až na nerozlíšiteľnosť.

□

Definícia 3.9. Pre M, N spojité lokálne martingaly definujme ich *vzájomnú* (alebo *krížovú) variáciu* vzťahom

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}[\langle M+N\rangle_t + \langle M-N\rangle_t], t \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

3.2 Stochastická integrácia

Časť o stochastickej integrácii začneme pripomenutím L_2 integrácie pre spojité L_2-martingaly, ktorej výsledkom je spojitý L_2-martingal. Následne, v časti 3.2.2, rozšírime stochastickú integráciu i pre lokálne martingaly. Úvádzané definície a vety sú prebrané z Revuz a Yor (1991).

3.2.1 L_2 integrácia voči L_2 martingalu

Najprv teda stručne zopakujeme výsledky pre L_2 stochastickú integráciu a zhrnieme základné vlastnosti.

Poznámka 3.10. *L_2-obmedzeným martingalom budeme rozumieť martingal M, pre ktorý platí $\sup_{t\geq 0} E(M_t^2) < \infty$ pre každé $t \geq 0$.*

Poznámka 3.11. *V texte budeme využívať pojem progresívne merateľného procesu. Definíciu a základné vlastnosti je možné nájsť napríklad v Dupačová a kol. (2002, strana 247). Pripomeňme, že spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný proces je $\mathscr{F}$-progresívne merateľný.*

Veta 3.12. *Buď M spojitý L_2-obmedzený $\mathscr{F}$- martingal. Potom pre každý progresívne merateľný proces K spĺňajúci*

$$E \int_0^\infty K_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty. \tag{3.12}$$

existuje jednoznačne určený spojitý L_2 - obmedzený $\mathscr{F}$- martingal, ktorý budeme označovať ako $K \cdot M$ taký, že $(K \cdot M)_0 = 0$ a $\langle K \cdot M, N\rangle = K \cdot \langle M, N\rangle$ pre každý spojitý L_2 - obmedzený $\mathscr{F}$- martingal N.

Dôkaz. Viz Revuz a Yor (1991, Theorem (2.2), strana 137), kde je priestor spojitých obmedzených L_2 - $\mathscr{F}$- martingalov označovaý H^2, definícia 1.21, strana 129. □

Nasledujúce tvrdenie a jeho dôkaz je možné nájsť v Revuz a Yor (1991, Proposition 2.5, strana 139).

Tvrdenie 3.13. *Pre markovský čas τ a procesy K, M ako vo vete 3.12 platí*

$$K \cdot M^{(\tau)} = (K \cdot M)^{(\tau)}.$$

3.2.2 Stochastický integrál pre lokálne martingaly

Definícia 3.14 (Stochastický integrál voči lokálnemu martingalu)**.** Buď M spojitý lokálny martingal a K nech je *stochasticky integrovateľný vzhľadom k M*, t.j. progresívne merateľný náhodný proces spĺňajúci

$$P\left\{ \int_0^t |K_s|^2 d\langle M\rangle_s < \infty \right\} = 1, \quad t \geq 0. \tag{3.13}$$

Označme $I^M(K)$ spojitý lokálny martingal spĺňajúci

1. $I_0^M(K) \overset{\text{si}}{=} 0$,
2. pre každý spojitý lokálny martingal X platí

$$\langle X, I^M(K)\rangle_t \overset{\text{si}}{=} \int_0^t K_s d\langle X, M\rangle_s, \text{ pre každé } t \geq 0.$$

Potom $I^M(K)$ budeme nazývať *stochastický integrál procesu K voči lokálnemu martingalu M.*

Poznámka 3.15. *Stochastický integrál* $I^M(K)$ *sa tiež označuje ako* $\int KdM$.

Tvrdenie 3.16. *Stochastický integrál* $I^M(K)$ *z definície 3.14 existuje a je jednoznačne určený až na nerozlíšiteľnosť.*

Dôkaz. Dôkaz je prebraný z Revuz a Yor (1991, Proposition 2.7, strana 140). Uvažujme neklesajúcu postupnosť markovských časov τ_n takú, že $\tau_n \nearrow \infty$ a že $M^{(\tau_n)}$ je L_2-obmedzený a pre $K^{(\tau_n)}$ je $\int_0^{\tau_n} K^2 d\langle M\rangle \leq \infty$. Pre tieto zastavené procesy teda vieme pre každé $n \in \mathbb{N}$ definovať stochastický integrál $I^n := K^{(\tau_n)} \cdot M^{(\tau_n)}$. Podľa tvrdenia 3.13 ďalej máme, že $I^{(n+1)}$ je na $[0,\tau_n]$ zhodný s.i. s $I^{(n)}$ pre ľubovolné $n \in \mathbb{N}$. Preto definujeme proces $I^M(K)$ tak, aby na každom $[0,\tau_n)$ bol zhodný s.i. s $I^{(n)}$. Tento proces je zrejme spojitý lokálny martingal a $\langle K\cdot M,N\rangle \overset{\text{si}}{=} K\langle M,N\rangle$ pre ľubovoľný lokálny martingal N.

□

Ukážeme si ešte „retiazkové pravidlo pre stochastické integrály“.

Pozorovanie 3.17. *Buď* X *spojitý lokálny martingal,* H *nech je stochasticky integrovateľný vzhľadom k* X *a označme* $Y = \int HdX$. *Ďalej nech* K *je stochasticky integrovateľný vzhľadom k* Y *a položme* $Z = \int KdY$. *Potom* KH *je stochasticky integrovateľný vzhľadom k* X *a* $Z \overset{si}{=} \int KHdX$.

Dôkaz. Nech H je progresívne merateľný proces, pre ktorý platí $\int_0^t H^2 d\langle X\rangle \overset{\text{si}}{<} \infty$ a podobne K je progresívne merateľný proces spĺňajúci $\int_0^t K^2 d\langle Y\rangle \overset{\text{si}}{<} \infty$ pre každé $t \geq 0$. Pre Y vieme, že $d\langle Y\rangle = H^2 d\langle X\rangle$ a teda $\int_0^t K^2 H^2 d\langle X\rangle \overset{\text{si}}{<} \infty$.
Vieme, že Y je spojitý lokálny martingal, takže podľa definície stochastického integrálu 3.13, teda pre každý spojitý lokálny martingal L platí

$$\langle L,Y\rangle \overset{\text{si}}{=} \int Hd\langle L,X\rangle.$$

Pre proces Z teda máme využitím Radon-Nikodýmovej vety

$$\langle L,Z\rangle \overset{\text{si}}{=} \int Kd\langle L,Y\rangle = \int KHd\langle L,X\rangle.$$

Z definíce 3.13 preto $Z \overset{\text{si}}{=} \int KHdX$.

□

Definícia 3.18 (Spojitý semimartingal)**.** Adaptovaný m-dimenzionálny proces $X = (X^{(i)})_{i=1}^m$ nazývame *spojitý semimartingal* ak pripúšťa reprezentáciu

$$X_t \overset{\text{si}}{=} X_0 + M_t + V_t,\ t \geq 0,$$

kde M je spojitý m-dimenzionálny lokálny martingal a V je spojitý adaptovaný $\mathbb{R}^m$-hodnotový proces s trajektóriami lokálne konečnej variácie $P - s.i.$, $M_0 = V_0 = 0$.

Nakoniec ešte rozšírime definíciu stochastického integrálu vzhľadom k spojitému semimartingalu ako v (Revuz a Yor, 1991, strana 141 Definition 2.9).

Definícia 3.19. Buď K progresívne merateľný, lokálne obmedzený proces, t.j. pre ktorý existuje postupnosť markovských časov τ_n, $\tau_n \nearrow \infty$ a konštanty C_n tak, že $|K^{(\tau_n)}| \leq C_n$. Nech X je spojitý semimartingal s reprezentáciou $M + V$. Potom *stochastický integrál voči semimartingalu* X budeme nazývať spojitý semimartingal

$$K \cdot X \stackrel{\text{si}}{=} K \cdot M + K \cdot A, \tag{3.14}$$

kde $K \cdot M$ je stochastický integrál voči lokálnemu martingalu a $K \cdot V$ je Stieltjesov integrál („po trajektóriách") voči dV.

Význam pre nás bude mať nasledujúce tvrdenie, podľa ktorého pre integráciu spojitých procesov vzhľadom k spojitým martingalom platí, že integrál je limitou v pravdepodobnosti riemannovských súm.

Tvrdenie 3.20. *Buď K spojitý a lokálne obmedzený proces, X spojitý semimartingal a nech (Δ^n) je postupnosť delení $[0,t]$ taká, že $|\Delta^n| \to 0$, potom*

$$\int_0^t K_s dX_s \stackrel{si}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \Delta^n} K_{t_i}(X_{t_i} - X_{t_i}). \tag{3.15}$$

(Limitu uvažujeme v pravdepodobnosti.)

Dôkaz. Revuz a Yor (1991, Proposition 2.13, strana 142).

□

4. Metodika a príklady

Naďalej budeme uvažovať filtrovaný pravdepodobnostný priestor $\left(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P\right)$, kde filtrácia spĺňa (1.20). Najprv uvedieme, čo budeme rozumieť pod pojmom Wienerov proces do času $T \in (0,\infty)$ a Wienerov proces s driftom (respektíve Wienerov proces s driftom do času T).

Definícia 4.1 (Wienerov proces do času T)**.** Nech $T \in (0,\infty)$ a uvažujme proces $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$, pre ktorý platí, že

1. W má spojité trajektórie a $W_0 = 0$,
2. pre ľubovoľné $t_1,...,t_n \in [0,T]$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sú prírastky $W_{t_1},W_{t_2} - W_{t_1},\ldots,W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny a $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$ platí pre každé $0 \leq s \leq t \leq T$.

Potom tento proces budeme nazývať *Wienerov do času T*. Ekvivalentne, podobne ako v definícii Wienerovho procesu 2.5, môžme miesto predpokladu 2. uvažovať predpoklad

2'. W je centrovaný gaussovský proces s autokovarianciou $cov(W_s,W_t) = s \wedge t$, $s,t \in [0,T]$.

Definícia 4.2 (Wienerov proces s driftom)**.** Ak je W Wienerov proces (respektíve Wienerov do času T) a $\mu \in \mathbb{R}$, potom proces B definovaný ako

$$B_t = W_t + \mu t,\ t \geq 0 \text{ (resp. } t \in [0,T]) \tag{4.1}$$

budeme nazývať *Wienerov proces s driftom μ* (resp. *Wienerov proces s driftom μ do času T*).

4.1 Model pre cenu akcie

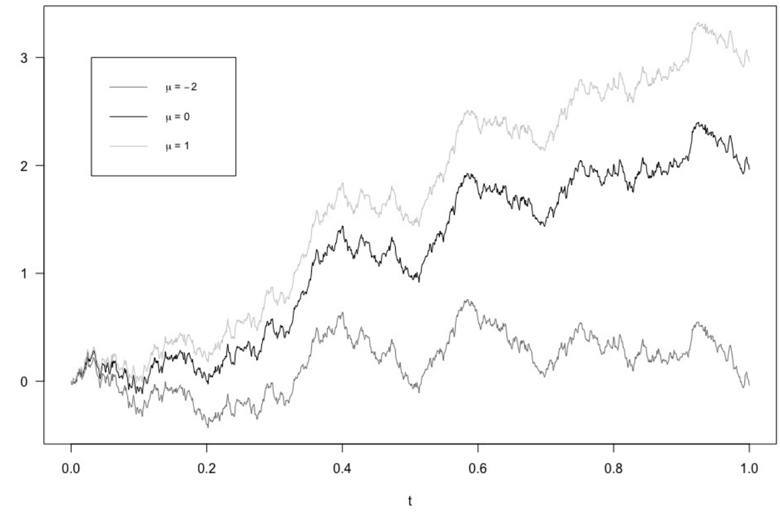
Nech $(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P)$ je pravdepodobnostný priestor a W označuje $\mathscr{F}$-Wienerov proces. V tejto kapitole budeme označovať $S = (S_t)_{t\geq 0}$ spojitý semimartingal, ktorým budeme modelovať cenu prodkladového aktíva, napr. akcie, menového kurzu a pod. Na úvod si uvedieme dva základné modely pre proces S.

4.1.1 Bachelierov model

Bachelierov model popisuje cenu podkladového aktíva S aritmetickým Brownovým pohybom s konštantnými parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma \in (0,\infty)$, t.j.

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad \text{v diferenciálnom tvare: } dS_t = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{4.2}$$

Bachelierov model zjavne pripúšťa pre cenu akcie i záporné hodnoty.

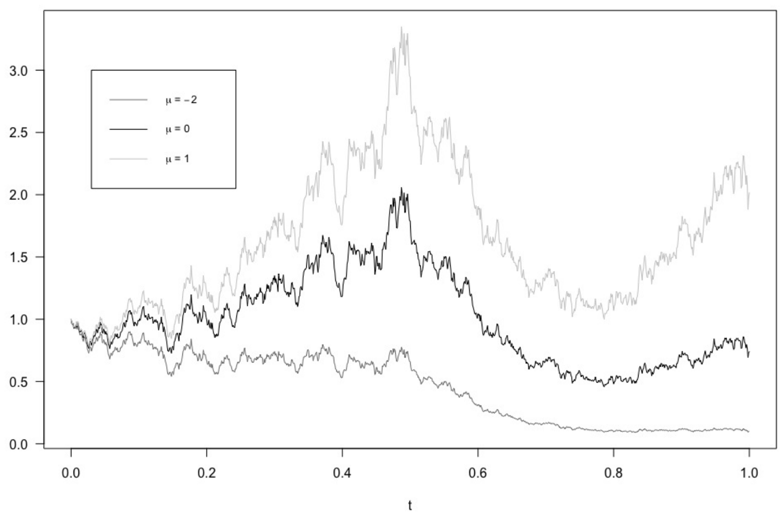


Obr. 4.1: Aritmetický Brownov pohyb pre rôzne hodnoty parametra μ so $\sigma = 1$.

4.1.2 Black-Scholesov model

Obvykle od modelu popisujúceho pohyb podkladového aktíva vyžadujeme, aby pripisoval modelovaným cenám kladné hodnoty, čo platí v prípade Black-Scholesovho modelu. Tak ako i v predchádzajúcom Bachelierovom modeli, parametre sú časovo i priestorovo nemenné, pre cenu akcie uvažujme

$$S_t = S_0 \exp\Big\{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big\}, \text{ v diferenciálnom tvare: } dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$



Obr. 4.2: Geometrický Brownov pohyb pre rôzne hodnoty μ so $\sigma = 1$.

4.2 Itôova formula

Itôova formula hovorí, že hladká funkcia spojitého semimartingalu je tiež spojitý semimartingal a udáva jeho rozklad. My budeme potrebovať Itôovu formulu len pre semimartingaly špeciálneho typu, a to pre tzv. Itôove procesy. Zopakujme najprv čo myslíme pod pojmom Itôov proces, potom uvedieme príslušnú Itôovu formulu, ku ktorej dôkazu poskytneme odkaz na relevantný zdroj.

Pre reálnu maticu $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ budeme uvažovať jej normu ako $||H|| = \sqrt{Tr(HH^{\mathsf{T}})}$. (V prípade $n = 1$ budeme túto normu uvažovať aj pre reálne vektory.)

Definícia 4.3 (Itôov proces)**.** Buď W n-rozmerný $\mathscr{F}$-Wienerov proces. Potom $\mathscr{F}$-adaptovaný m-dimenzionálny spojitý náhodný proces X (definovaný v 3.18) budeme nazývať *Itôov*, ak existujú progresívne merateľné náhodné procesy $a : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$, pre ktoré

$$P\Big(\int_0^t (||a(s)|| + ||b(s)||^2) ds < \infty \Big) = 1, \quad t \geq 0$$

a také, že pre proces X platí pre každé $t \geq 0$

$$X_t \overset{\text{si}}{=} X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s. \tag{4.3}$$

Poznámka 4.4. *Spojitý semimartingal z definície 3.18 je teda Itôov proces, ak naviac sú trajektórie V lokálne absolútne spojité a M je stochastický integrál vzhľadom k Wienerovmu procesu.*

Veta 4.5 (Itoôva)**.** *Buď W n-rozmerný $\mathscr{F}$-Wienerov proces a X Itôov proces* (4.3)*. Nech $f \in \mathscr{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^m)$, potom pre $t \in [0,T]$ platí*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) \overset{si}{=} f(0,X_0) + \int_0^t \nabla_x f(s,X_s)^{\mathsf{T}} b(s) dW_s + \\ + \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial s} f(s,X_s) + \nabla_x f(s,X_s)^{\mathsf{T}} a(s) + \frac{1}{2} Tr\{\nabla_x^2 f(s,X_s) b(s) b(s)^{\mathsf{T}}\}\Big] ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dôkaz. Dôkaz vety je možné nájsť napríklad v Karatzas a Shreve (1991, strana 150, Theorem 3.3). V dôkaze sa predpokladá úplná filtrácia, my už ale vieme, že ako Wienerov proces, tak aj stochastický integrál sú invariantné voči zmene (zúplnení) filtrácie.

□

Poznámka 4.6. *Ak je $g \in C^2(\mathbb{R})$ a $m = n = 1$, potom sa predošlý vzorec* (4.4) *zjednoduší na tvar*

$$g(X_t) \overset{si}{=} g(X_0) + \int_0^t \Big[g'(X_s)a(s) + \frac{1}{2} g''(X_s)b^2(s)\Big] ds + \int_0^t g'(X_s)b(s)dW_s, \quad t \in [0,T].$$

V diferenciálnom tvare potom symbolicky môžeme písať

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t \Rightarrow dg(X_t) = \Big[g'(X_t)a(t) + \frac{1}{2} g''(X_t)b^2(t)\Big] dt + g'(X_t)b(t)dW_t.$$

Príklad 4.7. *Buď $(V_t,W_t)^{\mathsf{T}}_{t\geq 0}$ dvojrozmerný $\mathscr{F}$-Wienerov proces. Určte stochastický diferenciál procesu $X_t = e^{V_t} \sin W_t$.*

V riešení budeme ztotožňovať vektorovú premennú x s jej zložkami $v{,}w$ v poradí $x = (v{,}w)^{\mathsf{T}}$. Aplikujme vetu 4.5 na $f_t(v{,}w) = e^v \sin w$, kde $v{,}w \in \mathbb{R}$. Máme $\frac{\partial}{\partial t} f_t(v{,}w) = 0$,

$$\nabla_x f_t(v{,}w) = e^v \begin{pmatrix} \sin w \\ -\cos w \end{pmatrix}, \quad \nabla_x^2 f_t(v{,}w) = e^v \begin{pmatrix} \sin w & -\cos w \\ -\cos w & -\sin w \end{pmatrix}.$$

Podľa vety 4.5 dostávame

$$df_t(V_t{,}W_t) = e^{V_t} \begin{pmatrix} \sin W_t \\ -\cos W_t \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} dV_t \\ dW_t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big\{ e^{V_t} \begin{pmatrix} \sin W_t & -\cos W_t \\ -\cos W_t & -\sin W_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt & 0 \\ 0 & dt \end{pmatrix} \Big\}$$
$$= e^{V_t}(\sin W_t dV_t - \cos W_t dW_t).$$

4.3 Zmena driftu stochastického procesu

O Wienerovom procese W vieme, že proces $\varepsilon_t^{(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ je martingal pre každé $\lambda \in \mathbb{R}$. V nasledujúcom tvrdení ukážeme, že pre prípad spojitých martingalov platí aj opačná implikácia.

Tvrdenie 4.8. *Buď X spojitý $\mathscr{F}$-adaptovaný proces, pre ktorý platí, že $X_0 = 0$ a pre každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je proces*

$$\varepsilon_t^{(\lambda)} = \exp\{\lambda X_t - \tfrac{\lambda^2}{2} t\}. \tag{4.5}$$

$\mathscr{F}$-martingal. Potom je X $\mathscr{F}$-Wienerov proces.

V nasledujúcom poskytneme náznak dôkazu tvrdenia.

Dôkaz. Proces je spojitý a $\mathscr{F}$-adaptovaný, $X_0 = 0$. Nech $s{,}t \in [0{,}\infty)$, $s < t$. Vieme, že $\varepsilon_t^{(\lambda)}$ je $\mathscr{F}$-martingal pre každé $\lambda \in \mathbb{R}$, teda pre momentovú vytvárajúcu funkciu veličiny $X_t - X_s$ máme

$$E\Big[\exp\{\lambda(X_t - X_s)\}\Big] = E\Big[\exp\{\lambda(X_t - X_s)\}\Big] = \exp\Big\{\tfrac{\lambda^2}{2}(t-s)\Big\}. \tag{4.6}$$

Prírastok $X_t - X_s$ má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a rozptylom $t - s$. Ak by sme miesto strednej hodnoty v (4.6) uvažovali podmienenú strednú hodnotu, dospeli by sme k rovnakému výsledku odkiaľ plynie nezávislosť. $\square$

Uvedieme znenie Lévyho vety o charakterizácii Wienerovho procesu. Vetu s dôkazom pre d-dimenzionálne procesy je možné nájsť v Revuz a Yor (1991, strana 150, Theorem 3.6). Pre naše potreby sformulujeme vetu pre prípad $d = 1$.

Veta 4.9. *Buď X $\mathscr{F}$-adaptovaný spojitý proces, $X_0 = 0$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

1. *X je $\mathscr{F}$-Wienerov proces;*
2. *X je spojitý lokálny martingal a $\langle X\rangle_t \stackrel{si}{=} t$;*
3. *X je spojitý lokálny martingal a pre každú $f \in L^2(\mathbb{R})$ je proces*

$$\varepsilon_t^{if} = \exp\Big\{ i \textstyle\int_0^t f(s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds \Big\} \tag{4.7}$$

komplexný martingal.

Poznámka 4.10. *Komplexným martingalom rozumieme proces, ktorého reálna aj imaginárna časť sú martingaly.*

4.3.1 Wienerov proces s driftom

V tejto časti ukážeme spôsob, akým budeme schopní poupraviť drift Wienerovho procesu s driftom. Následne, bez dôkazu, s odkazom na literatúru uvedieme Girsanovovu vetu.

Nech $T \in (0,\infty)$ a na filtrovanom priestore $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, P)$, $(W_t)_{0\le t\le T}$ nech je $\mathscr{F}$-Wienerov proces na kompaktnom intervale $[0,T]$ definovaný ako v 4.1 a uvažujme novú mieru $Q_T^{(\lambda)} \sim P$ danú pre $A \in \mathscr{A}$ ako

$$Q_T^{(\lambda)}(A) = E[\exp\{\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\}; A]. \tag{4.8}$$

Potom $Q_T^{(\lambda)}(\Omega) = 1$ a $Q_T^{(\lambda)}$ je pravdepodobnosť na $(\Omega,\mathscr{A})$, ekvivalentná s P. Ak je $A \in \mathscr{F}_t$, $t \le T$, potom

$$\begin{aligned} Q_T^{(\lambda)}(A) &= E[\exp\{\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\}; A] = E[E[\exp\{\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\}|\mathscr{F}_t]; A] \\ &= E[\exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}; A] = Q_t^{(\lambda)}(A). \end{aligned}$$

Tvrdenie 4.11. *Nech $\mu \in \mathbb{R}$, $T \in (0,\infty)$ a $B_t := \mu t + W_t$, $0 \le t \le T$ Wienerov proces s driftom μ na $[0,T]$ pri miere P. Potom je proces B Wienerov s driftom na $[0,T]$ pri miere $Q_T^{(\lambda)}$, s koeficientom driftu $\kappa = \lambda + \mu$. Špeciálne, pre $\mu = -\lambda$ je proces B Wienerov na $[0,T]$ voči miere $Q_T^{(\lambda)}$* (4.8).

Dôkaz. Chceme ukázať, že $B_t = \kappa t + \tilde{W}_t$, $t \in [0,T]$, kde $\tilde{W}$ je Wienerov pri $Q_T^{(\lambda)}$. Podľa tvrdenia 4.8 potrebujeme overiť, že pre každé $\nu \in \mathbb{R}$ proces $\exp\{\nu\tilde{W}_t - \frac{\nu^2}{2}t\}$ je $(Q_T^{(\lambda)}, \mathscr{F})$-martingal. Máme $\tilde{W}_t = B_t - \kappa t = W_t + (\mu - \kappa)t$ a nech $A \in \mathscr{F}_s$, potom

$$\begin{aligned} &E_{Q_T^{(\lambda)}}[\exp\{\nu\tilde{W}_t - \tfrac{\nu^2}{2}t\}; A] = E[\exp\{\nu\tilde{W}_t - \tfrac{\nu^2}{2}t + \lambda W_t - \tfrac{\lambda^2}{2}t\}; A] \\ &= E[\exp\{(\nu+\lambda)W_t - \tfrac{1}{2}t(\nu^2 + \lambda^2 + 2\nu(\kappa - \mu))\}; A]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pretože W je Wienerov, vieme, že proces $\exp\{(\nu+\lambda)W_t - \frac{1}{2}t(\nu^2+\lambda^2+2\nu(\kappa-\mu))\}$ je martingal v prípade $\kappa = \lambda + \mu$. Proces $\tilde{W}$ je Wienerov na $[0,T]$ pri $Q_T^{(\lambda)}$ a $\lambda = -\mu$. $\square$

Pozorovanie 4.12. *1. Nech $c > 0$, pre $T \in (0,\infty)$ uvažujme B Wienerov proces s driftom μ na $[0,T]$. Potom platí $P(B_T^* \ge c) = e^{2c\mu}\phi\Big(\frac{-T\mu - c}{\sqrt{T}}\Big) + 1 - \phi\Big(\frac{-T\mu + c}{\sqrt{T}}\Big)$.*

2. Nech B je Wienerov proces s driftom μ na $[0,\infty)$, $c > 0$ a definujme čas $\tau_c^B :=$ $\inf\{t \ge 0, B_t = c\} = \inf\{t \ge 0, W_t = c - \mu t\}$. Potom platí

$$P(\tau_c^B \le t) = e^{2c\mu}\phi\Big(\frac{-t\mu - c}{\sqrt{t}}\Big) + 1 - \phi\Big(\frac{-t\mu + c}{\sqrt{t}}\Big).$$

Špeciálne

$$\begin{aligned} P(\tau_c^B < \infty) &= e^{2\mu c} \quad \text{pre } \mu < 0, \\ &= 1 \qquad \text{pre } \mu > 0. \end{aligned}$$

Dôkaz. 1. Využitím znalosti združenej hustoty W_t, W_t^* z (2.16) dostávame

$$\begin{aligned}
&P(B_T^* \geq c) = E_{Q_T^{(-\mu)}}\Big[e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T}; B_T^* \geq c\Big] = E_P\Big[e^{\mu W_T - \frac{1}{2}\mu^2 T}; W_T^* \geq c\Big] = \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_c^{\infty} f_{W_T, W_T^*}(x,y) e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{c\vee x}^{\infty} \frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi T^3}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2T}} e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T} dy dx \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T}\Big[-\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\Big\{-\frac{(2y-x)^2}{2T}\Big\}\Big]_{c\vee x = y}^{\infty} dx = \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{c} e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\Big\{-\frac{(2c-x)^2}{2T}\Big\} dx + \int_c^{\infty} e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2T}\Big\} dx.
\end{aligned}$$

Označme $\varphi(z)$ hustotu štandardného normálneho rozdelenia, potom

$$\begin{aligned}
P(B_T^* \geq c) &= e^{2c\mu}\textstyle\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi\Big(\frac{x-\mu T-2c}{\sqrt{T}}\Big) dx + \int_c^{\infty}\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi\Big(\frac{x-T\mu}{\sqrt{T}}\Big) dx \\
&= e^{2c\mu}\phi\Big(\tfrac{-T\mu - c}{\sqrt{T}}\Big) + 1 - \phi\Big(\tfrac{-T\mu + c}{\sqrt{T}}\Big).
\end{aligned}$$

2. Nech $t \geq 0$. Pre čas τ_c^B kde $c > 0$ potom platí $[\tau_c^B \leq t] = [B_T^* \geq c]$ a teda z predchádzajúceho bodu 1 je $P(\tau_c^B \leq t) = P(B_t^* \geq c) = e^{2c\mu}\phi\Big(\frac{-t\mu - c}{\sqrt{t}}\Big) + 1 - \phi\Big(\frac{-t\mu + c}{\sqrt{t}}\Big)$. Špeciálne máme

$$\begin{aligned}
&P(\tau_c^B < \infty) = \lim_{t\to\infty} P(\tau_c^B \leq t) = \lim_{t\to\infty}[e^{-2c\lambda}\phi\Big(\tfrac{t\lambda - c}{\sqrt{t}}\Big) + 1 - \phi\Big(\tfrac{t\lambda + c}{\sqrt{t}}\Big)] \\
&= e^{-2\lambda c} \quad \text{pre } \lambda > 0, \\
&= 1 \qquad\; \text{pre } \lambda < 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

□

Dôsledok 4.13. *Pre rozdelenie suprema procesu B, t.j. $B_\infty^* = \sup_{t\geq 0}(W_t + \mu t)$ kde $\mu < 0$, platí*

$$P(B_\infty^* \leq c) = 1 - e^{2\mu c}, c > 0.$$

Dôkaz. Z pozorovania 4.12 vieme, že

$$e^{2\mu c} = P(\tau_c^B < \infty) = \lim_{t\to\infty} P(\tau_c^B \leq t) = \lim_{t\to\infty} P(B_t^* \geq c), \tag{4.11}$$

odtiaľ je teda $\lim_{t\to\infty} P(B_t^* \leq c) = 1 - e^{2\mu c}$, $c \geq 0$. Hustota pre B_∞^* je potom daná predpisom

$$f_{B_\infty^*} = -2\mu e^{2\mu c}\mathbb{1}_{[c>0]} \sim \Gamma(-2\mu, 1).$$

Poslednú rovnosť v (4.11) sme dostali uvedomením si, že $B_t^* \nearrow B_\infty^*$ a máme konvergenciu distribučných funkcií $P(B_t^* \leq c) \xrightarrow{t\to\infty} 1 - e^{2\mu c}$, teda

$$P(B_\infty^* > c) = P(\exists n \in \mathbb{N} : B_n^* > c) = \lim_{n\to\infty} P(B_n^* > c) \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

B_∞^* má distribučnú funkciu $P(B_\infty^* \leq c) = 1 - e^{2\mu c}, c > 0.$

□

4.3.2 Girsanovova veta

Koncept zmeny driftu Wienerovho procesu uvedený v predchádzajúcej časti 4.3.1 rozširuje Girsanovova veta. Predstavuje všeobecnejšiu metódu ako zmenou pravdepodobnostnej miery upraviť drift stochastického procesu. My si ju uvedieme bez dôkazu, s odkazom na príslušnú literatúru.

Poznámka 4.14. *Stochastickú exponenciálu zo spojitého semimartingalu X budeme označovať ako*

$$\mathscr{E}_t(X) = \exp\{X_t - \tfrac{1}{2}\langle X\rangle_t\}, t \geq 0.$$

Veta 4.15 (Girsanovova)**.** *Uvažujme stochastickú bázu $\left(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},P\right)$ ako v úvode kapitoly a W nech je n-rozmerný Wienerov proces. Nech $T \in [0,\infty)$ a $(Y_t)_{t\geq 0}$ je n-rozmerný, progresívne merateľný proces taký, že $\int_0^T ||Y_s||^2 ds < \infty$ P-s.i. a $Y_t = 0$ pre $t \in (T,\infty)$. Nech je splnená nasledujúca podmienka*

$$E\mathscr{E}_T\left(\int Y^{\mathsf{T}} dW\right) = 1. \tag{4.12}$$

Potom je

$$\tilde{P} : F \in \mathscr{A} \mapsto \int_F \mathscr{E}_T(\int Y^{\mathsf{T}} dW) dP = E\left[\mathscr{E}_T(\int Y^{\mathsf{T}} dW); F\right]$$

pravdepodobnostná miera na $(\Omega,\mathscr{A})$ taká, že proces

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t Y_s ds, t \geq 0$$

je n-rozmerný Wienerov proces na $(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},\tilde{P})$.

Postačujúcu podmienku preto, aby bola splnená požiadavka 4.12 z Girsanovovej vety predstavuje Novikova veta, uvedená napríklad v Karatzas a Shreve (1991, Proposition 5.12).

Veta 4.16 (Novikov)**.** *Buď M spojitý lokálny $\mathscr{F}$-martingal a definujme pre $t \geq 0$ proces $Z_t \overset{\text{def}}{=} \exp[M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t]$. Ak platí*

$$E \exp\left\{\tfrac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\} < \infty, \; t \geq 0, \tag{4.13}$$

potom $EZ_t = 1$, $t \geq 0$.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v Karatzas a Shreve (1991, Proposition 5.12, strana 198).

□

Poznámka 4.17. *V Girsanovovej vete 4.15 tak overujeme, že*

$$E \exp\left\{\tfrac{1}{2} \int_0^t Y_s^{\mathsf{T}} Y_s ds\right\} < \infty, \quad t \geq 0. \tag{4.14}$$

4.4 Metodika

Táto časť má za cieľ predstaviť všeobecný spôsob, akým budeme pristupovať k riešeniu úloh so zadaním ako určiť spravodlivú cenu rôznych finančných derivátov. Spoločnou črtou úloh bude výplata tzv. európskeho typu, teda v čase maturity (vysporiadania) T. Metodika bude rozdelená do viacerých krokov, zo začiatku budeme uvažovať silné predpoklady aby vynikla hlavná myšlienka a postupne budeme tieto predpoklady uvolňovať.

(1) Uvažujme nulovú úrokovú mieru na peňažnom trhu a predpokladajme, že proces pre tržnú cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ je spojitý $\mathscr{F}$-martingal s hodnotami v otvorenom intervale $D \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Pre $F_T \in \mathbb{L}_1(\mathscr{F}_T)$ nájdeme funkciu $F \in C\Big([0,T]\times D\Big)$ takú, že $F \in C^2\Big([0,T)\times D\Big)$ a spĺňa

$$F(t,S_t) \stackrel{\text{si}}{=} E[F_T|\mathscr{F}_t],\ t \in [0,T]. \tag{4.15}$$

(b) Pomocou Itôovej formule 4.5 overíme, že

$$F_T \stackrel{\text{si}}{=} F(t,S_t) + \textstyle\int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s \tag{4.16}$$

a to tak, že použijeme Itôovu formulu s odkazom na $F \in C^2([0,T) \times D)$ a potom využijeme spojitosť $F \in C([0,T] \times D)$.

$$\begin{aligned} F_T = F(T,S_T) &= \lim_{r\to T-} F(r,S_r) \stackrel{\text{si}}{=} \lim_{r\to T-} \textstyle\int_t^r \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s + F(t,S_t) \\ &= F(t,S_t) + \textstyle\int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s \end{aligned} \tag{4.17}$$

za predpokladu, že je pravá strana (4.17) dobre definovaná ako stochastický integrál a za predpokladu, že funkcia F na $[0,T)\times D$ rieši nasledujúcu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$0 = \tfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)\Sigma(t,x), \tag{4.18}$$

kde $\Sigma(t,S_t)dt = d\langle S\rangle_t$. Požiadavka (4.18) vyplýva z Feynman-Kac formuly, ktorá prepája body 1(a) a 1(b), keďže riešenie stochastickej parciálnej diferenciálnej rovnice určitého typu s vhodnou terminálnou/koncovou podmienkou (4.18) sa dá získať výpočtom podmienenej strednej hodnoty v (4.15). Feynman-Kac veta je uvedená napríklad v Karatzas a Shreve (1991, Theorem 4.2, strana 268).

Označme si $C_t \stackrel{\text{def}}{=} F(t,S_t)$, potom túto hodnotu budeme interpretovať ako kapitál, s ktorým sme schopní držaním celkovo $\delta_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)$ jednotiek podkladového aktíva v čase $s \in [t,T]$ s tržnou cenou S_s získať portfólio, ktorého tržná hodnota je v čase T rovná predpísanej hodnote $F_T = F(T,S_T)$.
Každá uvažovaná stratégia nám dáva tržnú hodnotu portfólia ako stochastický integrál podľa procesu S, v uvažovanom prípade podľa spojitého semimartingalu a teda výsledok je lokálny martingal.
Pre túto stratégiu budeme naviac uvažovať obmedzenie zdola rovnomerne integrovateľným martingalom. Nech je teda proces L spojitý lokálny martingal, $L_0 \in \mathbb{L}_1$ a nech $L \geq M$, kde M je rovnomerne integrovateľný $\mathscr{F}$-martingal. Potom je L spojitý supermartingal, čo vyplýva z nasledujúceho: označme $N = L - M$, potom je $N \geq 0$ teda N je nezáporný spojitý lokálny $\mathscr{F}$- martingal, $N_0 = L_0 - M_0 \in \mathbb{L}_1$ a teda N je

spojitý supermartingal. Pretože je $L = N + M$ dostávame, že L je spojitý supermartingal. Prakticky teda máme pre uvažované stratégie dve obmedzenia - obmedzenie zhora vyplývajúce z racionálneho požiadavku „nedostať sa do straty“ a obmedzenie zdola si môžme predstaviť ako nejakú regulatórnu požiadavku zaručujúcu nemožnosť požičať si k realizácii arbitráže neobmedzené množstvo financií (napr. na úkor stability meny). Za prítomnosti týchto požiadavok teda nie sme schopní realizovať arbitráž a v tomto zmysle teda budeme označovať cenu derivátu za spravodlivú (bezarbitrážnu). Samotný pojem arbitráže definovať formálne nebudeme.
V prípade, že máme supermartingal L spĺňajúci $L_T = F_T$, potom

$$L_0 \overset{\text{si}}{\geq} E[L_T|\mathscr{F}_0] \overset{\text{si}}{=} E[F_T|\mathscr{F}_0] = F(0,S_0),$$

analogicky

$$L_t \overset{\text{si}}{\geq} E[L_T|\mathscr{F}_t] \overset{\text{si}}{=} E[F_T|\mathscr{F}_t] = F(t,S_t).$$

Pomocou kapitálu v hodnote $C_t = F(t,S_t)$ sme schopní zaistiť výplatu F_T v čase T. Daná nerovnosť pre túto situáciu $C_t \overset{\text{si}}{\leq} L_t$ hovorí, že toto je najmenší kapitál, pomocou ktorého vieme stratégiu replikovať.

(2) Naďalej budeme uvažovať nulovú úrokovú mieru na peňažnom trhu, proces pre cenu akcie však nemusí byť martingal. V tomto prípade budeme postupovať tak, že nájdeme $\tilde{P}_T \sim P$ takú, aby zastavený proces $S^{(T)}$ bol $\mathscr{F}$- martingalom pri tejto novej miere $\tilde{P}_T$. Mieru nájdeme pomocou Girsanovovej vety a s pripomenutím 3.20 ostávajú rovnosti s.i. zachované pri prechode od P k $\tilde{P}_T$ a naopak, rovnako ako limity s.i.
Pretože $F \in C^2([0,T) \times D)$ je $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)\right)_{s\in[t,r]}$ „proces“ so spojitými trajektóriami a integrál $\int_t^r \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s$ je dobre definovaný ako pri miere P tak aj pri $\tilde{P}_T$. V oboch prípadoch má tú istú, s.i. jednoznačne určenú hodnotu. To platí aj pre ostatné uvažované stochastické integrály.

Poznámka 4.18. *Pred posledným krokom 3 metodiky zavedieme pojem samofinancujúceho portfólia.*

Definícia 4.19. Nech S je tržná cena podkladového aktíva, označme $H = (H_t)_{t\geq 0}$ množstvo jednotiek podkladového aktíva v portfóliu investora a $V = (V_t)_{t\geq 0}$ nech označuje tržnú hodnotu portfólia investora. Voľné prostriedky o hodnote $V_t - H_tS_t$ nech sú spojite úročené mierou $r \geq 0$. Portfólio potom budeme nazývať *samofinancujúce pri úrokovej miere* r ak je odpovedajúca tržná cena spojitý semimartingal s diferenciálom

$$dV_t = H_t dS_t + r(V_t - H_tS_t)dt.$$

Poznámka 4.20. *Pre $r = 0$ zrejme dostávame $dV_t = H_t dS_t$. Tento prípad sa redukuje na situáciu z bodu 1 a stratégiou δ-hedgingu popísanou v bode 1 teda získavame samofinancujúce portfólio.*

Nech $r > 0$. Označme $D_t := e^{-rt}$ dikontný faktor odpovedajúci $[0,t]$. Pre dynamiku diskontovanej tržnej ceny portfólia v prípade $r > 0$ potom platí

$$d(D_tV_t) = V_t dD_t + D_t dV_t = -V_t r D_t\, dt + D_t(H_t dS_t + r(V_t - H_tS_t)dt) = H_t d(D_t,S_t).$$

Diskontovanú tržnú cenu portfólia teda môžme písať ako stochastický integrál podľa diskontovanej tržnej ceny podkladového aktíva, takže pre diskontované ceny sa dostávame do situácie z bodu 1.

(3) Predpokladajme, že úroková miera na peňažnom trhu je konštantná s hodnotou $r \in [0,\infty)$. Označme si $\hat{S}_t := e^{-rt}S_t$ proces pre diskontovanú tržnu cenu podkladového aktíva. Nájdeme mieru $\tilde{P}_T \sim P$ takú, že proces $\hat{S}_t^{(T)} = e^{-rt}S_t^{(T)}$ je martingalom pri $\tilde{P}_T$. Pre diskontovanú cenu derivátu v čase T bude za týchto okolností platiť

$$e^{-rT}F_T =: \hat{F}_T \overset{\text{si}}{=} \hat{F}(t,S_t) + \int_t^T \frac{\partial \hat{F}}{\partial x}(s,S_s)d\hat{S}_s.$$

Vzhľadom k poznámke 4.20 teda vidíme, že vhodnou voľbou sme takýmto spôsobom schopní získať samofinancujúce portfólio.

4.4.1 Príklady

Príklad 4.21. *Pre tržnú cenu akcie uvažujme Bachelierov model* (4.2) *s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, t.j. cenu akcie modelujeme procesom S kde*

$$S_t = S_0 + W_t, \quad t \geq 0, \tag{4.19}$$

a kde $S_0 \in \mathbb{L}_1(\mathscr{F}_0)$ a W je $\mathscr{F}$ - Wienerov proces. Zaujíma nás spravodlivá (bezarbitrážna v zmysle uvedenom v prvom kroku metodiky) cena Európskej kúpnej („call“) opcie v čase $t \in [0,T]$ s dobou expirácie T a vyporiadavacou cenou („strikom“) K.

Proces pre tržnú cenu akcie (4.19) je zrejme martingal, teda podľa bodu 1. metodiky hľadáme spojitú funkciu $F \in C\Big([0,T] \times \mathbb{R}\Big)$, takú, že $F \in C^2\Big([0,T) \times \mathbb{R}\Big)$, pre ktorú platí (4.15) a v čase T je $F(T,S_T) = (S_T - K)^+$.

Podľa (4.19) je $S_T = S_t + W_T - W_t$, potom

$$E\Big[(S_T - K)^+|\mathscr{F}_t\Big] = E\Big[(S_t - K + W_T - W_t)^+|\mathscr{F}_t\Big].$$

Pre $x \in \mathbb{R}$ počítajme

$$\begin{aligned} E(x + W_T - W_t)^+ &= E(x + \sqrt{T-t}W_1)\mathbb{1}_{[W_1 \geq \frac{-x}{\sqrt{T-t}}]} \\ &= \int_{-\frac{x}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} (x + \sqrt{T-t}y)\varphi(y)dy = x\Phi\Big(\tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\Big) + \sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\Big). \end{aligned}$$

Funkcia $F(t,x) := x\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big) + \sqrt{T-t}\varphi\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big)$ je spojitá na $[0,T) \times \mathbb{R}$, pre T ju dodefinujeme ako $F(T,x) = (x-K)^+$ a platí pre ňu $F(t,x) \in C^2([0,T) \times \mathbb{R})$. Pre $t \in [0,T]$ máme

$$F(t,S_t) \overset{\text{si}}{=} E[(S_T - K)^+|\mathscr{F}_t] \overset{\text{si}}{=} (S_t - K)\Phi\left(\tfrac{S_t - K}{\sqrt{T-t}}\right) + \sqrt{T-t}\varphi\left(\tfrac{S_t-K}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Pre F ďalej overíme za pomoci Itôovej formule 4.5 bod 1(b) z metodiky, a to, že $F_T = F(t,S_t) + \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s$. Spočítajme najprv potrebné parciálne derivácie funkcie F podľa x a t.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) = \Phi\Big(\tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\Big),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x) = \tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,x) = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{x}{\sqrt{T-t}}\Big).$$

Keďže $\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x)$, funkcia F spĺňa (4.18). Pomocou Itôovej formule (4.4) nakoniec dostávame pre $t \in [0,T)$

$$F(t,S_t) \overset{\text{si}}{=} F(0,S_0) + \int_0^t \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sqrt{T-s}}\Big)dW_s.$$

Limitným prechodom $t \to T$ vidíme, že pre hodnotu v čase T platí

$$\begin{aligned} F_T = F(T,S_T) &= \lim_{r\to T-} F(r,S_r) \overset{\text{si}}{=} F(t,S_t) + \lim_{r\to T-} \int_t^r \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sqrt{T-s}}\Big)dW_s \\ &\overset{\text{si}}{=} F(t,S_t) + \int_t^T \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sqrt{T-s}}\Big)dW_s. \end{aligned}$$

Príklad 4.22. *Uvažujme pre cenu akcie S Bachelierov model* (4.2) *a predpokladajme nulovú úrokovú mieru na peňažnom trhu $r = 0$. Označme $\mathscr{F}_t \overset{\text{def}}{=} \sigma(S_0, W_s; s \le t)$. Budeme určovať spravodlivú cenu Európskej kúpnej („call“) opcie v čase $t \in [0,T]$ s dobou expirácie T a vyporiadavacou cenou („strikom“) K.*

(1) V zmysle bodu 2 metodiky pre $T \in [0,\infty)$ ukážeme, že existuje $\tilde{P}_T \sim P$ martingalová miera procesu $S_t^{(T)} = S_{t\wedge T}$, $t \ge 0$.
Pre proces S uvažujeme model

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t = S_0 + \sigma\Big(\frac{\mu}{\sigma}t + W_t\Big). \tag{4.20}$$

Podľa tvrdenia 4.11, Wienerov proces s driftom $\frac{\mu}{\sigma}$ je Wienerov pri miere $\tilde{P}_T := Q_T^{(-\frac{\mu}{\sigma})}$ definovanej v (4.8), t.j.

$$\frac{d\tilde{P}_T}{dP} \overset{\text{si}}{=} \exp\Big\{-\frac{\mu}{\sigma}W_T - \Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big\}.$$

Vidíme teda, že proces $\tilde{W}_t^{(T)} \overset{\text{def}}{=} W_t + \frac{\mu}{\sigma}(t\wedge T)$, $t \ge 0$ je Wienerov pri $\tilde{P}_T$ a proces $S_t^{(T)} = S_0 + \sigma\tilde{W}_t^{(T)}$ je pri tejto miere martingal.

Pre doplnenie si ešte ukážme riešenie použitím Girsanovovej vety:
Vieme, že $S_{t\wedge T} = S_0 + \mu(t\wedge T) + \sigma W_{t\wedge T}$. Označme Y_s proces spĺňajúci

$$\int_0^t Y_s ds = -\frac{\mu}{\sigma}(t\wedge T), \quad \text{teda } Y_s = -\frac{\mu}{\sigma}\mathbb{1}_{[s\le T]}.$$

Pre takto definovaný Y je potom

$$E\exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T Y_s^2 ds\Big\} = E\exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T \Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big)^2 \mathbb{1}_{[s\le T]}ds\Big\} = E\exp\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big\} < \infty.$$

Podľa poznámky 4.17 je splnený predpoklad Girsanovej vety 4.15 a existuje pravdepodobnostná miera $\tilde{P}_T$ taká, že $\tilde{W}_t^{(T)} = W_{t\wedge T} + \frac{\mu}{\sigma}(t\wedge T)$ je Wienerov,

$$\frac{d\tilde{P}_T}{dP} \overset{\text{si}}{=} \mathscr{E}_T\Big(-\frac{\mu}{\sigma}W_{t\wedge T}\Big) = \exp\Big\{-\frac{\mu}{\sigma}W_T - \Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big\}.$$

(2) Ukážeme, že pre $K \in \mathbb{R}$ platí

$$\tilde{E}_T[(S_T-K)^+|\mathscr{F}_t] \overset{\text{si}}{=} (S_t-K)\Phi\Big(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\Big(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) =: C_t,\ t \in [0,T).$$

Podľa predchádzajúceho je $S_{t\wedge T} \overset{\text{si}}{=} S_0 + \sigma\int_0^t \mathbb{1}_{[s\le T]}d\tilde{W}_s$, potom pre hodnotu S_T dostávame $S_T \overset{\text{si}}{=} S_t + \int_t^T \sigma d\tilde{W}_s$. Bude nás teda zaujímať vyjadrenie

$$\tilde{E}[(S_T-K)^+|\mathscr{F}_t] = \tilde{E}[(S_t + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - K)^+|\mathscr{F}_t]. \tag{4.21}$$

$\tilde{W}$ je Wienerov pri $\tilde{P}_T$, $\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ je nezávislá od $\mathscr{F}_t$ a S_t je $\mathscr{F}_t$-merateľná. Spočítajme

$$\begin{aligned}\tilde{E}[(x+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)-K)^+] &= E[(x-K+\sigma\sqrt{T-t}W_1)^+]\\ &= \textstyle\int_{-\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty}(x-K+r\sigma\sqrt{T-t})\varphi(r)dr\\ &= (x-K)\Big[1-\Phi\Big(\tfrac{-x+K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]+\sigma\sqrt{T-t}\textstyle\int_{-\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty}r\varphi(r)dr\\ &= (x-K)\Phi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) =: F(t,x).\end{aligned}$$

Funkciu F dodefinujeme pre T ako $F(T,x) = (x-K)^+$. Získali sme teda spojitú funkciu a pre potrebnú výšku kapitálu k realizácii stratégie s výplatou $(S_T-K)^+$ v čase T dostávame $C_t := (S_t-K)\Phi\Big(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)$.
(3) Pomocou Itôovej formule ukážte, že

$$(S_T-K)^+ \overset{\text{si}}{=} C_t + \textstyle\int_t^T \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)dS_s, \quad t\in[0,T). \tag{4.22}$$

Spočítajme parciálne derivácie $F(t,x)$ podľa x a t.

$$\tfrac{\partial}{\partial x}F(t,x) = \Phi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)+\tfrac{(x-K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\tfrac{-(x-K)}{\sigma^2 T-t} = \Phi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big),$$

$$\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big),$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial t}F(t,x) = (x-K)^2\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big(\tfrac{1}{2\sigma}(T-t)^{-\frac{3}{2}}\Big)-\tfrac{1}{2}\sigma(T-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\\ &-\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{(x-K)^2}{\sigma^2(T-t)^2}\Big) = -\tfrac{1}{2}\sigma(T-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi\Big(\tfrac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).\end{aligned}$$

Pre $t\in[0,T)$ potom podľa Itôovho vzorca platí

$$C_t := F(t,S_t) \overset{\text{si}}{=} F(0,S_0)+\sigma\textstyle\int_0^t \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)dS_s.$$

Nakoniec dostávame pre čas T

$$C_T = (S_T-K)^+ \overset{\text{si}}{=} C_t + \lim_{r\to T-}\textstyle\int_t^r \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)dS_s = C_t + \int_t^T \Phi\Big(\frac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)dS_s.$$

Príklad 4.23. *V Bachelierovom modeli pre tržnú cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ s nulovou bezrizikovou úrokovou mierou $r=0$ spočítajte spravodlivú (bezarbitrážnu) cenu nasledujúceho derivátu*

$$F_T = S_T^* = \max_{t\leq T} S_t.$$

Chceme spočítať $E[S_T^*|\mathscr{F}_t]$. Nech teda S_t označuje súčasnú cenu akcie (v čase t), S_t^* súčasné maximum a označme si maximálny prírastok k súčasnej cene do času T ako

$$M = \max_{t\leq r\leq T}(S_r - S_t).$$

Potom pre cenu nášho derivátu v čase T platí

$$\begin{aligned}S_T^* &= S_t^* && \text{ak } M \leq S_t^*-S_t\\ &= S_t+M && \text{ak } M\geq S_t^*-S_t,\end{aligned}$$

teda $S_T^* = \max\{S_t^*,S_t + M\}$. Pre náhodnú veličinu M dostávame z pozorovania 2.11 o rozdelení priebežného maxima Wienerovho procesu

$$M = \max_{t\le r\le T}(S_r - S_t) = \max_{t\le r\le T}\sigma(W_r - W_t) \sim \sigma\max_{u\le T-t} W_u \sim \sigma|W_{T-t}|.$$

Pomocou zavedených výrazov môžme ďalej písať

$$E[S_T^*|\mathscr{F}_t] = E[\max\{S_t^*,S_t + M\}|\mathscr{F}_t]. \tag{4.23}$$

Spočítajme $E(\max\{x^*,x + M\})$, kde $x \le x^* \in \mathbb{R}$.

$$E(\max\{x^*,x + M\}) = x^* + E(M - (x^* - x))^+ = x^* + E\Big(\sigma\sqrt{T-t}|Z| - (x^* - x)\Big)^+$$

kde Z je náhodná veličina s normovaným normálnym rozdelením. Ďalej je preto

$$E\Big(\sigma\sqrt{T-t}|Z| - (x^* - x)\Big)^+ = (x^* - x)P(\sigma\sqrt{T-t}|Z| \le x^* - x)$$
$$+ \sigma\sqrt{T-t}E\Big[|Z|; |Z| > \tfrac{x^*-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big] = (x^* - x)2\Big[\Phi\Big(\tfrac{x^*-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big] + 2\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x^*-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).$$

Pre $E(\max\{x^*,x + M\})$ sme dostali

$$E(\max\{x^*,x + M\}) = x^* + 2\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\tfrac{x^*-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + 2(x^* - x)\Big[\Phi\Big(\tfrac{x^*-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big].$$

Označme $f_t(z,y) \stackrel{\text{def}}{=} z+2\sigma\sqrt{T-t}\varphi\Big(\frac{y}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)+2y\Big[\Phi\Big(\frac{y}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)-1\Big]$. Spočítajme parciálne derivácie funkcie f:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f_t(z,y)}{\partial z} &= 1;\\
\tfrac{\partial f_t(z,y)}{\partial y} &= 2\Big[\Phi\Big(\tfrac{y}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big];\\
\tfrac{\partial^2 f_t(z,y)}{\partial z^2} &= 0;\\
\tfrac{\partial^2 f_t(z,y)}{\partial y^2} &= \tfrac{2}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{y}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big);\\
\tfrac{\partial^2 f_t(z,y)}{\partial z\partial y} &= 0;\\
\tfrac{\partial f_t(z,y)}{\partial t} &= -\tfrac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{y}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).
\end{aligned}$$

Označme proces $D_t = S_t^* - S_t$, potom pomocou Itôovej formule dostávame

$$df_t(S_t^*,D_t) = 2\Big[\Phi\Big(\tfrac{S_t^*-S_t}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big]dD_t + dS_t^* = 2\Big[\Phi\Big(\tfrac{S_t^*-S_t}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big]dS_t,$$

pretože máme

$$dS_t^* + 2\Big[\Phi\Big(\tfrac{S_t^*-S_t}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big]dS_t^* = [1 + 2(\Phi(0) - 1)]dS_t^* = 0dS_t^* = 0,$$

kde prvá rovnosť vyplýva z nasledujúceho: proces S_t^* je spojitý a neklesajúci, rastie tam kde $S_t^* = S_t$. Potom je miera, podľa ktorej integrujeme, sústredená na množine $\{t \in [0,\infty), S_t = S_t^*\}$ a pre vnútro zátvorky pri Φ dostávame 0.
Pre každé $r \in [t,T)$ sme celkovo dostali

$$f_r(S_r^*,S_r^* - S_r) \stackrel{\text{si}}{=} f_t(S_t^*,S_t^* - S_t) + \textstyle\int_t^r 2\Big[1 - \Phi\Big(\tfrac{S_s^*-S_s}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)\Big]dS_s.$$

Nakoniec teda stačí aby $z \to T-$ a dostávame

$$S_T^* \stackrel{\text{si}}{=} f_t(S_t^*,S_t^* - S_t) + \textstyle\int_t^T 2\Big[1 - \Phi\Big(\tfrac{S_s^*-S_s}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)\Big]dS_s.$$

Celkovo sme ukázali, že existuje replikačná stratégia, ktorá poskytuje v čase T možnosť výplaty $F_T = S_T^*$.

Príklad 4.24. *Uvažujte model tržnej ceny akcie S sledujúci geometrický Brownov pohyb 4.1.2, teda*

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

kde W je Wienerov proces nezávislý s $S_0 > 0$. Označme $\mathscr{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\{S_0, W_s; s \leq t\}$ a predpokladajme, že úroková miera na peňažnom trhu je rovná konštante $r \in [0,\infty)$. Buď $\hat{S}_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$ diskontovaná tržná cena akcie pre $t \in [0, \infty)$, t.j.

$$\hat{S}_t = e^{-rt}S_0 \exp\{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}, \quad d\hat{S}_t = \hat{S}_t\Big((\mu - r)dt + \sigma dW_t\Big).$$

(1) *Pre $T \in [0,\infty)$ ukážte, že existuje $\tilde{P}_T \sim P$ martingalová miera procesu $\hat{S}^{(T)} = \hat{S}_{t\wedge T}$ taká, že $\tilde{W}_t^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}(t \wedge T)$, $t \geq 0$ je Wienerov pri $\tilde{P}_T$.*

Označme si $Y_t := -\frac{\mu-r}{\sigma}\mathbb{1}_{[t\leq T]}$, potom $Y_t = 0$ pre $t > T$, Y je progresívne merateľný proces, $\int_0^T ||Y_s||^2 ds < \infty$. Ďalej na základe poznámky 4.17 k Novikovej podmienke 4.16 overíme pre ľubovoľné $t \geq 0$ konečnosť výrazu $E\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds\right\}$, teda

$$E\exp\left\{\tfrac{1}{2}\int_0^t \tfrac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\mathbb{1}_{[s\leq T]}ds\right\} = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\tfrac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}(t \wedge T)\right\} < \infty.$$

Máme teda splnené predpoklady Girsanovej vety 4.15, preto existuje na priestore $(\Omega, \mathscr{F})$ miera $\tilde{P}_T$ daná predpisom

$$\tilde{P}_T(A) = E\left[\mathscr{E}_T\Big(\int -\tfrac{\mu-r}{\sigma}\mathbb{1}_{[s\leq T]}dW_s\Big); A\right] = \int_A e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T} dP, \ A \in \mathscr{A}.$$

Radon-Nikodýmova derivácia pre čas T má potom tvar

$$\frac{d\tilde{P}_T}{dP} = \exp\{\tfrac{\mu-r}{\sigma}W_T - \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\mu-r}{\sigma}\Big)^2 T\}.$$

Voči miere $\tilde{P}_T$ je podľa Girsanovej vety proces $\tilde{W}$ Wienerov a stochastický proces $\hat{S}^{(T)}$ je pri tejto miere martingalom

$$d\hat{S}_t = (\mu - r)\hat{S}_t dt + \sigma\hat{S}_t\Big(-\tfrac{\mu-r}{\sigma}dt + d\tilde{W}_t\Big) = \sigma\hat{S}_t d\tilde{W}_t.$$

(2) *Pre $K \in (0,\infty)$ označme $\hat{K} := e^{-rT}K$ a ukážeme, že platí*

$$\tilde{E}_T[e^{-rT}(S_T - K)^+|\mathscr{F}_t] \stackrel{\text{si}}{=} \hat{S}_t\Phi(d_+) - \hat{K}\Phi(d_-), \quad d_\pm = \Phi\Bigg(\frac{\ln(\frac{\hat{S}_t}{K}) + rT \pm \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}\Bigg).$$

Pre strednú hodnotu $\tilde{E}_T[e^{-rT}(S_T - K)^+]$ môžme písať

$$\begin{aligned} &e^{-rT}\tilde{E}_T[(S_T - K)^+] = e^{-rT}\tilde{E}_T[(S_T - K)\mathbb{1}_{[S_T\geq K]}] = e^{-rT}\tilde{E}_T[S_T\mathbb{1}_{[S_T\geq K]} - K\mathbb{1}_{[S_T\geq K]}] \\ &= e^{-rT}\tilde{E}_T[S_T\mathbb{1}_{[S_T\geq K]}] - Ke^{-rT}\tilde{P}_T[S_T \geq K]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Proces $\hat{S}_t$ môžme vyjadriť za pomoci Wienerovho procesu $\tilde{W}$ vzhľadom k miere $\tilde{P}_T$ ako $\hat{S}_t = e^{-rt}S_0\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\tilde{W}_t\}$, potom $\hat{S}_T = \hat{S}_t\exp\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\}$. Preto ďalej pre prvý člen rovnosti (4.24) máme

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_T[\hat{S}_T\mathbb{1}_{[\hat{S}_T\geq\hat{K}]}] = \tilde{E}_T[\hat{S}_t\exp\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\}\mathbb{1}_{[S_T\geq K]}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\tilde{E}_T[\hat{S}_t\exp\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)\}\mathbb{1}_{[S_T\geq K]}]. \end{aligned}$$

Ďalej podmienku $\hat{S}_T \geq \hat{K}$ si vyjadríme ako

$$\hat{S}_t \exp\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\} \geq \hat{K}$$

$$-\tfrac{(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}{\sqrt{T-t}} \leq \tfrac{\ln\left(\frac{\hat{S}_t}{\hat{K}}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Spočítajme teda podmienenú strednú hodnotu $\tilde{E}_T\Big[(\hat{S}_T - \hat{K})^+|\mathscr{F}_t\Big]$.

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}_T\Big[(\mathrm{x}\cdot\exp\Big\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\Big\} - \hat{K})^+\Big] \\
&= E\Big[(\mathrm{x}\cdot\exp\Big\{\sigma(W_T - W_t) + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\} - \hat{K})^+\Big] \\
&= \hat{S}_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} E\Big[e^{\sigma\sqrt{T-t}W_1}; W_1 > \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big(\ln\left(\tfrac{\mathrm{x}}{K}\right) - rT - \tfrac{\sigma^2(T-t)}{2}\Big)\Big] \\
&- \hat{K}\cdot P\Big(W_1 > \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\ln\left(\tfrac{\mathrm{x}}{K}\right) - rT - \tfrac{\sigma^2(T-t)}{2})\Big).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Pretože $W_1 \sim N(0{,}1)$ pre $\alpha, y \in \mathbb{R}$ platí pre strednú hodnotu na pravej strane rovnosti (4.25)

$$\begin{aligned}
&E[e^{\alpha W_1}; W_1 > y] = \textstyle\int_y^\infty e^{\alpha w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\alpha^2}\int_y^\infty e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\alpha w + \alpha^2)}dw \\
&= e^{\frac{1}{2}\alpha^2}\textstyle\int_y^\infty \varphi(w-\alpha)dw = e^{\frac{1}{2}\alpha^2}\Phi(\alpha - y).
\end{aligned}$$

V našom prípade je $\alpha = \sigma\sqrt{T-t}$ a $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\log\left(\frac{S_t}{K}\right) - rT - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\Big)$. Celkovo dostávame pre diskontovanú hodnotu kapitálu potrebného k realizácii stratégie s výplatou $(S_T - K)^+$

$$\tilde{E}_T\Big[(\hat{S}_T - \hat{K})^+|\mathscr{F}_t\Big] = \hat{S}_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}e^{\frac{1}{2}\alpha^2}\Phi(\alpha - y) - \hat{K}\Phi(-y). \tag{4.26}$$

Pre bod T obdobne dodefinujeme výslednú funkciu pomocou $(S_T - K)^+$.
(3) *Pomocou Itôovej formule ukážte, že*

$$e^{-rT}(S_t - K)^+ = (\hat{S}_t - \hat{K})^+ \overset{\text{si}}{=} \hat{C}_t + \textstyle\int_t^T \Phi\Big(\frac{\ln(\frac{\hat{S}_s}{\hat{K}}) + rT + \frac{\sigma^2(T-s)}{2}}{\sigma\sqrt{T-s}}\Big)d\hat{S}_s.$$

Označme si funkciu $F(t,x) = x\Phi\Big(\frac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - \hat{K}\Phi\Big(\frac{\ln(x/\hat{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)$, dodefinovaná pomocou $(x-K)^+$ je spojitá na $[0,T]$. Spočítajme jej parciálne derivácie.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial x}F(t,x) = \Phi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \varphi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&- \tfrac{\hat{K}}{x\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) = \Phi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big),
\end{aligned}$$

kde sme využili, že

$$\varphi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) = \varphi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\exp\{-\ln\tfrac{x}{\hat{K}}\}.$$

Ďalej pre druhú paricálnu deriváciu podľa x a deriváciu podľa t máme postupne

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x) = \varphi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\tfrac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\
&\tfrac{\partial}{\partial t}F(t,x) = x\varphi\Big(\tfrac{\ln x/\hat{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big[\tfrac{\ln x/\hat{K}}{2\sigma}(T-t)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}\sigma(T-t)^{-\frac{1}{2}}\Big] \\
&- \hat{K}\varphi\Big(\tfrac{\ln x/\hat{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big[\tfrac{\ln x/\hat{K}}{2\sigma}(T-t)^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}\sigma(T-t)^{-\frac{1}{2}}\Big] \\
&= \hat{K}\varphi\Big(\tfrac{\ln x/\hat{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big[\tfrac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}\Big].
\end{aligned}$$

Ďalej je $0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sigma^2 x^2$ a konečne pomocou Itôovej formule teda pre $F(t,S_t)$ dostávame

$$C_t := F(t,S_t) \overset{\text{si}}{=} F(0,S_0) + \int_0^t \Phi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K})+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) d\hat{S}_s. \tag{4.27}$$

Pre hodnotu v čase T je nakoniec

$$C_T \overset{\text{si}}{=} C_t + \lim_{r\to T-}\int_t^r \Phi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K})+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) d\hat{S}_s = C_t + \int_t^T \Phi\Big(\tfrac{\ln(x/\hat{K})+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) d\hat{S}_s.$$

Príklad 4.25. *V Black-Scholesovom modeli pre tržnú cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ spočítajte spravodlivú (bezarbitrážnu) cenu digitálnej opcie*

$$C_t \overset{\text{def}}{=} P(S_T^* > K), \ \textit{kde } S_T^* = \max_{t\leq T} S_t.$$

Pre cenu akcie v čase $t \in [0,\infty)$ uvažujme proces $S_t = S_0\exp\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$. Označme

$$M^* := \max_{t\leq s\leq T}\frac{S_s}{S_t} = \max_{t\leq s\leq T}\exp\{\sigma(W_s - W_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(s-t)\} \sim \max_{u\leq T-t}\exp\{\sigma W_u - \frac{1}{2}\sigma^2 u\}.$$

Potom pre veličinu S_T^* môžme písať $S_T^* = \max\{S_t^*, S_t \cdot M^*\}$, a teda hľadanú spravodlivú cenu budeme počítať ako $P(\max\{S_t^*, S_t\cdot M^*\} > K|\mathscr{F}_t)$.

Označme si $\tau = T - t$. Proces $\hat{W}_u = W_u - \frac{1}{2}\sigma u$ je Wienerov na $[0,\tau]$ pri $\hat{P}_\tau \sim P$, kde

$$\frac{dP}{d\hat{P}_\tau} = e^{-\frac{\sigma}{2}\hat{W}_\tau - \frac{\sigma^2}{8}\tau}.$$

Potom $M^* \sim \max_{u\leq\tau} e^{\sigma\hat{W}_u}$. Uvedomíme si, že $\max_{u\leq\tau} e^{\sigma\hat{W}_u} = e^{\sigma\max_{u\leq\tau}\hat{W}_u}$ a tak položme $\hat{M}_\tau^* \overset{\text{def}}{=} e^{\sigma\hat{W}_\tau^*}$. Spravodlivú cenu teda budeme ďalej počítať ako

$$P(S_T^* \geq K|\mathscr{F}_t) \overset{\text{si}}{=} P(S_T^*/S_t \geq K/S_t|\mathscr{F}_t) \overset{\text{si}}{=} P(\max\{x^*,\hat{M}_\tau^*\} \geq y)|_{x*=S_t^*/S_t, y=K/S_t}.$$

V prípade $x^* \geq y$ je rovno $P(\max\{x^*,\hat{M}_\tau\} \geq y) = 1$, úroveň K bola dosiahnutá už do času t. V opačnom prípade teda $y = K/S_t$ budeme uvžovať väčšie než 1, čo znamená, že $\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\ln y}{\sigma} > 0$. Pripomeňme ešte, že z 2.16 poznáme združené rozdelenie W_t^*, W_t.

$$
\begin{aligned}
P(\hat M^*_\tau \geq y) &= \hat E[e^{-\frac{\sigma}{2}\hat W_\tau - \frac{\sigma^2}{8}\tau}; \hat M^*_\tau \geq y] = E[e^{-\frac{\sigma}{2}W_\tau - \frac{\sigma^2}{8}\tau}; W^*_\tau \geq \tfrac{\ln y}{\sigma}] \\
&= \textstyle\int_{[w^* \geq \frac{\ln y}{\sigma}]} f_{W_\tau, W^*_\tau}(w,w^*) e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} dw^* dw \\
&= \textstyle\int_{[w^* \geq \frac{\ln y}{\sigma}, w^* \geq w^+]} \frac{2(2w^*-w)}{\sqrt{2\pi\tau^3}} e^{-\frac{(2w^*-w)^2}{2\tau}} e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} dw^* dw \\
&= \textstyle\int e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(2w^*-w)^2}{2\tau}}\right]^{\infty}_{w^* = \max\{0, w, \frac{\ln y}{\sigma}\}} dw \\
&= \textstyle\int e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(2w^*-w)^2}{2\tau}}\right]^{\infty}_{w^* = \max\{w, \frac{\ln y}{\sigma}\}} dw \\
&= \textstyle\int e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(2w^*-w)^2}{2\tau}}\right]^{\infty}_{w^* = \max\{w, \mu\}} dw \\
&= \textstyle\int_\mu^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{w^2}{2\tau}} dw + \int_{-\infty}^\mu e^{-\frac{\sigma}{2}w - \frac{\sigma^2}{8}\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(2\mu - w)^2}{2\tau}} dw \\
&= \textstyle\int_\mu^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \varphi\Big(\frac{w + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) dw + e^{-\mu\sigma} \int_{-\infty}^\mu \frac{1}{\sqrt{\tau}} \varphi\Big(\frac{w + \sigma\tau/2 - 2\mu}{\sqrt{\tau}}\Big) dw \\
&= \Big[\Phi\Big(\tfrac{w + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\Big]^\infty_{w=\mu} + e^{-\mu\sigma} \Big[\Phi\Big(\tfrac{w + \sigma\tau/2 - 2\mu}{\sqrt{\tau}}\Big)\Big]^\mu_{w=-\infty} \\
&= 1 - \Phi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) + e^{-\mu\sigma}\Phi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) =: G(\mu, \tau).
\end{aligned}
$$

Spočítajme ďalej prvú a druhú parciálnu deriváciu funkcie G podľa μ a prvú podľa τ. Znovu využijeme vzorec $\varphi(\frac{\theta+\xi}{\sqrt{\tau}}) = \varphi(\frac{\theta-\xi}{\sqrt{\tau}})e^{-2\theta\xi/\tau}$ odkiaľ platí rovnosť

$$
\varphi\Big(\frac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) = \varphi\Big(\frac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)e^{-\sigma\mu}.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \mu} &= -\sigma e^{-\mu\sigma}\Phi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) - \tfrac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\mu\sigma}\varphi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) - \tfrac{1}{\sqrt{\tau}}\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) \\
&= -\sigma e^{-\mu\sigma}\Phi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) - \tfrac{2}{\sqrt{\tau}}\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big), \\
\frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} &= \sigma^2 e^{-\mu\sigma}\Phi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) + \tfrac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) + \tfrac{1}{\sqrt{\tau}}(\sigma + \tfrac{2\mu}{\tau})\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) \\
&= \sigma^2 e^{-\mu\sigma}\Phi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big) + \tfrac{2}{\sqrt{\tau}}\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)[\sigma + \tfrac{\mu}{\tau}] = -\sigma\tfrac{\partial G}{\partial \mu} + \tfrac{2\mu}{\sqrt{\tau^3}}\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big), \\
\frac{\partial G}{\partial \tau} &= -\varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\tfrac{\partial}{\partial\tau}\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}} + e^{-\mu\sigma}\varphi\Big(\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\tfrac{\partial}{\partial\tau}\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}} \\
&= \varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\tfrac{\partial}{\partial\tau}\Big[\tfrac{-\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}} - \tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big] \\
&= \varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\tfrac{\partial}{\partial\tau}\tfrac{-2\mu}{\sqrt{\tau}} = \varphi\Big(\tfrac{\mu + \sigma\tau/2}{\sqrt{\tau}}\Big)\tfrac{\mu}{\sqrt{\tau^3}}.
\end{aligned}
$$

Označme $\tau_t \stackrel{\text{def}}{=} T - t, \mu_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln K - \ln S_t}{\sigma}$ a $C_t \stackrel{\text{def}}{=} G(\mu_t\, \tau_t)$, celkovo dostávame, že

$$
\begin{aligned}
dC_t &= -\tfrac{\partial G}{\partial \tau}(\mu_t\, \tau_t)\, dt + \tfrac{\partial G}{\partial \mu}(\mu_t\, \tau_t)\, d\hat W_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}(\mu_t\, \tau_t)\, dt \\
&= \tfrac{\partial G}{\partial \mu}(\mu_t\, \tau_t)\, dW_t + \Big[\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}(\mu_t\, \tau_t) - \tfrac{\partial G}{\partial \tau}(\mu_t\, \tau_t) - \tfrac{\sigma}{2}\tfrac{\partial G}{\partial \mu}(\mu_t\, \tau_t)\Big] dt = \tfrac{\partial G}{\partial \mu}(\mu_t\, \tau_t)\, dW_t,
\end{aligned}
$$

pretože $d\tau_t = -dt$ a $d\mu_t = d\hat W_t = dW_t - \frac{\sigma}{2}\, dt$. Poznamenajme, že Itôova formula nám u tejto digitálnej opcie poskytuje uvedený vzťah do prvého vstupu ceny S nad bariéru K. Potom už bude δ-hedging nulový. Technicky je to podobné prípadom z minulých úloh, kde sme používali pre krajný bod T prechod v limite $r \to T$.

Záver

V práci sme sa venovali niektorým vybraným aspektom stochastickej analýzy, ktoré sme smerovali k praktickému využitiu vo finančných aplikáciách. Vybudovali sme si predstavu, že v prípade ak uvažujeme L_2 integráciu ako východzí bod, tak pomocou pojmu lokálneho martingalu a Doob-Meyerovej vety je možné naviazať na teóriu, ktorá by rozšírila už zavedené pojmy. Snažili sme sa pritom vyhnúť pojmu σ-algebry do markovkého času. V úseku teórie sa nám podarilo tento pojem obísť, nevyhli sme sa mu v príkladoch, konkrétne pri silnej markovskej vlastnosti a následného princípu zrkadlenia Wienerovho procesu. Určite by bolo možné nahradiť použitý prístup alternatívnym riešením bez nutnosti využitia σ-algebry do markovského času, otázkou ostáva, do akej miery by takýto prístup bol efektívny.

Zoznam použitej literatúry

Dupačová, J., Hurt, J. a Štěpán, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. ISBN 1-4020-0840-6.

Karatzas, I. a Shreve, S. E. (1991). *Brownian motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York, Second edition. ISBN 978-0-387-97655-6.

Lachout, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.

Neubrunn, T., Šalát, T. a Švec, M. (1987). *Matematická analýza funkcií reálnej premennej.* Alfa, Bratislava. ISBN 063-561-87.

Revuz, D. a Yor, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-662-21728-3.