

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

KARLÍN



Jan Pušman

Jednoduchá proudění nenewtonovských tekutin s obecnými hraničními podmínkami

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jaroslav Hron, Ph.D.

Studijní program: Obecná fyzika

2006

KNIHOVNA MFF UK



2565053805

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE Knihovna mat. - fyz. fakulty Matematické oddělení	
přij. č. 41/2607	sig.

Na tomto místě bych rád vyjádřil své poděkování vedoucímu práce RNDr. Jaroslavu Hronovi, Ph.D. za četné rady k odbornému i formálnímu charakteru práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 15. 5. 2007

Jan Pušman



Na tomto místě bych rád vyjádřil své poděkování vedoucímu práce Bc. J. Janouškovi Ph.D. za čtení textu a odbornou korekturu. Děkuji také za poskytnutí literatury a za poskytnutí informací o možnostech řešení.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci zpracoval samostatně a výhradně na základě literatury, která je uvedena v seznamu literatury. Souhlasím se zapůjčením práce a jejím zveřejněním.

Jan Janoušek

15. 12. 2007

Obsah

1 Úvod	8
1.1 Nenewtonovské tekutiny	8
1.1.1 Mocninné tekutiny	9
1.1.2 Tekutiny s viskozitou závisující na tlaku	10
2 Příklady jednoduchých proudění pro newtonovskou tekutinu	12
2.1 Ustálené proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami	13
2.2 Proudění viskózní kapaliny v trubici	14
2.3 Navierova podmínka skluzu v jednoduchých případech	16
3 Jednoduchá proudění pro nenewtonovskou tekutinu	18
3.1 Proudění v trubici pro mocninnou tekutinu	18
3.2 Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami pro mocninnou tekutinu	21
3.3 Proudění mezi dvěma deskami pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku	23
3.4 Numerické řešení proudění mezi deskami pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku splňující podmínku skluzu na hranici	30
3.4.1 Slabá formulace	30
3.4.2 Numerické řešení	33
3.5 Proudění v trubici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku	42
4 Závěr	49
A Cylindrické souřadnice.	51
A.1 Složky metrického tenzoru	51
A.2 Normovaná báze vektorů a 1-forem	52
A.3 Kovariantní derivace	52

A.4 Christoffelovy symboly	53
A.5 Diferenciální operátory	53

Literatura	55
-------------------	-----------

Název práce: Jednoduchá proudění nenewtonovských tekutin s obecnými hraničními podmínkami

Autor: Jan Pušman

Katedra (ústav): Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jaroslav Hron, Ph.D.

e-mail vedoucího: hron@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt:

V předložené práci studujeme analyticky i numericky případy rovinného stacionárního proudění nestlačitelné nenewtonovské tekutiny. Pracujeme s modelem mocninné tekutiny, který posléze zobecníme přidáním tlakové závislosti u viskozity. Zabýváme se případy proudění v nekonečně dlouhé trubici konstantního kruhového průřezu a v prostoru mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými deskami. Na hranici uvažujeme Dirichletovy podmínky i Navierovu podmínku skluzu.

Klíčová slova: nenewtonovské tekutiny, mocninné tekutiny, viskozita závislá na tlaku

Title: Simple flows of non-Newtonian Fluids with general boundary conditions

Author: Jan Pušman

Department: Mathematical Institute, Charles University, Prague

Supervisor: RNDr. Jaroslav Hron, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: hron@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:

In the present work we study plane stationary flow of incompressible non-Newtonian fluid analytically and numerically. We use power-law fluid which we later generalize to model with pressure-dependent viscosity. We are interested in the flow between two infinite parallel desks and in the flow in infinitely long pipe of circular cross-section. We assume Dirichlet boundary conditions and Navier's slip condition.

Keywords: non-Newtonian fluids, power-law fluids, pressure-dependent viscosity

Kapitola 1

Úvod

1.1 Nenewtonovské tekutiny

Navierovy-Stokesovy rovnice jsou základem mechaniky tekutin a historicky velmi úspěšným a rozšířeným fyzikálním modelem. Víme však, že pro řadu tekutin popis pomocí těchto rovnic selhává a je třeba tento model modifikovat. V této práci se na příkladech jednoduchých proudění zabýváme některými zobecněními klasického Navierova-Stokesova modelu, nejvíce prostoru věnujeme myšlence viskozity závislé na tlaku. Nejprve však definujeme pojmy newtonovské a nenewtonovské tekutiny.

Tekutinu nazvu newtonovskou, pokud je závislost tenzoru napětí $\mathbf{T}$ na tenzoru deformace $\mathbf{D}$ lineární. V opačném případě se jedná o tekutinu nenewtonovskou. $\mathbf{T}$ v definici je Cauchyův tenzor napětí a $\mathbf{D}$ je symetrická část gradientu rychlosti. Klasické Navierovy-Stokesovy rovnice popisují chování newtonovské tekutiny.

Uvedme některé vlastnosti, které se mohou projevit u nenewtonovských tekutin a odlišují je od newtonovských, u kterých tyto vlastnosti nenajdeme. Jedná se o zeslabení nebo zesílení smyku (shear-thickening, shear-thinning), nelineární viskozitu obecně, přítomnost rozdílů normálových napětí v jednoduchém smykovém poli. Tato vlastnost stojí v pozadí známého Weissenbergova jevu, kdy při ponoření rotující tyče do nenewtonovské tekutiny (nejčastěji směsi polymerů) pozorujeme jak tekutina “šplhá” po tyči nahoru. V případě newtonovské tekutiny by byla naopak hladina v okolí tyče nejnižší

vlivem odstředivé síly.¹ Dále zmiňme např. napěťovou relaxaci, nelineární creep či skokové singularity v tenzoru napětí. Vzhledem ke své definici je newtonovská tekutina dosti široký pojem, dále uvedeme konkrétní příklad modelu nenewtonovské tekutiny a na pojmech zesílení a zeslabení smyku ukážeme, jak se liší od modelu newtonovské tekutiny.

1.1.1 Mocninné tekutiny

Důležitým zástupcem nenewtonovských tekutin jsou tzv. *mocninné tekutiny*², pro které je smykové napětí $\tau := \mathbf{T}_{12}$ dáno vztahem:

$$\tau = K|\kappa|^{n-1}\kappa \quad (1.1)$$

Kde $\kappa = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mathbf{D}_{12}$, K a n jsou empirické konstanty, člen $K|\kappa|^{n-1}$ bývá někdy nazýván efektivní viskozitou.

Výhodou tohoto modelu je jednoduchá matematická formule schopná přibližně popsat chování reálné nenewtonovské tekutiny. Tento model zahrnuje fyzikální skutečnost, že reálná tekutina má maximální i minimální hodnotu efektivní viskozity. Podle hodnoty exponentu n můžeme tyto tekutiny dále rozdělit:

- Pokud je exponent n jednotkový, redukuje se tento model na newtonovskou tekutinu s viskozitou K .
- Pro $0 < n < 1$ (*pseudoplastické tekutiny*). Pro tyto tekutiny je charakteristickým chováním zeslabení smyku. Jedná se tedy látky, které mají menší efektivní viskozitu při vyšším $|\kappa|$. Jako zástupce uvedme roztoky a směsi polymerů. Ze známých látek jmenujme např. gel na vlasy nebo kečup.
- $n > 1$ (*dilatantní tekutiny*). Charakteristickým chováním je zesílení smyku, tedy nárůst efektivní viskozity se zvětšujícím se $|\kappa|$. Dilatantní

¹Ve skutečnosti může obdoba Weissenbergova jevu nastat i u newtonovské tekutiny a to když ponoříme rotující tyč do nádoby s dvěma nemísitelnými newtonovskými tekutinami. Pak můžeme pozorovat výše zmiňovaný jev na rozhraní obou tekutin. Přestože je tento jev vizuálně podobný jevu u nenewtonovských tekutin, nemůžeme v tomto případě mluvit o tom, že by jedna či druhá tekutina vykazovala rozdíl normálových napětí při smyku. Více k této tématice lze nalézt v [1].

²Často se používá označení Power-law fluids.

tekutiny mají významnou roli v automobilovém i vojenském průmyslu. V automobilech s náhonem na všechna čtyři kola se vlastností těchto tekutin používá ke kontrole trakce. Vojenský průmysl se zaměřuje na použití dilatantních tekutin jako materiálu na lehké neprůstřelné vesty.

V definici pro mocninnou tekutinu jsem zvolil závislost T_{12} na D_{12} , protože v praxi se nejčastěji právě tato závislost ve viskometrech měří. Obecně budeme mocninnou tekutinou označovat model popsany konstituční rovnici³ v následujícím tvaru:

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + 2\mu |\mathbf{D}|^{p-2} \mathbf{D} \quad (1.2)$$

1.1.2 Tekutiny s viskozitou závisující na tlaku

Vedle výše uvedených mocninných tekutin se budeme také zabývat modelem nestlačitelné tekutiny, který připouští viskozitu závisující na tlaku. K tomu nás mohou motivovat experimentální výsledky (např. Cutler 1958, Johnson & Greenwood 1980, Johnson & Tevaarwerk 1977), které právě tuto skutečnost prokazují. U nestlačitelných tekutin⁴ bylo zjištěno, že viskozita závisí na tlaku exponenciálně. Model tekutiny s viskozitou závisující na tlaku má uplatnění např. v teorii lubrikantů. Typickým inženýrským problémem je proudění oleje v ložiscích, kde hraje viskozita závislá na tlaku podstatnou roli. V biomechanice se tohoto modelu rovněž využívá při modelování tekutiny v umělých kloubech. Za zmínku stojí, že je experimentálně ověřeno, že viskozita může záviset i na teplotě, v této práci se ale tímto jevem zabývat nebudeme.

Jako konstituční rovnici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku π vezmeme pro potřeby této práce vztah

³Níže uvedená konstituční rovnice je pouze speciální případem obecné rovnice pro newtonovskou viskózní tekutinu $\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{D}^2$ kde $\alpha_i = f(\rho, \mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)$, $\mathbf{I}_D = \text{tr} \mathbf{D}$, $\mathbf{II}_D = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{D})^2 - \text{tr} \mathbf{D}^2]$, $\mathbf{III}_D = \det \mathbf{D}$ a ρ je hustota. Její odvození vychází z předpokladů, že tenzor napětí závisí na hustotě a gradientu rychlosti, nezávislosti na pozorovateli (vztažné soustavě) a požadavku izotropie. Viz např. [3]

⁴V reálném případě samozřejmě nemůžeme experimentovat s nestlačitelnou tekutinou. Když mluvíme o nestlačitelné tekutině, máme na mysli tekutinu, která vykazuje objemové změny řádově menší, než je vliv působícího tlakového napětí.

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + 2\mu(\pi)|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D}, \quad (1.3)$$

Jelikož tento model vychází z konstituční rovnice mocninné tekutiny, je schopný popsat zesílení i zeslabení smyku. Závislost viskozity μ na tlaku π budeme předpokládat v následující podobě:

$$1. \mu(\pi) = \exp(a\pi),$$

$$2. \mu(\pi) = k\pi^q.$$

Konstanty a i k jsou kladné v souladu s experimenty, které ukazují, že viskozita se vzrůstajícím tlakem roste.

Model (1.3) využijeme v analytických výpočtech. Vzhledem k tomu, že výraz $|\mathbf{D}|^{p-2}$ může být singulární pro $p < 2$, budeme při hledání numerického řešení pracovat s efektivní viskozitou v podobě:

$$\mu^* = \mu(\pi)(A + |\mathbf{D}|)^{p-2}, \quad (1.4)$$

kde A je kladná reálná konstanta. Konstituční rovnice má pak tvar:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu(\pi)(A + |\mathbf{D}|)^{p-2}\mathbf{D}. \quad (1.5)$$

Kapitola 2

Příklady jednoduchých proudění pro newtonovskou tekutinu

Než se pustíme do složitějších situací s nekonstantní viskozitou, je užitečné si alespoň pro pozdější srovnání připomenout některá klasická řešení Navierových-Stokesových rovnic v nejjednodušších příkladech. V následujících případech tedy uvažujeme nestlačitelnou tekutinu s konstituční rovnicí:

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.1)$$

Nestlačitelnost vyjadřujeme rovnicí:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

Dosazením konstituční rovnice (2.1) do rovnice rovnováhy (2.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.3)$$

s uvážením podmínky (2.2) získáme jednoduchou úpravou Navierovy-Stokesovy rovnice.

$$\mu\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi + \rho\mathbf{b} = \rho \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} \right) \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

Konvektivní člen $(\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}$ se objevil po rozepsání materiálové derivace na pravé straně (2.3).

2.1 Ustálené proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami

a) Poiseuilleovo proudění

Uvažujme ustálené proudění mezi dvěma nekonečně velkými rovnoběžnými deskami fixovanými v prostoru (souřadnicová soustava viz Obr 2.1). Úlohu budeme řešit v případě, kdy jsou na deskách předepsány Dirichletovy okrajové podmínky:

$$\mathbf{v}|_{y=-1} = 0, \quad \mathbf{v}|_{y=1} = 0. \quad (2.6)$$

Řešení budeme hledat ve tvaru

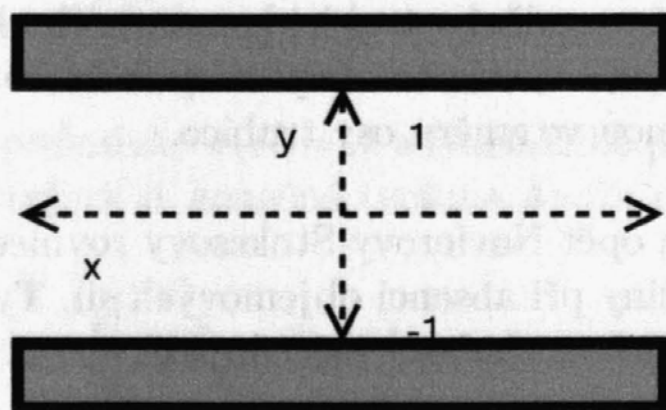
$$\mathbf{v} = v(y) \mathbf{e}_x, \quad \pi = \pi(x, y, z). \quad (2.7)$$

Pokud bychom hledali $\mathbf{v} = v(x, y) \mathbf{e}_x$, tak podmínka nestlačitelnosti (2.2) ihned implikuje nezávislost rychlosti $\mathbf{v}$ na y v (2.7). Zabýváme se situací, kdy je proudění ustálené, a opomíjíme objemové síly $\mathbf{b}$. Navierovy-Stokesovy rovnice (2.4),(2.5) se tak zjednoduší na tvar:

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

Z druhé a třetí rovnosti v (2.8) vidíme, že $\pi = \pi(x)$ a z první rovnice v (2.8) plyne, že její levá i pravá strana se musí rovnat konstantě. Tedy $\frac{d\pi}{dx} = -\delta$. Pro tento případ má hledaná rychlost následující tvar

$$v = -\frac{\delta y^2}{2\mu} + ay + b, \quad (2.9)$$



Obrázek 2.1: geometrické uspořádání

což po uvážení okrajových podmínek dá řešení

$$v = \frac{\delta}{2\mu}(1 - y^2), \quad \pi = -\delta x + C, \quad (2.10)$$

tedy rozdělení rychlostí je parabolické. Vidíme, že pokud bychom požadovali konstantní tlak π , získáme pouze triviální řešení $v = 0$.

b) Couettovo proudění

V tomto případě máme jednu desku fixovanou v prostoru a druhá se vůči ní pohybuje konstantní relativní rychlostí V v kladném směru osy x . Vyjádřeno okrajovými podmínkami:

$$a) \quad \mathbf{v}|_{y=-1} = 0 \quad \mathbf{v}|_{y=1} = (V, 0). \quad (2.11)$$

Vektorové pole rychlostí předpokládáme ve stejném tvaru jako v předchozím případě. Předpokládejme navíc, že ve směru osy x není žádný pokles tlaku. Máme tedy $\pi = \text{konst.}$ Potom první rovnice v (2.8) implikuje $v = \alpha y + \beta$. S uvážením hraničních podmínek máme:

$$v = \frac{V}{2}(y + 1). \quad (2.12)$$

Rozdělení rychlostí je v tomto případě lineární.

2.2 Proudění viskózní kapaliny v trubici

Uvažujme ustálené proudění v trubici konstantního kruhového průřezu. Pro zkoumání této situace zavedeme obvyklé cylindrické souřadnice (r, φ, z) s osou z orientovanou ve směru osy trubice.

Výchozí budou opět Navierovy-Stokesovy rovnice pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny při absenci objemových sil. Ty získají po transformování do cylindrických souřadnic¹ následující tvar:

¹V této práci často využíváme znalosti cylindrických souřadnic. Nejčastěji potřebujeme znát podobu diferenciálních operátorů. Jejich přehled a stručné geometrické odvození lze nalézt v Dodatku A. Potom již snadno získáme rovnice (2.13)-(2.15)

$$\mu \left(\Delta v^r - \frac{v^r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{\partial \pi}{\partial r} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{(v^\phi)^2}{r} + v^r \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r} \frac{\partial v^r}{\partial \phi} + v^z \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

$$\mu \left(\Delta v^\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v^r}{\partial \phi} - \frac{v^\phi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^\phi v^r}{r} + v^r \frac{\partial v^\phi}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r} \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + v^z \frac{\partial v^\phi}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

$$\mu \Delta v^z - \frac{\partial \pi}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r} \frac{\partial v^z}{\partial \phi} + v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) \quad (2.15)$$

Při zkoumání ustáleného proudění v trubici konstantního kruhového průřezu se tyto rovnice výrazně zjednoduší. Vzhledem k symetrii úlohy předpokládáme vektorové pole rychlostí ve tvaru $\mathbf{v} = v(r)\mathbf{e}_z$.

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0, \quad (2.17)$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0. \quad (2.18)$$

Problém se tak úvahami analogickými těm v předchozím odstavci zjednoduší na dvě obyčejné diferenciální rovnice.

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right) = -\delta = \frac{d\pi}{dz}, \quad (2.19)$$

jejichž řešení je

$$v = -\frac{\delta}{4\mu} r^2 + A \ln r + C, \quad \pi = -\delta z + C. \quad (2.20)$$

Po uvážení okrajové podmínky $v(R) = 0$ a fyzikálního požadavku, že velikost rychlosti uprostřed trubice je konečná (volíme $A=0$), máme

$$v = \frac{\delta}{4\mu} (R^2 - r^2), \quad \pi = -\delta z + C, \quad (2.21)$$

kde δ je kladný koeficient udávající diferenciální pokles tlaku. Opět vidíme, že rozdělení rychlostí má parabolický profil.

2.3 Navierova podmínka skluzu v jednoduchých případech

V prvním příkladu oddílu 2.1 jsme uvažovali ustálené proudění nestlačitelné kapaliny mezi dvěma nekonečnými deskami. Hraničními podmínkami (2.6) jsme vyjádřili představu, že kapalina dokonale ulpívá na povrchu desky. Problém nyní modifikujeme a budeme uvažovat *Navierovu podmínku skluzu* na hranici. Tu lze vyjádřit rovnicí (2.22), která klade požadavek na tečnou složku rychlosti a tečné napětí. Budeme se i nadále zabývat situací, kdy je hranice Γ nepropustná, což je vystiženo rovnicí (2.23),

$$\theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (1 - \theta) \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.23)$$

$$\text{na } \Gamma, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

kde $\mathbf{n}$ je vektor vnější normály k hranici Γ , $\mathbf{t}$ je tečný vektor. Vidíme, že pro $\theta = 1$ máme podmínku (2.6). Poznamenejme, že v následujících výpočtech uvažujeme $0 < \theta \leq 1$ a $\theta = 0$ nahrazujeme limitou $\theta \rightarrow 0$

Než se pustíme do složitějších situací, demonstrujeme ideu skluzu na jednoduchém případě. Zkoumejme tedy proudění mezi dvě deskami jako v oddíle 2.1. V tomto geometrickém uspořádání (Obr1.) máme $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, \pm 1, 0)$ a podmínka se redukuje na (2.22)

$$\theta v(-1) - (1 - \theta) \mu \frac{\partial v}{\partial y}(-1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_{-1}, \quad (2.24)$$

$$\theta v(1) + (1 - \theta) \mu \frac{\partial v}{\partial y}(1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_1. \quad (2.25)$$

Povrch dolní desky je označen jako Γ_{-1} , povrch horní desky jako Γ_1 . Po dosazení těchto podmínek do již získaného obecného řešení (2.9) a úpravě dostáváme:

$$v = \frac{\delta}{2\mu}(1 - y^2) - \delta\left(\frac{\theta - 1}{\theta}\right), \quad \pi = -\delta x + C. \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

Uvedme ještě modifikaci příkladu z oddílu 2.2. Pro případ proudění v trubici o poloměru R máme jednu podmínku typu (2.22) na plášti trubice. V situaci příkladu 2.2 se tato podmínka zjednoduší do tvaru:

$$\theta v(R) + (1 - \theta)\mu \frac{\partial v}{\partial r}(R) = 0 \quad (2.28)$$

a dosazením do rovnice (2.21) získáme po úpravě:

$$v = \frac{\delta}{4\mu}(R^2 - r^2) - R \frac{\delta \theta - 1}{2 \theta}, \quad \pi = -\delta z + C. \quad (2.29)$$

Kapitola 3

Jednoduchá proudění pro nenewtonovskou tekutinu

3.1 Proudění v trubici pro mocninnou tekutinu

Pokusíme se o modifikaci příkladu 2.2, hraniční podmínku uvažujeme stejnou, ale za tekutinu volíme mocninnou tekutinu s konstituční rovnicí (3.1)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D} \quad (3.1)$$

Opět zavedeme cylindrické souřadnice (r, φ, z) s osou z orientovanou ve směru osy trubice a předpokládáme vektorové pole rychlostí ve tvaru $\mathbf{v} = v(r)\mathbf{e}_z$. Symetrická část gradientu rychlosti má tedy speciální podobu:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v(r)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v(r)}{\partial r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Podobně jako při odvozování Navierových-Stokesových rovnice dosadíme konstituční rovnici (3.1) do rovnic rovnováhy (2.3), získáme zcela obecnou rovnici:

$$\mu|\mathbf{D}|^{p-2}\Delta\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{D} [\text{grad } |\mathbf{D}|^{p-2}] - \text{grad } \pi + \rho\mathbf{b} = \mathbf{v}' + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

S uvážením podmínky nestlačitelnosti (2.2) a stacionarity proudění, zanedbáním objemových sil, rozepsáním všech tenzorů ve složkách v cylindrických souřadnicích dospíváme po několika standardních úpravách k rovnici:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{\mu} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\delta = \frac{d\pi}{dz}, \quad (3.4)$$

kde π je funkcí pouze od z . Pro přehlednost píšeme $\tilde{\mu}$ místo $\mu(\frac{\sqrt{2}}{2})^{p-2}$. Rovnici zjednodušíme volbou $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$ (jak očekáváme):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \tilde{\mu} \left(-\frac{dv}{dr} \right)^{p-1} \right) = +\delta. \quad (3.5)$$

Jejím řešením je :

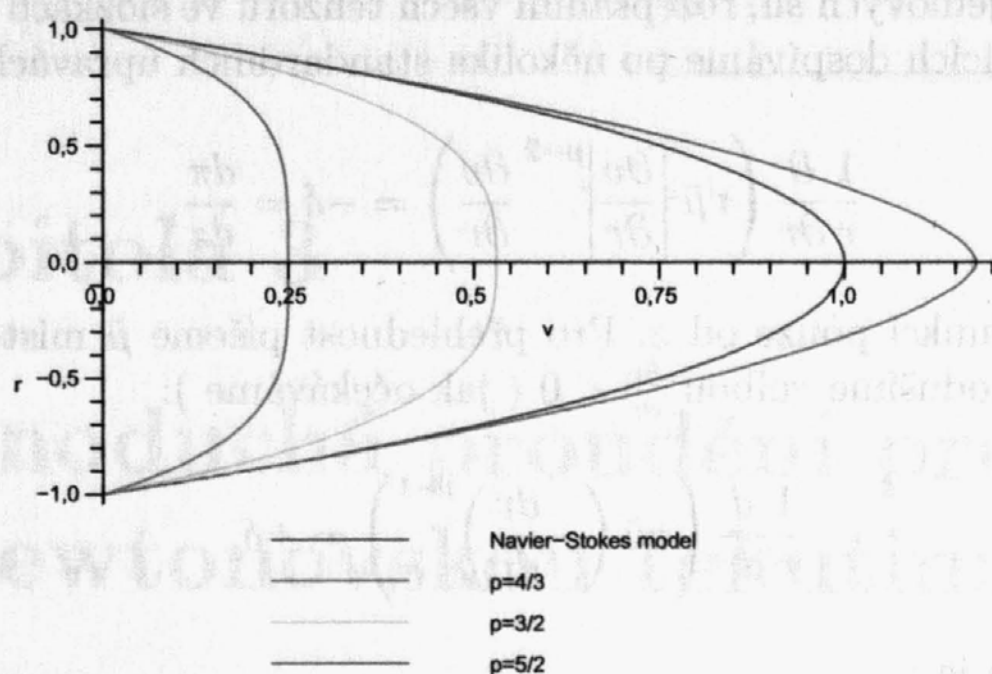
$$v = - \left(\frac{\delta}{2\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} r^{\frac{p}{p-1}} + A, \quad (3.6)$$

kde A je integrační konstanta.

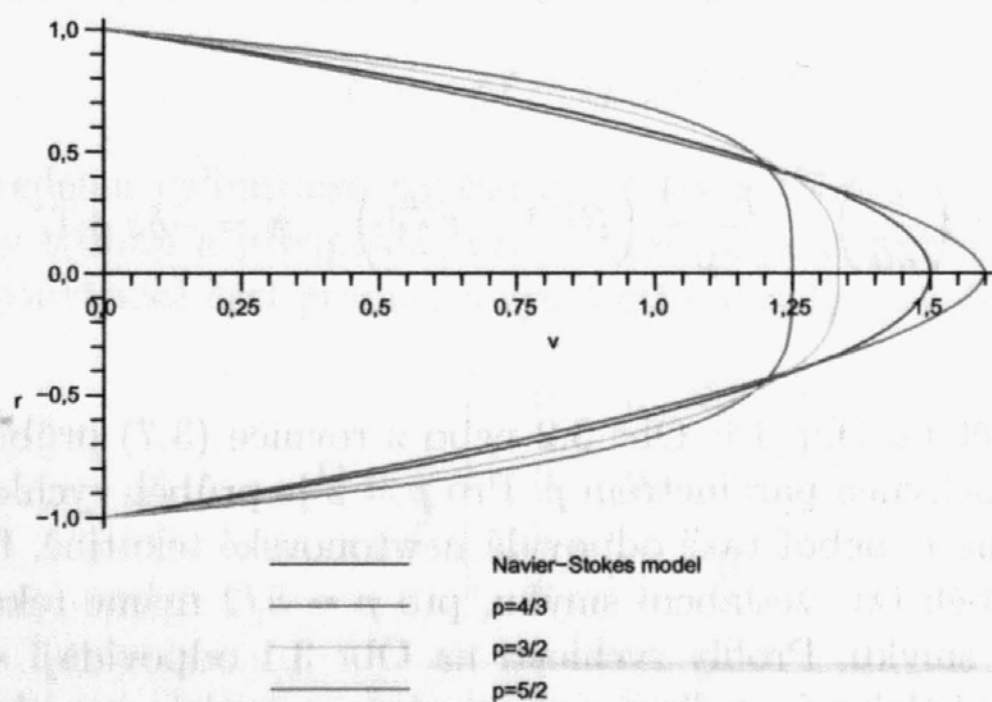
Řešení této úlohy splňující okrajovou podmínku $v(R) = 0$ je popsáno rovnicí (3.7).

$$v = \left(\frac{\delta}{2\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} \left(R^{\frac{p}{p-1}} - r^{\frac{p}{p-1}} \right), \quad \pi = -\delta z + C \quad (3.7)$$

Jak je vidět na Obr 3.1, Obr 3.2 nebo z rovnice (3.7) průběh rychlosti je významně ovlivněn parametrem p . Pro $p = 2$ je průběh rychlostí kvadraticky závislý na r , neboť také odpovídá newtonovské tekutině. Pro $p = 3/2$ odpovídá průběh tzv. zeslabení smyku, pro $p = 5/2$ máme tekutinu vykazující zesílení smyku. Profily rychlostí na Obr 3.1 odpovídají situaci, kdy uvažujeme fixní tlakový gradient a porovnáváme modely pro různá p . Další možností, je volit konstanty tak, aby byl průtok $\int_0^1 v(r) dr$ jednotkový. Této volbě konstant odpovídá graf na Obr 3.2.



Obrázek 3.1: Poiseuilleovo proudění v trubici pro mocninnou tekutinu, modely $p=4/3$, $p=3/2$, $p=2$, $p=5/2$, zbylé konstanty jsou normovány na 1.



Obrázek 3.2: Poiseuilleovo proudění v trubici pro mocninnou tekutinu, modely $p=4/3$, $p=3/2$, $p=2$, $p=5/2$, zbylé konstanty voleny tak, aby $\int_0^1 v(r) dr = 1$.

3.2 Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami pro mocninnou tekutinu

V minulé kapitole jsme demonstrovali Navierovou podmínkou skluzu pro newtonovskou tekutinu, nyní obrátíme pozornost k mocninné tekutině a budeme zkoumat případ, kdy je na hranici oblasti - v tomto případě na nekonečně velkých deskách Obr 2.1 - předepsána Navierova podmínka skluzu.

Řešení budeme opět hledat ve tvaru (2.7), symetrická část gradientu rychlosti pak bude mít následující podobu:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v(y)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v(y)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Standardním postupem získáme pohybové rovnice:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial x} + \tilde{\mu} \frac{d}{dy} \left(\left| \frac{du}{dy} \right|^{p-2} \frac{du}{dy} \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0. \quad (3.10)$$

Opět píšeme $\tilde{\mu} = \mu \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{p-2}$. Z rovnic (3.9) a (3.10) máme $\pi = -\delta x + C, \delta > 0$. Hledejme nejprve řešení pro $y \in [0, 1]$ odpovídající horní polovině, kde předpokládáme $\frac{du}{dy} < 0$. Rovnice (3.9) přejde na rovnici:

$$\tilde{\mu} \frac{d}{dy} \left(\left(-\frac{du}{dy} \right)^{p-1} \right) = +\delta, \quad (3.11)$$

s řešením:

$$u(y) = -\frac{(p-1)}{p} \left(\frac{\delta}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{p-1}} (y+A)^{\frac{p}{p-1}} + B. \quad (3.12)$$

Požadavkem $\frac{du}{dy}(0) = 0$ máme $A = 0$. Vzhledem ke geometrickému uspořádání problému máme ($\mathbf{t} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, \pm 1, 0)$) a podmínky skluzu se

(2.22) zjednoduší:

$$\theta v(-1) - (1 - \theta)\tilde{\mu} \left| \frac{dv}{dy}(-1) \right|^{p-2} \frac{dv}{dy}(-1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_{-1}, \quad (3.13)$$

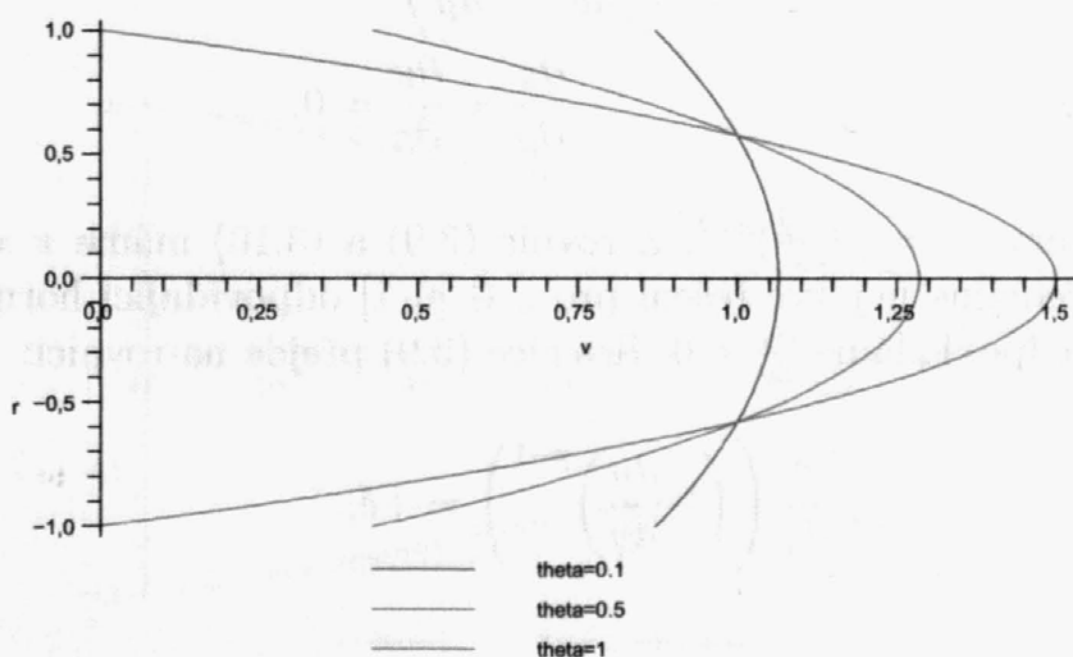
$$\theta v(1) + (1 - \theta)\tilde{\mu} \left| \frac{dv}{dy}(1) \right|^{p-2} \frac{dv}{dy}(1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_1. \quad (3.14)$$

Dosazením rovnice (3.11) do podmínky (3.14) získáme řešení pro $y \in [0, 1]$

$$u(y) = \frac{(p-1)}{p} \left(\frac{\delta}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{p-1}} (1 - y^{\frac{p}{p-1}}) + \delta \frac{1-\theta}{\theta} \quad y \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

Vzhledem k symetrii úlohy můžeme ihned psát řešení na celé oblasti:

$$u(y) = \frac{(p-1)}{p} \left(\frac{\delta}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{p-1}} (1 - |y|^{\frac{p}{p-1}}) + \delta \frac{1-\theta}{\theta} \quad y \in [-1, 1]. \quad (3.16)$$



Obrázek 3.3: Poiseuilleovo proudění mezi deskami, symetrický skluz na hranici pro volby $\theta = 0.1, \theta = 0.5, \theta = 1$, model $p = 2, \mu = 1, \delta$ tak aby $\int_{-1}^1 v(y) dy = 1$

Obr 3.3 zachycuje řešení (3.16) pro $p = 2$ a různé volby θ .

3.3 Proudění mezi dvěma deskami pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku

V tomto odstavci se pustíme do komplikovanějšího problému, budeme uvažovat zobecnění mocninné tekutiny, kde je viskozita závislá na tlaku. Uvažujeme model tekutiny s konstituční rovnicí (3.17).

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + 2\mu(\pi)|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D} \quad (3.17)$$

Standardním postupem jako v předchozích příkladech sestavíme pohybové rovnice. Dosazením konstituční rovnice (3.17) do rovnice rovnováhy (7) získáme obecnou pohybovou rovnici pro uvažovanou tekutinu:

$$\begin{aligned} \mu(\pi)|\mathbf{D}|^{p-2}\Delta\mathbf{v} + 2\mu(\pi)\mathbf{D}[\text{grad } |\mathbf{D}|^{p-2}] + \\ + 2|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D}[\text{grad } \mu(\pi)] - \text{grad } \pi + \rho\mathbf{b} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Předmětem našeho zkoumání bude Poiseuilleovo proudění mezi dvěma nekonečně velkými rovnoběžnými deskami s podmínkou $\mathbf{v}(-1) = 0 = \mathbf{v}(1)$ a později s Navierovou podmínkou skluzu. Geometrické uspořádání je tedy stejné jako v předchozí úloze, stejně tak i tvar hledaného vektorového pole rychlostí. Řešení budeme hledat ve tvaru (3.19).

$$\mathbf{v} = u(y) \mathbf{e}_x, \quad \pi = A(x)B(y). \quad (3.19)$$

Symetrická část gradientu má opět tvar (3.8). Stejně jako v předchozím neuvažujeme objemové síly, tekutinu pokládáme za nestlačitelnou a omezujeme se na stacionární případ. Za výše specifikovaných podmínek plyne z (3.18) následující podoba pohybových rovnic:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\pi) \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.20)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \mu(\pi)}{\partial x} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \pi = \pi(x, y). \quad (3.22)$$

Závislost viskozity na tlaku budeme předpokládat lineární ve tvaru

$$\mu(\pi) = K\pi. \quad (3.23)$$

Za zmínku stojí, že pokud bychom uvažovali obecnější závislost typu $\mu(\pi) = K\pi^q$, jsou případy $q \neq 1$ nezajímavé, pro $\pi(x, y) = A(x)B(y)$ v separovaném tvaru získáme totiž pouze triviální řešení. V Hron[4] je také ukázáno, že pro viskozitu tvaru $\mu(\pi) = e^{a\pi}$, $a > 0$ a $\pi(x, y) = A(x)B(y)$ nebo $\pi(x, y) = A(x) + B(y)$ máme jediné triviální řešení.

(a) řešení pohybových rovnic

Dosazením závislosti (3.23) do pohybových rovnic a předpokladem $\frac{du}{dy} > 0$ pro $y \in (-1, 0)$ máme

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = k \frac{\partial \pi}{\partial y} \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1} + k(p-1)\pi \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-2} \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = k \frac{\partial \pi}{\partial x} \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1}. \quad (3.25)$$

V rovnicích se objevuje konstanta k , která není nic jiného, než $K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{p-2}$.

Tento výraz se objeví, když v (3.18) uvažujeme Frobeniovu¹ normu matice. Pro další účely bude vhodné přepsat tyto rovnice do podoby:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} (1 - k^2) \left(\frac{du}{dy} \right)^{2p-2} = k(p-1)\pi \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-2} \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} (1 - k^2) \left(\frac{du}{dy} \right)^{2p-2} = k^2(p-1)\pi \left(\frac{du}{dy} \right)^{2p-3} \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (3.27)$$

¹Frobeniovu normu definujeme jako

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^d |a_{ij}|^2}.$$

V další úpravě přijde vhod následující identita

$$\int \frac{k(p-1)z^{p-2}}{1-(kz^{p-1})^2} dz = \ln \left| \frac{1+kz^{p-1}}{1-kz^{p-1}} \right|^{1/2}, \quad (3.28)$$

pomocí ní z (3.26) získáme:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |\pi(x, y)| = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \left| \frac{1 + a \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1}}{1 - a \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1}} \right|^{1/2} \right). \quad (3.29)$$

Odkud máme

$$\ln |\pi(x, y)| = C(y)x + D(y) \quad \text{a následně} \quad \pi(x, y) = \pm D(y)e^{C(y)x}. \quad (3.30)$$

$D(y) \geq 0$. Dosazením posledního vztahu do (3.25) získáme

$$D'(y) + D(y)C'(y)x = k(u'(y))^{p-1}D(y)C(y), \quad (3.31)$$

odkud nutně $C(y) = C = \text{konst.}$, a tedy podle vztahů (3.29) a (3.30) můžeme psát:

$$\pi(x, y) = \pm D(y)e^{Cx}, \quad (3.32)$$

$$\left| \frac{1 + k \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1}}{1 - k \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1}} \right| = \pm E e^{2Cy}, \quad M > 0 \quad (3.33)$$

a pro derivaci rychlosti rychlost máme:

$$\frac{du}{dy} = \left[\frac{1}{k} \frac{E e^{2Cy} - 1}{E e^{2Cy} + 1} \right]^{\frac{1}{p-1}}. \quad (3.34)$$

Požadavek $\frac{du}{dy}(0) = 0$ implikuje $M=1$ a platí

$$\frac{du}{dy} = \left[\frac{1}{k} \frac{e^{2Cy} - 1}{e^{2Cy} + 1} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad C < 0 \quad (3.35)$$

neboli

$$\frac{du}{dy} = \left[\frac{1}{k} \frac{\sinh Cy}{\cosh Cy} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad C < 0. \quad (3.36)$$

Hledanou rychlost odtud můžeme získat přímou integrací. Než tak učiníme, podívejme se jak s využitím právě získaného vztahu dále upravit výraz pro π . Z rovnice (3.25), (3.32) a (3.36) můžeme dále specifikovat $D(y)$.

$$\frac{d(\ln D(y))}{dy} = kC \left(\frac{du}{dy} \right)^{p-1} = C \frac{\sinh Cy}{\cosh Cy} \quad (3.37)$$

Integrací podle y obdržíme

$$D(y) = D \cosh Cy, \quad D > 0 \quad (3.38)$$

a pro hledaný tlak máme

$$\pi(x, y) = De^{Cx} \cosh Cy. \quad (3.39)$$

Konstanta C je spjata s poklesem tlaku ve směru osy x .

(b) integrace vztahu (3.36)

Uvedme nejprve výsledek pro $p=2$, tedy jakési zobecnění modelu newtonovské tekutiny, kde zobecněná viskozita závisí na tlaku. Model s $p=2$ popisuje tekutinu, u které se neprojevuje jev zesílení či zeslabení smyku. Konstanta C je spjata s poklesem tlaku ve směru osy x .

$$u(y) = \frac{\ln(\cosh(Cy))}{kC} + K \quad (3.40)$$

Pro obecné $p > 1$ neumím primitivní funkci analyticky najít. Za pozornost stojí, že v případě $p = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ se nám vztah (3.36) integrovat podaří.

Pro n sudé vypadá řešení:

$$u(y) = \frac{y}{k^n} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\tanh^{2i-1}(Cy)}{Ck^n(2i-1)} + K. \quad (3.41)$$

Pro n liché máme :

$$u(y) = \frac{\ln(\cosh(Cy))}{Ck^n} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\tanh^{2i}(Cy)}{2Ck^{ni}} + K. \quad (3.42)$$

Odvodili jsme řešení pohybových rovnic, které je určeno až na konstantu integrační konstantu K . Nyní přidáme podmínku na hranici a dopočítáme

hodnotu konstanty K . Řešení pro $y \in [-1, 0]$, $C < 0$ je

pro n sudé:

$$u(y) = \frac{y+1}{k^n} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\tanh^{2i-1}(Cy) + \tanh^{2i-1}(C)}{Ck^n(2i-1)}, \quad (3.43)$$

pro n liché:

$$u(y) = \frac{1}{Ck^n} \ln \left(\frac{\cosh(Cy)}{\cosh(C)} \right) - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\tanh^{2i}(Cy) - \tanh^{2i}(C)}{2Ck^n i}, \quad (3.44)$$

Vyjádřeno pomocí původní konstanty K , pro kterou platí $k = K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{p-2}$ máme:

pro n sudé:

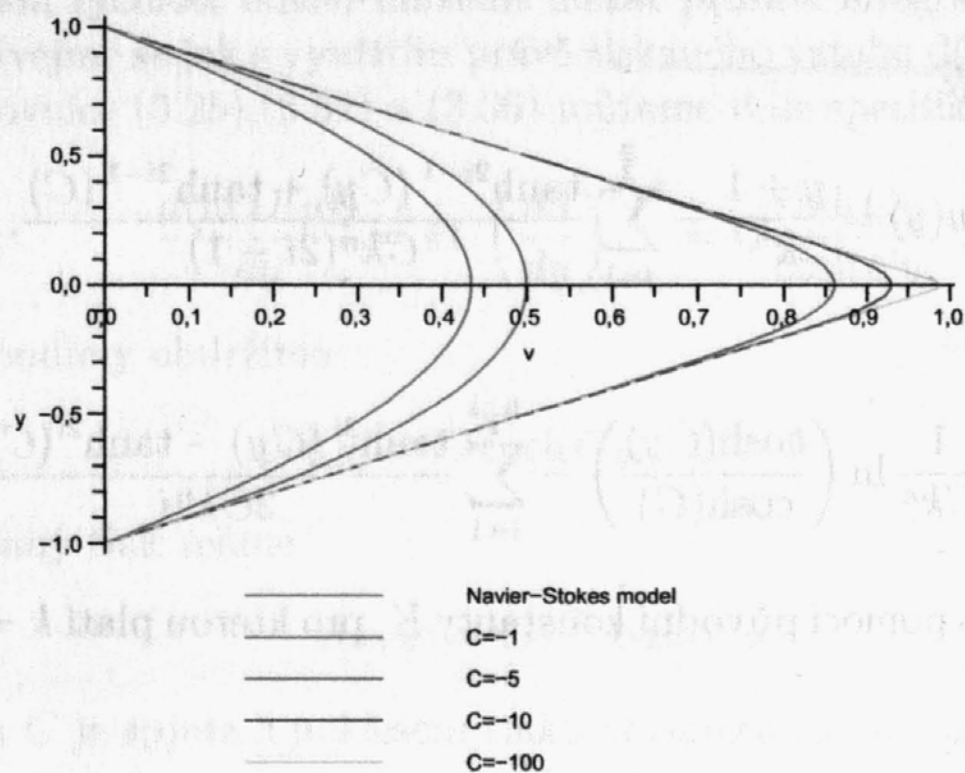
$$u(y) = \frac{y+1}{k^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1-n}} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\tanh^{2i-1}(Cy) + \tanh^{2i-1}(C)}{Ck^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1-n} (2i-1)}, \quad (3.45)$$

pro n liché:

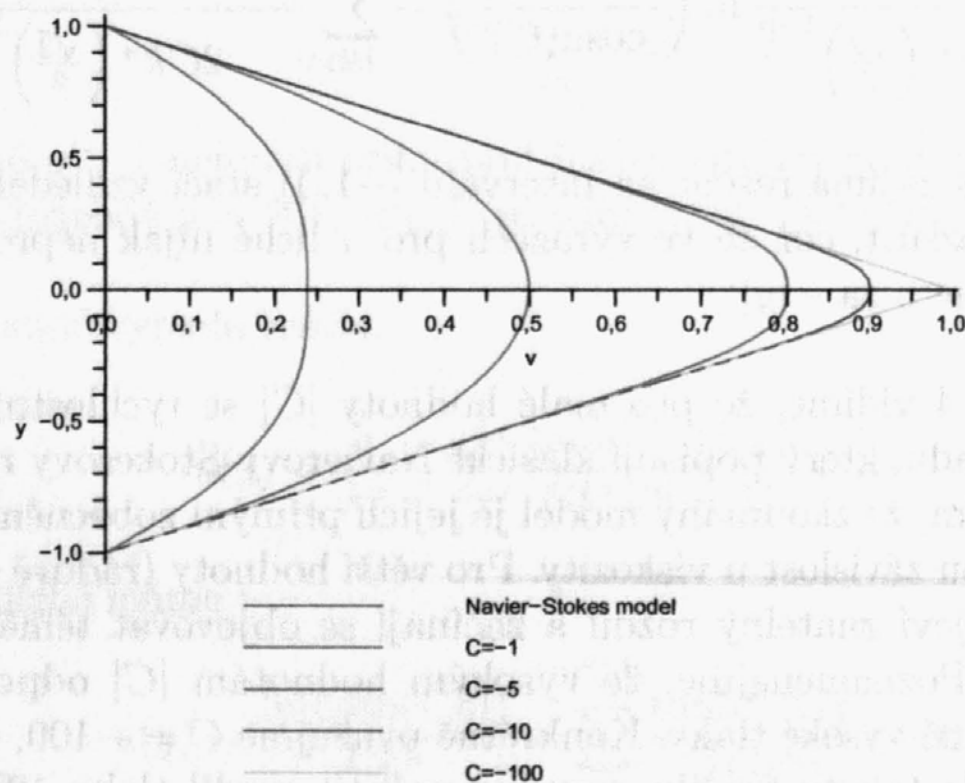
$$u(y) = \frac{1}{Ck^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1-n}} \ln \left(\frac{\cosh(Cy)}{\cosh(C)} \right) - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\tanh^{2i}(Cy) - \tanh^{2i}(C)}{2Ck^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1-n} i}. \quad (3.46)$$

Pokud nás zajímá řešení na intervalu $[-1, 1]$ stačí vzhledem k symetrii úlohy sudě rozšířit, což se ve výrazech pro n liché nijak neprojeví a pro n sudé zaměníme y za $-|y|$.

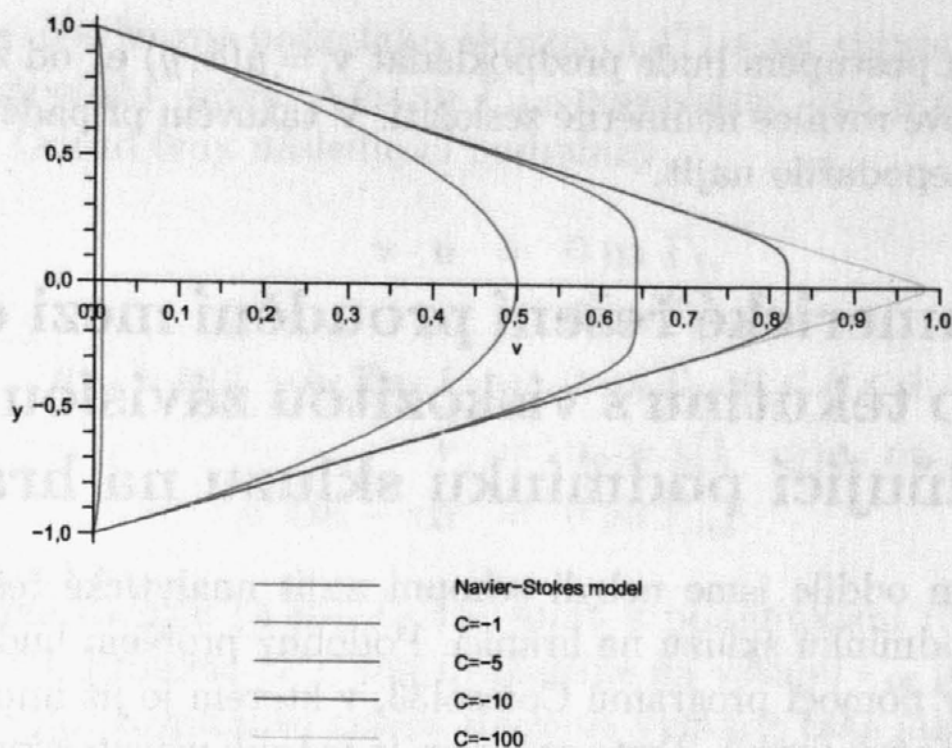
Na Obr 3.4 vidíme, že pro malé hodnoty $|C|$ se rychlostní profil příliš neliší od případu, který popisují klasické Navierovy-Stokesovy rovnice. To je v souladu s tím, že zkoumaný model je jejich přímým zobecněním a přidává pouze tlakovou závislost u viskozity. Pro větší hodnoty (řádově od $|C| > 10$) se již ale projeví znatelný rozdíl a začínají se objevovat téměř trojúhelníkové profily. Poznamenejme, že vysokým hodnotám $|C|$ odpovídají podle (3.39) extrémně vysoké tlaky. Konkrétně uvažujme $C = -100$, aby tekutina proudila podle tohoto profilu, musíme zajistit rozdíl tlaku $10^{40} Pa$ na jednotku délky ve směru osy x . Dále jsou vykresleny ještě případy $p = 3/2$ a $p = 11/10$, viz Obr 3.5, Obr 3.6.



Obrázek 3.4: Poiseuilleovo proudění mezi nekonečnými rovnoběžnými deskami pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku. Uvažujeme model $p = 2$, pro konkrétní hodnoty konstanty: $C = -1$, $C = -5$, $C = -10$, $C = -100$. Pro porovnání je vykreslen i profil rychlostí pro newtonovskou tekutinu - značen NS.



Obrázek 3.5: $p = 3/2$: $C = -1$, $C = -5$, $C = -10$, $C = -100$.



Obrázek 3.6: $p = 11/10$: $C = -1$, $C = -5$, $C = -10$, $C = -100$.

(iii) Navierova podmínka skluzu

Obecně má podmínka skluzu již zmiňovaný tvar

$$\theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (1 - \theta) \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{na hranici } \Gamma. \quad (3.47)$$

V uvažovaném geometrickém uspořádání a se zobecněnou viskozitou $\mu = k\pi$, kde tlak je dán vzorcem (3.39), to znamená

$$\theta u(-1) - (1 - \theta) k D e^{C_x} \cosh C \left| \frac{du}{dy}(-1) \right|^{p-2} \frac{du}{dy}(-1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_{-1} \quad (3.48)$$

$$\theta u(1) + (1 - \theta) k D e^{C_x} \cosh C \left| \frac{du}{dy}(1) \right|^{p-2} \frac{du}{dy}(1) = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (3.49)$$

Γ_1, Γ_{-1} značí horní resp. dolní desku.

Nově se objevuje proměnná x v podmínkách (3.48) a (3.49). To má za následek, že již nemůžeme jednoduše dosadit obecná řešení (3.41) resp. (3.42) do těchto podmínek a fixovat konstantu K . Závisela by pak totiž na x , což by bylo ve sporu s předpokládaným tvarem $\mathbf{v} = u(y) \mathbf{e}_x$.

Správným postupem bude předpokládat $\mathbf{v} = u(x, y) \mathbf{e}_x$ od začátku. Tím se ale pohybové rovnice neúměrně zesložití. V takovém případě se mi analytické řešení nepodařilo najít.

3.4 Numerické řešení proudění mezi deskami pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku splňující podmínku skluzu na hranici

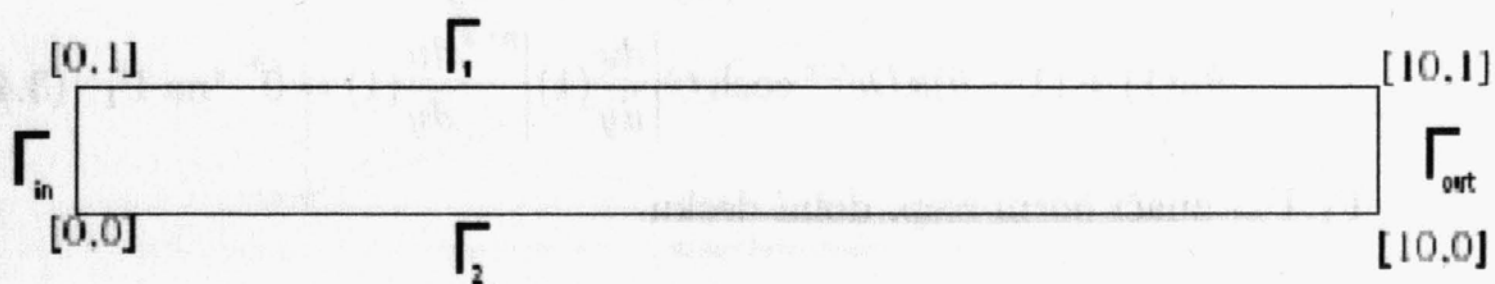
V předchozím oddíle jsme nebyli schopni najít analytické řešení splňující Navierovu podmínku skluzu na hranici. Podobný problém budeme nyní řešit numericky pomocí programu Cmsol33, v kterém je již implementovaná metoda konečných prvků. Tento program je natolik uživatelsky přívětivý, že stačí pouze zadat slabou formulaci problému (viz. dále) na vstupu a program sám najde řešení. Řešení budeme hledat na omezené oblasti Ω viz Obr3.7). Výchozí pro nás již nebudou klasické pohybové rovnice ale právě jejich slabá formulace, kterou definujeme dále.

3.4.1 Slabá formulace

Pohybové rovnice pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny popsané konstituční rovnicí (1.5) mají při absenci objemových sil následující tvar:

$$(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} - \text{div}[\mu^*(\pi, |\mathbf{D}|)\mathbf{D}] + \text{grad } \pi = 0, \quad (3.50)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.51)$$



Obrázek 3.7: Geometrické uspořádání.

Budeme zkoumat situaci, kdy na jedné z desek (konkrétně horní Γ_1) předepíšeme homogenní Dirichletovu podmínku $\mathbf{v} = 0$, na druhé desce Γ_2

uvažujeme Navierovu podmínku skluzu (3.47) a na vstupu Γ_{in} předpokládáme parabolický profil. Výstup Γ_{out} ponecháme bez požadavků na tvar proudění. Odtud tedy následující podmínky:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_1, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_2, \quad (3.53)$$

$$\theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (1 - \theta) \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ na } \Gamma_1, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 = y(1 - y) \mathbf{e}_x \text{ na } \Gamma_{in}, \quad (3.55)$$

$$\mu^* \mathbf{D} \mathbf{n} - \pi \mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_{out}. \quad (3.56)$$

Označme rovnice (3.50), (3.51) spolu s podmínkami (3.52)-(3.56) jako problém (P) . Problém (P) , kdy uvažujeme na vstupu Γ_{in} podmínku $\mathbf{v} = 0$, označíme (P_0) . Konstantu skluzu můžeme vyjádřit také jako $j := \frac{1-\theta}{\theta}$.

K formulaci slabého řešení nejprve specifikujme, na jakých funkčních prostorech budeme hledat řešení. Nejprve však předešleme nutný pojem slabé derivace.

Definice 1 (Slabá derivace). Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Buď $u, v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$. Řekneme, že v_α je slabá derivace funkce u podle x^α právě když platí

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u v_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3.57)$$

$C_0^\infty(\Omega)$ značí hladké funkce s kompaktním nosičem v Ω .

Definice 2.

$$\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \nabla u \in L^2(\Omega)\}, \quad (3.58)$$

kde ∇u je slabý gradient v duchu Definice 1, prostory typu $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ se nazývají Sobolevovy prostory.²

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) | \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_{in} \cup \Gamma_2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_1\}, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) | \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \quad (3.60)$$

²Sobolevovy prostory lze definovat i jiným ekvivalentním způsobem jako zúplnění hladkých(až do hranice) funkcí v jisté normě. Takový pohled na tyto funkční prostory je užitečný zejména v důkazech mnoha jejich důležitých vlastností. Více např.[2]

Úlohu formulujeme slabě, nejprve pro situaci s homogenní Dirichletovou podmínkou na vstupu. Nehomogenní Dirichletova podmínka se pak na tento případ převede (viz dále). To je důvod proč formálně definujeme $\mathbf{V}$, i když nás zajímají pouze řešení z $\mathbf{U}$.

V této formální definici jsme se dopustili matematické nepřesnosti. Problém je v přiřazování hraničních hodnot funkcím z $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$. Takové funkce nemusí být obecně vůbec spojité a navíc jsou definované pouze s.v. na Ω . Vzhledem k tomu, že hranice $\partial\Omega$ má dvourozměrnou míru nulovou, není úplně jasné, jaký smysl dát restrikci $\mathbf{v}$ na $\partial\Omega$. Jedním ze způsobů jak se s tímto problémem technicky vypořádat je zavedení *operátoru stop* (viz např. [2]).

Definice 3 (Slabé řešení). Slabým řešením problému (P_0) je dvojice $\mathbf{v}$ a π , pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \pi \in L^2(\Omega) \\ \underbrace{\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \varphi + \int_{\Omega} \mu^*(\pi, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \mathbf{D}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}(\varphi) + \int_{\Gamma_1} j \mathbf{v} \cdot \varphi}_{a(\mathbf{v}, \varphi)} - \int_{\Omega} \pi \text{div } \varphi = 0 \\ \forall \varphi \in \mathbf{V} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (3.62)$$

V případě (P) , kdy máme na Γ_{in} nehomogenní Dirichletovu podmínku $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0$, hledáme $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ takové, že $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}_0$ splňuje slabou formulaci problému (P_0) , tedy že platí

$$a(\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}_0, \varphi) - \int_{\Omega} \pi \text{div } \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}, \quad (3.63)$$

$$\int_{\Omega} q \text{div } [\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}_0] = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (3.64)$$

kde $\tilde{\mathbf{u}}_0$ je extenze dat z hranice Γ_{in} na celou oblast Ω .

Opět pouze poznamenejme, že pokud je $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{\frac{1}{2},1}(\Omega)$, pak z věty o stopách (resp. její inverzní varianty) existuje $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ takové, že $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0$ na Γ_{in} . Lze ukázat, že výsledné $\mathbf{v}$ nezávisí na volbě $\tilde{\mathbf{u}}_0$. Větu o stopách spolu s definicí prostoru $\mathbf{W}^{\frac{1}{2},1}(\Omega)$ lze nalézt např. v [2].

3.4.2 Numerické řešení

Numerický výpočet byl proveden pro efektivní viskozitu s lineární i exponenciální závislostí viskozity na tlaku:

$$\mu^*(\pi) = 1 + 0.1\pi(0.1 + |\mathbf{D}|)^{p-2}, \quad (3.65)$$

$$\mu^*(\pi) = \exp(0.1\pi)(0.1 + |\mathbf{D}|)^{p-2}. \quad (3.66)$$

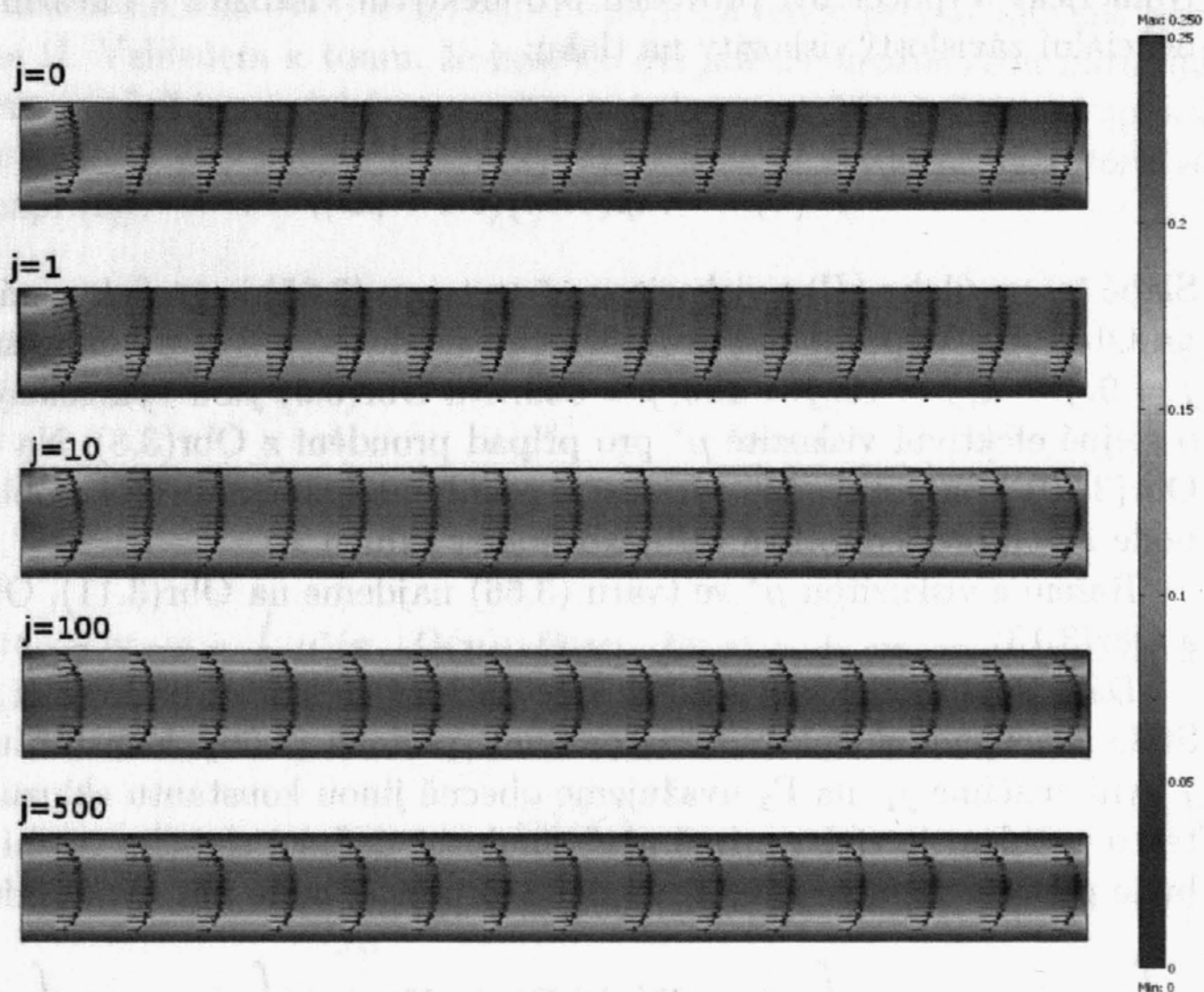
Slabé řešení úlohy (P) s viskozitou μ^* ve tvaru (3.65) je graficky znázorněno na Obr(3.8). Výpočet byl proveden pro model $p = 3/2$ a konkrétní volby $j = 0, j = 1, j = 10, j = 100, j = 500$. Na Obr(3.9) jsou vykresleny křivky o stejné efektivní viskozitě μ^* pro případ proudění z Obr(3.8). Na obrázku Obr(3.10) jsou porovnány rychlostní profily na kolmém průřezu oblastí Ω v bodě $x = 5$ pro jednotlivé volby konstanty skluzu j .

Řešení s viskozitou μ^* ve tvaru (3.66) najdeme na Obr(3.11), Obr(3.12) a Obr(3.13).

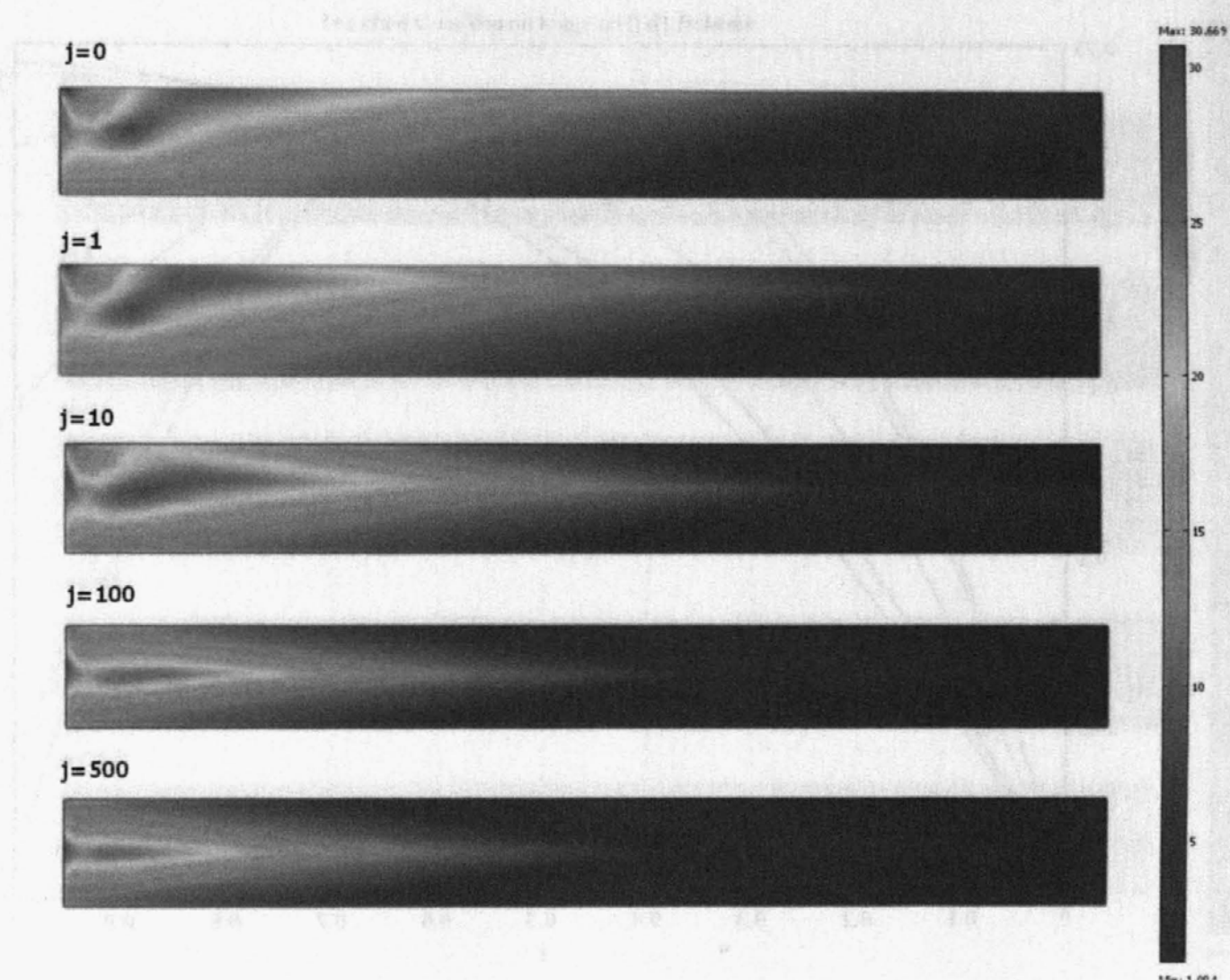
Dále jsme modelovali situaci, kdy dochází ke skluzu na hranici Γ_1 i Γ_2 . Stále pracujeme s efektivní viskozitou v podobě (3.66). Konstantu skluzu j nyní značíme j_1 , na Γ_2 uvažujeme obecně jinou konstantu skluzu j_2 . Pro tento problém je třeba mírně přeformulovat definici slabého řešení. Rozdíl bude pouze v tom, že $a(\mathbf{v}, \varphi)$ ve slabé formulaci bude mít nyní podobu:

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \varphi + \int_{\Omega} \mu^*(\pi, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \mathbf{D}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}(\varphi) + \int_{\Gamma_1} j_1 \mathbf{v} \cdot \varphi + \int_{\Gamma_2} j_2 \mathbf{v} \cdot \varphi.$$

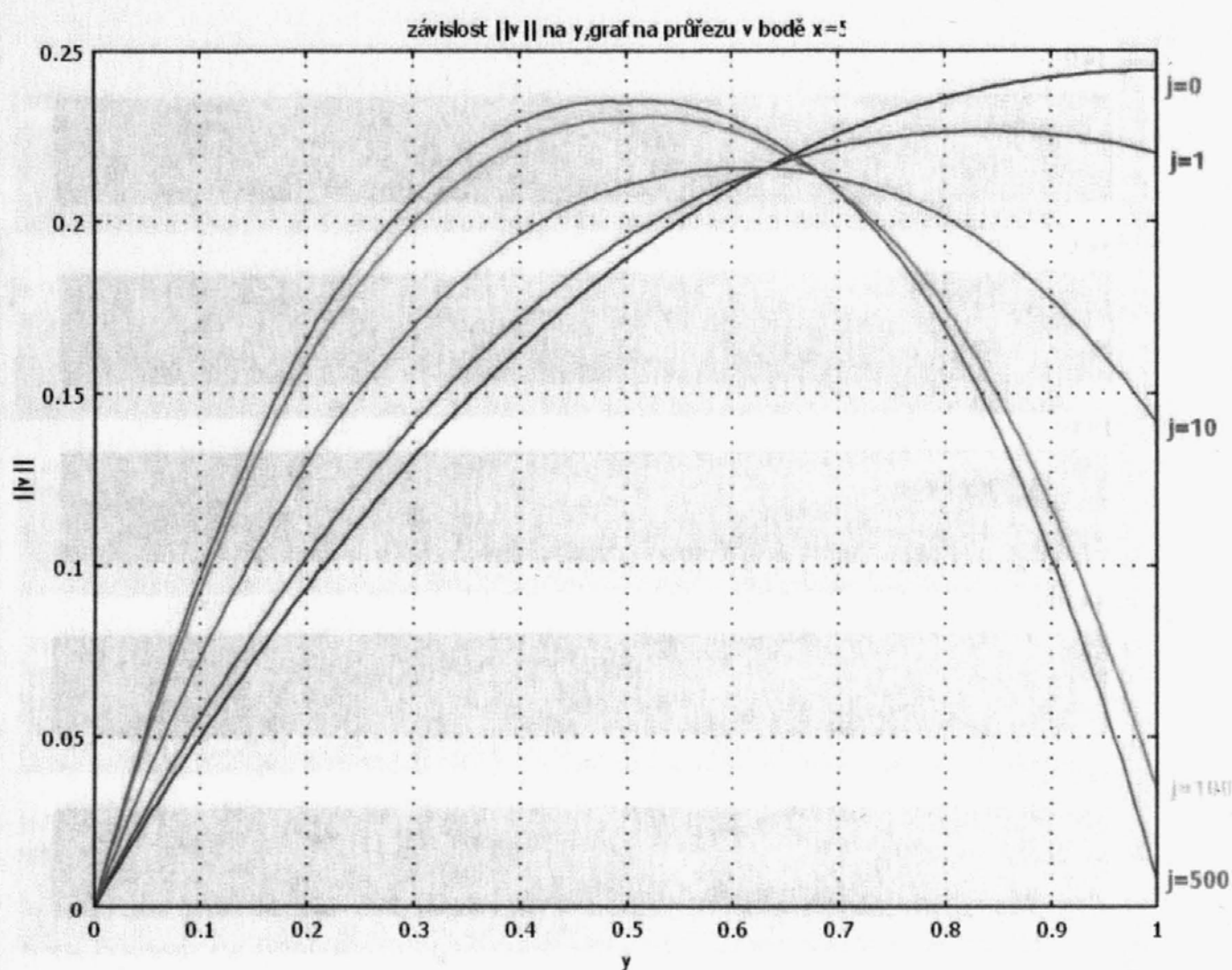
Řešení zachycující křivky konstantních hodnot $\|\mathbf{v}\|$ a efektivní viskozity μ^* se nalézají na Obr(3.14) a Obr(3.15). Výpočet byl proveden pro model s $p = 3/2$ a hodnoty $j_1 = 10$ a $j_2 = 10, j_2 = 20, j_2 = 100$ udávající míru skluzu. Porovnání rychlostních profilů na průřezu v bodě $x = 5$ pro tyto volby j_1, j_2 je uvedeno na Obr(3.16).



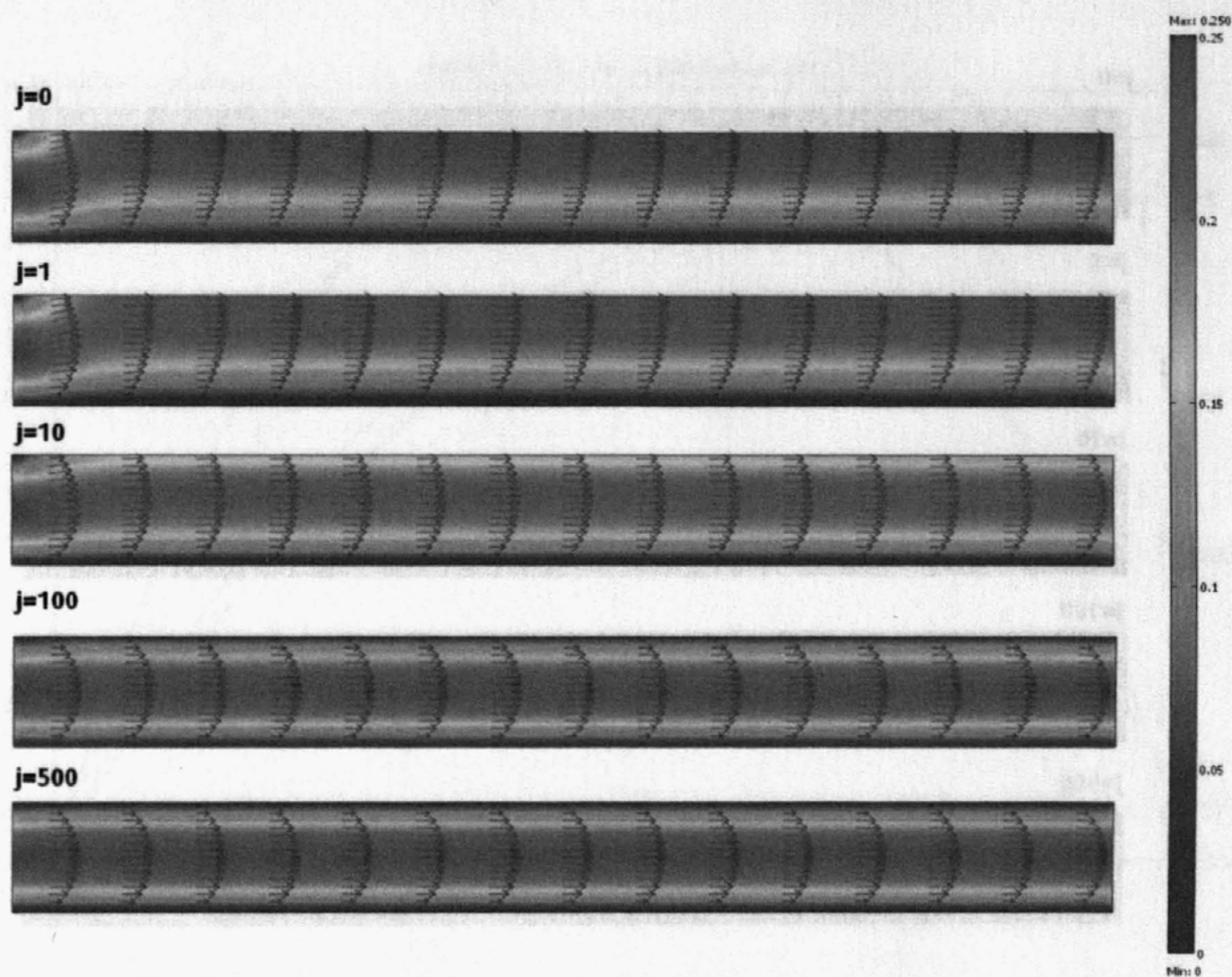
Obrázek 3.8: Křivky s konstantní hodnotou $\|\mathbf{v}\|$, lineární závislost viskozity na tlaku, parabolický vstupní profil.



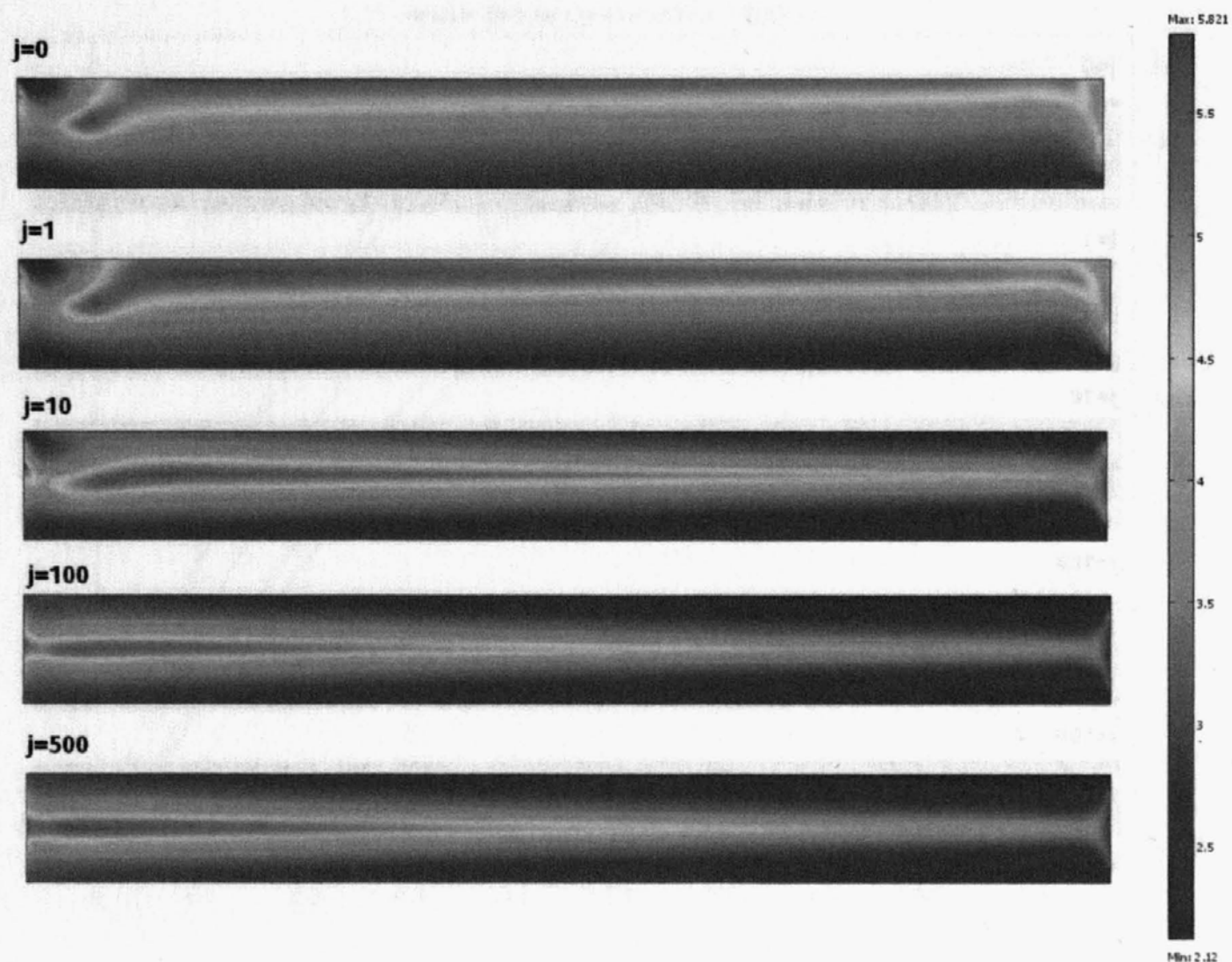
Obrázek 3.9: Křivky konstantní efektivní viskozity μ^* , lineární závislost viskozity μ^* na tlaku π , parabolický vstupní profil.



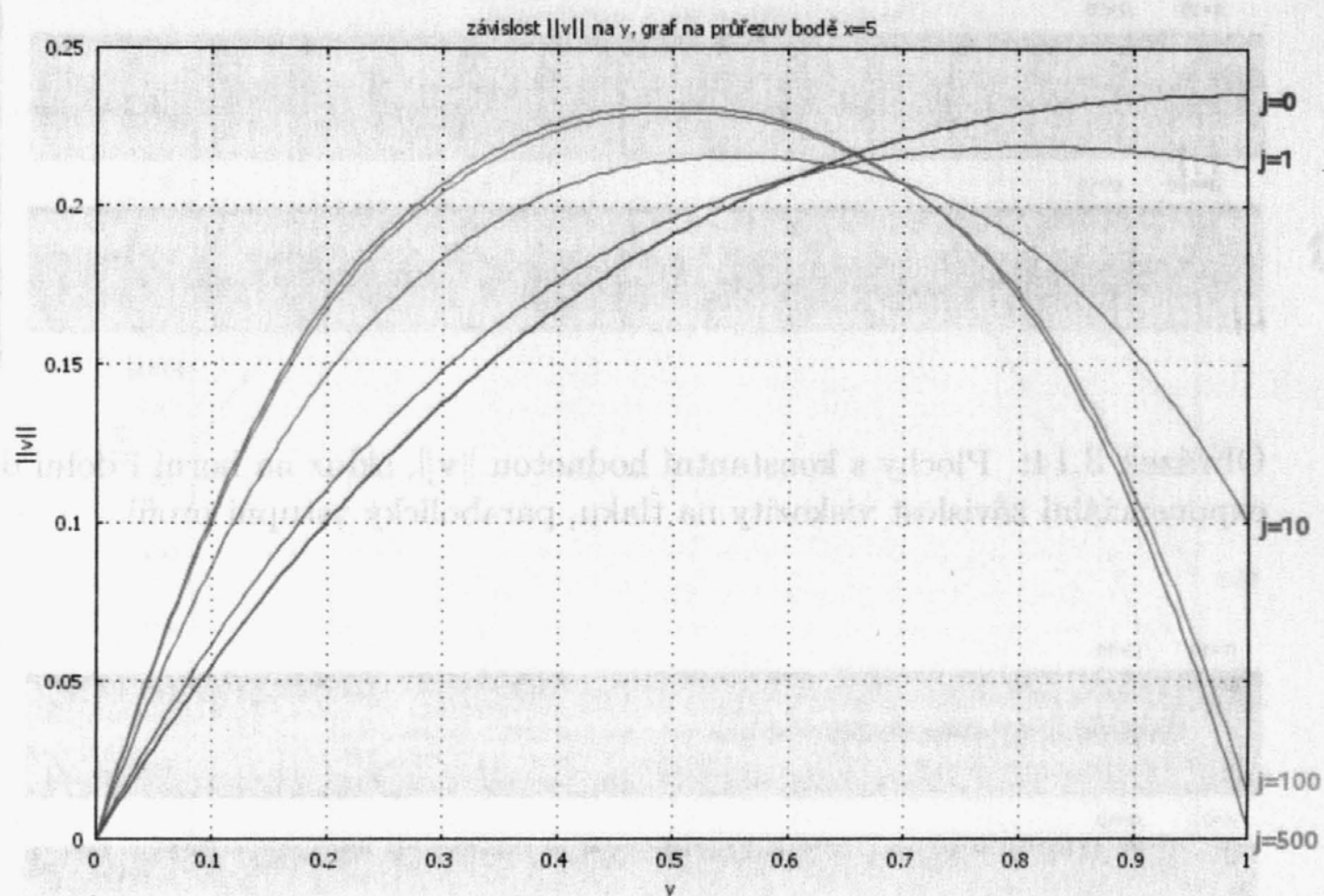
Obrázek 3.10: Graf závislosti $\|\mathbf{v}\|$ na y na průřezu v bodě $x = 5$. Příklad lineární závislosti viskozity na tlaku. Barevně jsou odlišeny křivky pro různé hodnoty konstanty skluzu j .



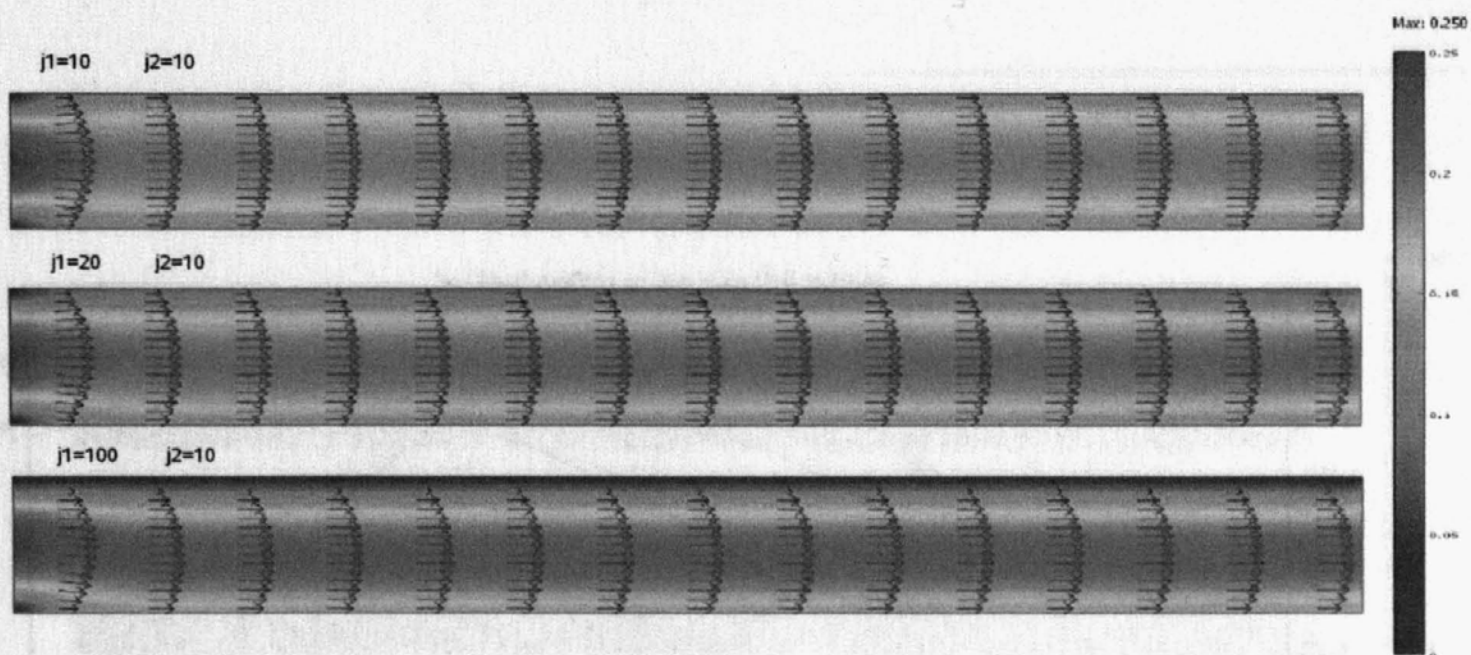
Obrázek 3.11: Křivky s konstantní hodnotou $\|\mathbf{v}\|$, exponenciální závislost viskozity na tlaku, parabolický vstupní profil.



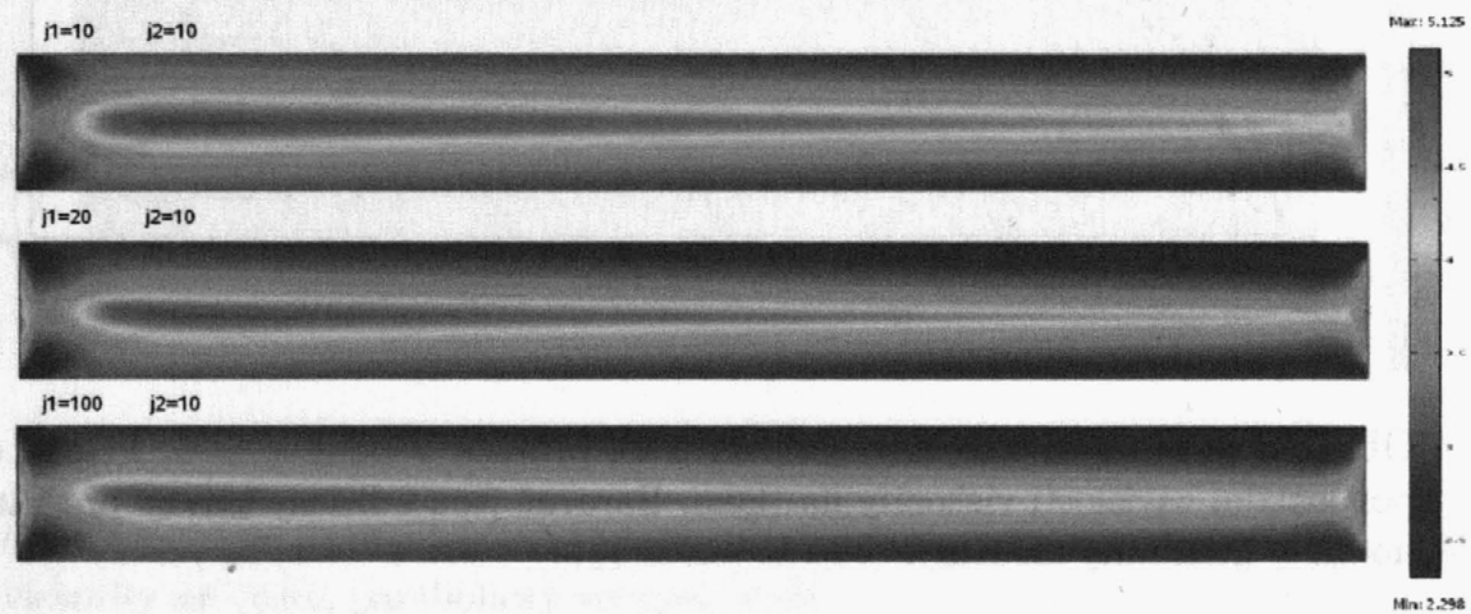
Obrázek 3.12: Křivky konstantní efektivní viskozity μ^* , exponenciální závislost viskozity na tlaku, parabolický vstupní profil.



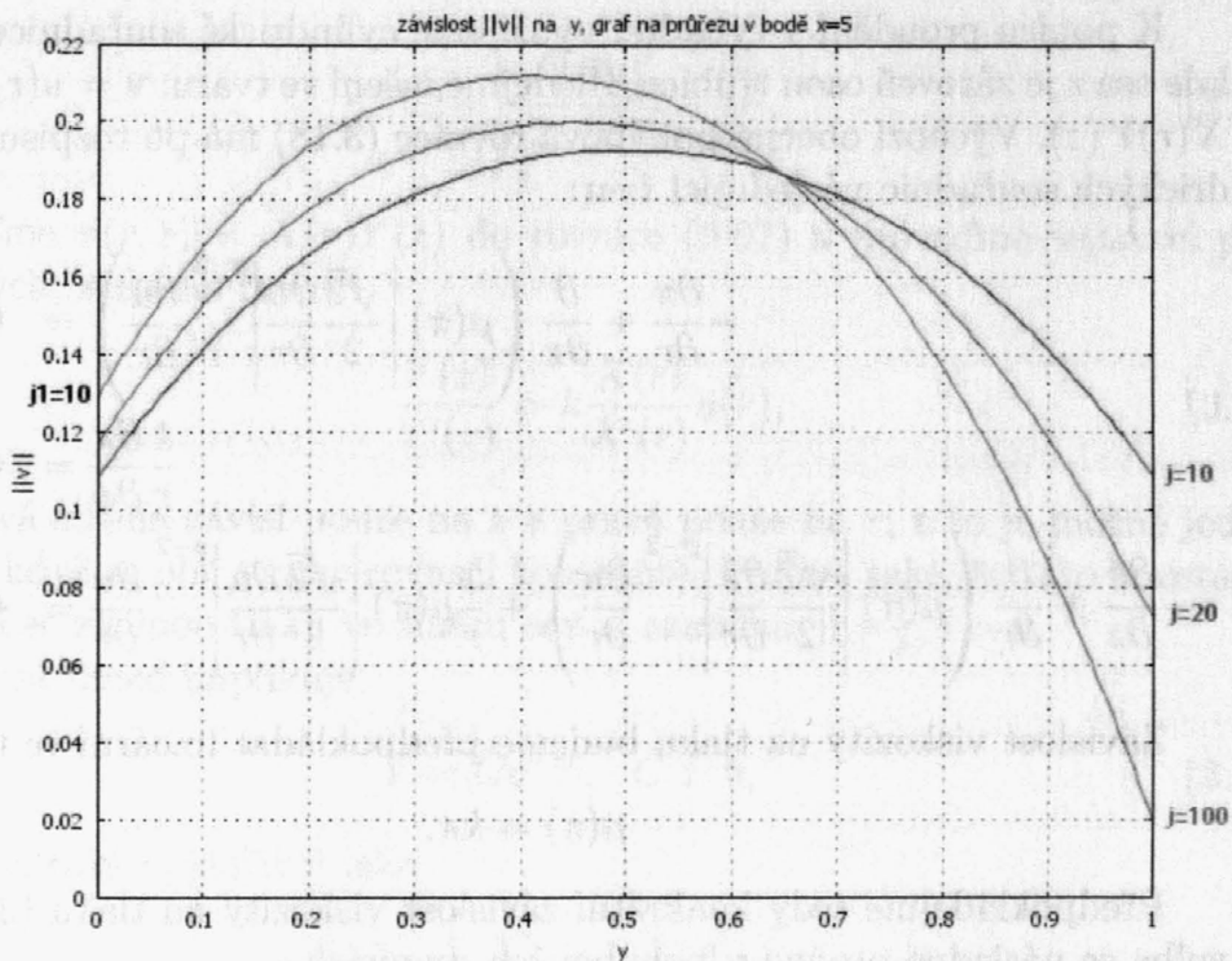
Obrázek 3.13: Graf závislosti $\|v\|$ na y na průřezu v bodě $x = 5$. Příklad exponenciální závislosti viskozity na tlaku. Barevně jsou odlišeny křivky pro různé hodnoty konstanty skluzu j .



Obrázek 3.14: Plochy s konstantní hodnotou $\|\mathbf{v}\|$, skluz na horní i dolní desce, exponenciální závislost viskozity na tlaku, parabolický vstupní profil.



Obrázek 3.15: Plochy konstantní efektivní viskozity μ^* , skluz na horní i dolní desce, exponenciální závislost viskozity na tlaku, parabolický vstupní profil.



Obrázek 3.16: Graf závislosti $\|v\|$ na y na průřezu v bodě $x = 5$. Příklad exponenciální závislosti viskozity na tlaku a skluzu na obou deskách. Barevně jsou odlišeny křivky pro různé hodnoty konstanty skluzu j_2 , $j_1 = 10$.

3.5 Proudění v trubici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku

V tomto odstavci se opět vrátíme ke zkoumání Poiseuilleova proudění tekutiny v nekonečně dlouhé trubici. Model tekutiny, který budeme používat je popsán konstitučním vztahem (3.17), tedy mocninnou tekutinou s viskozitou závislou na tlaku.

K popisu proudění s výhodou využijeme cylindrické souřadnice (r, φ, z) , kde osa z je zároveň osou trubice. Hledejme řešení ve tvaru: $\mathbf{v} = u(r) \mathbf{e}_z$ a $\pi(r, z) = X(r)Y(z)$. Výchozí obecná pohybová rovnice (3.18) má po rozpisu do cylindrických souřadnic následující tvar:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(\pi) \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0, \quad (3.68)$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(\pi) \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \mu(\pi) \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (3.69)$$

Závislost viskozity na tlaku budeme předpokládat lineární ve tvaru³

$$\mu(\pi) = k\pi. \quad (3.70)$$

Předpokládejme tedy konkrétní závislost viskozity na tlaku (3.70), tato volba se následně projeví v pohybových rovnicích :

$$-\frac{\partial \pi}{\partial r} + k \frac{\partial \pi}{\partial z} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.72)$$

³Stejně jako v minulém odstavci, kdy je zkoumali proudění mezi dvěma deskami, platí i zde, že pokud hledáme π v separovaném tvaru, tak pro $q \neq 1$ a $\mu(\pi) = k\pi^q$ získáme pouze triviální řešení. Snadno se o tom přesvědčíme přímým dosazením $\mu(\pi)$ do rovnice (3.67), separováním proměnných a zpětným dosazením $Y'(z)$ do rovnice (3.69). Získáme rovnici, jejíž členy jsou funkce pouze od z nebo r . Pak stačí jen porovnat exponenty u $Y(z)$ na levé a pravé straně, ty musí být stejné. Pokud ne, máme triviální řešení.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \pi}{\partial z} + k \frac{\partial \pi}{\partial r} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} + k \pi \frac{\partial}{\partial r} \left(\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\
& k \pi \frac{1}{r} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Pro další postup je bude výhodné položit

$$\tilde{u} := \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{3.74}$$

Dosaďme $\pi(r, z) = X(r)Y(z)$ do rovnice (3.67) a provedme separaci proměnných, získáme rovnici

$$\frac{Y(z)}{Y'(z)} = k \frac{X(r)}{X'(r)} \tilde{u}(r), \tag{3.75}$$

kde levá strana závisí pouze na z a pravá pouze na r , a to je možné jedině tehdy když se obě strany rovnají konstantě. Vidíme také, že tato konstanta souvisí se změnou tlaku ve směru osy z , označme ji $-\frac{1}{\delta}$, $\delta > 0$, (3.75) což ihned implikuje

$$Y = Ce^{-\delta z}, \quad C > 0, \tag{3.76}$$

můžeme také vyjádřit $\tilde{u}$ jako

$$\tilde{u} = -\frac{1}{\delta k} \frac{X'}{X} = -\frac{1}{\delta k} \frac{d}{dr} \ln(X). \tag{3.77}$$

Dosazením $\pi(r, z) = X(r)Y(z)$, vztahů (3.76) a (3.77) do rovnice (3.73) dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici pro funkci $X(r)$

$$X'' + \frac{X'}{r} - \delta^2 X = 0. \tag{3.78}$$

Řešení rovnice (3.78) je známé

$$X(r) = AI_0(\delta r) + BK_0(\delta r), \tag{3.79}$$

$I_0(\delta r)$ značí modifikovanou Besselovu funkci 1. druhu řádu 0 a $K_0(\delta r)$ modifikovanou Besselovu funkci 2. druhu řádu 0. A, B jsou reálné konstanty.

Vzhledem k tomu, že $K_0\left(\frac{r}{\delta}\right)$ má v nule singularitu a takové řešení je v rozporu s fyzikálním požadavkem konečné rychlosti proudění uprostřed trubice, pokládáme konstantu $B = 0$.

V tuto chvíli již můžeme psát řešení pro tlak π :

$$\pi(r, z) = DI_0(\delta r) e^{-\delta z}, \quad D = AC. \quad (3.80)$$

Vraťme se zpět k rovnici (3.77), dosaďte do ní vztah (3.79), získáme:

$$u(r) = -\frac{1}{\delta k} \frac{d}{dr} \ln(AI_0(\delta r)) \quad (3.81)$$

neboli

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\delta k} \frac{d}{dr} \ln(AI_0(\delta r)). \quad (3.82)$$

Předpokladem $\frac{du}{dr} < 0$ rovnici zjednodušíme:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right)^{p-1} = +\frac{1}{\delta k} \frac{d}{dr} \ln(AI_0(\delta r)) \quad (3.83)$$

nebo po drobné úpravě s využitím vlastností Besselových funkcí :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right)^{p-1} = \frac{1}{k} \frac{I_1(\delta r)}{I_0(\delta r)}. \quad (3.84)$$

Analytické řešení této rovnice pro obecné $p \neq 2$ se nám nepodařilo najít.

Pro $p = 2$ máme ihned z (3.74) a (3.83):

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{\delta k} \ln(I_0(\delta r)) + K \quad (3.85)$$

Dále pokračujeme v analytickém výpočtu s $p = 2$ a fixujeme hodnotu konstanty K za dané hraniční podmínky. Hledáme-li řešení pro Poiseuilleovo proudění v trubici s poloměrem 1 a předepisujeme-li no-slip (homogenní Dirichletovu) hraniční podmínku $\mathbf{v}(1) = 0$, pak máme:

$$u(r) = \frac{\sqrt{2}}{\delta k} \ln\left(\frac{I_0(\delta)}{I_0(\delta r)}\right), \quad (3.86)$$

$$\pi(r, z) = DI_0(\delta r) e^{-\delta z} \quad D > 0. \quad (3.87)$$

Na Obr 3.17 je vykresleno analytické řešení pro model $p = 2$ spolu s numerickým řešením pro různé další volby p . Na Obr 3.18 jsou zobrazeny rychlostní profily pro různé hodnoty δ , v tomto případě máme $p=2$.

Navierova podmínka skluzu

Opět narážíme na stejný problém jako v oddílu 3.4. Od počátku jsme hledali řešení ve tvaru $\mathbf{v} = u(r) \mathbf{e}_z$ a $\pi(r, z) = X(r)Y(z)$. Pro $p = 2$ jsme toto řešení dokonce explicitně našli, je dáno rovnicemi (3.86), (3.87). Závislost tlaku π na r i z se projeví v podmínkách skluzu (obecně rovnice (2.22)). Odtud následně plyne, že i hledaná rychlost $\mathbf{v}$ musí být funkcí od r i z .

Správným postupem bude předpokládat $\mathbf{v} = u(r, z) \mathbf{e}_z$ od začátku, což vede na mnohem složitější pohybové rovnice.

Viskozita ve tvaru $\mu(\pi) = e^{a\pi}$

Dosazením $\mu(\pi) = e^{a\pi}$ do obecných pohybových rovnic (3.67)-(3.69) máme:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial r} + ae^{a\pi} \frac{\partial \pi}{\partial z} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.89)$$

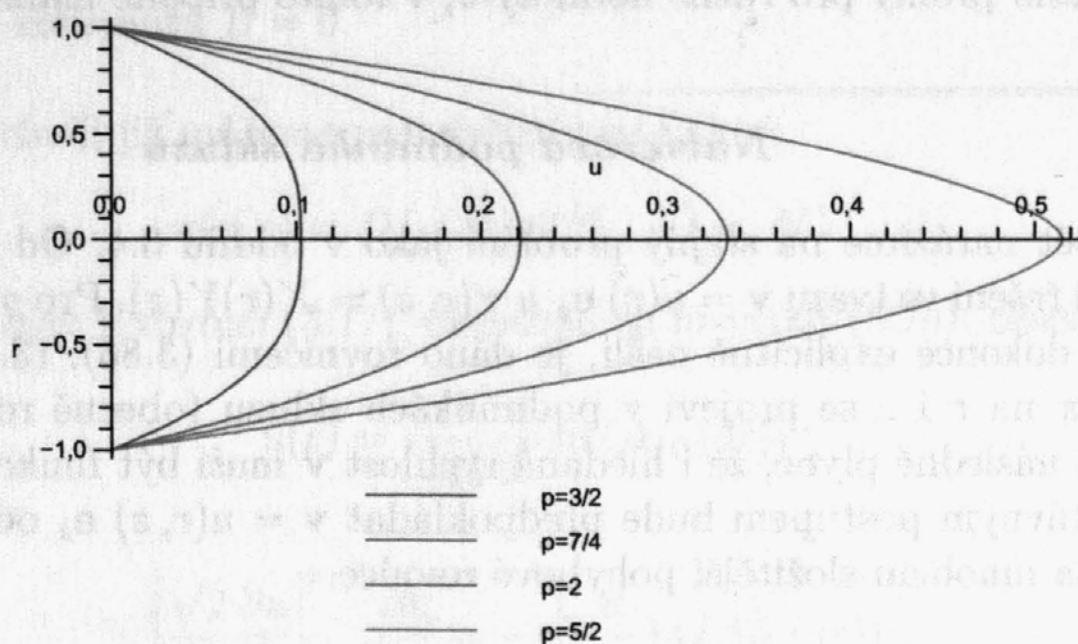
$$\begin{aligned} -\frac{\partial \pi}{\partial z} + ae^{a\pi} \frac{\partial \pi}{\partial r} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} + e^{a\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + e^{a\pi} \frac{1}{r} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Derivováním rovnice (3.88) vzhledem k r s odečtením od rovnice (3.90) derivované vzhledem k z dostáváme

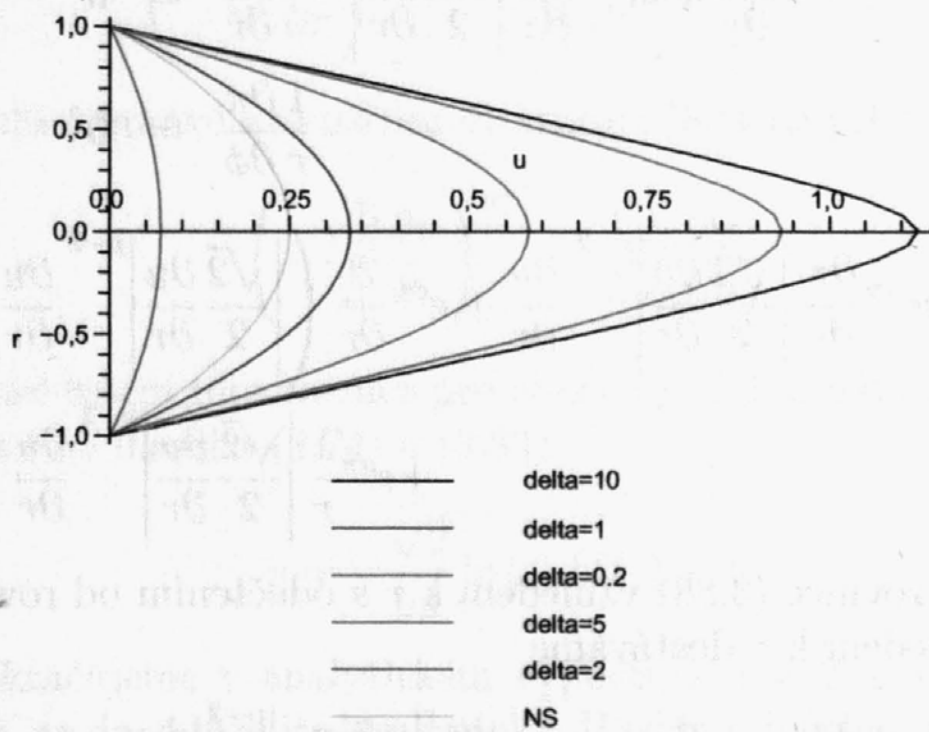
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} - \frac{a}{r} e^{a\pi} \frac{\partial \pi}{\partial z} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (3.91)$$

s využitím (3.88) získáme:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial r} = 0. \quad (3.92)$$



Obrázek 3.17: Poiseuilleovo proudění v trubici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku. Pro model s $p = 2$ je vykresleno analytické řešení, pro $p = 3/2$, $p = 7/4$, $p = 5/2$, máme k dispozici pouze numerické řešení. V obou případech volíme konstanty: $\delta = 1$, $k = 1$.



Obrázek 3.18: Poiseuilleovo proudění v trubici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku. $p = 2$, $\delta = 1/10, 1/5, 1/2, 1, 5$. Pro orientaci je vykreslen i model newtonovské tekutiny - značen NS.

Přímým dosazením $\pi(r, z) = A(r) * B(z)$ nebo $\pi(r, z) = A(r) + B(z)$ se můžeme přesvědčit, že takový tvar nutně vede na triviální řešení. Analytické řešení přesto existuje, odvození je detailně popsáno v [7]. Pro úplnost zde toto odvození naznačíme. Jeden z možných postupů je předpokládat tlak v následujícím tvaru

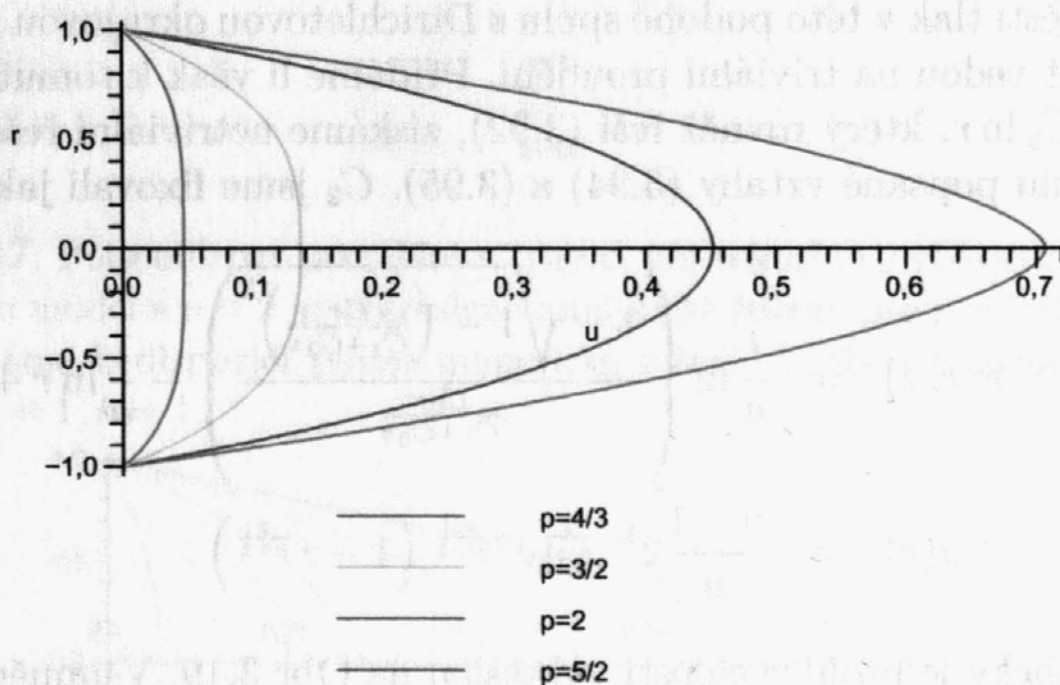
$$\pi(r, z) = \ln(F(r, z)), \quad F(r, z) = F\left(\frac{Cr}{C_1 + Cz}\right), \quad (3.93)$$

po dosazení do (3.92) a několika úpravách dospějeme k obyčejné diferenciální rovnici, její řešení odpovídá až na aditivní konstantu prvnímu členu v (3.94). Ze znalosti tlaku jsme již schopni dopočítat rychlost z rovnice (3.88). Naneštěstí tlak v této podobě spolu s Dirichletovou okrajovou podmínkou na rychlost vedou na triviální proudění. Přidáme li však k tomuto řešení výraz $\pi = -C_2 \ln r$, který rovněž řeší (3.92), získáme netriviální řešení původního problému popsané vztahy (3.94) a (3.95). C_2 jsme fixovali jako $\frac{1}{a}$.

$$\pi(r, z) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Cr}{C_1 + C_0 z}\right)^2}}{\frac{C_0 r}{C_1 + C_0 z}} \right) - \frac{1}{a} \ln r + C, \quad (3.94)$$

$$u(r) = \frac{p-1}{p} 2^{1-\frac{1}{p-1}} e^{-\frac{aC}{p-1}} \left(1 - r^{\frac{p}{p-1}}\right). \quad (3.95)$$

Graficky je profil rychlostí vykreslen na Obr 3.19. Všimněme si, že rychlostní profil je velmi podobný jako u mocninné tekutiny.



Obrázek 3.19: Poiseuilleovo proudění v trubici pro tekutinu s viskozitou závislou na tlaku. $\mu(\pi) = e^{a\pi}$, pro různé modely $p = 4/3, p = 3/2, p = 2, p = 5/2$, konstanty voleny $a = 0.1, C = 1$

Kapitola 4

Závěr

Úkolem práce bylo seznámit se s rovnicemi popisujícími proudění nenewtonovských tekutin a problematikou jejich analytického a numerického řešení v jednoduchých případech.

V úvodu jsme podali definici nenewtonovské tekutiny, zmínili jsme, jaké mohou být vlastnosti odlišující od tekutiny newtonovské. Jako zástupce nenewtonovských tekutin jsme uvedli mocninné tekutiny a tekutiny s viskozitou záviselou na tlaku.

Druhá kapitola práce připomněla chování newtonovské tekutiny v jednoduchých geometrických uspořádáních, konkrétně jsme řešili analyticky rovinné ustálené proudění mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými deskami a proudění v nekonečně dlouhé trubici. Ukázali jsme, jaký vliv na řešení má kromě homogenní Dirichletovy podmínky také požadavek splnění Navierovy podmínky skluzu na hranici.

V třetí kapitole jsme nejprve hledali analytická řešení popisující proudění nenewtonovské tekutiny ve dvou výše uvedených jednoduchých geometriích. Omezili jsme se na ustálené proudění mocninné tekutiny a proudění obecnějšího modelu mocninné tekutiny s viskozitou závislou na tlaku. Na získaných řešeních vidíme, že se rychlostní profily zajímavě liší od rychlostních profilů proudění newtonovské tekutiny z kapitoly 2. Jedná se např. o zplošťování profilů pro modely s $p < 2$ u mocninné tekutiny, či téměř trojúhelníkové profily u tekutiny s tlakově závislou viskozitou. Pro analytické řešení bylo zásadní předpokládat tlak v separovaném tvaru a rychlosti ve tvaru, kdy byla nenulová pouze jedna složka vektoru rychlosti. Toto zjednodušení znemožnilo zakomponovat Navierovu podmínku skluzu do úlohy pro tekutinu s viskozitou záviselou na tlaku a najít analytické řešení. Další pro-

stor jsme věnovali slabé formulaci úlohy tohoto typu a numerickému řešení pomocí komerčního software Comsol33. Numericky jsme řešili různé varianty úloh s Navierovou podmínkou skluzu a viskozitou závisující na tlaku lineárně i exponenciálně.

Na příkladu kdy řešíme proudění tekutiny s viskozitou závisující na tlaku je vidět, že za obecnější okrajové podmínky jakou je např. Navierova podmínka skluzu je šance najít analytické řešení mizivá. Již pro úlohy s homogenní Dirichletovou podmínkou (odstavce 3.2 a 3.3) jsme byli schopni nalézt explicitné řešení pouze pro jisté hodnoty parametru p . Budiž tento neúspěch motivací k tomu abychom se více zaměřili na numerická řešení a metodu konečných prvků.

Příloha A

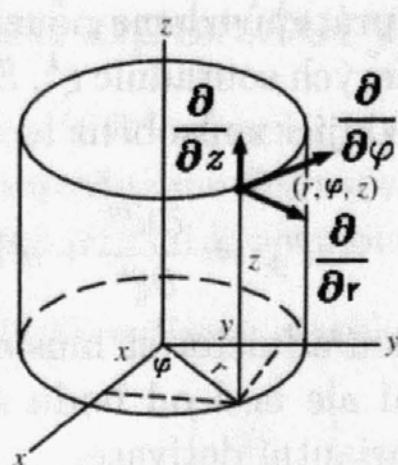
Cylindrické souřadnice.

Cylindrické souřadnice (r, φ, z) definujeme vztahy:

$$x = r \cos \varphi \quad (\text{A.1})$$

$$y = r \sin \varphi \quad (\text{A.2})$$

$$z = z \quad (\text{A.3})$$



Obrázek A.1: Cylindrické souřadnice

A.1 Složky metrického tenzoru

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Normovaná báze vektorů a 1-form

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r} \quad \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \mathbf{e}_{\hat{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{e}^{\hat{r}} = dr \quad \mathbf{e}^{\hat{\varphi}} = r d\varphi \quad \mathbf{e}^{\hat{z}} = dz \quad (\text{A.6})$$

$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$ jsou bázové vektory ve směru souřadnicových os.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$dr = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\varphi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \frac{1}{r} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad dz = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.3 Kovariantní derivace

Kovariantní derivace je zobecnění parciální derivace na křivočarých souřadnicích. Pro potřeby této práce uvedeme pouze její souřadnicový popis. Uvažujme tedy funkce křivočarých souřadnic ξ^k . Souřadnice kovariantní derivace vektoru definujeme následující způsobem¹:

$$u^m_{;k} := \frac{\partial u^m}{\partial \xi^k} + u^i \Gamma^m_{ik} \quad (\text{A.9})$$

Oproti kartézským souřadnicím si musíme uvědomit, že báze vektorů (A.7) již není konstantní ale bod od bodu se mění, právě tomu odpovídá člen $u^i \Gamma^m_{ik}$ v definici kovariantní derivace.

$$\frac{\partial}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^i} := \Gamma^m_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \quad (\text{A.10})$$

Uvedme ještě souřadnice kovariantní derivace pro formy a tenzory typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_{i;k} := \frac{\partial u_i}{\partial \xi^k} - u^i \Gamma^m_{ik} \quad (\text{A.11})$$

¹V celém dodatku s výhodou používáme sumační konvenci, tedy kdykoliv se ve výrazu vyskytne dvojice stejných horních a dolních indexů, sčítáme přes ně.

$$A^m_{i;k} := \frac{A^m_i}{\xi^k} + \Gamma^m_{jk} A^j_i - \Gamma^l_{ik} A^m_l \quad (\text{A.12})$$

Na skalárech podle definice splývá kovariantní derivace s parciální derivací.

Poznamenejme, že výše definované koeficienty Γ^i_{jk} se nazývají *Christoffelovy symboly 2. druhu* a plně určují kovariantní derivaci. Lze odvodit následující vztah mezi Γ^i_{jk} a metrickým tenzorem.

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \quad (\text{A.13})$$

A.4 Christoffelovy symboly

Speciálně pro cylindrické souřadnice máme:

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \text{ostatní koeficienty jsou nulové.} \quad (\text{A.14})$$

A.5 Diferenciální operátory

Diferenciální operátory známé z $\mathbb{R}^d$ zobecníme na křivočaré souřadnice tím, že místo parciálních derivací uvažujeme derivace kovariantní. V dalším textu uvažujeme souřadnice vektorů vzhled k normované bázi.

(i) Gradient skaláru

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

(ii) Gradient vektoru

$$\nabla \mathbf{v} = v^{\hat{i}}_{;\hat{j}} \mathbf{e}_{\hat{i}} \otimes \mathbf{e}^{\hat{j}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} \right) + \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{v^{\hat{r}}}{r} & \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial z} \\ \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial \varphi} & \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

(iii) Divergence vektoru

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v^i_{;i} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv^{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial z} \quad (\text{A.17})$$

(iv) Laplaceův operátor na skalár

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

(iv) Laplaceův operátor na vektorovou funkci

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v^{\hat{r}} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} - \frac{v^{\hat{r}}}{r^2} \\ \Delta v^{\hat{\varphi}} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r^2} \\ \Delta v^{\hat{z}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Literatura

- [1] Bonn, D.: *Rod-Climbing Effect in Newtonian Fluids*, Physical Review Letters Volume 93 (2004), 241503-2 -2414503-4
- [2] Evans, L. C.: *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998
- [3] Gurtin, M. E.: *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, 1981
- [4] Hron, J. and Malek, J. and Necas, J. and Rajagopal, K. R.: *Numerical simulations and global existence of solutions of two-dimensional flows of fluids with pressure- and shear-dependent viscosities*, Mathematics and Computers in Simulation 61 (2003), 297-315.
- [5] Hron, J. and Malek, J. and Rajagopal, K. R.: *Simple flows of fluids with pressure-dependent viscosities*, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 457 (2001), 1603-1622.
- [6] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: *Fluid mechanics Course of Theoretical Physics, vol. 6.*, Addison-Wesley, Reading 1959.
- [7] Průša, V.: *Axisymmetric flows of fluids with pressure dependent viscosities*, 2006
- [8] Showalter, W. R.: *Mechanics of non-Newtonian fluids*, Pergamon, Oxford, 1978.