Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Žákovské konstrukce funkcí pomocí absolutní hodnoty

Pupils' constructions of functions using absolute value

Autor: Bc. Lucia Miháliková

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Jednooborové studium - Matematika

Praha 2018

Děkuji především svému vedoucímu Mgr. Derekovi Pilousovi, Ph.D. za rady, nápady a připomínky při vedení diplomové práce. Také bych chtěla poděkovat blízkým přátelům za podporu během studia a tvorbu potřebného zázemí. Můj dík patří rovněž kolegům v práci za pomoc a podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Dereka Pilouse, Ph.D. a s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury, pramenů a informačních zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 12. 07. 2018 Lucia Miháliková

Název práce: Žákovské konstrukce funkcí pomocí absolutní hodnoty

Autor: Bc. Lucia Miháliková

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práce se zaměřuje na práci studentů s absolutní hodnotou a strategie studentských řešení při hledání předpisu funkce z grafu. Cílem práce je popsat postupy a nejčastější chyby studentů při hledání předpisu funkce a zároveň zjistit, jak studenti chápou absolutní hodnotu a dovedou své znalosti o absolutní hodnotě využívat při řešení úloh. V první, teoretické části, je analýza učebnic, RVP a maturitních testů na dané témata a souhrn vybraných výzkumů k této problematice. Druhá, výzkumná část, je věnována popisu a analýze vlastního výzkumu, který byl uskutečněn na studentech střední školy. V závěrečné kapitole je shrnutí výsledků výzkumu a porovnání těchto výsledků s teoretickou částí této práce.

Klíčová slova: funkce, konstrukce, absolutní hodnota

Title: Pupils' constructions of functions using absolute value

Author: Bc. Lucia Miháliková

Supervisor: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Abstract:The thesis focuses on how students work with the absolute value and on the strategies of students' search for equations from graphs of functions. The aim of the thesis is to describe solution processes and the most common mistakes of students in searching for the equations as well as finding out how students understand the absolute value and how they work with the absolute value in solving the problems. The first, theoretical part, is the analysis of textbooks, RVP and graduations tests on given topics and a summary of selected researches on this topic. The second, research part, is devoted to the description and analysis of own research that was carried out on high school students. The final chapter summarizes the results of the research and compares these results with the theoretical part of this work.

Keywords: function, construction, absolute value

Obsah

Úvod **1**

1 Matematika a absolutní hodnota **3**

2 Výuka absolutní hodnoty a předpisu funkce z grafu **4**

2.1 Rámcový vzdělávací program – RVP 6
2.2 Učebnice a absolutní hodnota 7
2.2.1 MATEMATIKA – funkce (kvarta) 7
2.2.2 Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky 8
2.2.3 Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice 8
2.2.4 Matematika pro gymnázia – Funkce 9
2.3 Absolutní hodnota a státní maturita z matematiky 10
2.4 Učebnice a předpis funkce z grafu 11
2.4.1 MATEMATIKA – úměrnosti (tercie) 11
2.4.2 MATEMATIKA – funkce (kvarta) 12
2.4.3 Matematika pro gymnázia – Funkce 12
2.5 Hledání předpisu funkce a státní maturita 15

3 Vybrané výzkumy **18**

3.1 Vybrané výzkumy se vztahem k hledání předpisů funkcí 18
3.1.1 Výzkum 1 – Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ 18
3.1.2 Výzkum 2 – Failures and Inabilities of High School Students about Quadratic Equations and Functions 19
3.1.3 Výzkum 3 – Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function 20
3.2 Vybrané výzkumy se vztahem k výuce absolutní hodnoty 21
3.2.1 Výzkum 4 – Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value 21

3.2.2 Výzkum 5 – Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions 23

4 Vlastní výzkum **26**

4.1 Cíle výzkumu 27

4.2 Výzkumné strategie 27

4.3 Charakteristika výzkumu 28

4.4 Faktory ovlivňující výsledky 28

4.5 První test 29

4.5.1 První úloha 31

4.5.2 Druhá úloha 40

4.5.3 Třetí úloha 47

4.5.4 Čtvrtá úloha 54

4.6 Druhý test 60

4.6.1 První úloha 61

4.6.2 Druhá úloha 66

4.6.3 Třetí úloha 71

4.6.4 Čtvrtá úloha 77

4.6.5 Pátá úloha 82

4.6.6 Šestá úloha 85

4.7 Diskuse 91

Závěr **95**

Úvod

Absolutní hodnota ve výuce matematiky je jedno z témat, které jsem dlouho nepovažovala za zajímavé, dokonce ani za náročné pro studenty. Během mé několikaleté praxe jsem ale zjistila, že absolutní hodnota má mezi tématy, které se běžně vyučují na ZŠ a SŠ, zajímavé místo. Dle mých zkušeností se toto téma na ZŠ někdy podceňuje z hlediska náročnosti a později, když se absolutní hodnota objevuje v jiných tématech (např. funkce, komplexní čísla) a vyžaduje hlubší porozumění, mají studenti na SŠ problémy i při řešení poměrně snadných úloh. Práce studentů s absolutní hodnotou v rámci výuky se může často zúžit jenom na memorování různých pravidel pro počítání, které je spojeno s nepochopením absolutní hodnoty jako takové.

V mé diplomové práci jsem se rozhodla prozkoumat práci mých studentů s absolutní hodnotou a vytvořit si tak lepší obraz o jejich znalostech a dovednostech v této oblasti. Mé zkoumání jsem zasadila do tématu funkcí, konkrétně do hledání předpisu funkcí z grafu. Hlavním důvodem byla skutečnost, že na tento druh úloh nejsou studenti ze školy zvyklí. Na základě tohoto rozhodnutí jsem rozšířila objekt mého zkoumání v práci i o oblast obecného hledání předpisu funkce z grafu, konkrétně mě zajímaly strategie řešení, které si studenti vyberou.

Diplomová práce je rozdělena na dva celky a to na teoretickou část a část výzkumnou. V teoretické části jsem se snažila popsat, jak k absolutní hodnotě a k výuce absolutní hodnoty přistupují učebnice, které na gymnáziu používáme, jaké postavení má absolutní hodnota v RVP a v maturitních testech. Dále v této části popisuji výsledky vybraných výzkumů z oblasti hledání předpisů funkce z grafu a také výzkumy, které se věnovaly absolutní hodnotě.

Ve druhé části nejprve upřesňuji cíle výzkumu, výzkumné strategie a charakteristiku mého výzkumu. Dále následuje popis studentských postupů řešení u jednotlivých úloh s ukázkami studentských řešení. V této části se klade důraz na demonstraci použití absolutní hodnoty a strategií řešení, které si studenti zvolili.

V závěru práce je zařazena diskuse, ve které jsem se pokusila zodpovědět otázky, které jsem si vytyčila na začátku mého výzkumu.

1 Matematika a absolutní hodnota

V mé diplomové práci se budu věnovat funkcím, absolutní hodnotě a v neposlední řadě i tomu, jak své poznatky, které si studenti během svého studia vytvořili, dovedou využívat při řešení zadání, na které typově nejsou zvyklí.

Téma absolutní hodnoty jsem během svého studia zpracovávala v rámci seminární práce z předmětu Didaktiky matematiky a už tou dobou jsem narazila v učebnicích na poměrně málo tvořivých úloh pro žáky a studenty, ve kterých by se absolutní hodnota zaváděla, a ve kterých by žáci měli možnost objevovat její vlastnosti.

Tato skutečnost ve mě vytvořila dojem, že učebnice jsou převážně určeny pro transmisivní výuku absolutní hodnoty (i když v rámci středoškolské matematiky ji považuji za relativně snadné téma), co může způsobit, že znalosti studentů o absolutní hodnotě jsou jenom výsledkem učení izolovaných informací bez hlubšího porozumění a bez propojení s dalšími znalostmi. Právě tohle zjištění mě vedlo k rozhodnutí věnovat se v mé diplomové práci alespoň nějakým způsobem zkoumání způsobu práce a porozumění absolutní hodnoty u studentů.

Z tohoto důvodu byl na samém počátku hledání tématu pro mou práci zpracován počáteční průzkum učebnic, které se běžně používají na gymnáziích, základních a středních školách, a následná rešerše o absolutní hodnotě z daných učebnic.

Kromě důležitých informací o tom, jak se v učebnicích zavádí absolutní hodnota, s jakými typy příkladů na absolutní hodnotu se studenti během výuky setkávají a jaké vlastnosti absolutní hodnoty by měli studenti aktivně využívat, jsem zjistila, že se v těchto učebnicích nenachází žádný druh úloh (např. slovní úlohy), které bych mohla použít ve své práci k odhalení používání absolutní hodnoty bez hlubšího porozumění.

I z tohoto důvodu jsem se nakonec rozhodla, že zkoumání míry porozumění absolutní hodnoty u studentů bude propojena se zkoumáním konstrukce předpisů funkcí z grafu.

2 Výuka absolutní hodnoty a předpisu funkce z grafu

Během několika let mé pedagogické praxe jsem se setkala s tím, že představa studentů o absolutní hodnotě se může výrazně lišit a může obsahovat různé interpretace absolutní hodnoty. V teoretické části španělského výzkumu *Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value* (Wilhelmi, 2007) uvádí autoři hned několik nejčastějších definic pro absolutní hodnotu, kterými může být zavedena.

Definice 1 (Aritmetická definice)**.** Absolutní hodnota z x, která se značí $|x|$, je x, je-li $x > 0$, nebo 0, je-li $x = 0$ nebo je $-x$, je-li $x < 0$.

Autoři výzkumu uvádí, že chápání pojmu absolutní hodnoty podle této definice je nejlépe vidět při postupu řešení rovnice typu $|x - 2| = 1$, kde si student uvědomí, že výraz v absolutní hodnotě může dát jenom -1 nebo 1, proto hledá řešení rovnic $x - 2 = -1$ a $x - 2 = 1$. Student své řešení zakládá jenom na informaci o tom, že absolutní hodnota z čísel 1 a -1 je 1.

Definice 2 (Definice po částech za pomoci funkce)**.** Absolutní hodnota z (...), je (...), je-li $(...) \geq 0$, nebo $-(...)$, je-li $(...) < 0$.

Při této definici by postup řešení rovnice $|x - 2| = 1$ mohl být: absolutní hodnota z $|x - 2|$, je $(x - 2)$, je-li $x \geq 2$, nebo $-(x - 2)$, je-li $x < 2$, proto rovnice $|x - 2| = 1$, je $(x - 2) = 1$ pro $x \geq 2$ tudíž $x = 3$, nebo $-(x - 2) = 1$ pro $x < 2$ tudíž $x = 1$. Student své řešení zakládá na rozdělení reálných čísel na dva intervaly. Na prvním intervalu absolutní hodnota nemění hodnoty výrazu ze zadání, na druhém intervalu absolutní hodnota mění hodnoty daného výrazu na čísla opačná.

Definice 3 (Definice za pomoci maxima)**.** Absolutní hodnota $|x| =$ je maximum z hodnot $x, -x$.

V tomto případě řešení rovnice $|x - 2| = 1$ je maximum z výrazů $(x - 2)$ a $-(x - 2)$ a další postup je podobný tomu pro definici po částech za pomoci funkce.

Definice 4 (Definice za pomoci odmocniny)**.** Absolutní hodnota z x je $|x| = \sqrt{x^2}$.

Řešení rovnic $|x - 2| = 1$ je pak řešením rovnice s odmocninou, ze které po umocnění dostaneme kvadratickou rovnici

$$\sqrt{(x-2)^2} = 1$$

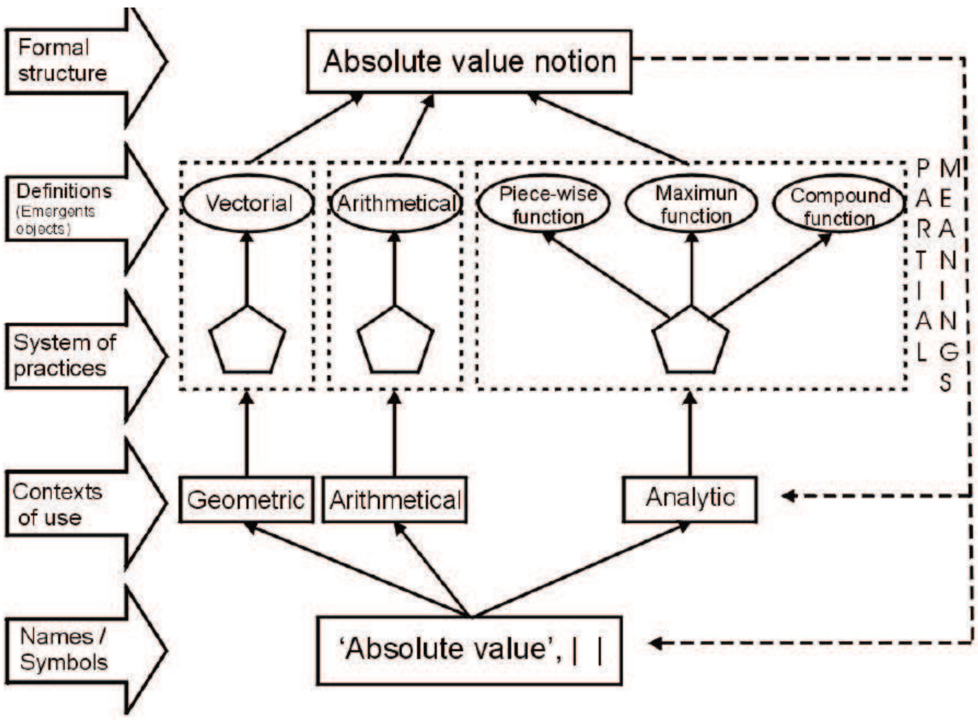
$$(x-2)^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

. Po vyřešení kvadratické rovnice dostáváme dvě řešení, $x = 3$ nebo $x = 1$.

Jak bylo ukázáno, tyto definice vyžadují různou matematickou aktivitu, jiné techniky řešení problému. Z tohoto důvodu tyto definice nejsou ekvivalentní z epistemického hlediska (nepracuje se v nich se stejnými matematickými objekty) a proto mohou výrazně ovlivnit práci studentů s absolutní hodnotou (Wilhelmi, 2007). V tomto dokumentu můžeme najít i schéma (Obr. 1), které zobrazuje rozmanitost objektů spojených s absolutní hodnotou.



Obrázek 1: Rozmanitost objektů spojených s absolutní hodnotou

2.1 Rámcový vzdělávací program – RVP

Přístup k absolutní hodnotě může být skutečně různorodý, proto jsem považovala za důležité zjistit, jak přistupuje k absolutní hodnotě RVP a samotné učebnice matematiky v ČR.

Rámcový vzdělávací program je základní dokument na základě kterého, mají být sestaveny Školní vzdělávací programy jednotlivých škol. Vymezuje závazné „rámce“ pro jednotlivé etapy vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání neudává povinnost věnovat se absolutní hodnotě na základních školách. I proto se většina studentů v České republice potkává s absolutní hodnotou až na střední škole.

RVP pro gymnázia (MŠMT, 2016) uvádí jako očekávaný výstup žáků v oblasti *číslo a proměnná*, kam patří učivo rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, aplikaci geometrického významu absolutní hodnoty a grafické znázornění řešení rovnic i nerovnic. V části RVP, která se věnuje oblasti *závislosti a funkční vztahy*, kam patří učivo funkce absolutní hodnota, jsou očekávané výstupy:

- načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti,
- formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí,
- využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů,
- modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí,
- řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích.

Protože se můj výzkum odehrával jenom na gymnáziu, neuvádím zde obsah Rámcových vzdělávacích programů pro střední odborné vzdělávání.

2.2 Učebnice a absolutní hodnota

Učebnice jsou i v dnešní době základní učební pomůckou ve výuce. Pro gymnázia existuje vícero řad učebnic. Pro účely mého výzkumu jsem se zajímala o výuku absolutní hodnoty dle řady učebnic od vydavatelství Prometheus, které se používají i na gymnáziu, na kterém byl výzkum uskutečněn.

2.2.1 MATEMATIKA – funkce (kvarta)

Tato řada učebnice od vydavatelství Prometheus pro nižší gymnázia pracuje prvně s pojmem absolutní hodnota v učebnici pro kvarty s podnázvem *funkce*. Učebnice absolutní hodnotu zavádí jako vzdálenost obrazů dvou opačných čísel od obrazu čísla 0 na číselné ose. Tento způsob zavedení se neshoduje ani s jednou definicí absolutní hodnoty z výzkumu *Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value*. Učebnice dále shrnuje nový poznatek do věty „Absolutní hodnotu čísla tedy dostaneme, když v jeho číslicovém zápisu zakryjeme případné znaménko mínus, plus zakrývat nemusíme.“ Definice absolutní hodnoty, kterou v učebnici žáci najdou v modrém rámečku, se shoduje s *Aritmetickou definicí* absolutní hodnoty:

Definice 5. Absolutní hodnotou čísla x nazýváme:

- číslo x, je-li $x > 0$,
- číslo 0, je-li $x = 0$,
- číslo $-x$, je-li $x < 0$.

Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$. (Herman, 2000, str.53)

V učebnici následuje odvození základního grafu $y = |x|$ za pomoci rozdělení definičního oboru na kladná čísla, záporná čísla a nulu. Učebnice dále ještě popisuje postup odvození grafů funkcí $y = |3x|$ a $y = |x - 2|$.

Úlohy k procvičení v této učebnici jsou zaměřené k odvození jiných grafů s absolutní hodnotou, nebo k procvičení významu absolutní hodnoty za pomoci určování této hodnoty u různých čísel.

2.2.2 Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky

Učebnice hned uvádí následující definici absolutní hodnoty, která je opět shodná s *Aritmetickou definicí* absolutní hodnoty:

Definice 6. Absolutní hodnotu čísla x definujeme takto:

- Je-li $a > 0$ nebo $a = 0$, pak $|a| = a$,
- Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$.

Na příkladech demonstruje některé vlastnosti absolutní hodnoty a uvádí je jako věty bez důkazů (Bušek, Calda, 2018, str. 40).

Věta 1. *Pro každé reálné číslo a platí* $\sqrt{a^2} = |a|$.

Věta 2. *Absolutní hodnota každého reálného čísla je rovna jeho vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od počátku.*

Věta 3. *Vzdálenost obrazů reálných čísel* a, b *na číselné ose je rovna* $|a - b|$, *resp.* $|b - a|$.

Na konci kapitoly učebnice vysvětluje postup řešení nerovnic s jednou absolutní hodnotou. Úlohy k procvičení jsou zaměřené na význam absolutní hodnoty (opět určování této hodnoty u různých čísel) a hledání řešení pro základní typ rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou za pomoci geometrického významu.

2.2.3 Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice

Učebnice nejprve připomíná definici absolutní hodnoty z učebnice *Matematika pro gymnázia - Základní poznatky z matematiky* (viz. definici 6/str. 8). Pak hned uvádí některé vlastnosti absolutní hodnoty, které studenti budou využívat při počítání rovnic a nerovnic – opět bez důkazu (Charvát, Zhouf, Boček, 2018, str. 62).

Věta 4. *Pro libovolná čísla* $a, b \in R$ *platí:*

- $|a| \geq 0$,

- $|a| = |-a|$,
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, *pokud b není 0.*

Po této definici následuje připomenutí geometrického významu (viz. věta 2/str. 8) a (viz. věta 3/str. 8). Učebnice dále uvádí řešené příklady rovnic a nerovnic s jednou absolutní hodnotou, které využívají geometrický význam nebo je řeší rozdělením na případy, kdy je výraz v absolutní hodnotě větší (nebo roven) nule nebo menší než nula. Tato metoda se v učebnici označuje jako *metoda nulových bodů*. Také uvádí řešení rovnic a nerovnic se dvěma a vícero absolutními hodnotami, které řeší přes metodu nulových bodů. Při ukázce nerovnice s jednou absolutní hodnotou učebnice klade důraz na řešení na základě grafického znázornění situace. Úlohy k procvičení jsou jenom obměnou zadání z řešených příkladů. Na konci kapitoly se nachází následující úloha (Charvát, Zhouf, Boček, 2018, str. 68):

Úloha 1. *Rozhodněte, pro které dvojice reálných čísel a, b platí:*

- $|a + b| = |a| + |b|$,
- $|a - b| = |a| - |b|$.

Tato úloha se liší od ostatních úloh k procvičení. Kromě toho, že zadání této úlohy není jenom obměnou řešených příkladů, studenti se u této úlohy prvně potkávají s rovnicí se dvěma neznámými, která obsahuje i absolutní hodnoty.

2.2.4 Matematika pro gymnázia – Funkce

Učebnice opět připomíná definici absolutní hodnoty (viz. definici 6/str. 8). První příklad vysvětluje sestrojení grafu funkce $y = |x|$ za pomoci grafů předpisu funkce zvlášť pro záporná čísla (graf funkce $y = -x$) a zvlášť pro kladná čísla a nulu (graf funkce $y = x$) . Výsledný graf vznikne složením těchto dvou grafů. Následují úlohy na opakování významu absolutní hodnoty a nerovnic s absolutní hodnotou. V další kapitole se učebnice věnuje pouze funkcím s absolutní hodnotou. Řešené příklady jsou zaměřené na určování definičního oboru (absolutní hodnota ve zlomku nebo pod odmocninou), sestrojení funkcí s jednou absolutní hodnotou stejným postupem, jakým byl odvozen základní graf $y = |x|$ a sestrojení grafu s vícero absolutními hodnotami za pomoci nulových bodů, kterou by studenti měli znát z učebnice *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*. Po řešených příkladech následují úlohy na procvičení typově stejných zadání jako v řešených příkladech s důrazem na zkoumání společných vlastností mezi grafy. Například (Odvárko, 2018, str. 48):

Úloha 2. *Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí a porovnejte je:*

- $y = |x|$,
- $y = |x| - 4$,
- $y = ||x| - 4|$.

Další kapitola zavádí pojmy sudá a lichá funkce, funkce omezená (omezená shora, zdola), maximum a minimum na základě porovnání dvou funkcí $y = x$ a $y = |x|$.

2.3 Absolutní hodnota a státní maturita z matematiky

Absolutní hodnota by se mohla objevit i zadání státní maturity od firmy CERMAT. Zde uvádím (Obr. 2) jednu jedinou úlohu, která byla v ilustračním testu k státní maturitě z roku 2008 a byla hodnocena jedním bodem (CERMAT, 2008):

Úloha 2
Určete reálné číslo r:
$r = 2 \cdot |3 - \pi| + |8 - 2 \cdot \pi|$

Obrázek 2: Absolutní hodnota a maturita

2.4 Učebnice a předpis funkce z grafu

2.4.1 MATEMATIKA – úměrnosti (tercie)

Ještě předtím, než studenti začnou pracovat s pojmem funkce, pracují s pojmem závislost a úměrnost. Tato učebnice (Herman, 1997) ve své kapitole *Závislost veličin* nejprve vysvětluje pojmy jako *veličina*, *vzájemný vztah*, *úměra* a *úměrnost* na reálných situacích ze života. Pak se věnuje otázce, jak vyjadřujeme závislosti na příkladě nákupu v obchodě, konkrétně nákupu rohlíků. Učebnice poukazuje na to, že konečnou sumu, kterou za rohlíky zaplatíme, můžeme vypočítat na základě následujícího vztahu:

$$\textit{cena nákupu} = \textit{počet rohlíků} \cdot \textit{cena jednoho rohlíku.}$$

Následuje podobný příklad na téma cestování po dálnici, ve kterém už učebnice pracuje se značením, které studenti znají z hodin fyziky a výsledkem je předpis funkce $s = v \cdot t$. Tato kapitola dále obsahuje úlohy na procvičení vyjádření závislostí grafem, tabulkou nebo vzorcem (předpisem funkce).

Následující kapitola *Přímá úměrnost* nejprve poukazuje na situace ze života, ve kterých přímou úměrnost můžeme vidět a shrnuje poznatky do definice. Následuje příklad, ve kterém studenti mají daný graf přímé úměrnosti a mají ji zapsat jako vzorec. Řešení se opírá o vzorec přímé úměrnosti, ve kterém stačí určit koeficient. K určení se použije libovolný bod, kterým graf prochází. Úlohy na procvičení jsou zaměřené na hledání předpisu přímé úměrnosti, jejíž graf prochází daným bodem, nebo jejíž graf je zobrazen na obrázku v učebnici.

Další kapitola *Nepřímá úměrnost* má stejnou strukturu jako kapitola o přímé úměrnosti.

V následujících úlohách k opakování a procvičení je jedna úloha, ve které studenti mají zadané 4 grafy (dva na přímou úměrnost a dva na nepřímou) a mají určit jejich předpisy.

2.4.2 MATEMATIKA – funkce (kvarta)

Tato učebnice již zavádí funkci jako matematický pojem a poukazuje na to, že studenti s funkcemi již pracovali v učebnici *Úměrnosti.* Na příkladu termografu upozorňuje na skutečnosti, že grafy funkcí nemusí být spojité, a že některé grafy neumíme vyjádřit vzorcem, a uvádí následující definici grafu funkce:

Definice 7. V dané pravoúhlé soustavě souřadnic je grafem funkce $y = f(x)$, $x \in D$, množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D$.

Dále se učebnice věnuje definici pojmu funkce a úlohám, ve kterých studenti mají rozhodnout, zda na obrázku je graf funkce nebo nikoliv.

Zbytek učebnice je rozdělen na kapitoly podle druhu funkce, které se kapitola věnuje. V kapitole o lineárních funkcích je vysvětleno na příkladu, jak najdeme vzorec lineární funkce z jejího grafu za pomoci souřadnic dvou bodů (které vyčteme z grafu), kterými graf prochází, a vytvořením soustavy dvou lineárních rovnic. V části věnované procvičení lineárních funkcí najdeme úlohu, ve které studenti mají rozhodnout, zda na obrázku je graf lineární funkce nebo ne, a samozřejmě úlohy na procvičení hledání předpisu z grafu lineární funkce na obrázku.

U kvadratických funkcí se hledání předpisu funkce omezuje jenom na předpisy ve tvaru $y = kx^2 + q$ nebo $y = kx^2$, které prochází danými body.

V kapitole o nepřímé úměrnosti tak nalezneme jenom úlohy, ve kterých studenti mají najít předpis nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází daným bodem.

V každé kapitole se snaží učebnice poukázat na význam jednotlivých koeficientů v předpisech funkcí. V textu můžeme nalézt, jak některé změny hodnot koeficientů v předpisech funkcí ovlivňují graf této funkce. V několika úlohách na procvičení je vidět snaha autorů podpořit zkoumání studentů a samotné zadání úloh vyzývá studenty, aby danou spojitost našli sami.

2.4.3 Matematika pro gymnázia – Funkce

Autor v úvodu píše, že cílem učebnice je seznámit studenty se základními vlastnosti některých důležitých typů funkcí a naučit studenty sestrojovat jejich grafy. Studenti se z učebnice také dozví, jak lze získané poznatky o funkcích užít při řešení praktických úloh z jiných vědních oborů.

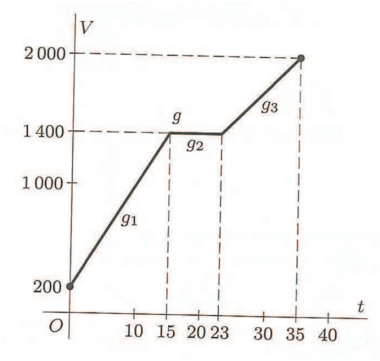
V první kapitole se učebnice věnuje opakování a upřesnění základních pojmů jako *funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce, funkční hodnota*. V této části učebnice můžeme nalézt tyto typy úloh pro práci s grafem:

- úlohy, ve kterých studenti mají z daného grafu určit definiční obor, obor hodnot funkce,
- úlohy, ve kterých mají studenti určit funkční hodnotu funkce f v daném bodě a určit která $x \in \mathrm{D_f}$ mají danou funkční hodnotu,
- úlohy, ve kterých mají přiřadit ke každému z několika předpisů funkcí obrázek, na kterém je graf této funkce,
- úlohy, ve kterých z grafu funkce mají určit, jestli daný bod patří do grafu, nebo ne,
- úlohy, ve kterých studenti mají rozhodnout (a zdůvodnit), které množiny bodů na obrázcích jsou grafy funkcí, a které ne.

V další kapitole, která se věnuje lineární funkci, můžeme nalézt úlohu, která je zaměřená na hledání informací o funkci z jejího grafu. Úloha zní:

Úloha 3. *Na obrázku 3 je graf funkce g, která udává závislost objemu V nafty v litrech v cisterně na čase t v minutách po celou dobu jejího plnění. Které informace můžete z grafu získat?*

Tato kapitola se věnuje i využití grafů lineárních funkcí při řešení rovnic a nerovnic a jejich soustav. Učebnice nabízí řešení úloh, při kterých má student nejprve sestrojit graf dané lineární funkce a následně z něho pak vyčíst, pro která $x \in \mathrm{R}$ platí různé nerovnosti, nebo úlohy, při kterých má student sestavit v téže soustavě souřadnic grafy dvou funkcí a pak rozhodnout, pro která $x \in \mathrm{R}$ platí dané nerovnice. Řešení je vždy uvedeno jak graficky, tak početně. Učebnice uvádí i jednu slovní úlohu, kterou řeší graficky. Současně upozorňuje studenty, že grafickým řešením můžeme dostat jenom



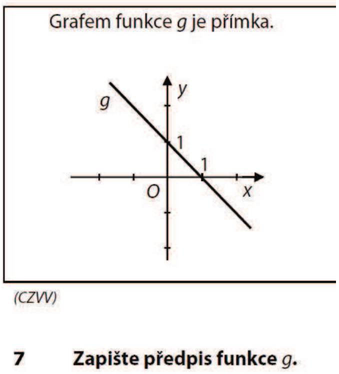
Obrázek 3: Graf k úloze č.3

přibližné správné řešení, v případě, chce-li student přesnější výsledek, musí sestavenou nerovnici vyřešit početně.

V této kapitole učebnice pracuje taky s vlastnostmi lineárních funkcí. Kromě definicí vlastností zde najdeme úlohy, při jejichž řešení by student měl pochopit, jak změna hodnoty koeficientu ovlivní vlastnost lineární funkce, a to sestrojením a porovnáním grafů lineárních funkcí s různými hodnotami pro koeficienty a, b v předpisu funkce ve tvaru $y = ax + b$.

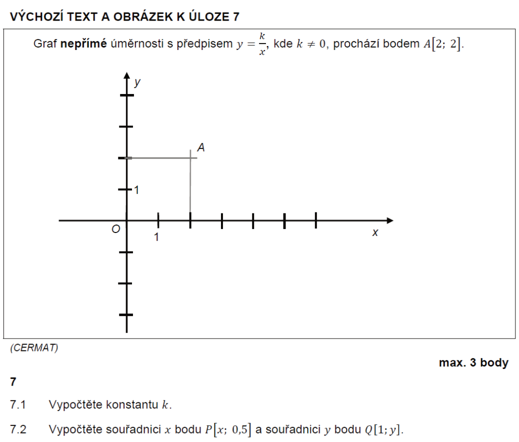
2.5 Hledání předpisu funkce a státní maturita

Práce s předpisem funkce se v státní maturitě objevuje častěji než rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou. Jediný úkol (CERMAT, 2016), ve kterém se požaduje předpis funkce z grafu bez dalších informací, se objevil v zadání maturit na podzim 2016 (Obr. 4).

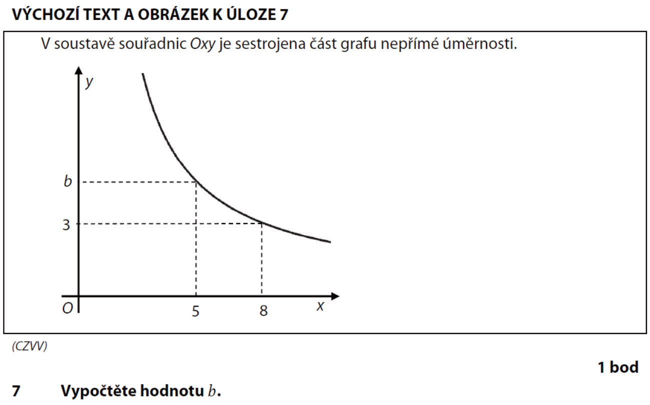


Obrázek 4: Maturita - předpis lineární funkce

V několika dalších testech státní maturity byly úlohy, které přímo nevyzývaly studenty vytvořit předpis funkce, ale správné řešení se opíralo o práci s tímto předpisem. Student dostal ze zadání informaci, která mu měla pomoct si předpis vytvořit, a na základě předpisu měl zjistit další informace o funkci podle zadání. Uvádím dva příklady na nepřímou úměrnost (Obr. 5) a (Obr. 6).

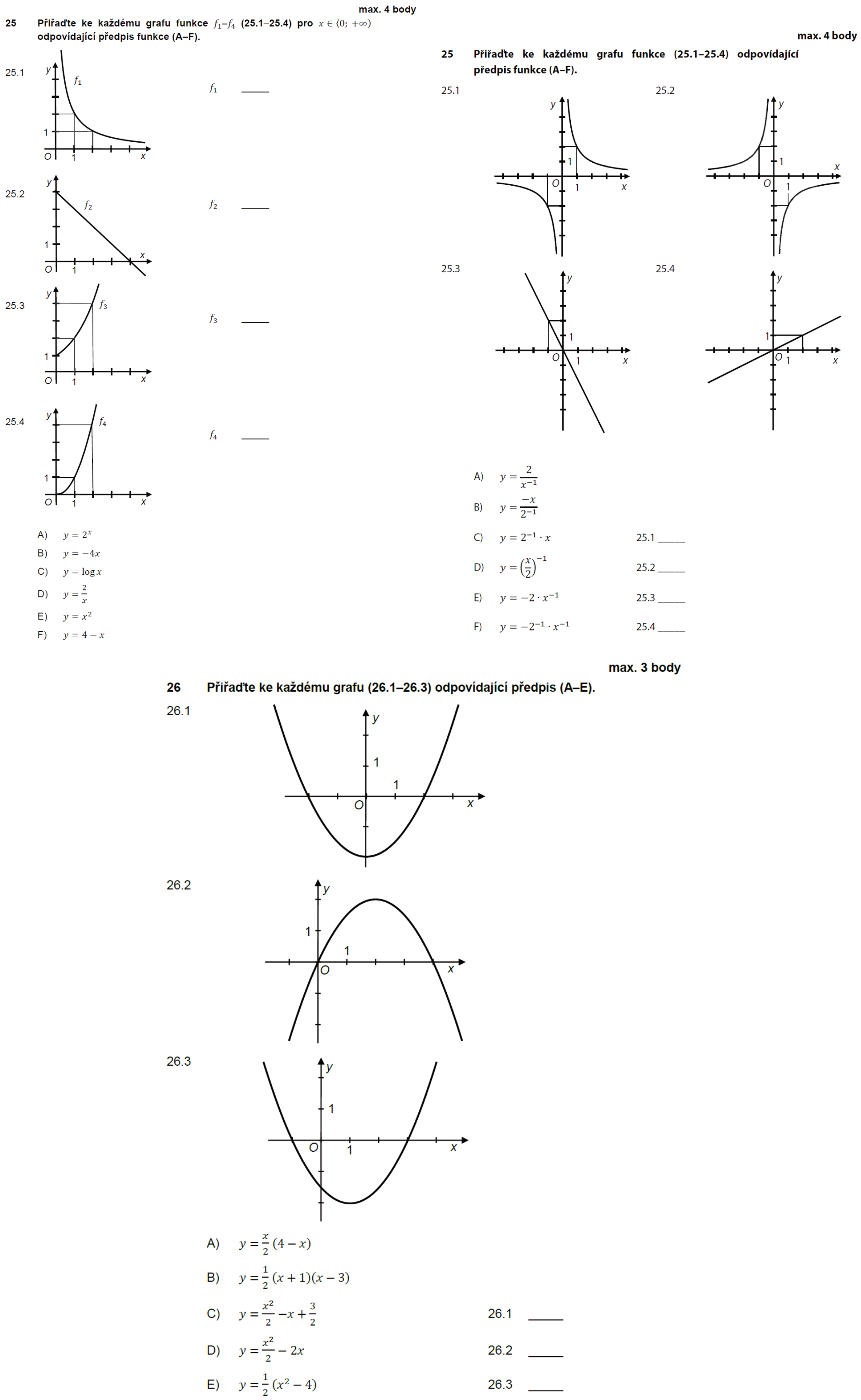


Obrázek 5: Maturita - nepřímá úměrnost I



Obrázek 6: Maturita - nepřímá úměrnost II

Nejčastěji se v státní maturitě ale objevovalo zadání, ve kterém měli studenti jenom přiřadit ke grafu funkce správný předpis funkce z nabízených možností. Jedna skupina úloh zkoumala různé předpisy funkcí jednoho druhu, např. kvadratických funkcí. Při jiných zadáních musel student na základě informací, které z grafu zjistil, rozhodnout i o jaký druh funkce jde (Obr. 7).



max. 4 body

25 **Přiřaďte ke každému grafu funkce f_1–f_4 (25.1–25.4) pro $x \in (0; +\infty)$ odpovídající předpis funkce (A–F).**

25.1 f_1 ____

25.2 f_2 ____

25.3 f_3 ____

25.4 f_4 ____

A) $y = 2^x$

B) $y = -4x$

C) $y = \log x$

D) $y = \frac{2}{x}$

E) $y = x^2$

F) $y = 4 - x$

max. 4 body

25 **Přiřaďte ke každému grafu funkce (25.1–25.4) odpovídající předpis funkce (A–F).**

A) $y = \frac{2}{x^{-1}}$

B) $y = \frac{-x}{2^{-1}}$

C) $y = 2^{-1} \cdot x$

D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$

E) $y = -2 \cdot x^{-1}$

F) $y = -2^{-1} \cdot x^{-1}$

25.1 ____

25.2 ____

25.3 ____

25.4 ____

max. 3 body

26 **Přiřaďte ke každému grafu (26.1–26.3) odpovídající předpis (A–E).**

A) $y = \frac{x}{2}(4 - x)$

B) $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$

C) $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$

D) $y = \frac{x^2}{2} - 2x$

E) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$

26.1 ____

26.2 ____

26.3 ____

Obrázek 7: Maturita - předpis funkce a graf

3 Vybrané výzkumy

Najít výzkumy, o které bych se mohla opřít při tvorbě mé diplomové práce, nebylo snadné. Výzkumy z České republiky se dané problematice téměř vůbec nevěnují. Bohužel ani v zahraniční literatuře se mi nepodařilo najít výzkum, který by si za hlavní cíl stanovil zkoumání konstrukcí předpisů funkcí za pomoci absolutní hodnoty. Proto zde uvádím výzkumy, které se daného tématu dotkly alespoň okrajově, nebo přináší důležité poznatky pro můj experiment.

Nejprve jsem se zaměřila na výzkumy zkoumající žákovské konstrukce předpisů různých funkcí, se kterými se během studia studenti setkají. Výzkumy nezkoumají obecný algoritmus, jak najít předpis libovolné funkce z grafu, spíše se zaměřují na nalezení předpisu některé z elementárních funkcí, které studenti znají z hodin, za pomoci využití vhodné vlastnosti.

V dalším kroku jsem se soustředila na výzkumy, které zkoumají způsob práce studentů s absolutní hodnotou.

3.1 Vybrané výzkumy se vztahem k hledání předpisů funkcí

3.1.1 Výzkum 1 – Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ

Výzkum byl uskutečněn v rámci disertační práce Mgr. Ireny Budínové, Ph.D. z Masarykovy univerzity v Brně v roce 2010. Hlavním cílem bylo zmapovat, jaké dovednosti a vědomosti si žáci v učivu o funkcích odnášejí ze ZŠ, jaké dovednosti mají studenti učitelství na vysoké škole a jak probíhá proces výuky funkcí. V průběhu experimentu byly použity výzkumné metody testování pomocí didaktického testu (kterým byla zjišťována úroveň znalostí a dovedností) a pedagogického experimentu (ve kterém autorka navrhla kvalitnější způsob výuky, který by vedl k lepším studijním výsledkům). Didaktický test byl zadán v prvním ročníku gymnázia a obsahoval kromě úloh na aplikaci učiva o funkcích i úlohy na prověření dovedností určovat na základě tabulky či grafu funkce její funkční předpis.

Při zpracování dat byla nejprve použita deskriptivní statistika, pomocí níž byly zjišťovány četnosti bodových hodnocení jednotlivých úloh, relativní četnosti, aritmetický průměr a charakteristiky rozptýlení (rozptyl a směrodatná odchylka). Dále byla pro zjišťování vztahu mezi proměnnými použita statistika induktivní. Hypotézy, které se vztahovaly k porovnání určitých dvojic úloh, byly testovány pomocí testu chí-kvadrát.

Výsledky experimentu kromě jiných hypotéz ověřily i hypotézu, že žáci jsou na základních školách při lineárních funkcích seznamováni s funkcemi jednostranně, učí se zakreslovat grafy funkcí z funkčního předpisu, ale nikoli určovat funkční předpis ze zadaného grafu. (Budínová, 2010, str. 11)

3.1.2 Výzkum 2 – Failures and Inabilities of High School Students about Quadratic Equations and Functions

Následující výzkum okrajově zkoumá práci studentů s hledáním předpisu kvadratických funkcí. Hlavním cílem bylo prozkoumat práci středoškolských studentů s kvadratickými rovnicemi a s grafy kvadratických funkcí. Jde o výzkum z roku 2015, z Faculty of Education, Uludag University v Turecku. Výzkumnou metodou byl test, který obsahoval deset otevřených úloh. Test byl zadán 182 dobrovolníkům 11. ročníku (věk 17-18 let). Poslední, desátá otázka, zkoumala schopnost studentů napsat předpis kvadratické funkce z grafu na obrázku. Na obrázku byla parabola, která měla vrchol v bodě $[-1, 0]$ a protínala osu y v bodě -1.

Při zpracování dat byla použita deskriptivní analýza a výsledky výzkumu jsou následující (Kelesoglu, 2015, str. 58):

- 1 student měl předpis správně (využil předpis kvadratické funkce z analytické geometrie a skutečnost, že z grafu můžeme vyčíst vrchol paraboly),
- 4 studenti dovedli jenom určit, že v předpisu funkce $y = ax^2 + bx + c$ bude koeficient a záporné číslo,
- 3 studenti měli dobře postup, ale určili jenom x-ovou souřadnici vrcholu paraboly z obrázku a y-ovou ne,

- 3 studenti se snažili úkol řešit za pomoci předpisu obecné kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$,
- 6 studentů nesprávně dosadilo vrchol paraboly,
- 4 studenti nesprávně použili průsečíky funkce s osami,
- 4 studenti napsali jako řešení funkci prvního stupně,
- 155 studentů se ani nepokusilo úkol vyřešit.

Experiment přinesl zjištění, že studenti nedokážou své vědomosti správně uplatnit při hledání předpisu kvadratické funkce z jejího grafu.

3.1.3 Výzkum 3 – Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function

Tento výzkum z Austrálie vznikl na základě domněnky, že studenti vysokých škol zvládají i náročnější zadání z oblastí funkcí vyřešit správně i bez hlubšího porozumění funkcí. Jednou z výzkumných otázek byla otázka, zda studenti dokážou správně identifikovat typ funkce jenom na základě jejího grafu. Výzkum byl proveden na 383 studentech prvního ročníku vysoké školy. Pro experiment byly vybrány výzkumné metody ústní pohovor a test. Test obsahoval 16 úloh a byl časově omezen na 35 minut. Část testu, která se zaobírala hledáním předpisu funkce z jejího grafu, tvořila 3 otázky. U každé otázky si studenti vybírali ze 4 možností.

Experiment byl opět vyhodnocen deskriptivní analýzou. Výzkum ukázal, že vysoké procento studentů vybralo z možností správnou odpověď (Bardini, 2016, str.101).

- Graf polynomické funkce:
  - neodpovědělo 9 studentů,
  - odpovědělo 374 studentů, z toho 369 studentů odpovědělo správně.
- Graf kvadratické funkce:

  - neodpovědělo 10 studentů,
  - odpovědělo 373 studentů, z toho 366 studentů odpovědělo správně.

- Graf lineární funkce:
  - neodpovědělo 9 studentů,
  - odpovědělo 374 studentů, z toho 370 studentů odpovědělo správně.

Výsledkem experimentu bylo zjištění, že většina studentů dokáže vybrat správnou odpověď z možností na základě určení typu funkce podle jejího grafu.

3.2 Vybrané výzkumy se vztahem k výuce absolutní hodnoty

3.2.1 Výzkum 4 – Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value

Tento výzkum absolutní hodnoty ze Španělska studuje didaktickou účinnost různých technik výuky (především zavedení absolutní hodnoty podle různých definic) u pojmu absolutní hodnota. Výzkumníci se nejvíce zaměřují na epistemické, kognitivní a vzdělávací rozměry studijních procesů (tyto rozměry dále nazývají didaktické rozměry) mezi dvěma ekvivalentními definicemi toho samého objektu. Tyto rozměry vysvětlují na konkrétní situaci, přesněji vyhodnocování výzkumu. Dotazník z jejich výzkumu byl vyhodnocován právě z těchto tří rozměrů. Například u zadání $\sqrt{-2^2}$ je akceptována odpověď „je to nesmysl“, „nemůžeme odmocnit záporné číslo“ (epistemický rozměr - absolutní hodnota jako funkce), nemá řešení (kognitivní rozměr - má to jedno, dvě, nebo více řešení) nebo „je to komplexní číslo“ (vzdělávací rozměr - v oboru reálných čísel, komplexních čísel,...).

Tato výzkumná skupina testovala na 55 studentech způsob, jak studenti pracují s absolutní hodnotou. Primárním cílem bylo analyzovat z kognitivního rozměru efektivitu práce a techniky řešení jednotlivců, kteří chápou absolutní hodnotu dle *Aritmetické definice* nebo dle *Definice po částech za pomoci funkce.*

Analýza studentských řešení byla vyhodnocena za pomoci The implicative and hierarchical statistical method (Wilhemi, 2007, str. 84) .

1. Complete, when possible, the following equalities:

$|-2| =$ $\quad |2| =$ $\quad |0| =$ $\quad |\sqrt{-2}| =$

$|\sqrt{2}| =$ $\quad |-\sqrt{2}| =$ $\quad |2-\sqrt{2}| =$ $\quad |\sqrt{2}-2| =$

2. Replace the dots, when possible, in the following expressions to make them correct:

$|\ldots - 2| = 1;$ $\quad |\ldots + 2| = 1;$ $\quad |\ldots - 2| = 0;$ $\quad |(\ldots)^2 - 4| = 0;$

$|(\ldots)^2 + 4| = 0;$ $\quad |(\ldots)^2 - 1| = 1;$ $\quad |(\ldots)^2 - 3| = 1$

3. Represent the function $f(x) = |x+1|$ in a graphical way.

4. Let a be a real number. Complete, when possible, the following equalities:

$|-a| =$ $\quad |a| =$ $\quad |a-2| =$

$|-a-2| =$ $\quad |2-a| =$ $\quad |a+2| =$

Obrázek 8: Zadaní testu

Výsledkem výzkumu je informace o tom, jak ovlivňuje představa absolutní hodnoty řešení studentů. Studenti, kteří chápou absolutní hodnotu aritmeticky (viz. definici 1/str. 4) pracují s absolutní hodnotou jako s operací, kterou můžou aplikovat na čísla. Pro tyto studenty je absolutní hodnota pravidlo, které odstraní znak mínusu před záporným číslem. V případě, že snaha učitele je naučit studenty vidět jenom tento význam absolutní hodnoty, stává se podle autorů práce s absolutní hodnotou a její použití v matematice jenom technickou záležitostí. Na druhou stranu studenti, kteří chápou absolutní hodnotu podle *Definice po částech za pomoci funkce*, jsou zdatnější v práci s absolutní hodnotou, chápou absolutní hodnotu analyticky, mají ji propojenou s grafickým vyjádřením a umí ji vhodně používat i na úrovni aritmetické definice.

Autoři výzkumu na základě výsledků výzkumu navrhují víc rozvíjet představu o absolutní hodnotě, aritmetickou definici absolutní hodnoty považují za didaktickou překážku, která chápání studentů omezuje v několika ohledech a omezuje práci s absolutní hodnotou pouze na hru se symboly bez hlubšího pochopení.

3.2.2 Výzkum 5 – Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions

Tento výzkum je z roku 2012 a probíhal v Izraeli na 481 studentech. Hlavním cílem bylo porovnat úspěšnost studentů při řešeních rovnic a nerovnic s jinými výzkumy, které byly zaměřené na řešení rovnic a nerovnic, a to lineárních, kvadratických, ale také například nerovnic v podílovém tvaru, nerovnic a rovnic s absolutní hodnotou. Hlavní výzkumné oblasti byly dvě, a to druhy postupů, které používají studenti při řešení nerovnic s absolutní hodnotou, ale také zdroje chybných představ studentů při řešení nerovnic s absolutní hodnotou

Výzkumným nástrojem byl test a rozhovory se studenty. Rozhovory proběhly jenom u studentů, kteří uvedli nestandardní postup řešení nebo neuvedli celý postup řešení. Test obsahoval 8 úloh, které byly pro studenty netypické, s těmito typy zadání se na hodinách ve výuce nesetkali. Důvodem zadání právě těchto úloh byla snaha zkoumat práci studentů s absolutní hodnotou v zadáních, pro které nemohou mít nacvičen algoritmus řešení.

Po zadání dotazníku se výzkumné otázky ještě upřesnily:

- Jaké procento studentů správně řeší rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou?
- Používají studenti cíleně graf k řešení nerovnic s absolutní hodnotou? Pokud ano, je jejich postup správný? Literatura uvádí, že používání grafů je vysoce účinné v těchto situacích.
- Používají studenti cíleně číselnou osu při řešení nerovnic s absolutní hodnotou? Pokud ano, je jejich postup správný?
- Jaké typické chyby studenti v řešení dělají?

Výsledky výzkumu z hlediska správnosti (Tabulka 1) a výsledky výzkumu z hlediska postupu kategorizace chyb (Tabulka 2), které se v řešení objevovaly, zobrazují následující tabulky.

Table 1 Distribution of answers in percentages (level 4 (N=280), level 5 (N=201))

Task	1	2	3	4	5	6	7	8	
	$\|x\|>3$	$\|x-2\|<1$	$\|x\|+1>0$	$\|x\|\geq 0$	$\|x\|\leq 0$	$\|x\|>0$	$\|x\|<0$	$\|x\|+1\leq 0$	
Correct	35	22.9	42.1	56.8	43.2	43.9	61.4	43.6	Level 4
	60.2	47.8	61.7	82.6	76.6	67.7	83.1	74.1	Level 5
	45.5	33.3	50.3	67.6	57.2	53.8	70.5	56.4	Total
Incorrect	45	47.5	32.5	18.2	32.2	35	16.8	31.4	Level 4
	37.3	44.2	35.8	14.9	21.9	31.3	14.4	20.9	Level 5
	41.8	46.1	33.9	16.8	27.8	33.5	15.8	27	Total
Blank	20	29.6	25.4	25	24.6	21.1	21.8	25	Level 4
	2.5	8	2.5	2.5	1.5	1	2.5	5	Level 5
	12.7	20.6	15.8	15.6	15	12.7	13.7	16.6	Total
χ^2 (2)	46.27	48.81	47.999	49.69	69.14	49.89	39.74	49.773	$P<0.00001$

Tabulka 1: Výsledky výzkumu I

Task	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\|x\|>3$	$\|x-2\|<1$	$\|x\|-1>0$	$\|x\|\geq 0$	$\|x\|\leq 0$	$\|x\|>0$	$\|x\|<0$	$\|x\|+1\leq 0$
Logical mistakes	27.7	15.8	20.2	4	5.4	4.8	9.2	9.8
Removing the absolute value symbol	7.3	9.1	3.8	9.1	6	9.8	6.2	6
Integers only	3.5	5.8	–	–	–	–	–	–
Over generalization	2.5	0.8	3.5	3.5	–	0.2	0.4	–
Failure to distinguish	–	–	–	–	16.2	18.3	–	–
Other mistakes	0.8	14.6	6.4	0.2	0.2	0.4	–	11.2

Tabulka 2: Výsledky výzkumu II

Do kategorie logických chyb (Logical mistakes) byly zařazeny postupy, ve kterých byly chybně použité logické spojky, nejčastěji záměna logických spojek *a* a *nebo*, nebo vynechání spojky v řešení (z rozhovorů bylo zjištěno, že studenti spojku předpokládali, ale nenapsali ji, nebo se nedokázali rozhodnout, kterou spojku mají použít). V kategorii odstranění absolutní hodnoty (Removing the absolute value symbol) byla nejčastější chyba ignorování znaku pro absolutní hodnotu. Podle autorů tito studenti nechápali význam absolutní hodnoty a nevhodně zobecňovali nerovnosti.

Kategorie celá čísla (only integers) poukazovala na časté zúžení představy fungování absolutní hodnoty jenom na celá čísla.

Do další kategorie (Overgeneralization) se dostaly chybná řešení, ve kterých studenti zobecnili chování, které se zobecnit nedá. Nejčastěji se zobecňoval postup řešení rovnic i na nerovnice, například $|x| = -1$ nemá řešení, tudíž ani $|x| \geq -1$ nemá řešení.

Předposlední kategorie (Failure to distinguish) byla kategorie, do které se dostala chyby, které nastaly neuvědoměním studentů, že nula není kladné ani záporné číslo.

Do poslední kategorie se zahrnuly všechny ostatní chyby, které nemohly být zařazené do některé z předchozích druhů chyb. Nejčastěji to bylo chybné řešení rozdělením na případy, kdy je absolutní hodnota kladná a kdy záporná, nebo řešení, ve kterém studenti pracovali s absolutní hodnotou jako kdyby vždy měnila znaménka čísel.

Tento výzkum ukazuje, že práce s absolutní hodnotou se odvíjí od tří složek, a to:

- od strategie, kterou si student zvolí,
- od toho, jak student pochopil absolutní hodnotu,
- od schopnosti studentů syntetizovat první a druhou složku.

Z pohledu pochopení absolutní hodnoty studenty, výzkum potvrzuje výskyt následujících dvou různých nesprávných pochopení definice absolutní hodnoty: studenti věří, že absolutní hodnota musí být vždy kladná, nebo že výraz v absolutní hodnotě musí být vždy kladný.

4 Vlastní výzkum

Mým cílem na začátku tvorby mé diplomové práce bylo zkoumání aplikace vědomostí studentů o absolutní hodnotě. Pro tento účel jsou vhodná netypická zadání úloh, na která nejsou studenti z výuky matematiky zvyklí. Právě výběr úloh, které jsou pro studenty nestandardní a při kterých budou muset studenti použít své vědomosti bez dopředu nacvičených algoritmů, byl na začátku výzkumu poměrně náročný.

Po primárním studiu dostupných učebnic matematiky a fyziky, které se používají na středních školách a gymnáziích, se ukázalo, že neexistují téměř žádné slovní úlohy na absolutní hodnotu. Původně jsem považovala právě slovní úlohy za možný zdroj nestandardních úloh. Další oblast, která mohla být potencionálně dobrý zdroj nestandardních úloh pro studenty, byla komplexní čísla. Bohužel na gymnáziu, na kterém výzkum probíhal, není učivo komplexních čísel zařazeno do výuky. Komplexní čísla jsou na gymnáziu součástí volitelného předmětu v septimě, který navštěvovalo jenom několik studentů ze třídy, kde výzkum probíhal.

Typy úloh z oblastí rovnic s absolutní hodnotou, které jsme řešili na hodinách během výuky matematiky, nebyly pro můj výzkum vhodné, protože někteří studenti se mohli naučit algoritmus řešení těchto typů úloh bez hlubšího pochopení problematiky. Po zvážení všech těchto skutečností jsem si nakonec pro mou práci zvolila typ zadání, ve kterém dostanou studenti graf funkce v kartézské soustavě souřadnic a pokusí se najít předpis funkce tohoto grafu tak, aby použili v předpisu funkce absolutní hodnotu. Studenti se s tímto typem zadání setkali na hodinách matematiky jenom v nejsnadnějších formách, například při hledání předpisu grafu pro lineární nebo kvadratickou funkci. Při těchto úlohách měli studenti předem danou obecnou rovnici hledané funkce (nebo jim bylo řečeno o jaký druh funkce se jedná) a jejich hledání předpisu funkce tím bylo zjednodušeno jenom na hledání koeficientů pro obecný předpis funkce daného druhu.

4.1 Cíle výzkumu

Na základě dostupné literatury a výzkumů ze zahraničí jsem si vytyčila cíl zodpovědět následující otázky:

- Jaké nejčastější druhy chyb studenti dělají při hledání předpisu funkce z grafu?
- Jaké strategie řešení studenti volí nejčastěji k hledání předpisu funkce?
- Do jaké míry studenti dokážou své znalosti o absolutní hodnotě a funkcí aplikovat pro ně v netypických úlohách?
- Chápou studenti absolutní hodnotu spíše dle geometrické definice nebo dle aritmetické definice?
- Jaký vliv na úspěšnost má pořadí úloh během testování?

4.2 Výzkumné strategie

Po prostudování výzkumů na podobná témata v matematice jsem se rozhodla, že základním výzkumným nástrojem mého experimentu bude matematický test. Z důvodu malého vzorku respondentů byly původně plánovány i individuální rozhovory s doplňujícími otázkami u vybraných studentů ohledně jejich řešení testu. Bohužel z časových a jiných důvodů následné rozhovory nebyly uskutečněny.

Jednotlivé úlohy v testu byly vybírány tak, aby obsáhly co nejvíce druhů funkcí s absolutní hodnotou, i přesto ale některé druhy funkcí byly vyřazeny z důvodu vysoké náročnosti pro vytvoření předpisu (např. exponenciální funkce, logaritmická funkce a jiné). Výzkum se odehrával ve dvou fázích. Rozdělení celého výzkumu na dvě fáze nebylo původně plánováno a ani nebylo nutné z pohledu mých prvotních cílů, ale po komplikacích s omezením respondentů umožnilo toto rozdělení zkoumat úlohy ještě i z pohledu gradace obtížnosti úloh alespoň v rámci jedné skupiny.

V první fázi testování (první test) byla snaha uspořádat zadání úloh pro studenty typově od nejtěžších po nejsnadnější. V druhé fázi (druhý test) studenti dostali typově obdobné úlohy jako v prvním testu, ale od nejsnadnějších po nejtěžší. Každý z testů si měli studenti podepsat, z důvodu anonymity nemuseli podepisovat testy svým jménem, stačilo napsat stejné heslo na každé ze zadání, aby bylo zpětně možno identifikovat všechna řešení jednoho studenta.

4.3 Charakteristika výzkumu

Výzkum k mé diplomové práci byl uskutečněn na Arcibiskupském gymnáziu v Praze, kde jsem tou dobou učila matematiku a seminář z matematiky. Pro výzkum byl vybrán ročník septimy, žáci ve věkovém rozmezí 17 až 18 let. Se studenty bylo v prvním pololetí septimy probíráno učivo analytické geometrie a ve druhém pololetí učivo kombinatoriky a pravděpodobnosti. Tento ročník byl vybrán záměrně, aby téma mé diplomové práce nebylo pro studenty novým učivem, ale zároveň to nebyla látka, kterou aktuálně na hodinách matematiky probírají.

Původně se výzkumu měly zúčasnit obě třídy septim, což činí 58 žáků, ale v době zadávání testu byl test zadán jenom ve třídě, ve které jsem učila matematiku já (28 žáků). V paralelní třídě septimy tou dobou nastala změna vyučujícího matematiky a odhalily se hrubé nedostatky v matematických znalostech studentů (například i neprobrané učivo funkcí ze sexty), a následně se musela přeorganizovat probíraná látka. Z těchto důvodů zadání testu v této třídě nebylo povoleno vedením školy.

4.4 Faktory ovlivňující výsledky

Můj výzkum žákovských konstrukcí funkcí za pomoci absolutní hodnoty doprovázelo několik faktorů, které mohly ovlivnit výsledky testování. Ze všech uvádím alespoň ty, které považuji za nejvýznamnější:

1. Výzkum byl nakonec uskutečněn na mnohem menším vzorku studentů, než bylo původně plánováno. Závěry testování vyvozené na menším množ-

ství respondentů budou v menší míře reflektovat obecné jevy v dané problematice.

2. Testy byly zadány studentům v odpoledních hodinách během výuky matematiky, což se mohlo projevit v jejich výkonnosti a motivaci.
3. Všichni studenti dostali stejné zadání, tudíž ve výjimečných situacích mohlo dojít k opisování.
4. Testy nebyly prezentovány jako písemná práce hodnocené známkou, ale v případě úspěšného řešení testu byla studentům nabídnuta možnost ohodnocení testu známkou.
5. Ani jeden z testů nemuseli studenti podepsat vlastním jménem (byli požádání jenom o nějaký identifikační znak, přezdívku), tudíž motivace některých studentů k nalezení správného řešení zadání mohla být nižší.

4.5 První test

První test byl zadán koncem května 2017, během 6. a 7. vyučovací hodiny. Test obsahoval 4 grafy funkcí, studenti dostávali každé zadání na 20 minut.

Při přípravě zadání testů a hledání vhodných grafů jsem si grafy, které bylo možno použít, rozdělila do několika kategorií podle různých kritérií. Tímto tříděním vznikly čtyři kategorie.

1. Grafy, které vzniknou posunutím grafu $y = |x|$. Tyto grafy studenti znají z hodin matematiky a předpokládám, že by měli být schopni sestrojit graf funkce ze zadání i předpis funkce z grafu.
2. Grafy, které studenti znají z hodin matematiky, ale setkali se s nimi jenom jednostranně při rýsování grafu z předpisu funkce za pomoci algoritmu, který nabízí učebnice. Do této kategorie patří například grafy s předpisem, ve kterém je součet nebo rozdíl dvou nebo vícero lineárních dvojčlenů v absolutní hodnotě.

3. Grafy funkcí, které studenti měli možnost na hodinách matematiky vidět a pracovat s nimi ve smyslu hledání grafu k předpisu funkce, ale nebyl jim nabídnutý v rámci výuky (ani v učebnici) algoritmus na jejich řešení. Do této kategorie patří například předpisy vnořené absolutní hodnoty do jiné absolutní hodnoty.

4. Grafy funkcí, se kterými se studenti nesetkali na hodinách matematiky.

Z důvodu menšího počtu testovaných studentů byl původní systém testování bez gradace poupraven na systém gradace úloh a první test byl nakonec zadán se snahou uspořádat zadání od nejtěžšího po nejsnadnější. Jak se ukázalo, tato vlastnost se u grafů posuzuje těžce, protože vnímání obtížnosti může být založeno na vícero podmínkách. Pro můj výběr byla zásadní následující kritéria:

1. pravděpodobnost, že studenti už daný typ grafu měli možnost na hodinách matematiky vidět,

2. složitost strategie, kterou jsem od studentů při řešení očekávala,

3. druh funkce, ze kterého vychází předpis hledaného grafu,

4. stupeň náročnosti úloh, kterou uvedli studenti jiných škol, na kterých jsem obtížnost úloh testovala (pět studentů třetího a čtvrtého ročníku SŠ a gymnázií, které jsem tou dobou doučovala).

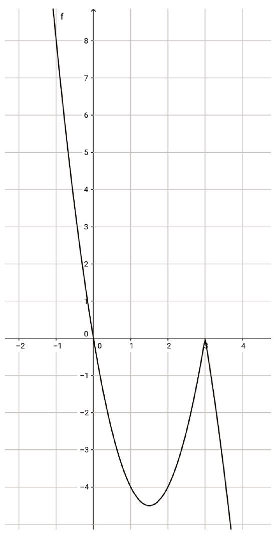
U každé úlohy je uvedeno zadání, popsané vybrané řešení studentů i s ukázkami studenských prací, soupis strategií, které studenti při svých řešeních využívali a nakonec shrnutí studentských řešení a použití absolutní hodnoty.

4.5.1 První úloha

V testu měl být první graf, se kterým se studenti potkají, nejnáročnější. Z tohoto důvodu jsem na začátku testování rozhodla studentům předložit graf, se kterým jsme se na hodinách matematiky nesetkali a podobný typ grafu není uveden ani v učebnicích matematiky, které se na hodinách používají. Rovněž všichni studenti, na kterých byla náročnost úloh testována, uvedli, že tento graf považují za nejtěžší. V žákovských řešeních jsem nejčastěji očekávala pokusy o sestavení kvadratické funkce (za pomocí průsečíků s osou x), která by se shodovala s funkcí ze zadání alespoň na podmnožině definičního oboru a následný pokus o aplikaci znalostí o absolutní hodnotě. Na základě výzkumu z Turecka (výzkum č. 2 na str. 19) ale předpokládám, že úspěšnost sestavení samotné kvadratické funkce bude znamenat pro většinu studentů nepřekonatelný problém.

Zadání a řešení

1.Napište předpis funkce na obrázku (Obr. 9) za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 9: První test - první graf

Předpis této funkce je $y = -2x \cdot |x - 3|$.

Žákovské řešení

Při vyhodnocování testů se ukázalo, že z hlediska počtu správných řešení byla tato úloha pro testované studenty skutečně nejnáročnější. I když strategie řešení studentů u tohoto zadání byly různorodé, dokonce nejrůznorodější z celého prvního testu, jenom jeden student sestrojil správný předpis funkce grafu ze zadání za pomoci absolutní hodnoty (Tabulka 3).

Tabulka 3: Úspěšnost - první test první úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	1	3,57%
nesprávné řešení	27	96,43%

Čtyři studenti odevzdali papír bez pokusu zadání jakýmkoliv postupem vyřešit s odůvodněním „Nepamatuji si jak se to řeší“ nebo „Nevím jak se to řeší“.

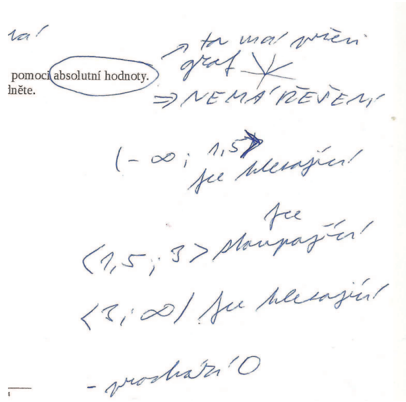
Ostatní studenti se zadání pokusili řešit skutečně kreativně mnoha způsoby, často využívali kombinace několika postupů, které se v matematice využívají u různých úloh při práci s funkcemi.

Většina studentů uvedla, že předpis bude souviset s předpisem kvadratické funkce a předpokládali, že v řešení bude druhá mocnina x. Tato skutečnost potvrzuje výsledky výzkumu z Austrálie (výzkum č. 3 na stránce 20), že studenti s identifikací typu funkce zásadní problémy nemají.

U jednoho řešení se projevilo hluboké neporozumění absolutní hodnoty a její aplikaci na graf funkce. I když si student určil (správně) vlastnosti grafu ze zadání, po určení těchto vlastností zobecnil tvar grafu absolutní hodnoty z lineární funkce a usoudil, že zadání nemá řešení (Obr. 10).

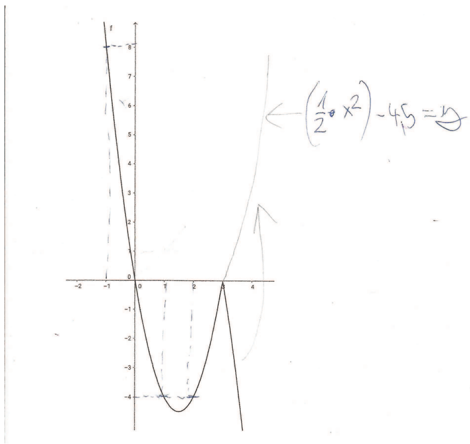
Několik studentů si zvolilo na začátek zkoumání funkce stejnou strategii a začali určovat různé vlastnosti funkce z grafu (nejčastěji monotonii a lokální minimum ,maximum), ale žádné další kroky v řešení nepodnikli a ani nevyužili tyto vlastnosti grafu k vyvození nějakého závěru.

Nejčastější způsob hledání řešení byl pokus určit přesnější předpis za pomoci překreslení části grafu tak, aby vznikla parabola. Po tomto úvodním



Obrázek 10: Nesprávné pochopení absolutní hodnoty

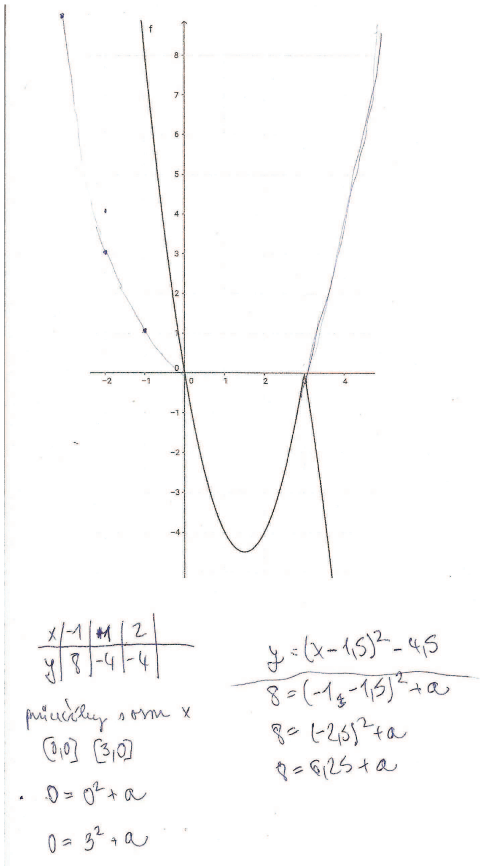
kroku překreslení se další kroky studentů k nalezení předpisu značně lišily. Nejvíc studentů si zvolilo po vzniku pomocné paraboly strategii hledání konkrétního posunutí grafu funkce x^2 tak, aby předpis odpovídal zadání. Zde se v několika případech vyskytlo nesprávné použití posunutí grafu, které by mohlo být výsledkem neúplné představy o změně funkční hodnoty v daném bodě při zvoleném posunutí, nebo nepozornosti a následné absence vlastní kontroly (Obr. 11) a (Obr. 12) .



Obrázek 11: Nesprávné použití posunutí grafu funkce

U této strategie hledání správného posunutí grafu se objevily i chyby ve výběru grafu, na který byly transformace (správně) aplikovány (namísto grafu $y = x^2$ byl vybrán graf $y = |x|$). Tento fakt by mohl naznačovat, že studenti mají vázanou absolutní hodnotu jenom na lineární funkce a nerozlišují mezi pojmy absolutní hodnoty a absolutní hodnota lineární funkce.

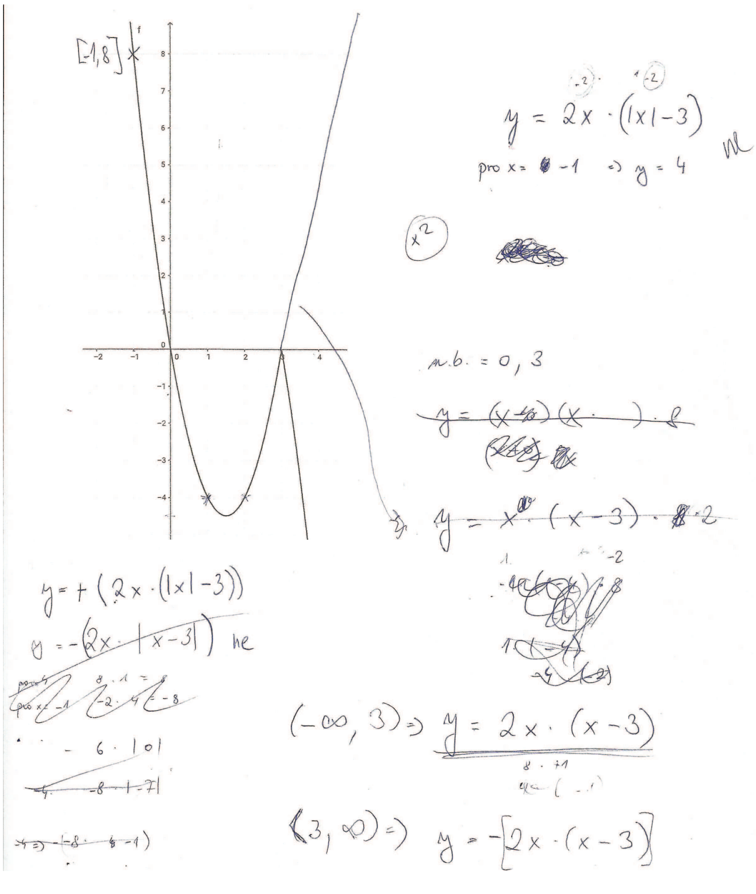
V mnoha případech si studenti, kteří použili posunutí funkce, určili i průsečíky s osou x nebo vlastnosti funkce (určování funkčních hodnot v různých bodech z definičního oboru). Z testů ale plyne, že tyto informace nakonec nebyly použity k sestavení předpisu, nýbrž sloužily žákům jen k ověření správnosti předpisu, který vznikl při aplikaci posunutí (Obr. 12).



Obrázek 12: Ověření správnosti nalezeného předpisu funkce

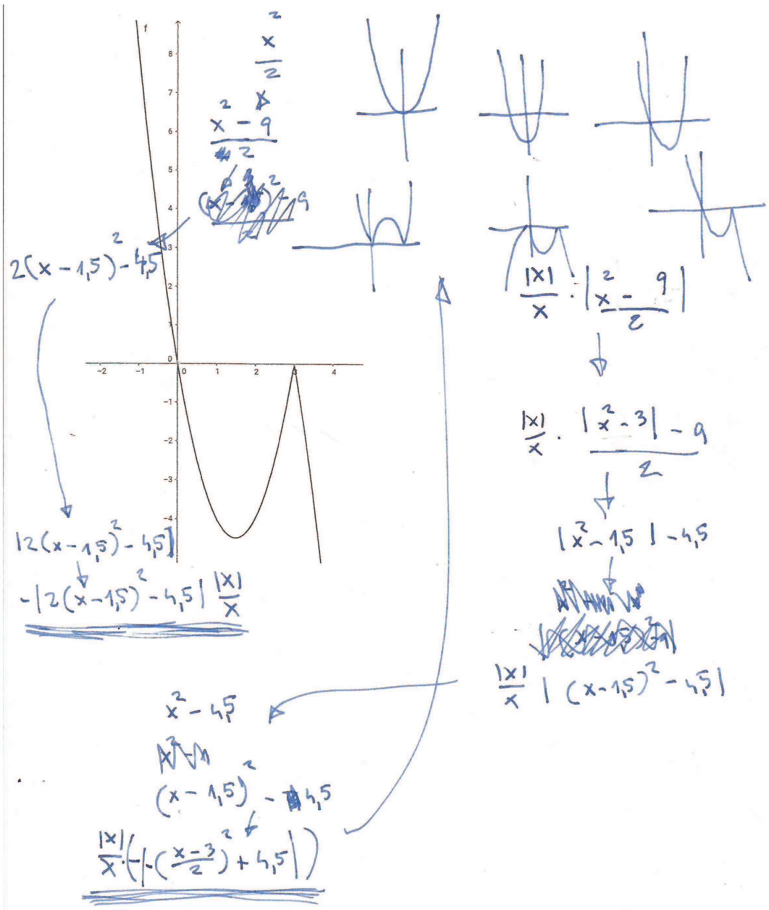
Další skupina žáků po překreslení části grafu identifikovala průsečíky s osou x (všichni správně) a vytvořila si předpis funkce ve tvaru součinu výrazů $x-3$ a x. Následně se snažili na základě znalostí o absolutní hodnotě vložit absolutní hodnotu do součinu výrazů (nebo do výrazu, který vznikl roznásobením) tak, aby předpis vyhovoval zadanému grafu. Studenti ale v tomto případě nedokázali správně využít absolutní hodnotu a ani jeden jejich pokus nevedl ke správnému řešení. Tohle hledání předpisu funkce bylo založené spíše na náhodném zkoušení umístění absolutní hodnoty v předpisu a zpětném zkoumání změny chování funkce na základě této změny. Studenti ale na základě tohoto zkoumání nepřišli na to, jak cíleně a správně použít absolutní hodnotu.

Jedna ze strategií, která se v řešeních objevila několikrát, byla rozdělení definičního oboru funkce na intervaly $(-\infty, 3)$ a $\langle 3, \infty)$ a snaha najít předpis funkce pro každý interval zvlášť. Jedno ze studentských řešení úlohy, které bylo poměrně blízko k nalezení správného předpisu funkce pro celý definiční obor, odhalilo správný předpis funkcí na zvolených intervalech po rozdělení definičního oboru (za pomoci průsečíků s osou x), ale poslední krok, který by měl tyto dva předpisy propojit za pomoci absolutní hodnoty, nebyl uskutečněn. Tento student celou dobu pracoval při řešení zadání správně a bez chyb, ale nebyl schopen cíleně využít znalosti o absolutní hodnotě. Student sice uvedl nějaké řešení za pomoci absolutní hodnoty, ale při ověřování dosazením jednoho z bodů grafu zjistil, že jeho řešení není správné (Obr. 13).



Obrázek 13: Nevyužití vlastností absolutní hodnoty

Jediné správné řešení této úlohy je založeno na využití posunutí grafu a správné aplikaci vlastností absolutní hodnoty v posledním kroku řešení. Student si dopředu naplánoval, jak z tvaru grafu $y = x^2$ dostane pomocí transformací funkce tvar grafu, který je totožný alespoň na části definičního oboru (nezáporná čísla) se zadaným grafem. Posléze hledal takovou úpravu svého předpisu za pomoci absolutní hodnoty, aby cíleně změnil jenom část grafu a vytvořil tak stejný graf jako je v zadání úlohy (Obr. 14).



Obrázek 14: Hledání předpisu funkce pomocí posunutí

Studenti se snažili při řešení této úlohy využít široké znalosti z oblasti funkcí i absolutní hodnoty. V žákovských pokusech o řešení se opakovaně vyskytovaly některé postupy, které si žáci zvolili při hledání předpisu funkce. Tyto postupy budu dále v mé práci označovat jako strategie řešení. U každého zadání v prvním testu jsem se snažila tyto strategie rozdělit do několika větších kategorií.

U první úlohy využívali studenti následující strategie, v mnoha případech bylo v jednom žákovském řešení využito vícero strategií (Tabulka 4).

- *Využití průsečíků s osou x* - nalezení a využití průsečíků grafu funkce s osou x k zjištění předpisu funkce na celém definičním oboru nebo jeho podmnožině

- *Překreslení části grafu* - vytvoření pomocného grafu funkce překreslením některých části grafu ze zadání tak, aby vznikl graf funkce, u kterého lze snadněji nalézt předpis funkce. Konkrétně v této úloze šlo o vytvoření pomocné paraboly.

- *Využití posunutí grafu funkce* - využití posunutí grafu funkce $y = x^2$ (nebo jiné funkce, která byla vybrána), které studenti znají z hodin matematiky.

- *Zkoumání vlastností funkce z grafu* - určení vybraných vlastností grafu funkce ze zadání.

- *Rozdělení definičního oboru* - rozdělení definičního oboru zadané funkce na podmnožiny, na kterých je snadnější nalézt předpis funkce.

- *Jiné* - strategie, které se objevily jenom ojediněle a nevyužívají ani jednu z předchozích strategií.

Tabulka 4: Strategie - první test první úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	4	14.29%
zkoumání vlastností grafu	12	42.86%
využití posunutí grafu	12	47.86%
rozdělení definičního oboru	2	7.14%
využití průsečíků s osou x	7	25%
překreslení části grafu	19	67.86%

Shrnutí

Jenom pět studentů (17.86 %) nějakým způsobem pracovalo ve svém řešení s absolutní hodnotou, z toho jenom jeden student použil absolutní hodnotu k nalezení předpisu funkce cíleně a správně. Zbylé čtyři pokusy se dají rozdělit do dvou skupin.

První skupina jsou dva studenti, kteří při práci s absolutní hodnotou neudělali chybu, ale nedokázali své vědomosti o ní cíleně využít (např. v posledním kroku řešení nedokázali určit, kam v předpisu funkce mají absolutní hodnotu umístit, aby dostali požadované chování funkce).

Druhá skupina jsou studenti, u kterých jejich nesprávné použití absolutní hodnoty ukazuje na hlubší nepochopení problematiky (pracovali s grafem $y = |x|$ i když šlo o parabolu).

Z pohledu výběru strategie, nebo strategií a následné chybovosti, úspěšnosti řešení studentů a použití absolutní hodnoty byly výsledky studentských řešení následující:

- Čtyři studenti se nepokusili o vyřešení úlohy žádnou strategií.
- Dva studenti si určili správně vlastnosti grafu ze zadání a další kroky v řešení neudělali.
- Jeden student si vytvořil pomocnou parabolu, u které si určil správně vlastnosti grafu, ale další kroky v řešení neudělal.
- Jeden student si vytvořil pomocnou parabolu a jenom usoudil, že v řešení se bude vyskytovat x^2.
- Jeden student si vytvořil pomocnou parabolu a za pomoci posunutí chtěl najít předpis této paraboly, ale aplikoval (správně) posunutí na funkci $y = |x|$.
- Šest studentů si vytvořilo pomocnou parabolu, ale nesprávně aplikovali posunutí grafu $y = x^2$ při hledání předpisu této paraboly.

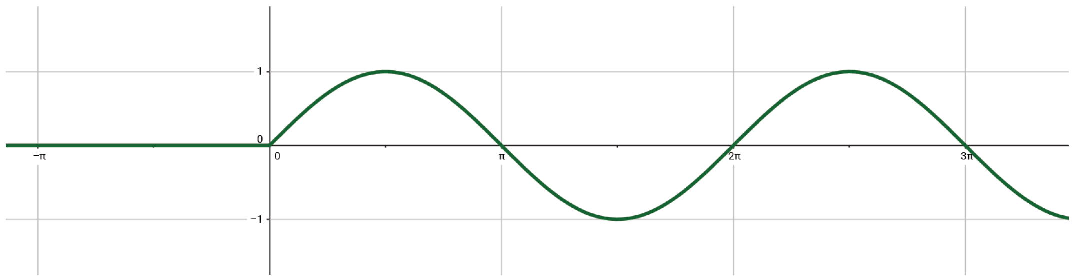
- Tři studenti za pomoci průsečíků s osou x našli předpis pomocné paraboly a určili si správně vlastnosti grafu, ale nepokusili se najít předpis za pomoci absolutní hodnoty.
- Čtyři studenti si vytvořili pomocnou parabolu a správně aplikovali posunutí grafu $y = x^2$ při hledání předpisu této paraboly a jako řešení uvádí jenom tento předpis bez použití absolutní hodnoty.
- Jeden student za pomoci průsečíků s osou x našel předpis pomocné paraboly, ale následně nesprávně určil předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty, což odhalil zjištěním několika funkčních hodnot.
- Jeden student určil správně vlastnosti grafu funkce, ale uvedl, že zadání nemá řešení z důvodu, že absolutní hodnota má tvar grafu písmena V.
- Dva studenti si určili správně průsečíky s osou x, vrchol pomocné paraboly i monotonii původní funkce, ale žádné informace z těchto vlastností nevyvodili.
- Jeden student za pomoci průsečíků s osou x a rozdělení definičního oboru našel správné předpisy grafu na jednotlivých podmnožinách definičního oboru, ale neurčil správně předpis funkce ze zadání, což odhalil zjištěním funkčních hodnot.
- Jeden student aplikoval správně různé transformace grafu na graf funkce x^2, než dostal předpis funkce, která se na části definičního oboru shoduje se zadáním a následně využil vlastnosti absolutní hodnoty k správnému vyřešení úlohy.

4.5.2 Druhá úloha

Jako druhý jsem zařadila do testu graf, který stejně jako ten první studenti z hodin matematiky neznají. V porovnání s prvním grafem jsem ale předpokládala, že by mohlo být použití znalostí o absolutní hodnotě úspěšnější. U většiny žáků jsem očekávala odhalení spojitosti s grafem funkce sinus a následné pokusy o upravení předpisu grafu tak, aby vyhovoval zadání.

Zadání a řešení

2. Napište předpis funkce na obrázku (Obr. 15) za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 15: První test - druhý graf

Předpis této funkce je $y = \frac{sinx+sin|x|}{2}$ nebo $y = sin\frac{x+|x|}{2}$.

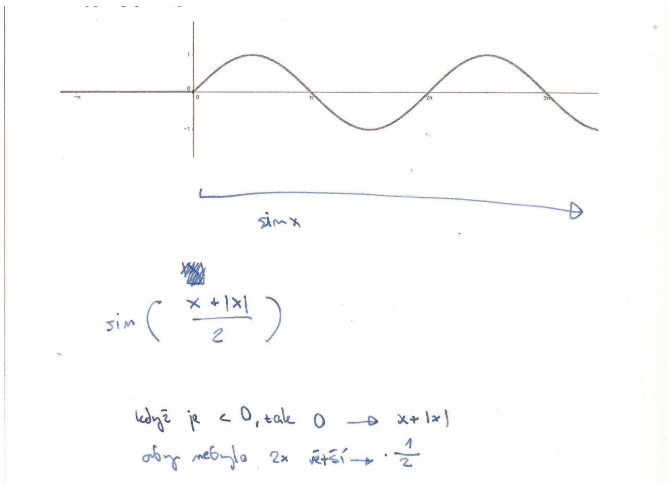
Žákovské řešení

Úspěšnost řešení druhého zadání byla o něco vyšší než u prvního, přesto byla úloha celkově pro žáky náročná a správně ji vyřešili jenom 3 studenti (Tabulka 5). Různorodost strategií řešení byla přitom nižší než u první úlohy.

Tabulka 5: Úspěšnost - první test druhá úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	3	10,71%
nesprávné řešení	20	89,29%

Všichni tři studenti, kteří našli předpis této funkce, si zvolili pro své řešení téměř stejný postup. Nejprve si rozdělili definiční obor na nezáporná a záporná čísla a určili si nějaký předpis funkce, který vyhovuje grafu na těchto zvolených intervalech. Ve všech třech případech to byl předpis $y = 0$ pro záporné hodnoty a předpis $y = \sin(x)$ pro nezáporní hodnoty z definičního oboru. Následně správně upravili předpis $y = \sin(x)$, ke kterému se dopracovali pro nezáporná čísla tak, aby pro záporné hodnoty vždy dostali $y = \sin(0°)$. Tohoto dosáhli správnou aplikací absolutní hodnoty na výraz v předpisu funkce, ze kterého určujeme sinus (Obr. 16). I když se jedná o předpis funkce z grafu, v tomto případě poslední krok studentů k nalezení předpisu můžeme chápat spíše jako aritmetický problém vytvoření výrazu, který by pro záporná čísla byl nula a pro nezáporná čísla x.

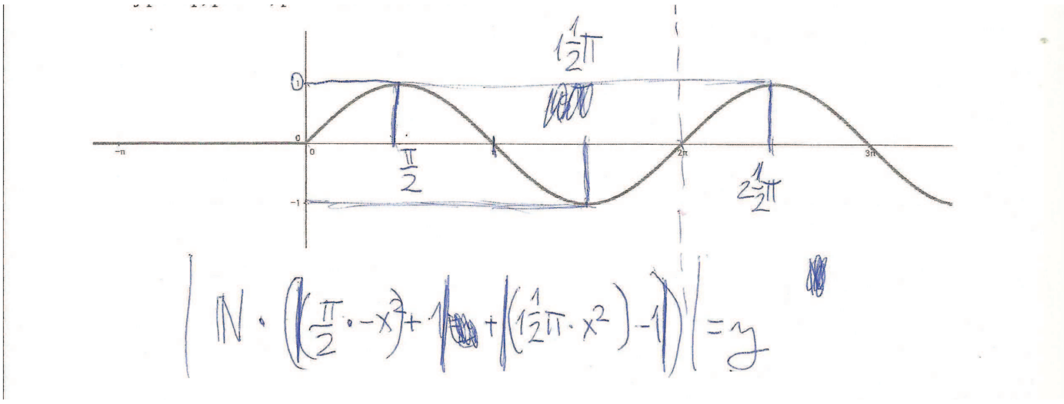


Obrázek 16: Správné žákovské řešení zadání č. 2

Pět studentů se zadání nepokusilo ani vyřešit a odevzdali prázdný papír, nebo papír s vyjádřením „Nevím, nic mě nenapadá“.

Většina studentů uvedla spojitost grafu se sinusoidou a dále s touto informací nějakým způsobem pracovala. Objevilo se i řešení, které nepředpokládá propojení s grafem funkce $y = sin(x)$ a student se v něm snažil sestavit předpis funkce za pomoci druhé mocniny x a posunutí grafu funkce tak, aby vyhovoval alespoň bodům, ve kterých má funkce minimum a maximum (Obr. 17).

Z řešení je vidět, že student našel periodu funkce i hodnoty maxima a mi-



Obrázek 17: Nesprávné řešení zadání č. 2

nima, ale přesto žádnou periodickou funkci k sestrojení předpisu nepoužil. Zajímavé je v tomhle řešení použití přirozených čísel v předpisu funkce i samotné použití absolutní hodnoty. Je jasně vidět, že student nemá představu o absolutní hodnotě vůbec propojenou s grafickým vyjádřením (například proto, že celý výsledný předpis uzavřel do absolutní hodnoty, což by znamenalo, že funkce má nezáporný obor hodnot, což z grafu jasně neplatí).

Další skupinka studentů si i u této úlohy vybrala strategii, při které určovali vlastnosti grafu funkce ze zadání bez rozdělení na intervaly, ale po určení několika vlastností dále v řešení nepokračovali a jiný postup k nalezení předpisu nevyužili. Vlastnosti, které určovali studenti nejčastěji, byly perioda, maximum, minimum, funkční hodnoty v různých bodech definičního oboru a průsečíky s osami soustavy souřadnic. Jeden z těchto studentů usoudil, že úloha nemá řešení. Důvodem tohoto úsudku bylo opět zobecnění tvaru grafu funkce $y = |x|$.

Několik studentů ve svém řešení uvedlo předpis $y = sin(x)$ (nebo napsali, že grafem je sinusoida) pro celý definiční obor (resp. explicitně nenapsali, že je to předpis jenom pro část grafu ani nevyznačili rozdělení definičního oboru) a pro čísla záporná žádný jiný předpis neuvádí. Jeden ze studentů na základě tohoto zjištění uvedl, že předpokládá předpis funkce pro celý graf $y = |sin(x)|$ nebo $y = sin|x|$. Tento student následně dosazením několika hodnot z definičního oboru však zjistil, že správně není ani jeden z těchto předpisů a dále úlohu neřešil. Tento úsudek poukazuje na nepropojení vědomostí o absolutní hodnotě s jejím grafickým znázorněním (graf funkce by musel mít jenom nezáporný obor hodnot nebo by musel být symetrický dle osy y).

Obecně nejčastější postup při řešení bylo rozdělení definičního oboru na záporná a nezáporná čísla a následné hledání předpisů grafu pro zvolené podmnožiny definičního oboru. Tito studenti často i správně určili oba předpisy funkce po rozdělení definičního oboru, ale následné využití absolutní hodnoty k docílení správného řešení nenastalo. Několik studentů předpokládalo předpis funkce podobný těm, které znají z hodin matematiky (např. $sin|2x|$ a jiné), ale při ověření správnosti tohoto předpisu zjistili, že zadání nevyhovuje.

U některých řešeních si následně po určení předpisů funkce na daných intervalech po rozdělení definičního oboru studenti ještě zvolili další strategie řešení, například pokračovali zjišťováním vlastností funkcí na daných intervalech (obor hodnot a funkční hodnoty funkce v pro ně významných bodech definičního oboru), tyto informace ale dále k sestavení předpisu funkce ze zadání nijak nevyužívají.

Stejně jako u prvního i druhého zadání můžeme vypozorovat některé studentské strategie, které se v řešeních opakovaly (Tabulka 6) a můžeme je rozdělit do následujících skupin:

- *Rozdělení definičního oboru* - studenti si rozdělili graf funkce na intervaly, na kterých se pokusili určit předpis alespoň části zadaného grafu. U druhého grafu to bylo téměř u všech studentů rozdělení na kladná a nezáporná čísla.

- *Zkoumání vlastností grafu funkce* - studenti určovali vlastnosti funkce z grafu (nejčastěji definiční obor, obor hodnot, periodu a funkční hodnoty v některých bodech definičního oboru).

- *Ověřování odhadnutých předpisů* - studenti odhadli na základě svého úsudku a informací, které můžou na první pohled vyčíst z grafu, předpis funkce s absolutní hodnotou a zpětně zjišťováním funkčních hodnot v různých bodech definičního oboru ověřovali správnost svého předpisu funkce.

- *Jiné* - strategie, která se objevila jenom výjimečně u jednoho řešení a žák při ní nepoužil ani jeden princip z předchozích strategií.

Tabulka 6: Strategie - první test druhá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	5	17.86%
rozdělení definičního oboru	17	60.71%
zkoumání vlastností grafu	11	39.29%
ověřování odhadnutých výsledků	4	14.29%

Shrnutí

U této úlohy použilo sedm studentů nějakým způsobem absolutní hodnotu během řešení zadání.

Tři studenti za pomoci aplikace znalostí o absolutní hodnotě správně vyřešili úlohu a našli předpis funkce dle zadání. Toto použití absolutní hodnoty bylo cílené a vedlo k vytvoření výrazu požadovaných vlastností.

Jedno použití opět ukazuje na hluboké mezery ve studentově chápání absolutní hodnoty, které bylo odhaleno už u prvního zadání (zobecnění grafu $y = |x|$ na všechny funkce).

Třetí způsob práce s absolutní hodnotou v řešeních studentů byl odhad předpisu funkce na základě zkušeností s funkcemi s absolutní hodnotou z hodin matematiky. Ve všech těchto případech je ale vidět nepropojení absolutní hodnoty s jejím grafickým vyjádřením (studenti předpokládali předpisy, které už na první pohled nemohly odpovídat zadání).

Pokusy řešení studentů se opět dají rozdělit do několika kategorií a podkategorií podle strategie, kterou daný student použil, stádia řešení, do kterého se student dostal, a správnosti (nebo chybovosti) předpokladů a úsudků, které použil, a ke kterým dospěl.

- Pět studentů se nepokusilo vyřešit úlohu žádnou strategií.
- Jeden student správně určil vlastnosti funkce ze zadání, ale uvedl, že zadání nemá řešení z důvodu, že absolutní hodnota má tvar grafu písmena V.
- Jeden student si rozdělil definiční obor a určil (správně) předpis funkce jenom pro záporné hodnoty.
- Dva studenti si rozdělili definiční obor a určili (správně) předpis funkce jenom pro nezáporné hodnoty.
- Jeden student si rozdělil definiční obor, určil správně předpis funkce jenom pro nezáporné hodnoty a následně předpokládal nějaký předpis funkce s absolutní hodnotou pro celý definiční obor, který ale ověřováním za pomoci funkčních hodnot vyloučil.
- Čtyři studenti po rozdělení definičního oboru správně určili předpis funkce pro nezáporné i pro záporné hodnoty, dále ale ve svém řešení nijak nepokračují.
- Čtyři studenti si po rozdělení definičního oboru a správném určení předpisu na daných intervalech ještě určili některé vlastnosti grafu funkce ze zadání, ale tyto informace nijak dále nevyužívají.
- Tři studenti uvedli, že grafem je sinusoida (nebo $y = sin(x)$) bez rozdělení definičního oboru na podmnožiny.
- Dva studenti určili vlastnosti grafu ze zadání a dále ve svém řešení nepokračovali.
- Dva studenti uvedli, že předpis funkce bude nějak souviset se sinusoidou a určili si vlastnosti grafu a následně se snažili k sestavení předpisu využít grafy s absolutní hodnotou, které znají z hodin matematiky (např. $y = |2x|$) a následným ověřováním za pomoci funkčních hodnot zjistili, že jejich předpisy nevyhovují zadání.

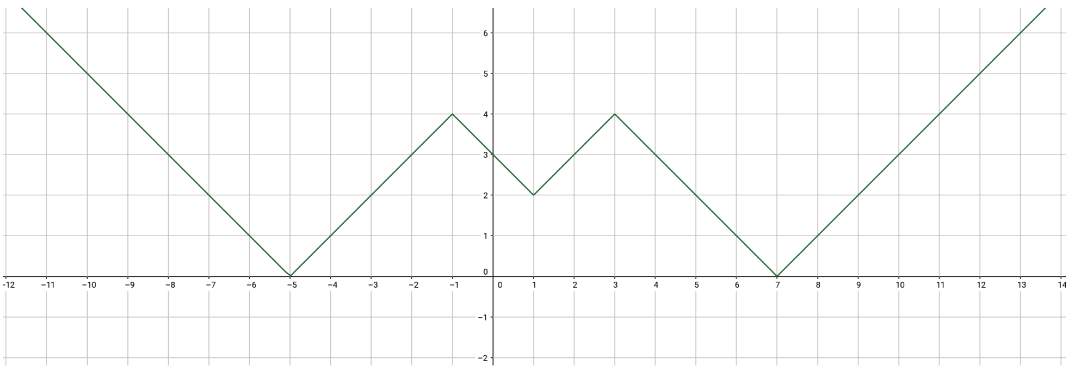
- Tři studenti si rozdělili definiční obor funkce na záporná čísla a čísla nezáporná, odhalili spojitost s funkcí sinus a správně sestrojili předpis funkce ze zadání za pomoci absolutní hodnoty.

4.5.3 Třetí úloha

S grafem funkce, která má v předpisu vnořenou absolutní hodnotu do absolutní hodnoty, se studenti během hodin matematiky už potkali, i když tento druh funkcí není uveden v učebnici. Těmto funkcím jsme se věnovali na základě zájmu žáků, ale ani v jenom z případů nešlo o hledání předpisu funkce ke grafu, nýbrž o hledání průsečíků grafu funkce s osou x. Tohle zadání jako první předpokládá práci čistě jenom s lineární funkcí, se kterou žáci mají nejbohatší zkušenosti. I z těchto důvodu jsem předpokládala nižší obtížnost zadání v porovnání s předchozími dvěma úkoly. Při hledání předpisu v žákovských řešeních jsem očekávala využití grafu funkce $y = |x|$ a využití průsečíků s osou x.

Zadání a řešení

3. Napište předpis funkce na obrázku (Obr. 18) za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 18: První test - třetí graf

Předpis této funkce je $y = ||||x - 2| - 1| + 3| - 5$.

Žákovské řešení

Podle odevzdaných řešení byla tato úloha z dosavadních zadání skutečně nejsnadnější a celkově bylo šest správných řešeních (Tabulka 7).

U tohoto zadání se nestalo, že by některý ze studentů odevzdal papír bez pokusu o vyřešení úlohy. Téměř všichni studenti hned odhalili nějakou spoji-

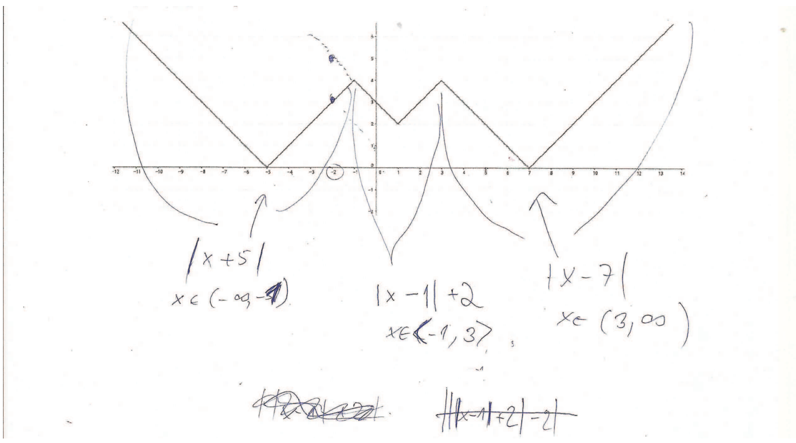
Tabulka 7: Úspěšnost - první test třetí úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	6	21,43%
nesprávné řešení	22	78,57%

tost s grafem absolutní hodnoty lineární funkce, někteří ale pracovali jenom s funkcemi lineárními.

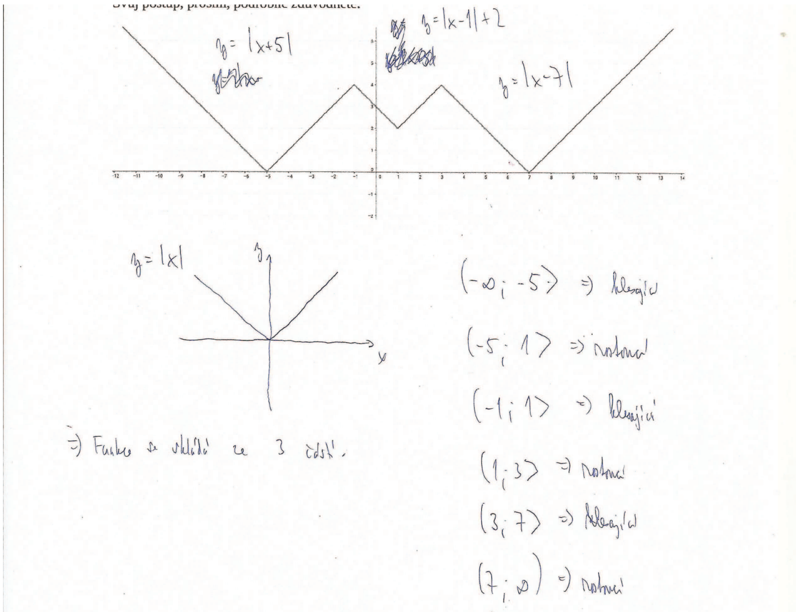
Opět se v řešeních často objevuje rozdělení na intervaly, které v tomto zadání, na rozdíl od předchozích, ani v jednom případě řešitelům nepomohlo najít správné řešení úlohy. Rozdělení definičního oboru během řešení zadání probíhalo u studentů dvěma způsoby. První druh rozdělení grafu bylo na intervaly $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 3)$ a $\langle 3, \infty)$, druhý způsob rozdělení byl na intervaly $(-\infty, -5)$, $\langle -5, -1)$, $\langle -1, 1)$, $\langle 1, 3)$, $\langle 3, 7)$ a $\langle 3, \infty)$.

Několik studentů našlo předpis grafů funkcí za pomoci absolutní hodnoty alespoň na jednotlivých podmnožinách definičního oboru, které si vytvořili, ale nenašli způsob jak vytvořit jeden předpis pro celý definiční obor. Tito studenti využívají správné znalosti o absolutní hodnotě lineární funkce a její posunutí (Obr. 19). V některých případech si žáci určili i monotonii na těchto intervalech, ale dále s touto informací nijak nenakládali (Obr. 20).



Obrázek 19: Určení předpisu funkce na podmnožinách definičního oboru

U jednoho řešení se řešitel pokusil určit některé vlastnosti grafu, dokonce odhalil symetrii grafu a uvedl vlastnost absolutní hodnoty, ale nedokázal tuto

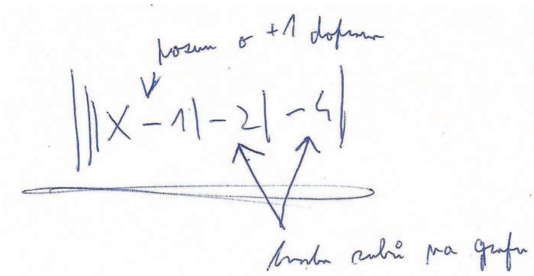


Obrázek 20: Určení vlastností grafu předpisů na podmnožinách

vlastnost nijak cíleně aplikovat ve snaze nalézt předpis funkce grafu.

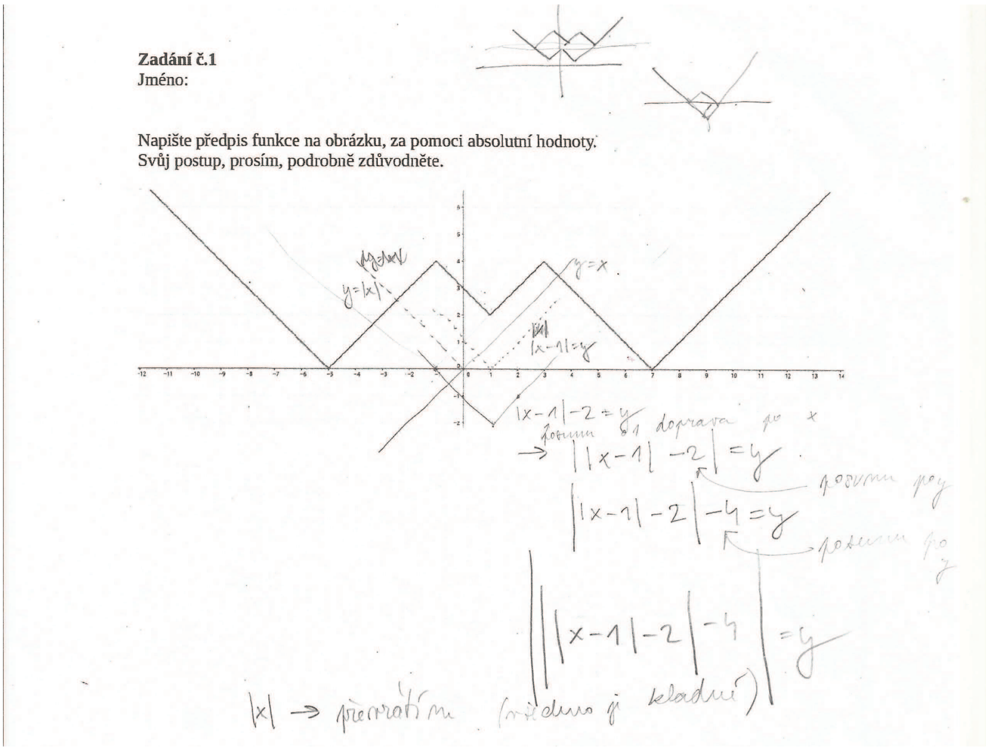
Správné řešení, které uváděli žáci, se až na jedno opíralo o překreslení grafu funkce do pomocného tvaru, u kterého studenti předpokládali snadnější nalezení předpisu. Pro tento pomocný graf našli předpis funkce pomoci absolutní hodnoty a následně se snažili za pomocí posunutí tohoto grafu a aplikace vlastností absolutní hodnoty najít předpis grafu dle zadání (Obr. 22).

U jednoho řešení žák po sestrojení předpisu dokonce zobecnil souvislost mezi nalezeným předpisem vnořených absolutních hodnot a grafem funkce (Obr. 21).



Obrázek 21: Zobecnění pravidla pro hledání předpisu funkce

Objevilo se i správné řešení, které využívalo podobnou strategii, ale na rozdíl od předešlých si žák nijak nepřekreslil zadaný graf, ale začal hledat různé



Obrázek 22: Překreslení grafu

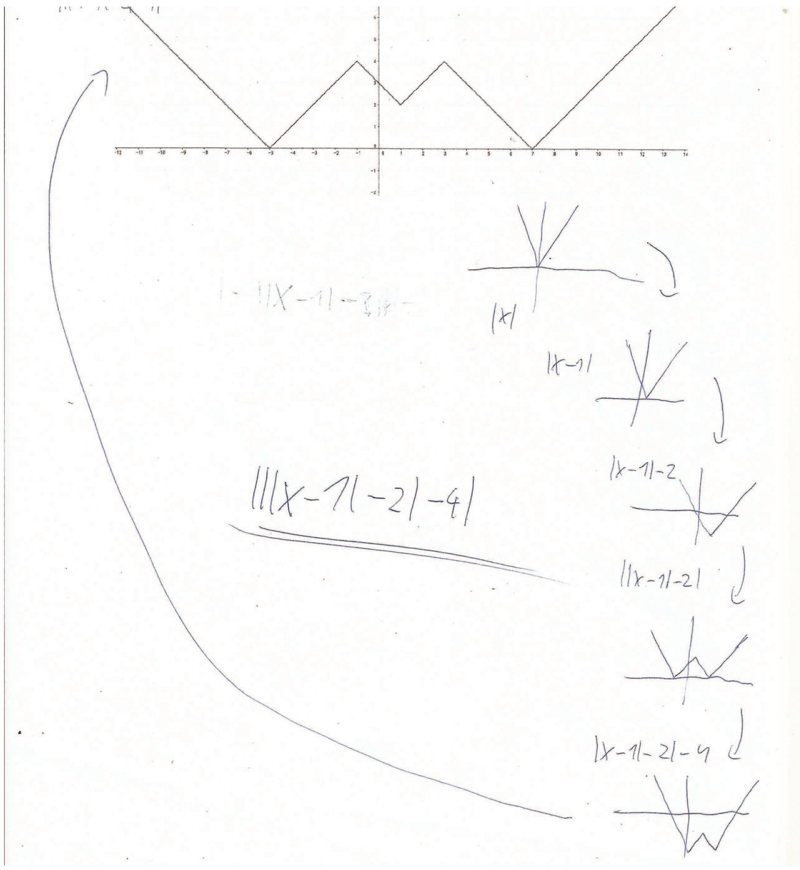
posunutí grafu funkce $y = |x|$ a aplikace absolutní hodnoty tak, aby dosáhl požadovaného cíle, což se mu povedlo (Obr. 23).

Při řešení této úlohy bylo celkově méně strategií řešení než v předchozích dvou zadáních (Tabulka 8). Zásadně se objevily jenom strategie, které studenti využívali i v předchozích řešeních a to:

- *Rozdělení definičního oboru na podmnožiny* - studenti si rozdělili graf funkce na intervaly, na kterých se pokusili určit předpis alespoň části zadaného grafu.

- *Zkoumání vlastností grafu funkce* - studenti začali určovat vlastnosti funkce z grafu (nejčastěji definiční obor, obor hodnot, periodu a funkční hodnoty v některých bodech definičního oboru).

- *Překreslení části grafu* - Žáci se snažili překreslením části grafu ze zadání dostat graf, u kterého snadněji naleznou předpis funkce. V této úloze to byla snaha o překreslení funkce do tvaru grafu V.



Obrázek 23: Hledání předpisu funkce

- *Jiné* - strategie, která se objevila jenom výjimečně u jednoho řešení a žák při ní nepoužil ani jeden princip z předchozích strategií.

Tabulka 8: Strategie - první test třetí úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	0	0%
rozdělení definičního oboru	13	46.43%
zkoumání vlastností grafu	7	25 %
překreslení části grafu	9	32.14%

Shrnutí

U této úlohy studenti začali využívat absolutní hodnotu v mnohem větší míře, než tomu bylo v předchozích zadáních. Až dvacet jedna studentů během svého řešení použilo nějakým způsobem absolutní hodnotu. Tato řešení by se dala rozdělit na dvě skupiny.

První skupina tvoří sedm studentů, kteří využívali absolutní hodnotu k nalezení předpisů grafů (například po rozdělení na intervaly) jenom jako posunutí grafu funkce $y = |x|$, tudíž s absolutní hodnotou pracovali správně, ale při práci spíše využívali znalosti o změně funkčních hodnot funkce než vlastnosti absolutní hodnoty.

Druhá skupina čtrnácti studentů využívala ve svém řešení cíleně vlastnost absolutní hodnoty a použití důsledků pro graf funkce (absolutní hodnota z nějakého výrazu nebo čísla je vždy nezáporné číslo, tudíž graf funkce nesmí mít obor hodnot v záporných číslech).

U této úlohy nebyla variabilita studentských řešení tak veliká jako u předchozích dvou zadání, i když na rozdíl od předchozích úloh ani jeden student neodevzdal prázdný papír bez pokusu o vyřešení.

- Jeden student sestrojil správný předpis funkce ze zadání za pomoci posunutí grafu $y = |x|$ a aplikace absolutní hodnoty.

- Pět studentů si překreslilo graf funkce na pomocný graf ve tvaru V a následně správně použilo posunutí tohoto grafu a absolutní hodnotu k nalezení správného předpisu grafu ze zadání.

- Šest studentů si překreslilo graf funkce na pomocný graf ve tvaru V, ale následně při hledání posunutí, které by vytvořilo graf ze zadání, udělalo chybu. Tito studenti ale správně pracovali s grafickou reprezentací absolutní hodnoty ve svém řešení.

- Dva studenti určili vlastnosti grafu ze zadání (lokální maximum, minimum, monotonii, symetrii, průsečíky s osou x), ale žádné další kroky ve svém řešení nepodnikli.

- Jeden student určil správně předpisy funkcí na podmnožinách definičního oboru po jeho rozdělení na tři části, určil si i monotonii funkce, ale žádným způsobem nepoužil absolutní hodnotu k sestavení předpisu grafu pro celý definiční obor.

- Pět studentů si rozdělilo definiční obor zadané funkce na tři části a správně určilo předpisy funkcí na těchto intervalech za pomoci absolutní hodnoty, ale ve svém řešení dále nepokračovalo.

- Dva studenti si rozdělili definiční obor na tři části a správně určili předpis jenom na dvou intervalech, předpis na třetím intervalu vůbec neuvádí.

- Jeden student si rozdělil definiční obor na 6 částí (podle monotonie funkce) a určil správně předpisy funkce na těchto intervalech, dále se o aplikaci absolutní hodnoty nepokusil.

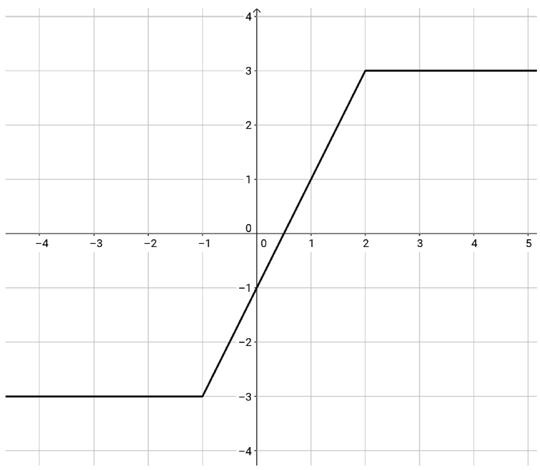
- Pět studentů si rozdělilo definiční obor na 3 podmnožiny a snažilo se najít předpisy funkce na těchto intervalech, ale nepodařilo se jim najít správné předpisy funkcí a uvádí chybné řešení bez zpětné kontroly nalezeného předpisu.

4.5.4 Čtvrtá úloha

Jako poslední byl vybrán typ grafu, se kterým se studenti seznámili už na hodinách matematiky v sextě. Studenti by měli zvládnou narýsovat graf funkce ze zadaného předpisu, který je ve tvaru rozdílu nebo součtu několika lineárních výrazů s proměnnou. Tento graf jsem zařadila jako poslední na základě mého předpokladu, že by měl mít nejnižší obtížnost ze všech zadání prvního testu.

Zadání a řešení

4. Napište předpis funkce na obrázku (Obr. 24) za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 24: První test - čtvrtý graf

Předpis této funkce je $y = |x + 1| - |x - 2|$.

Žákovské řešení

Ze všech odevzdaných řešení byly správné jenom čtyři (Tabulka 9). Stejně jako u předchozí úlohy nikdo neodevzdal prázdný papír a každý ze studentů se pokusil vymyslet nějakou strategii k vyřešení úlohy.

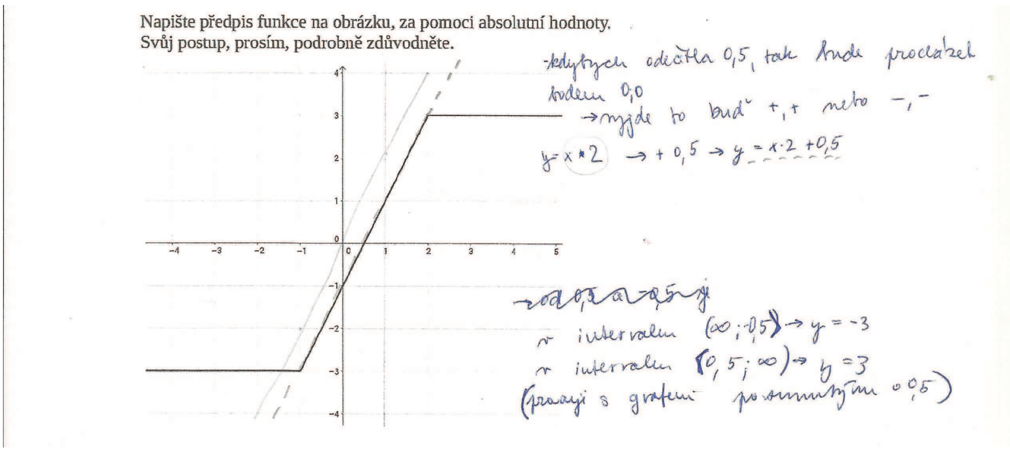
Všechna řešení studentů se zakládají na práci s lineárními výrazy. Rozdělení na intervaly se objevovalo ve většině studentských prací, někdy bylo dopl-

Tabulka 9: Úspěšnost - první test čtvrtá úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	4	14,29%
nesprávné řešení	24	85,71%

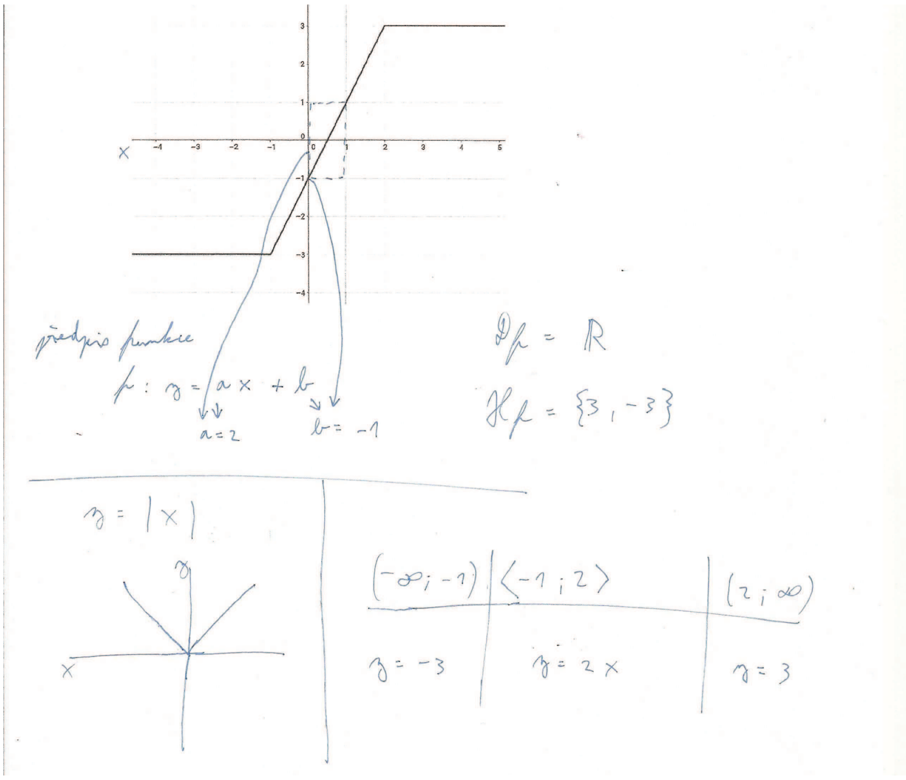
něno i o určení vlastností grafu (obor hodnot, lokální minimum, maximum, monotonie). Žádná řešení, ve kterých se snažili studenti využít ke nalezení předpisu jenom vlastnosti grafu bez rozdělení na intervaly, nevedla k správnému vyřešení úlohy.

Rozdělení na intervaly bylo u všech studentů, kteří definiční obor rozdělovalo na podmnožiny, stejné, a to na intervaly $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2)$ a $\langle 2, \infty)$. Na těchto intervalech byly u všech řešení správně určeny předpisy konstantních funkcí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $\langle 2, \infty)$, ale určení předpisu lineární funkce na intervalu $\langle -1, 2)$ v některých případech dělalo studentům potíže (Obr. 25) (Obr. 26). Studenti tento předpis ve svém zadání většinou neuvádí správně (chybí i jakékoliv ověření správnosti) a v několika případech studenti neuvedli ani žádný pokus o nalezení tohoto předpisu.



Obrázek 25: Nesprávné určení předpisu lineární funkce

Ti, kteří správně určili i předpis lineární funkce na intervalu $\langle -1, 2)$, se dále můžou rozdělit do dvou skupin podle úspěšnosti nalezení předpisu za pomoci absolutní hodnoty zadaného grafu.

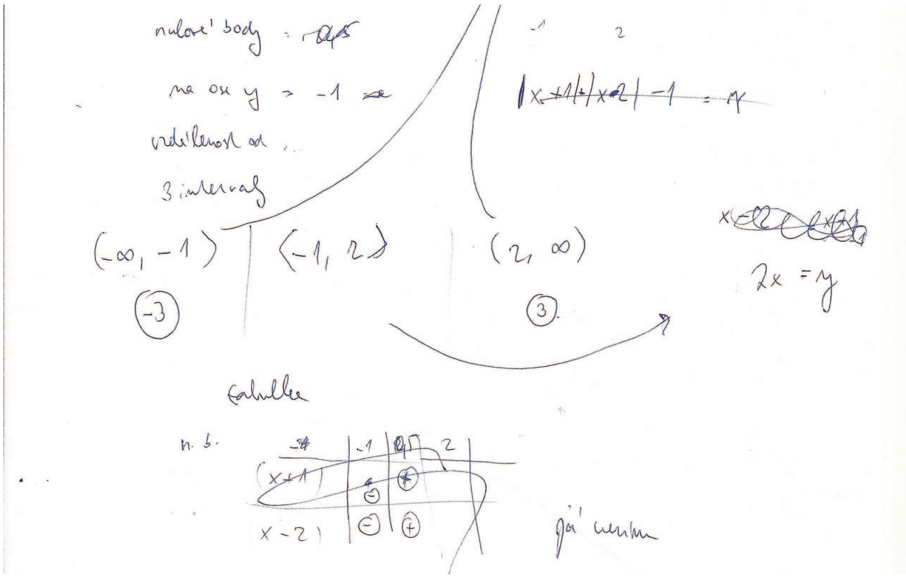


Obrázek 26: Nesprávné určení předpisu lineární funkce

Objevilo se i řešení, ve kterém, po pokusech určit předpisy na jednotlivých intervalech (opět nesprávné určení na intervalu $\langle -1, 2)$), si student sestavil tabulku, ve které zkoumal znaménko hodnoty výrazů $(x + 1)$ a $(x - 2)$ na intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2)$ a $\langle 2, \infty)$. Toto řešení ale nebylo dokončeno a student tento postup zavrhl a pokusil se o sestavení předpisu grafu ze zadání jiným způsobem (Obr. 27).

Další zajímavé řešení je pokus o využití znalostí o derivaci funkce a následná práce s body, ve kterých se derivace funkce mění. Tyto body byly určeny správně a za pomoci nich byly vytvořeny dva lineární výrazy, které student použil na sestavení předpisu grafu funkce (Obr. 28).

Ve studentských řešeních se opět dají vypozorovat některé strategie, které se objevovaly v řešeních opakovaně. Ze všech zadání prvního testu byla různorodost strategií u tohoto zadání nejmenší (Tabulka 10), ve skutečnosti se vytvořily jenom dvě větší skupiny strategií řešení, které se objevovaly opakovaně.

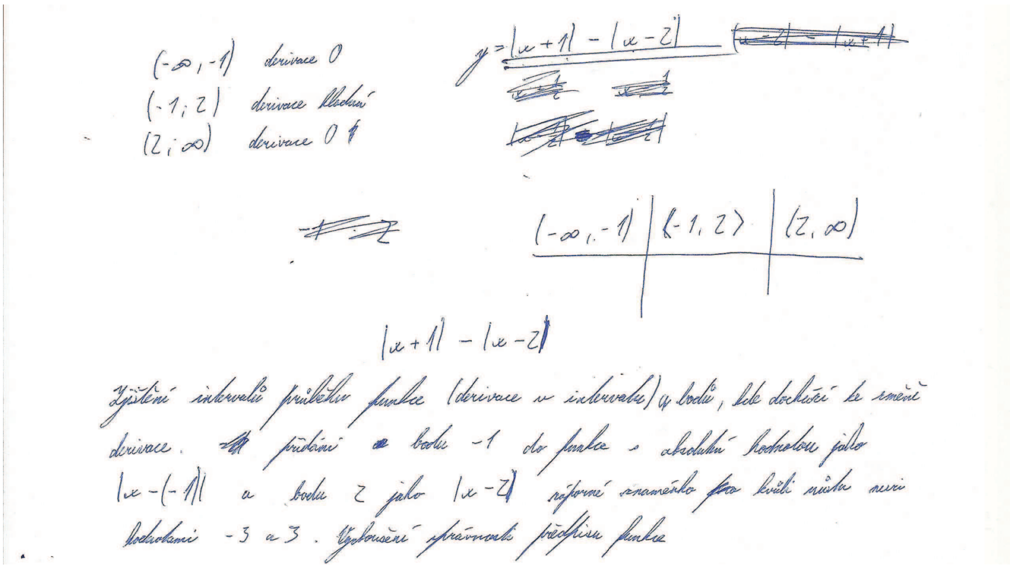


Obrázek 27: Použití tabulky k nalezení předpisu

- *Rozdělení na intervaly* - studenti si rozdělili graf funkce na intervaly, na kterých se pokusili určit předpis alespoň části zadaného grafu.
- *Zkoumání vlastností grafu funkce* - studenti začali určovat vlastnosti funkce z grafu (nejčastěji definiční obor, obor hodnot, periodu a funkční hodnoty v některých bodech definičního oboru).
- *Jiné* - strategie, která se objevila jenom výjimečně u jednoho řešení a žák při ní nepoužil ani jeden princip z předchozích strategií.

Tabulka 10: Strategie - první test čtvrtá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	7	25,23%
vlastnosti	16	59,26%
rozdělení na intervaly	5	18,52%



Obrázek 28: Využití derivace

Shrnutí

Absolutní hodnotu v této úloze využívají jenom studenti, kteří nalezli správné řešení. Jeden student využívá fakt, že v nulovém bodě absolutní hodnoty se mění monotonie funkce k sestavení dvou výrazů v absolutní hodnotě, které budou v řešení úlohy a následně jenom určuje, jestli jde o jejich součet nebo rozdíl. Další tři studenti využívají absolutní hodnotu jenom k sestavení výrazu pro celý definiční obor, který bude na daných podmnožinách definičního oboru shodný s předpisy funkcí, které na těchto intervalech už našli. Z hlediska strategie, chybovosti a použití absolutní hodnoty, můžeme studentské řešení rozdělit následovně:

- Jeden student si rozdělil definiční obor, využil své znalosti o derivaci, sestrojil dva výrazy v absolutní hodnotě, které budou v řešení a zvolil mezi ně správně znaménko mínus.
- Tři studenti si rozdělili definiční obor, správně určili předpis funkcí na těchto podmnožinách a následně sestavili výraz za pomoci absolutní hodnoty, který odpovídá předpisu funkce pro celý definiční obor.
- Sedm studentů po rozdělení našlo správně všechny předpisy na podmnožinách definičního oboru. ale dále v řešení nepokračovali.

- Šest studentů po rozdělení našlo správný předpis funkce na podmnožině jenom na intervalech, kde byla funkce konstantní.
- Jeden student po rozdělení definičního oboru správně určil jenom dva ze tří předpisů na podmnožinách a následně nedokázal správně použít absolutní hodnotu k sestavení předpisu pro graf ze zadání, proto si následně vytvořil tabulku pro zkoumání vlastností funkce na těchto podmnožinách.
- Dva studenti ve svém řešení jenom naznačili rozdělení grafu na 3 části, ale dále v řešení nepokračují.
- Tři studenti si rozdělili definiční obor a ještě si určili vlastnosti funkce, ale dále v řešení nepokračují.
- Tři studenti si určili vlastnosti grafu ze zadání a dále ve svém řešení nepokračují.

4.6 Druhý test

Druhý test dostali studenti dva týdny po testu prvním a byl zadáván opět během 6. a 7. vyučovací hodiny. Test obsahoval šest úloh a studenti dostali všechna zadání na začátku testování a časovou dotaci 90 minut na vyplnění celého testu. Testu se zúčastnilo 27 studentů.

Na rozdíl od prvního testu byla v druhém testu snaha zadat studentům úlohy od nejsnadnější po nejobtížnější. Při výběru a řazení grafů jsem se opět opírala o stejná kritéria, jako při sestavování testu prvního, a také o úspěšnost řešení studentů z prvního testování.

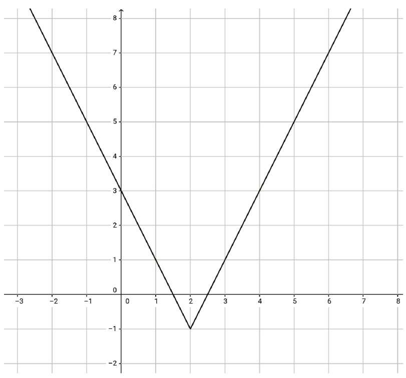
U každé úlohy je zadání úlohy, popsané vybrané studentské řešení i s ukázkami studentských prací a následné shrnutí studentských řešení a použití absolutní hodnoty v dané úloze. Z důvodu opakování strategií řešení již rozbor úlohy neobsahuje přehled použitých strategií.

4.6.1 První úloha

Během prvního testování nebyly studentům v testech předloženy grafy, které mají v předpisu jenom jednu absolutní hodnotu z lineární funkce. Tyto grafy studenti znají z hodin matematiky a předpokládala jsem, že by u nich mohlo být hledání předpisu takového grafu výrazně formální záležitostí. Po prostudování studentských řešení z prvního testu jsem se rozhodla zařadit do testu druhého i tento druh grafu, protože během prvního testování se ukázalo, že řešení studentů u podobných zadáních by nemuselo být mechanicky naučeno z hodin matematiky v tak vysoké míře, jak jsem předpokládala.

Zadání a řešení

1. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 29: Druhý test - první graf

Předpis této funkce je $y = 2 \cdot |x - 2| - 1$.

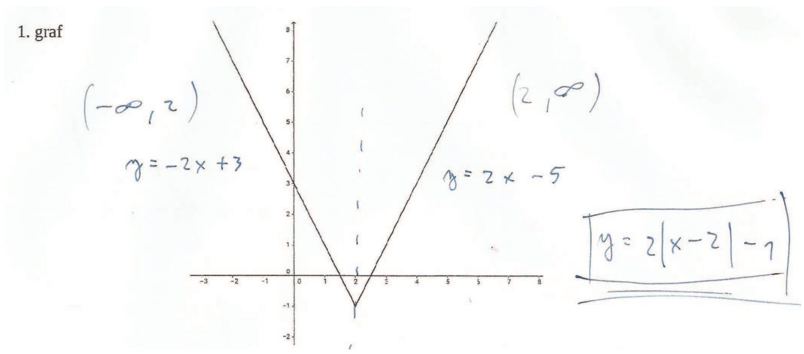
Žákovské řešení

Tento graf byl pro studenty nejsnadnější z celého testovaní, víc než polovina studentů našla správný předpis funkce ze zadání (Tabulka 11). Opět se o řešení alespoň nějakým způsobem pokusili všichni a nikdo neodevzdal prázdné zadání.

Tabulka 11: Úspěšnost - druhý test první úloha

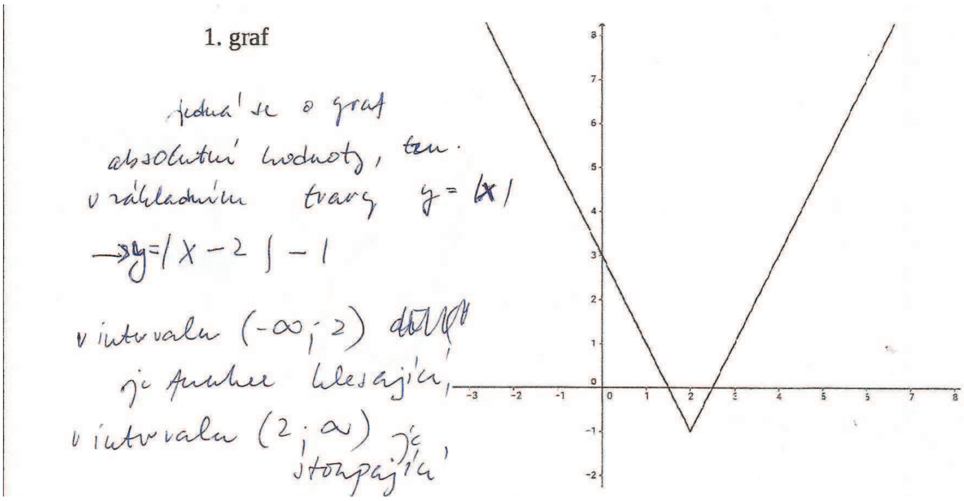
	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	17	62,96%
nesprávné řešení	10	37 ,04%

Většina řešení byla založena na jedné ze tří různých strategiích, které se v studentských testech objevovaly nejčastěji. První strategie bylo rozdělení na intervaly a následné hledání lineárních funkcí na daných intervalech (Obr. 30). Tento způsob řešení naznačuje, že jistá skupina studentů nenahlíží na tento druh grafu jako na posunutí grafu funkce $y = |x|$, ale vidí v nich grafickou interpretaci vlastností absolutní hodnoty z lineárních funkcích. Studenti zjistili, že předpis těchto funkcí se liší kromě parity násobku proměnné i absolutním členem a pokusili se sestavit předpis pro celou funkci tak, aby vyhovoval nalezeným předpisům na podmnožinách definičního oboru. Na jejich řešení můžeme nahlížet jako na aplikaci absolutní hodnoty k sestavení výrazu požadovaných vlastností.



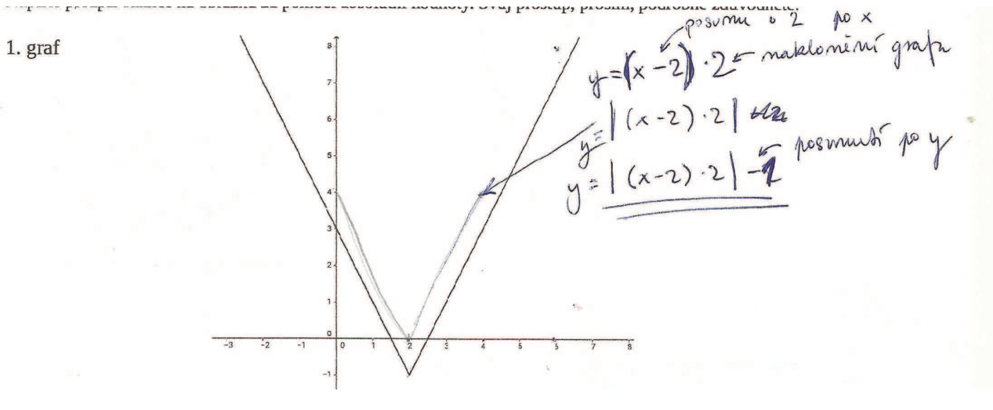
Obrázek 30: Rozdělení na podintervaly

Druhou strategií bylo hledání posunutí funkce $y = |2x|$ resp. $y = |x|$. U této strategie veliké množství studentů chybně předpokládalo, že mají v zadání posunutí grafu $y = |x|$ a ne $y = |2x|$. I když identifikovali správně, jak by měli předpis funkce upravit, aby měla vrchol v bodě $[2, -1]$, vůbec nepracovali s možností, že by funkce svírala s osou x jiný úhel než $45°$ (Obr. 31). Tito studenti ve svých řešeních neprokázali žádné vědomosti o absolutní hodnotě, nýbrž jenom své znalosti o posunutí grafu funkce.



Obrázek 31: Chybný předpoklad při hledání funkce

Třetí strategií bylo překreslení grafu tak, aby vrchol grafu ležel na ose x. Dalším krokem bylo hledání lineární funkce, která by v absolutní hodnotě vytvořila pomocný graf a posléze ve spojení s posunutím funkce vytvořila graf dle zadání (Obr. 32).



Obrázek 32: Překreslení grafu

Studenti, kteří se rozhodli využít tuto strategii, byli v řešení této úlohy nejúspěšnější. U této skupiny studentů můžeme vidět, že i když uvažovali ve svém řešení o posunutí grafu, nevyužili posunutí na graf funkce $y = |x|$, ale skutečně prokázali své znalosti o využití vlastností absolutní hodnoty z lineární funkce a jejich grafickou interpretaci.

V jednom řešení si student všiml, že graf svírá s osou x zjevně jiný úhel než graf $y = |x|$ a původně uvedl ve svém řešení předpis funkce, ve kterém byl dvojnásobek proměnné x, nakonec ale své řešení upravil na $0,5x$ bez udání důvodu.

Další studentská řešení nevedla k správnému řešení, i když v nich byla využita strategie rozdělení na podmnožiny definičního oboru, ale dalším krokem studentů bylo jenom určení vlastností funkcí bez pokusu o sestavení nějakého předpisu, nebo neúspěšný pokus o určení předpisů lineárních funkcí na daných intervalech.

Strategie řešení u této úlohy a jejich četnost v řešeních ukazuje následující tabulka (Tabulka 12):

Tabulka 12: Strategie - druhý test první úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	0	0%
zkoumání vlastností grafu	2	7,14%
využití posunutí grafu	18	64,29%
rozdělení definičního oboru	10	35,71%
překreslení části grafu	11	40,74%

Shrnutí

Při řešení této úlohy všichni s výjimkou tří studentů nějakým způsobem pracovali s absolutní hodnotou. Až jedenáct studentů při řešení využilo grafickou interpretaci absolutní hodnoty správně, osm studentů pracovalo správně s absolutní hodnotou a sestavilo výraz za pomoci absolutní hodnoty podle potřeby tak, aby vyhovovalo zadání.

Z pohledu výběru strategií, chybovostí a nalezení správného řešení vytvořili studentské řešení následující skupiny:

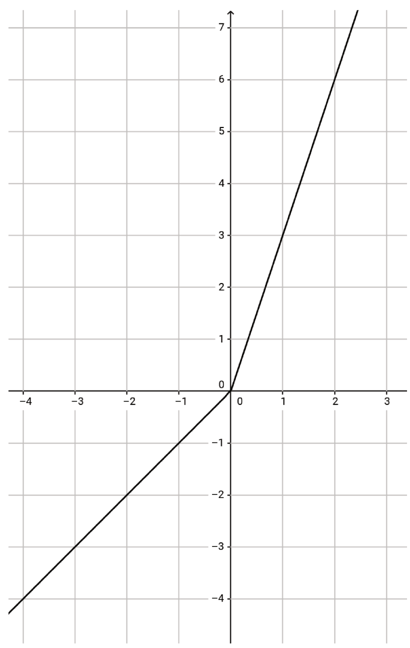
- Jeden student našel správné řešení pomocí posunutí grafu $y = 2x$ a následně bez udání důvodu přepsal ve svém řešení $y = 2x$ na $y = 0,5x$.

- Jeden student si rozdělil definiční obor a následně určil správně vlastnosti funkce, další kroky ve svém řešení neuvádí.
- Dva studenti si rozdělili definiční obor na dvě podmnožiny a neúspěšně se pokusili najít předpis lineárních funkcí na těchto podmnožinách.
- Tři studenti si vytvořili pomocný graf s vrcholem na ose x (posunutím celého grafu směrem nahoru po ose y) a následně hledali lineární funkci, která by v absolutní hodnotě vytvořila tento pomocný graf, a z něj by posunutím vytvořili předpis grafu ze zadání. Tito studenti využívají správně své znalosti o absolutní hodnotě, ale nesprávně sestavili předpis lineární funkce na částech definičního oboru.
- Jeden student si rozdělil definiční obor na dva podintervaly a použil nulový bod k sestavení tabulky, která zkoumá chování výrazu $|x-2|$ na daných podintervalech, ale žádné další kroky v řešení neuvádí.
- Dva studenti předpokládali, že v zadání je graf, který vznikl posunutím grafu $y=|x|$ a aplikovali na tento graf správně posunutí, které posune vrchol do stejného bodu, jako má graf ze zadání. Jeden z nich si kromě toho ještě určil i monotonii funkce ze zadání, ale tuto informaci nijak dále nevyžívá.
- Pět studentů si rozdělilo definiční obor na podintervaly, správně našlo předpisy lineárních funkcí na těchto intervalech a sestavily předpis funkce ze zadání za pomoci absolutní hodnoty.
- Čtyři studenti identifikovali správně, že jde o posunutí grafu $y=|2x|$ a správně použili posunutí tohoto grafu dle zadání.
- Osm studentů si vytvořilo pomocný graf, který má vrchol na ose x, u kterého správně našli lineární funkci, na kterou aplikovali absolutní hodnotu. Následně tento pomocný graf správně posunuli tak, aby se shodoval s grafem ze zadání.

4.6.2 Druhá úloha

Druhý graf je z kategorie funkcí, se kterými studenti na hodinách matematiky pracovali, ale opět jenom ve smyslu hledání grafu funkce k zadanému předpisu. Předpis funkce je opět sestaven jenom z lineárních výrazů a u řešení této úlohy jsem očekávala správnou aplikaci absolutní hodnoty na úrovni aritmetické definice.

Zadání a řešení *2. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.*



Obrázek 33: Druhý test - druhý graf

předpis této funkce je $y = 2x + |x|$.

Žákovské řešení

Úspěšnost u této úlohy byla v porovnání s ostatními úlohami vysoká (Tabulka 13). I když mělo být zadání pro studenti snadnější, byli i studenty, kteří se nepokusili vyřešit zadání žádným způsobem.

Několik studentů si opět určilo (správně) jenom vlastnosti grafu ze zadání a dále v řešení nepokračovali. Tito studenti si určili průsečík s oso x a monotonii funkce. Taky se objevilo řešení, které využívá správný postup, student

Tabulka 13: Úspěšnost - druhý test druhá úloha

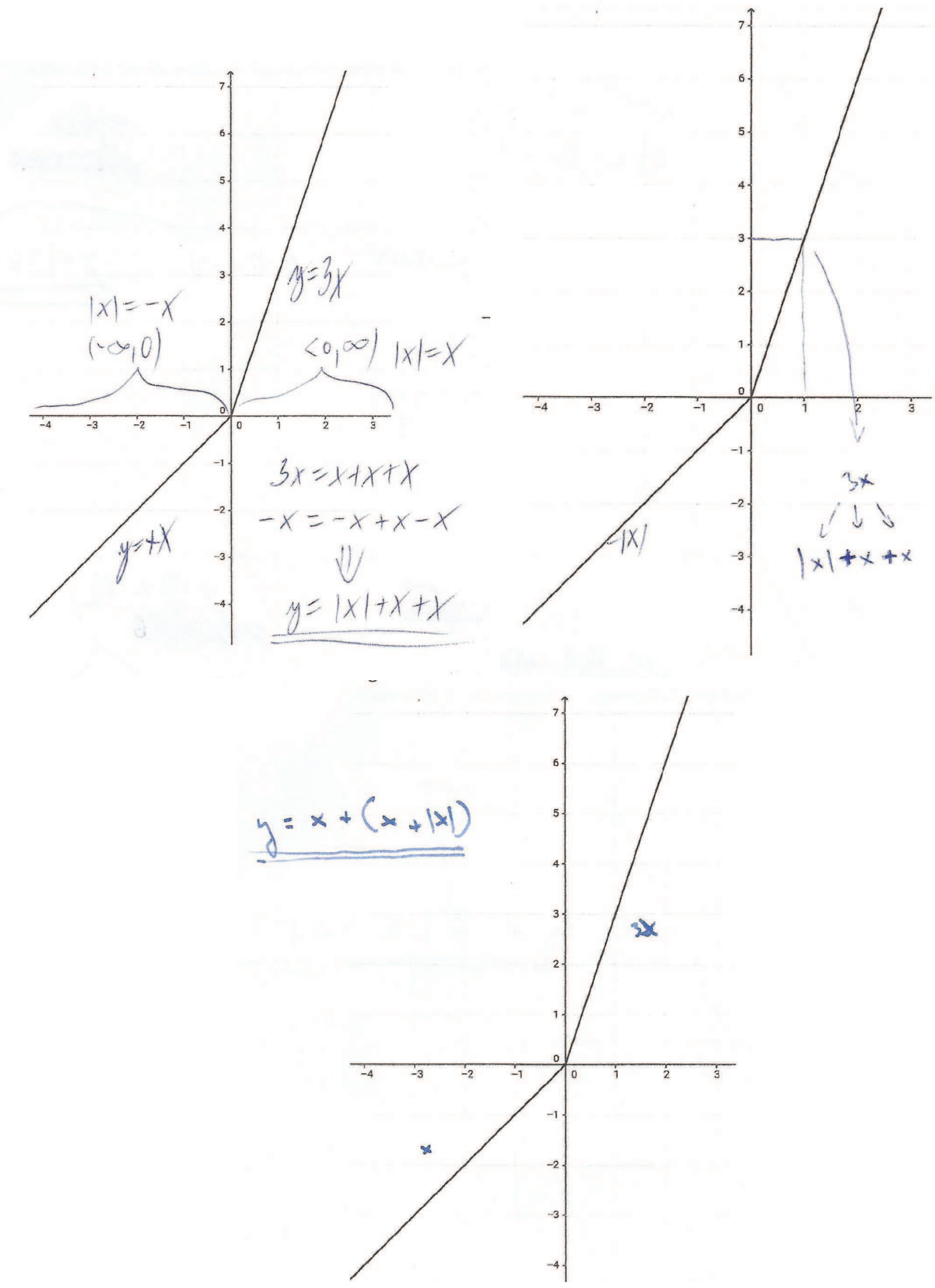
	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	16	59,26%
nesprávné řešení	11	40,74%

si správně určil předpisy funkcí pro kladná i pro nezáporná čísla z definičního oboru, ale při sestavování předpisu pro celý definiční obor se více zaměřil na záporné hodnoty a uvedl nesprávný předpis $y = |x| - |2x|$. Následně student neudělal kontrolu pro čísla nezáporná a své řešení už neupravil.

Mezi správnými řešeními se objevily dva postupy, které studenti využívali. První postup využíval strategii rozdělení definičního oboru na záporná a nezáporná čísla. Na těchto podmnožinách definičního oboru studenti následně hledali předpisy funkcí. Tento krok se podařilo udělat správně všem studentům, kteří si zvolili tento postup. Další kroky řešení se u této skupiny studentů lišily. První část studentů po sestavení těchto předpisů už nedokázala použít vlastnosti absolutní hodnoty k tomu, aby vytvořili předpis pro celý definiční obor a ve svém řešení dále už nepokračují. Druhá část studentů, která pokračovala, byla ve většině případů úspěšná a povedlo se jim nalézt předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty pro funkci ze zadání.

Zdůvodnění kroků řešení studentů u této úlohy bylo poměrně skoupé, a v řešeních se často objevovaly správná řešení hned po určení předpisů funkcí na podmnožinách definičního oboru bez hlubšího zdůvodnění. Z hlediska hloubky zdůvodnění tvorby předpisu funkce pro celý definiční obor se objevovaly například následující popisy řešení (Obr. 34).

Tato úloha byla snadná a z pohledu strategií neposkytovala až tolik prostoru, jako některé další úlohy. Studentské řešení zahrnovaly jenom následující strategie řešení (Tabulka 14):



Obrázek 34: Sestrojení správného řešení ze dvou předpisů

Tabulka 14: Strategie - druhý test druhá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	2	7,41%
zkoumání vlastností grafu	2	7,41%
určování předpisu po rozdělení	23	85,19%

Shrnutí

Využití absolutní hodnoty u této úlohy bylo primárně zaměřené opět na konstrukci výrazu, který bude mít některé požadované vlastnosti funkcí, pro nezáporná čísla jiné než pro čísla záporná.

Ze sedmnácti studentů, kteří ve svém řešení nějakým způsobem využívali absolutní hodnotu, jeden jediný student nesestavil pomocí absolutní hodnoty výraz dle vlastností, které potřeboval a tento výraz byl řešením jenom pro část definičního oboru. Ostatní studenti cíleně a správně využili vlastnost absolutní hodnoty a zkonstruovali požadovaný výraz daných vlastností.

Z hlediska strategií a chybovosti se dají studenti rozdělit do následujících skupin:

- Dva studenti se ani nepokusili úlohu nějakým způsobem vyřešit.
- Dva studenti správně určili vlastnosti grafu ze zadání, ale dále ve svém řešení nepokračovali.
- Jeden student si rozdělil definiční obor na záporná a nezáporná čísla a na každé podmnožině správné vytvořil předpis lineární funkce, ale při sestavování předpisu pro celý definiční obor udělal chybu, kterou neodhalil a uvádí tedy nesprávné řešení.
- Šest studentů si rozdělilo definiční obor a našlo správně předpis funkce pro záporné i nezáporné hodnoty z definičního oboru (všichni uvádí předpisy $y = x$ a $y = 3x$), ale následně neuvádí žádné další kroky svého řešení.
- Tři studenti si rozdělili definiční obor, našli správné předpisy lineárních funkcí na těchto intervalech a správně sestavili i předpis funkce za po-

moci absolutní hodnoty pro celý definiční obor. Tito studenti ale uvádí i předpis funkce pro záporné hodnoty ve tvaru $y = -|x|$ namísto funkce y x, kterou uvádí většina studentů.

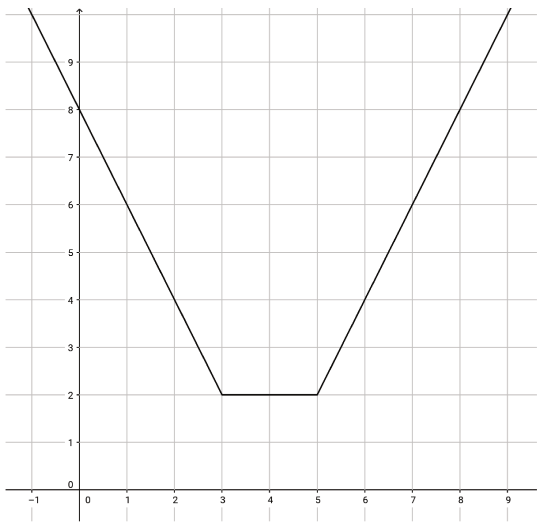
- Třináct studentů našlo správně předpis funkce ze zadání a využívají ve svém hledání rozdělení definičního oboru na záporná a nezáporná čísla, následně uvádějí předpisy pro funkce na těchto intervalech ($y = x$ a $y = 3x$). Jako poslední krok svých řešení uvádí správný předpis pro celý definiční obor.

4.6.3 Třetí úloha

Třetí graf, který byl studentům předložen, byl ze skupiny grafů, které studenti z hodin matematiky znají, ale jenom z hledání grafu k předpisu funkce. Tento graf má v předpisu součet nebo rozdíl dvou (nebo více) absolutních hodnot lineárních výrazů. U tohoto druhu funkce při prvním testování vznikla jenom čtyři správná studentské řešení. Zařazení grafu hned jako třetího v pořadí je z důvodu (kromě jeho předpokládané nižší obtížnosti) návaznosti na graf z prvního a druhého zadání, kde studenti měli před sebou podobný typ funkce.

Zadání a řešení

3. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 35: Druhý test - třetí graf

Předpis funkce je $y = |x - 3| + |x - 5|$.

Žákovské řešení

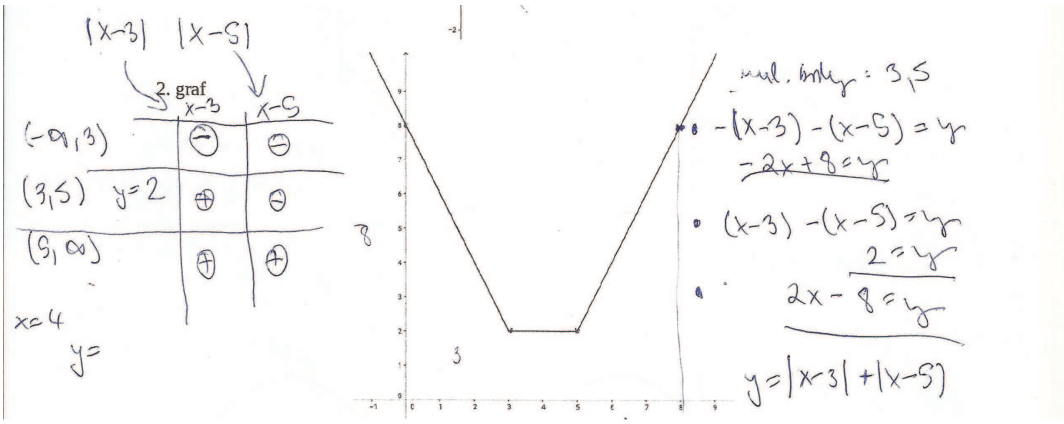
Počet správných řešení byl vyšší, než jsem při zadávání úlohy předpokládala (Tabulka 15). Správný předpis této funkce za pomoci absolutní hodnoty sestavila víc než polovina studentů.

Řešení studentů opět obsahovalo několik strategií, které se vyskytovaly i v prvním testu, ale v několika případech se objevila i strategie nová, a to

Tabulka 15: Úspěšnost - druhý test třetí úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	15	53,57%
nesprávné řešení	12	46,43%

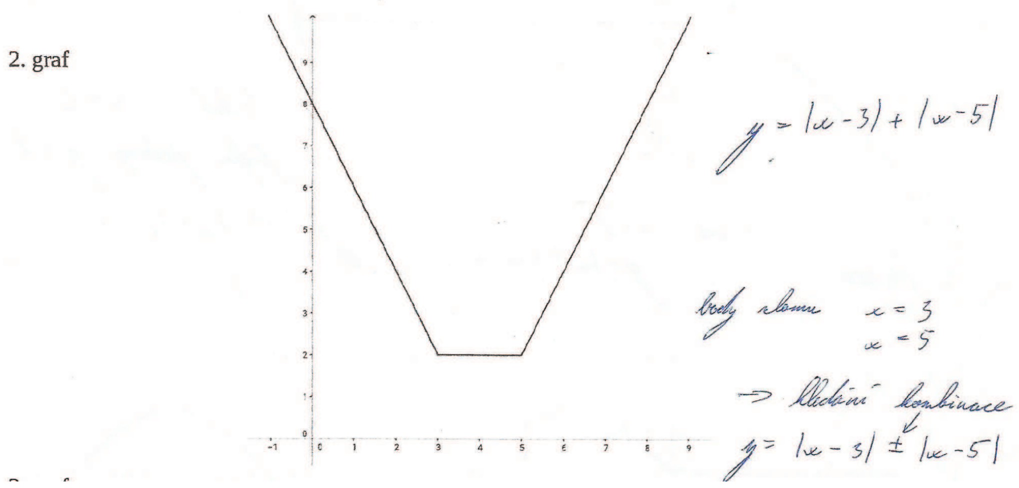
hledání předpisu funkce za pomoci tabulky zkoumání chování výrazu v absolutní hodnotě. Lineární výrazy, u kterých bylo toto chování zkoumáno, byly vytvořeny z nulových bodů grafu. V dalším kroku na daných intervalech byly vytvořeny (dle chování absolutní hodnoty z tabulky) předpisy lineárních funkcí a následně sestaven předpis za pomoci absolutní hodnoty pro celou funkci tak, aby vyhovovala zadání (Obr. 36).



Obrázek 36: Tabulka pro absolutní hodnoty

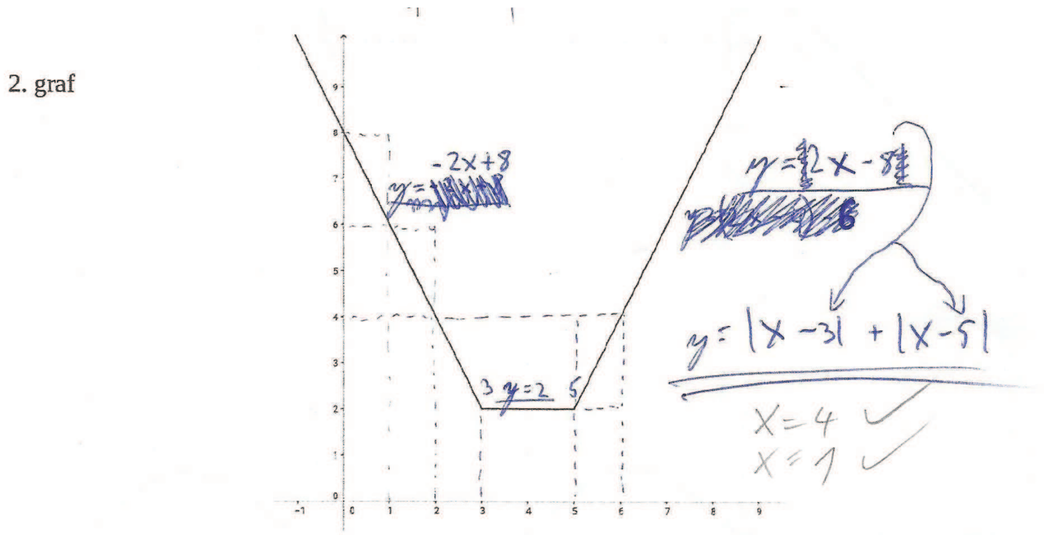
Další strategie řešení byla založena také na určení nulových bodů a následným sestavením dvou lineárních výrazů, které budou v konečném předpisu funkce v absolutní hodnotě, ale v tomto případě bylo studentovi jasné, že nepotřebuje k zjištění znaménka (plus nebo mínus), které mu mezi těmito výrazy chybí, najít předpis jednotlivých funkcí na různých intervalech definičního oboru. Vyzkoušel obě kombinace, které podle něj byly možné, a vybral tu správnou (Obr. 37).

V odevzdaných řešeních se objevil i postup, při kterém nastalo rozdělení definičního oboru na tři podmnožiny a následné hledání předpisu funkce na každém z těchto intervalů bez využití tabulky pro zkoumání chování absolut-



Obrázek 37: Využití nulových bodů

ních hodnot na těchto podmnožinách. K sestavení celkového předpisu funkce z těchto tří dílčích intervalů byl použit předpis z intervalu $(3, \infty)$ a následovala kontrola správnosti předpisu pro zbylé dva intervaly (Obr. 38).



Obrázek 38: Nalezení předpisu za pomoci rozdělení na intervaly

V jednom z řešení jsou využity správné nulové body na sestavení výrazů $(x-3)$ a $(x-5)$, bohužel se studentovi nepodařilo správně sestavit předpis pro celou funkci. Student mezi tyto výrazy vybral znaménko mínus z důvodu, který neuvedl a ani se nepokusil udělat zpětnou kontrolu dosazením nějakých hodnot z definičního oboru.

Několik studentů začalo řešit úlohu určováním vlastností funkce ze zadání, (nejčastěji určovali monotonii), a tyto vlastnosti se snaží dál využít k nalezení předpisu lineárních funkcí po rozdělení definičního oboru. Jeden student, kterému se nepodařilo najít předpisy lineárních funkcí na podmnožinách definičního oboru, jenom uvedl, že v předpisu funkce ze zadání bude určitě součet dvou absolutních hodnot, protože na posledním intervalu se musí sečíst dvě x.

Objevily se i řešení, která využívají překreslení grafu na graf pomocný (opět se jedná o dokreslení grafu do tvaru V tak, aby vrchol ležel na ose x), tato řešení předpokládají, že graf ze zadání můžeme dostat posunutím grafu $y = |x|$. Na tuto funkci, kterou si vybrali, správně aplikují posunutí grafu způsobem, aby měl vrchol v bodě $[4, 0]$ (jako jejich pomocný graf), bohužel si ale správnost svého řešení nijak neověří.

Různorodost postupů a strategií byla v této úloze skutečně veliká a studenti se snažili někdy odhalit správná řešení i vícero způsoby. Strategie, které byly použity, i s počtem jejich výskytu uvádí následující tabulka (Tabulka 16).

Tabulka 16: Strategie - druhý test třetí úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	1	3,57%
zkoumání vlastností grafu	5	17,86%
využití posunutí grafu	10	35,71%
nulové body	8	28,57%
určování předpisu po rozdělení	11	39,29%
tabulka	4	14,29%
rozdělení definičního oboru	19	67,86%
překreslení části grafu	3	10,71%

Shrnutí

Při řešení této úlohy až dvacet studentů nějakým způsobem použilo absolutní hodnotu ve svém řešení.

Osm studentů využívá absolutní hodnotu na sestavení výrazu z několika předpisů tak, aby vyhovovalo zadání. Tito studenti správně využívají vlastnosti absolutní hodnoty k sestavení výrazu požadovaných vlastností.

Osm studentů využívá při řešení nulové body z grafu k sestavení předpisu funkce. Při práci s nulovými body aplikují geometrickou interpretaci absolutní hodnoty a její vlastnost, že v nulovém bodě absolutní hodnoty graf mění své chování.

Tři studenti pracují s posunutím grafu $y = |x|$, což dokazuje spíše jejich znalosti o změně funkčních hodnot při daném posunutí. Jeden student využívá vlastnost, že pro kladná čísla se znaménko absolutní hodnoty nemění, a proto pro nezáporná čísla definičního oboru je součet $|x| + |x|$ roven $2x$.

U této úlohy se objevilo nadprůměrné množství studentských strategií i z toho důvodu, že vícero z nich se navzájem doplňují. Každý postup ale přinesl jiný druh chyb a ovlivnil i úspěšnost řešení studenta, a to následovně:

- Jeden student se nepokusil vyřešit zadání žádným způsobem.
- Jednomu studentovi se nepodařilo po rozdělení na intervaly nalézt předpisy funkcí na těchto intervalech, jenom uvedl, že v předpisu funkce bude součet dvou absolutních hodnot.
- Čtyři lidé si definiční obor rozdělily na podmnožiny a povedlo se jim najít správný předpis funkce na každé jedné podmnožině, ale dále úlohu už neřešili.
- Tři lidé si určili některé z vlastností grafu a rozdělili si definiční obor na podmnožiny, ale dále úlohu neřeší.
- Jeden studen si určil vlastnosti funkce, pak rozdělil definiční obor na podmnožiny a pokusil se najít předpisy na těchto intervalech, které ale nebyly správně ani na jednom z intervalů.
- Jeden student určil jenom vlastnosti funkce z grafu a další postup svého řešení neuvedl.
- Tři studenti si dokreslili graf na graf pomocný tak, aby měl tvar V a vrchol měl na osu x. Následně (správně) ve svém řešení používají posunutí grafu $y = |x|$, které ale nevede k správnému řešení.

- Jeden student za pomoci nulových bodů správně určil, že předpis funkce bude sestaven z výrazů $|x-3|$ a $|x-5|$, ale nesprávně určil, že půjde o jejich rozdíl.

- Čtyři lidi si po rozdělení definičního oboru sestavili tabulku pro zkoumání chování výrazů $|x-3|$ a $|x-5|$ na těchto podmnožinách. Následně správně vypočítali předpisy funkcí na jednotlivých intervalech a správně sestavili i předpis funkce za pomocí absolutní hodnoty pro zadaný graf. Jeden z nich si ještě na začátku určil vlastnosti funkce ze zadání.

- Čtyři studenti po rozdělení definičního oboru na intervalu zjistili předpisy funkcí na těchto intervalech bez tabulky a následně správně určili předpis funkce pro celý definiční obor.

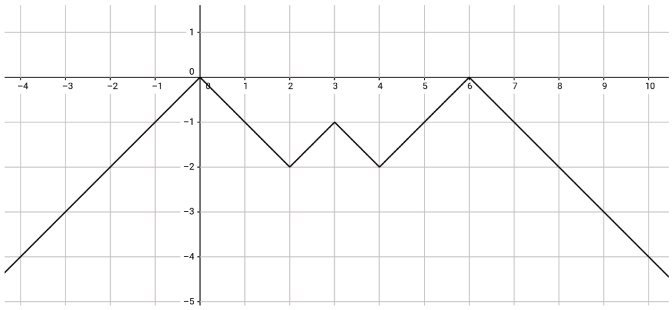
- Sedm studentů si určilo nulové body, ze kterých sestavili výrazy $|x-3|$ a $|x-5|$ a následně úvahou vybrali správně mezi tyto výrazy znaménko plus.

4.6.4 Čtvrtá úloha

Čtvrtý v pořadí byl graf, který má v přepisu jenom lineární výrazy a absolutní hodnoty, které jsou do sebe vnořené. Tento druh grafu dostali studenti i v prvním testu a správně ho vyřešilo jenom šest studentů.

Zadání a řešení

4. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 39: Druhý test - čtvrtý graf

Předpis této funkce je $y = -|||x-3|-1|-2|$.

Žákovské řešení

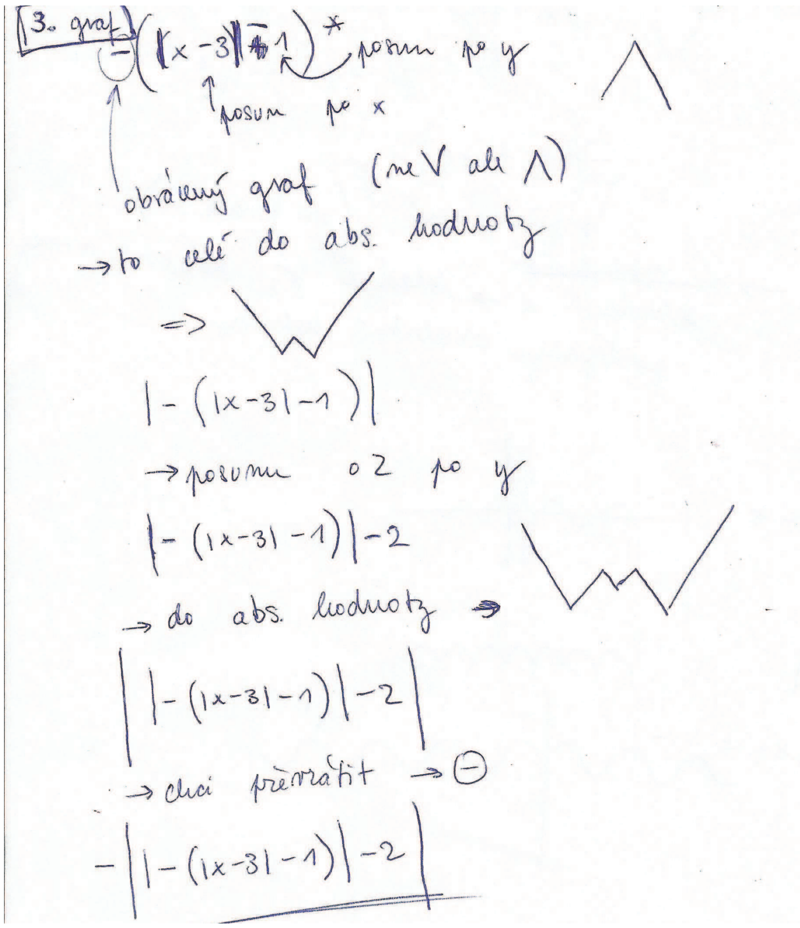
Úspěšnost řešení byla vyšší, než u stejného typu zadání v prvním testování (Tabulka 17).

Tabulka 17: Úspěšnost - druhý test čtvrtá úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	12	46,43%
nesprávné řešení	15	53,57%

Tři studenti se nepokusili zadání vyřešit žádným způsobem. Ostatní studenti využívali strategie, které se v studentských řešeních objevovali už několikrát. V porovnání s předchozím testem je vidět, že víc studentů využívá ve svém řešení i několik strategií k nalezení správného řešení v případě, že jimi prvotně zvolená strategie není pro daný druh zadání vhodná.

V studentských řešeních se nejčastěji objevovala strategie hledání předpisu funkce za pomoci funkce $y = |x|$, konkrétně hledání její posunutí tak, aby po několika posunutích a aplikaci absolutní hodnoty vnikl graf ze zadání. Těmto krokům ve většině řešení předcházelo překreslení grafu ze zadání na pomocný graf, který je ve tvaru V. Zdůvodnění studentů u těchto řešeních bylo vždy téměř stejné. Studenti předpokládali, že zadaný graf lze sestrojit z grafu absolutní hodnoty z x (na základě pomocného grafu) a následně se snažili aplikovat posunutí na graf $y = |x|$ dle svého uvážení, aby dostali požadovaný výsledek (Obr. 40).



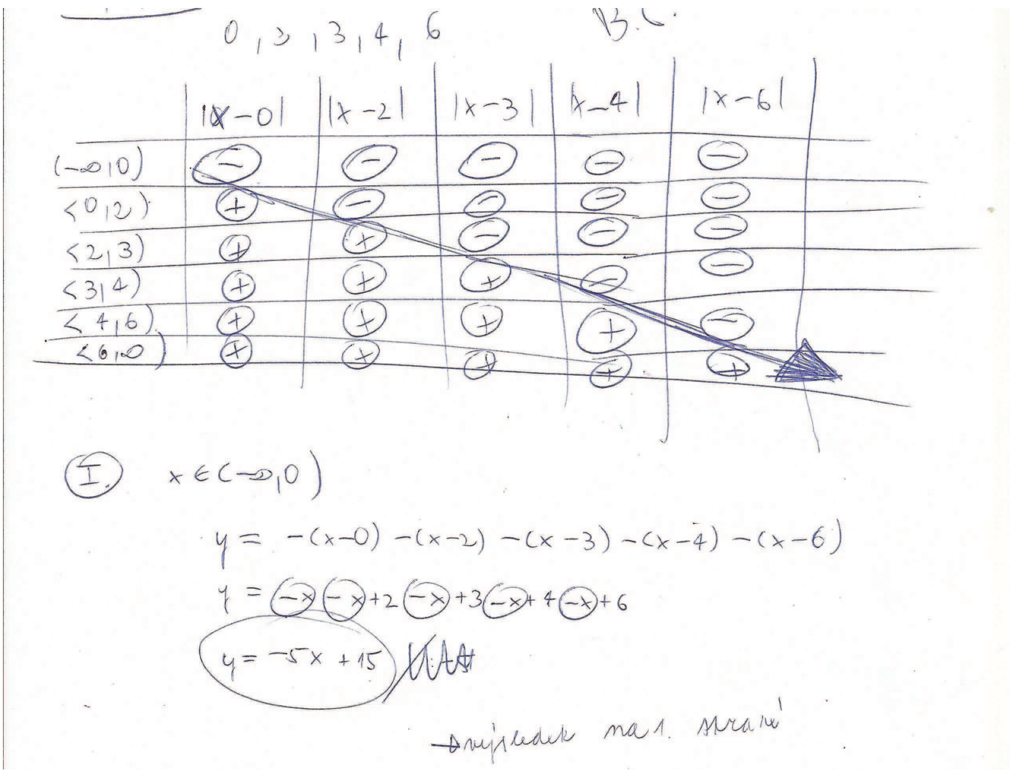
Obrázek 40: Posunuti grafu $y = |x|$

Objevilo se i řešení, ve kterém nebyl vytvořen žádný pomocný graf, a student začal hned hledat posunutí grafu $y = |x|$.

Další studentské řešení bylo nejprve založeno na nalezení nulových bodů, sestrojení lineárních výrazů za pomoci těchto bodů a vytvoření tabulky pro zkoumání chování absolutní hodnoty z těchto výrazů na zvolených intervalech (Obr. 41). Student nakonec usoudil, že si nezvolil vhodnou strategii a nakonec sestrojil správné řešení za pomoci hledání posunutí a aplikace absolutní hodnoty na graf funkce $y = |x|$.

V několika řešeních se opět ukázalo, že někteří studenti mají problém pracovat s posunutím grafu, a i když jejich strategie řešení byla správná, nepovedlo se jim najít správně předpisy vytvořené posunutím zvoleného grafu.

Objevilo se i řešení, ve kterém student odhalil, že hledaný předpis bude ve tvaru minus absolutní hodnota z nějakého výrazu, protože celý graf ze zadání má záporné funkční hodnoty, ale nebyl schopen použít žádnou strategii k nalezení tohoto výrazu.



Obrázek 41: Zkoumání

U tohoto zadání byli studenti skutečně tvořiví a snažili se využít veliké množství postupů k nalezení správného řešení, což zobrazuje následující tabulka (Tabulka 18):

Tabulka 18: Strategie - druhý test čtvrtá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	3	10,71%
zkoumání vlastností grafu	3	10,71%
využití posunutí grafu	14	51,85%
nulové body	1	3,57%
určování předpisu po rozdělení	3	10,71%
tabulka	1	3,57%
rozdělení definičního oboru	4	14,81%
překreslení části grafu	12	44,44%

Shrnutí

U tohoto zadání pracovalo čtrnáct studentů s absolutní hodnotou správně. Všichni využili ve svém řešení nějakým způsobem její vlastnost, že je vždy nezáporná, a dokázali tuto vlastnost propojit s aplikací na graf funkce.

Jeden student při řešení použil absolutní hodnotu nesprávně. Při použití absolutní hodnoty na předpis funkce ve svém řešení překreslil graf funkce z kladných do záporných a ze záporných do kladných hodnot oboru hodnot. Tento krok by mohl naznačovat, že student chápe absolutní hodnotu jako pravidlo změny znaménka.

Z pohledu studentských postupů řešení, chybovosti a strategií, vytvořili studentské práce tyto skupiny:

- Tři lidé se nepokusili o vyřešení úlohy žádným způsobem.
- Jeden student jenom napsal svůj předpoklad, že výsledný předpis funkce bude ve tvaru $-|...|$ z důvodu, že graf ze zadání má obor hodnot jenom záporná čísla, ale nepokusil se najít výraz v absolutní hodnotě žádným způsobem.
- Tři lidé jenom určili vlastnosti grafu ze zadání a dále v řešení nepokračovali. Většinou šlo o monotonii a funkční hodnoty ve významných

bodech, jeden student vyznačil pravý úhel mezi jednotlivými úsečkami grafu.

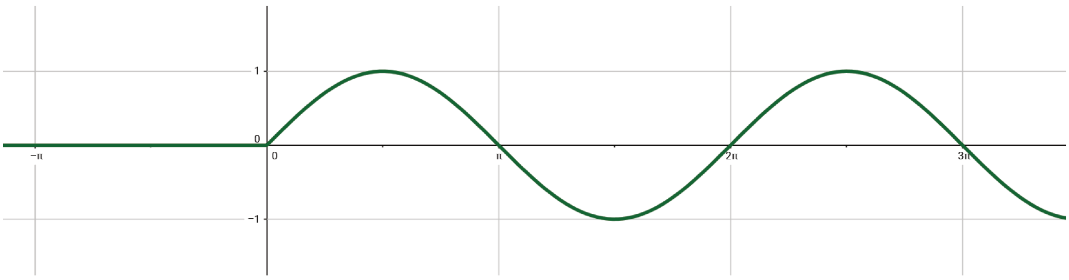
- Jeden student si rozdělil definiční obor na šest podmnožin a na každé z nich si určil správně předpis lineární funkce, dále v řešení nijak nepokračoval.
- Dva studenti si nejprve rozdělili definiční obor na 6 podmnožin a následně určili správně jednotlivé předpisy lineárních funkcí na těchto intervalech. Z těchto informací se jim nepovedlo sestrojit předpis funkce ze zadání, tak si překreslili graf na pomocný graf tvaru V a za pomoci posunutí grafu $y = |x|$ a využití absolutní hodnoty sestrojili správně předpis funkce pro celý definiční obor.
- Devět studentů překreslilo graf ze zadání na pomocný graf ve tvaru V a následně sestavilo za pomoci posunutí a absolutní hodnoty požadovaný předpis grafu ze zadání správně.
- Jeden student využil nulové body k sestavení výrazů, které předpokládal, že bude graf ze zadání mít ve svém předpisu. Následně si sestavil tabulku, ve které zkoumal chování absolutní hodnoty z těchto výrazů na daných podmnožinách definičního oboru. V průběhu řešení této úlohy student usoudil, že si nezvolil správnou strategii a rozhodl se najít předpis funkce za pomoci posunutí a aplikace absolutní hodnoty na graf funkce $y = |x|$ a sestrojil předpis funkce ze zadání za pomoci absolutní hodnoty.
- Dva studenti si překreslili graf do pomocného tvaru V a následně se snažili najít posunutí grafu $y = |x|$ tak, aby dostali zadaný graf, bohužel ale posunutí grafu neaplikovali správně a předpis se jim nepodařilo najít. Kroky, ve kterých používali absolutní hodnotu, mají správně, jenom byla aplikována na nesprávný předpis.
- Jeden student bez překreslení grafu hned na začátku svého řešení usoudil, že graf můžeme získat z grafu $y = |x|$, ale nepovedlo se mu správně použít ve svém řešení ani posunutí grafu ani absolutní hodnotu.

4.6.5 Pátá úloha

Pátý graf, který studenti dostali byl ten samý, který dostali už v prvním testu. Během prvního testování byl zařazen jako druhý, z důvodu vyšší obtížnosti, protože tento druh grafu neměli studenti šanci na běžných hodinách matematiky potkat. Zadání bylo zařazeno do testování podruhé z důvodu porovnání úspěšnosti studentských řešení alespoň u jedné úlohy bez změny zadání.

Zadání a řešení

5. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 42: Druhý test - pátý graf

Předpis této funkce je $y = \frac{sinx + sin|x|}{2}$ nebo $y = sin\frac{x+|x|}{2}$.

Žákovské řešení

Během prvního testování našli správný předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty pro graf ze zadání jenom tři studenti. Při opětovném řešení úspěšnost řešení nijak výrazně nevzrostla (Tabulka 19).

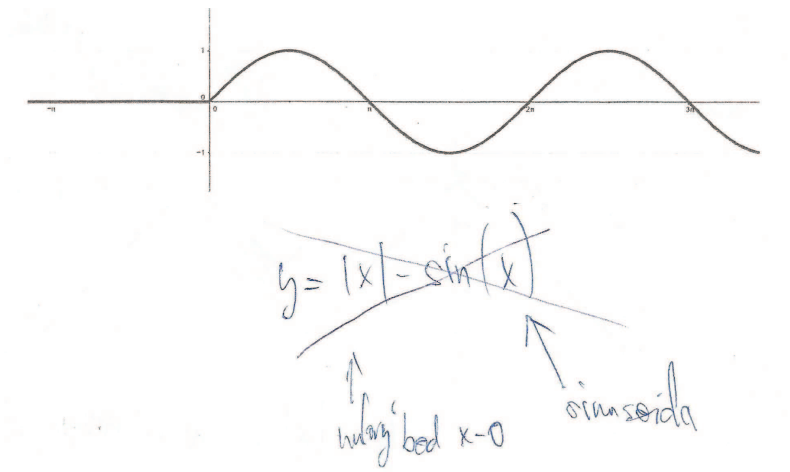
Tabulka 19: Úspěšnost - druhý test pátá úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	5	18,52%
nesprávné řešení	22	81,48%

Správné řešení byly nalezeny stejnou strategií, jako u prvního testování. Studenti si rozdělili definiční obor na čísla záporná a nezáporná, pro každou podmnožinu našli zvlášť předpis funkce a následně sestavili předpis pro celý definiční obor vhodným použitím vlastnosti absolutní hodnoty.

Opět se objevilo řešení, které uvádí jenom vlastnosti zadané funkce (lokální maxima a minima, periodu, monotonii) a student neuvádí žádné další kroky svého řešení.

Několik studentů se dopracovalo k nalezení předpisu jedné, nebo obou funkcí po rozdělení definičního oboru. V jednom z řešení uvádí student nesprávný předpis pro funkci ze zadání na základě poměrně chabého zdůvodnění, ve kterém se snažil využít změnu chování funkce v nulovém bodě (zřejmě z toho důvodu na nulový bod aplikoval absolutní hodnotu) a propojit ho se sinusoidou, ale nakonec usoudil, že předpis správný není a své řešení přeškrtnul. (Obr. 43).



Obrázek 43: Pokus o aplikaci absolutní hodnoty s využitím nulového bodu

Z hlediska postupů studenti využili jenom strategie z tabulky (Tabulka 20).

Tabulka 20: Strategie - druhý test pátá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	12	44,44%
zkoumání vlastností grafu	1	3,70%
nulové body	1	3,70%
určování předpisu po rozdělení	13	48,15%

Shrnutí

Aplikace absolutní hodnoty v tomto případě nebyla různorodá a studenti ji využili jenom na algebraické sestrojení výrazu, ze kterého chceme hodnotu sinus. V porovnání s předchozím testem se podařilo tímto způsobem aplikovat absolutní hodnotu dvěma studentům, kteří během prvního testování našli jenom předpisy funkcí pro kladná a nezáporná čísla a dále v řešení nepokračovali.

Jeden student se zřejmě pokusil využít zkušenost z předchozího příkladu, ve kterém absolutní hodnota byla vázána na nulový bod funkce, ve kterém měnila monotonii, ale jeho postup nevedl k správnému řešení.

Úloha byla celkově málo pestrá i na různorodost studentských řešení a postupů:

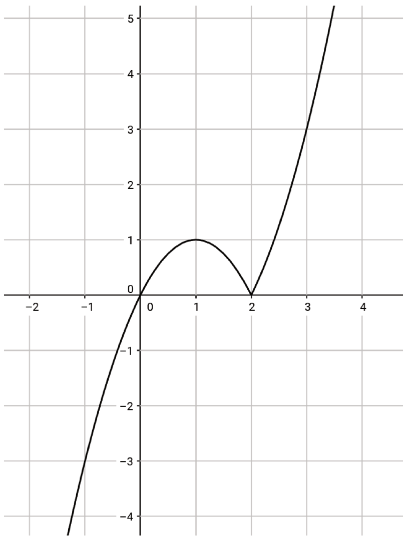
- Dvanáct studentů se nepokusilo zadání vyřešit žádným způsobem.
- Pět studentů vyřešilo zadání správně, za pomoci rozdělení definičního oboru na záporná a nezáporná čísla, našli správný předpis funkcí na těchto intervalech a následně správně sestavili předpis funkce pro celý definiční obor.
- Jeden student si určil vlastnosti funkce ze zadání a dále v řešení nepokračoval.
- Sedm studentů si rozdělilo definiční obor na záporná a nezáporná čísla, na obou intervalech správně našlo předpis funkce, ale v řešení úlohy nepokračovali.
- Jeden student si rozdělil definiční obor a uvedl, že pro kladná čísla se jedná o sinusoidu.
- Jeden student identifikoval v zadání graf funkce $y = sin(x)$ a snažil se vytvořit pomocí této informace předpis pro celý definiční obor. Ve svém řešení se pokusil použít i jeden z nulových bodů grafu, ale správné řešení se mu nepodařilo najít. Své nesprávné řešení po uvážení škrtnul.

4.6.6 Šestá úloha

Posledním grafem v tomto testu byl typově graf, se kterým se už studenti také setkali při řešení prvního testu. Jedná se o graf, který z hodin matematiky neznají, a který má ve svém předpisu kvadratický člen.

Zadání a řešení

6. Napište předpis funkce za pomoci absolutní hodnoty. Svůj postup, prosím, podrobně zdůvodněte.



Obrázek 44: Druhý test - šestý graf

Předpis funkce je $y = x \cdot |x - 2|$.

Žákovské řešení

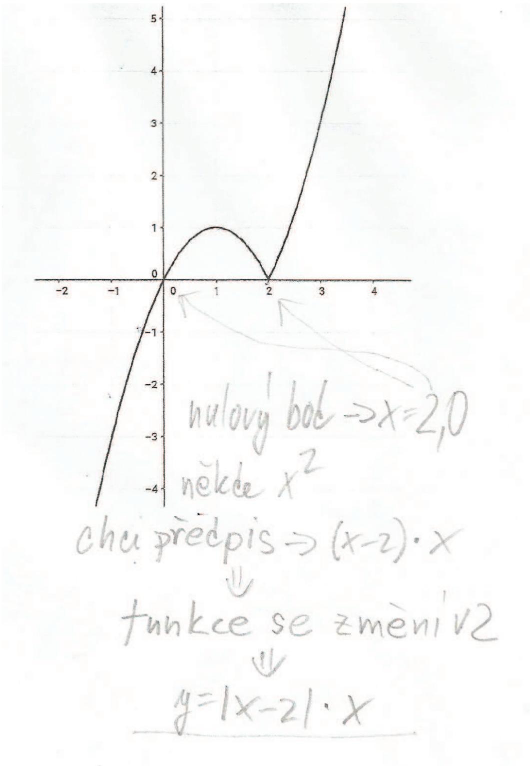
Ve druhém testování úspěšnost řešení u tohoto typu zadání mírně vzrostla (Tabulka 21).

Tabulka 21: Úspěšnost - druhý test šestá úloha

	Počet studentů	**Procenta**
správné řešení	4	14,81%
nesprávné řešení	24	85,19%

Ze všech odevzdaných řešení sedm studentů úlohu neřešilo. Správné řešení, ke kterým se úspěšní řešitelé úlohy dopracovali, vznikala dvěma způsoby.

Prvním způsobem bylo určení a využití nulových bodů funkce z grafu. Po určení nulových bodů tito studenti našli předpis funkce ve tvaru součinu a následně aplikovali správně absolutní hodnotu na jeden z činitelů součinu. Zdůvodnění, proč je absolutní hodnota právě u výrazu $(x-2)$ a ne u x, bylo ve všech řešeních popsáno změnou chování funkce v nulovém bodě 2 (Obr. 45).

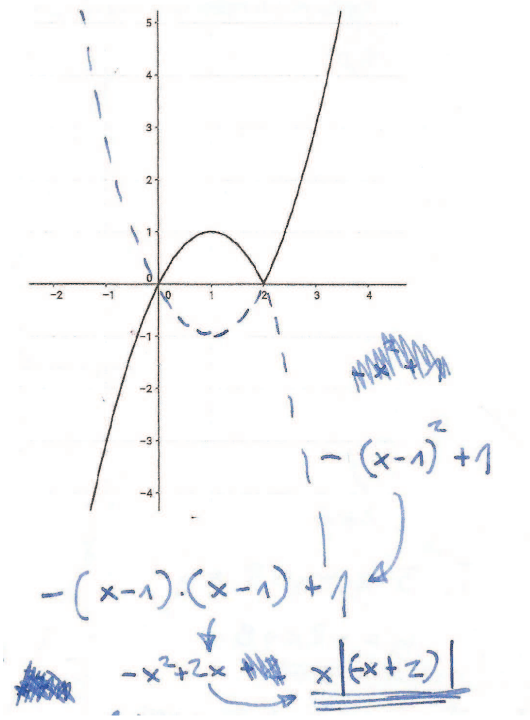


Obrázek 45: Zdůvodnění použití absolutní hodnoty

Použití nulových bodů se objevilo i v jiném řešení, ale student ho využil jenom k nalezení předpisu pomocného grafu $y = (x-2)\cdot(x-0)$, který si vytvořil v průběhu svého řešení úlohy, a s absolutní hodnotou vůbec nepracuje.

Druhý způsob, který byl použit k odhalení správného řešení, bylo vytvoření a hledání předpisů pomocných grafů a následná úprava nalezeného předpisu tak, aby vyhovoval předpis grafu ze zadání (Obr. 46).

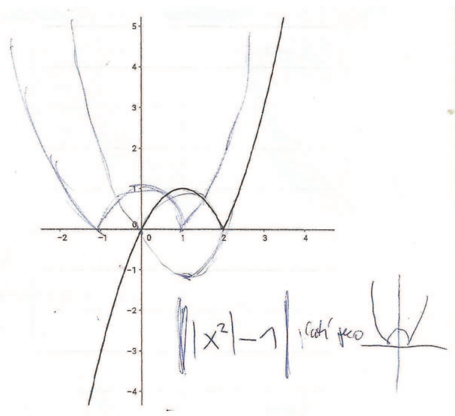
Několik dalších studentů si zvolilo stejnou strategii překreslení grafu. Většina těchto studentů uvádí ve svém řešení alespoň informaci, že výsledný předpis bude souviset s grafem funkce $y = x^2$. Několik studentů se snaží využívat posunutí grafu k nalezení předpisu alespoň na nějaké části definičního oboru.



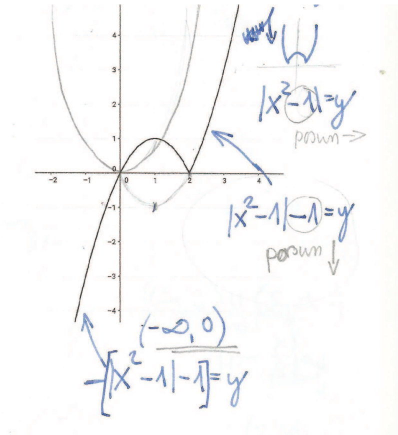
Obrázek 46: Správné řešení

Jedno z těchto řešení uvádí i předpis obou funkcí (po rozdělení definičního oboru) nalezeních posunutím, autor ale udělal chybu v posunutí a předpisy neodpovídají zadání. Bez ohledu na správnost použití posunutí o další krok, ve kterém by aplikoval absolutní hodnotu na předpisy funkcí na těchto podmnožinách definičního oboru, se ani nepokusil (Obr. 48).

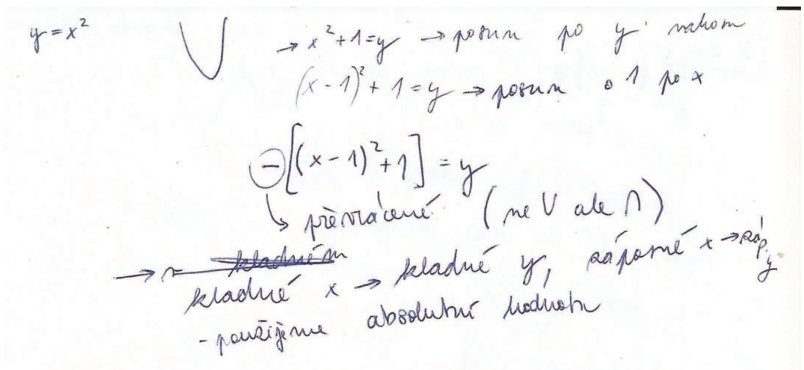
V některých řešeních studenti po překreslení grafu nalezli předpis jedné z pomocných funkcí, ale dále nedokázali ve svém řešení pokračovat. Nejčastějším důvodem byl výběr posunutí funkce $y = x^2$, kterým se řešitel dostal do slepé uličky a nebylo v jeho schopnostech provést další úpravy přepisu funkce posunutím (Obr. 47) nebo neschopnost aplikovat absolutní hodnoty



Obrázek 47: Posunutí



Obrázek 48: Chybný předpis funkce vytvořený posunutím



Obrázek 49: Absence použití vlastností absolutní hodnoty

U této úlohy se neobjevily žádné nové strategie řešení, které by už předtím studenti nevyužívali v předchozích zadáních. Následující tabulka (Tabulka 22) zobrazuje alespoň četnost výskytu jednotlivých strategií.

Shrnutí

Absolutní hodnotu v této úloze při svém řešení použilo šest studentů. Dva lidi s ní pracovali jenom při posouvání grafu v krocích, kde potřebovali dostat funkční hodnoty grafu do nezáporných hodnot, což značí propojení vlastností absolutní hodnoty s její grafickou interpretací.

Čtyři lidi využili absolutní hodnotu k sestavení výrazu požadovaných vlastností z pomocného předpisu (vytvořeného z předpisu pomocné funkce nebo za pomoci nulových bodů) dle potřeby zadání, na základě změny chování

Tabulka 22: Strategie - druhý test šestá úloha

Strategie	**Počet studentů**	**Procenta**
žádné řešení	7	25,23%
posunutí	16	59,26%
nulové body	3	11,11%
dokreslení	12	42,86%
rozdělení na intervaly	5	18,52%

funkce v nulovém bodě 2 a odhalení spojitosti mezi tímto bodem a umístněním absolutní hodnoty do předpisu funkce. Tito studenti chápou absolutní hodnotu dle geometrické definice a uvědomují si změnu chování funkce s absolutní hodnotou v její nulovém bodě.

Řešení studentů se dá rozdělit dle chybovosti, výběru strategie a úspěšnosti řešení následujícím způsobem:

- Dva studenti jenom identifikovali, že řešení bude nějakým způsobem souviset s $y = -x^2$ a dále ve svém řešení nepokračovali.
- Dva studenti se pokusili graf překreslit a nesprávně určili předpis pomocného grafu. Namísto $y = (x - 1)^2$ uvádí předpis $y = (x + 1)^2$ a dále v řešení nepokračovali.
- Tři studenti za pomoci nulových bodů správně určili předpis grafu ze zadání.
- Jeden student určil správně předpis funkce ze zadání vytvořením pomocných grafů na podintervalech definičního oboru a pomocí posunutí grafu $y = x^2$ nalézá jejich předpis, který následně upravuje a aplikuje správně absolutní hodnotu tak, aby předpis odpovídal grafu ze zadání.
- Pět studentů jenom určilo, že v předpisu bude x^2 a dále v řešení nepokračovalo.
- Jeden student využívá nulové body k nalezení pomocné funkce, ale dále s ní nijak nepracuje.

- Jeden student správně určil předpis pomocné funkce, ale ve svém řešení uvádí, že výsledný efekt zlomení funkce v bodě 2 dostane připsaním -1 k nalezenému předpisu pomocné funkce.
- Jeden student si vytvořil pomocný graf a následně sestrojil jeho předpis $y = (x^2 - 1) - 1$, ale dále ve svém řešení nepokračuje.
- Jeden student si vytvořil pomocný graf a následně sestrojil jeho předpis $y = (x^2 - 1) + 1$, ale dále ve svém řešení nepokračuje.
- Jeden student si rozdělil definiční obor a snažil se nalézt předpisy funkcí na těchto intervalech, ale nesprávně použil posunutí funkce.
- Dva studenti našli správně předpis pomocné funkce $y = |x^2 - 1|$.

4.7 Diskuse

Práce žáků a studentů s absolutní hodnotou a hledáním předpisů funkce z grafu je v dostupné literatuře zpracována jenom v malém množství. Cílem této kapitoly je shrnout a konfrontovat práci mých studentů s výsledky domácích a zahraničních výzkumů a tím naplnit cíle mého výzkumu.

1. **Jaké nejčastější druhy chyb studenti dělají při hledáním předpisu funkce z grafu?**

   Chyby studentů bych nejprve rozdělila na dvě části. Na chyby při práci s absolutní hodnotou a chyby při práci s funkcemi.

   Při práci s absolutní hodnotou se výjimečně vyskytly chyby v její grafické interpretaci (absolutní hodnota z nějaké funkce způsobí zobrazení kladné části grafu do záporných hodnot a naopak) a taky chyby v celkové představě o absolutní hodnotě (všechny grafy funkcí s absolutní hodnotou musí mít tvar V). Ve většině případů studenti pracovali s absolutní hodnotou bez chyby.

   Při práci s funkcemi se studenti nejčastěji dopouštěli chyb při sestrojení předpisů lineárních nebo kvadratických funkcí, které vycházely z nesprávného použití posunutí grafu funkce. Na druhou stranu studentům nedělá problémy správně určovat vlastnosti funkcí z grafu nebo určit průsečíky grafu s osou.

2. **Jaké strategie řešení studenti zvolili nejčastěji k hledání předpisu funkce?**

   Nejčastější strategií pro řešení úloh, ve kterém student musí najít předpis funkce z grafu, bylo rozdělení definičního oboru na podmnožiny nebo překreslení grafu funkce tak, aby se studentům hledal předpis funkce snadněji. Toto rozdělení nebo překreslení bylo ovlivněno tvarem grafu. Studenti volili rozdělení na podmnožiny nebo překreslení tak, aby dále pracovali se snadnějším tvarem grafu, jako je například přímka, parabola, sinusoida nebo jiná křivka, se kterou jsou zvyklí pracovat.

V řešeních se často objevovala i snaha o nalezení pomocného grafu, na který by stačilo aplikovat nějaká posunutí (spojené případně s aplikací absolutní hodnoty) tak, aby vznikl požadovaný graf. Tento pomocný graf vznikal překreslením grafu ze zadání (na nějaké části definičního oboru) nebo jako graf na podmnožině (po rozdělení) definičního oboru zadané funkce.

Další strategie, která se objevovala ve velikém množství studentských řešení, bylo určování vlastností grafu funkce. Nejčastější vlastností bylo určování a využití monotonie a průsečíků s osou x (nulové body), nebo určování funkčních hodnot v několika bodech definičního oboru. Předpokládám, že tuto strategii si veliké množství studentů vybralo, protože jsou z hodin matematiky zvyklí na určování vlastností funkce z grafu.

3. **Do jaké míry studenti dokážou své znalosti o absolutní hodnotě a funkcí aplikovat pro ně v netypických úlohách?**

Ze všech řešení, ve kterých byla nějak použita nebo zmíněna absolutní hodnota, plyne, že většina studentů využívá správně grafický význam absolutní hodnoty a použije správně absolutní hodnotu v situaci, ve které chtějí zobrazit část grafu, který je pod osou x, přes osu x do kladných hodnot.

Několik studentů využívá propojení absolutní hodnoty v předpisu funkce s nulovými body grafu funkce a správně s ní pracuje ve svých řešeních.

V případech, ve kterých musí studenti sestrojit algebraický výraz za pomoci absolutní hodnoty, který splňuje dané vlastnosti, je úspěšnost studentů více-méně přímo úměrná obtížnosti sestrojeného výrazu.

Bohužel veliká část studentů své hledání předpisu ukončila v kroku svého řešení, ve kterém nedokázali využít své znalosti o absolutní hodnotě, například k sestrojení předpisu pro celý definiční obor funkce ze zadání, i když měli sestrojené předpisy funkcí na dvou (nebo vícero) podmnožinách definičního oboru.

4. **Chápou studenti absolutní hodnotu spíše dle geometrické definice nebo dle aritmetické definice?**

   Podstatná část studentů, kteří využili při svých řešeních absolutní hodnotu, ji používá jenom na odstranění znaménka mínus u záporných čísel (většinou využívají grafickou interpretaci této vlastnosti – zobrazení grafu pod osou x nad osu x). To nasvědčuje tomu, že tito studenti chápou absolutní hodnotu jako operaci, kterou můžou aplikovat na čísla. Výsledkem je pro ně v případě záporných čísel změna znaménka a v případě čísel kladných žádné změny nenastanou. Toto použití naznačuje pochopení absolutní hodnoty dle aritmetické definice.

   Jenom malá skupina studentů využívá propojení absolutní hodnoty v předpisu funkce s nulovými body grafu funkce a správně s ní pracuje ve svých řešeních. Využití absolutní hodnoty tímto způsobem naznačuje její pochopení dle definice po částech za pomoci funkce.

5. **Jaký vliv na úspěšnost má pořadí úloh během testování?**

   Úspěšnost úloh se dá porovnávat jenom u grafů stejného typu.

   První dvojicí grafů stejného typu jsou první graf z prvního testu a šestý graf z testu druhého. Tyto grafy studenti neznali z hodin matematiky a předpokládá se u nich práce s kvadratickou funkcí.

   Druhou dvojicí grafů jsou zadání, které mají v předpisu funkce vnořené absolutní hodnoty. Je to třetí graf z prvního testu a čtvrtý graf z druhého testu.

   Třetí dvojicí jsou grafy, které mají předpis ve tvaru součtu nebo rozdílu několika absolutních hodnot z lineárního výrazu. jde o čtvrtý graf z prvního testu a třetí graf z testu druhého. U této úlohy šlo o odhalení a využití změny monotonie funkce v nulových bodech výrazů s absolutní hodnotou v jejím předpisu.

   Poslední dvojicí jsou grafy, které mění své chování v bodě nula a po nalezení předpisu funkce pro záporné a nezáporné hodnoty z definičního oboru se problém nalezení předpisu pro celý definiční obor změní na hledání algebraického výrazu s absolutní hodnotou, který splňuje vlastnosti už nalezených předpisů funkce. Jde o druhý graf z prvního testu, který se bez změny objevil i ve druhém testu jako graf pátý. V druhém testu byl ještě jeden graf, který je tohoto druhu a to druhý graf, který se liší v tom, že v něm studenti pracovali jenom s lineárními výrazy, tudíž byl zřejmě pro studenty snadnější. Úspěšnost u tohoto grafu uvádím v tabulce (Tabulka 23) v závorce.

Tabulka 23: Úspěšnost jednotlivých typů zadání úloh

	1. test	**2. test**
parabola	3,57%	14,81%
vnořená absolutní hodnota	21,43%	46,43%
součet nebo rozdíl absolutních hodnot	14,29%	53,57%
rozdílné chováním v nule	10,71%	18,52% (59,26%)

Ve druhém testu, ve kterém byly úlohy seřazeny od nejjednodušších po nejobtížnější, studenti dosahovali vyšší úspěšnosti než v testu prvním, ve kterém byly úlohy seřazené od nejtěžší po nejjednodušší.

Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo zkoumat práci mých studentů ve dvou oblastech a to absolutní hodnota a hledání předpisu funkce z grafu. Během hledání zdrojů k těmto tématům, ale i při přípravě samotného výzkumu, jsem prostudovala veliké množství domácí i zahraniční literatury a obeznámila se s výsledky hned několika výzkumů na dané témata. Na základě těchto informací jsem navrhla a realizovala výzkum na mých studentech. Při zpracování a vyhodnocování studentských řešení jsem našla odpovědi na své výzkumné otázky, které jsem si na začátku výzkumu vytyčila. I když se bohužel tato zjištění nedají obecně generalizovat z důvodu malého počtu respondentů, pro mě a pro mou praxi měly veliký přínos. Dalším přínosem by mohla být rešerše gymnaziálních učebnic v oblastech, kterým jsme se věnovala a souhrn zahraničních výzkumů hlavně z oblasti absolutní hodnoty v teoretické části této diplomové práce.

Seznam obrázků

1 Rozmanitost objektů spojených s absolutní hodnotou 5
2 Absolutní hodnota a maturita 10
3 Graf k úloze č.3 14
4 Maturita - předpis lineární funkce 15
5 Maturita - nepřímá úměrnost I 15
6 Maturita - nepřímá úměrnost II 16
7 Maturita - předpis funkce a graf 17
8 Zadaní testu 22
9 První test - první graf 31
10 Nesprávné pochopení absolutní hodnoty 33
11 Nesprávné použití posunutí grafu funkce 33
12 Ověření správnosti nalezeného předpisu funkce 34
13 Nevyužití vlastností absolutní hodnoty 35
14 Hledání předpisu funkce pomocí posunutí 36
15 První test - druhý graf 40
16 Správné žákovské řešení zadání č. 2 41
17 Nesprávné řešení zadání č. 2 42
18 První test - třetí graf 47
19 Určení předpisu funkce na podmnožinách definičního oboru . . . 48
20 Určení vlastností grafu předpisů na podmnožinách 49
21 Zobecnění pravidla pro hledání předpisu funkce 49
22 Překreslení grafu 50
23 Hledání předpisu funkce 51
24 První test - čtvrtý graf 54
25 Nesprávné určení předpisu lineární funkce 55
26 Nesprávné určení předpisu lineární funkce 56
27 Použití tabulky k nalezení předpisu 57
28 Využití derivace 58
29 Druhý test - první graf 61

30 Rozdělení na podintervaly 62
31 Chybný předpoklad při hledání funkce 63
32 Překreslení grafu 63
33 Druhý test - druhý graf 66
34 Sestrojení správného řešení ze dvou předpisů 68
35 Druhý test - třetí graf 71
36 Tabulka pro absolutní hodnoty 72
37 Využití nulových bodů 73
38 Nalezení předpisu za pomoci rozdělení na intervaly 73
39 Druhý test - čtvrtý graf 77
40 Posunuti grafu $y = |x|$ 78
41 Zkoumání 79
42 Druhý test - pátý graf 82
43 Pokus o aplikaci absolutní hodnoty s využitím nulového bodu . 83
44 Druhý test - šestý graf 85
45 Zdůvodnění použití absolutní hodnoty 86
46 Správné řešení 87
47 Posunutí 88
48 Chybný předpis funkce vytvořený posunutím 88
49 Absence použití vlastností absolutní hodnoty 88

Seznam tabulek

1 Výsledky výzkumu I . . . 24
2 Výsledky výzkumu II . . . 24
3 Úspěšnost - první test první úloha . . . 32
4 Strategie - první test první úloha . . . 37
5 Úspěšnost - první test druhá úloha . . . 40
6 Strategie - první test druhá úloha . . . 44
7 Úspěšnost - první test třetí úloha . . . 48
8 Strategie - první test třetí úloha . . . 51
9 Úspěšnost - první test čtvrtá úloha . . . 55
10 Strategie - první test čtvrtá úloha . . . 57
11 Úspěšnost - druhý test první úloha . . . 62
12 Strategie - druhý test první úloha . . . 64
13 Úspěšnost - druhý test druhá úloha . . . 67
14 Strategie - druhý test druhá úloha . . . 69
15 Úspěšnost - druhý test třetí úloha . . . 72
16 Strategie - druhý test třetí úloha . . . 74
17 Úspěšnost - druhý test čtvrtá úloha . . . 77
18 Strategie - druhý test čtvrtá úloha . . . 80
19 Úspěšnost - druhý test pátá úloha . . . 82
20 Strategie - druhý test pátá úloha . . . 83
21 Úspěšnost - druhý test šestá úloha . . . 85
22 Strategie - druhý test šestá úloha . . . 89
23 Úspěšnost jednotlivých typů zadání úloh . . . 94

Seznam použité literatury a informačních zdrojů

[Almog, 2012] ALMOG, Nava; *Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions.*[online]. [cit. 2017-01-28]. Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/257557274_Absolute_value_inequalities_High_school_students%27_solutions_and_misconceptions`

[Bardini, 2016] BARDINI, Caroline a kol.; *Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function* [online]. Australia, 2014 [cit. 2017-01-10]. Dostupné z: `http://ejournal.unsri.ac.id/index.php/jme/article/view/1495`. Melbourne Graduate School of Education, The University of Melbourne.

[Budínová, 2010] BUDÍNOVÁ, Irena; *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ.* Brno: Masarykova univerzita, 2010. 213 s.

[Bušek, Calda, 2018] BUŠEK, Ivan a Emil CALDA; *Matematika pro gymnázia - základní poznatky z matematiky.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-366-0.

[Cermat, 2017] Maturitní testy a zadání. *Nová maturita - oficiálně: Testy a zadání.*[online]. [cit. 2017-01-28]. Dostupné z: `http://www.novamaturita.cz/testy-a-zadani-1404035305.html`

[Hopešová, Vondrová, Tichá, 2017] HOŠPESOVÁ, Alena, Naďa VONDROVÁ a Marie TICHÁ, ed; *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice,* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007. ISBN 978-80-7394-052-2

[Herman, 2000] HERMAN, Jiří; *Matematika: funkce.* Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-182-5.

[Herman,1997] HERMAN, Jiří; *Matematika: úměrnosti.* Praha: Prometheus, 1997. ISBN 9788071960560.

[Charvát, Zhouf, Boček, 2018] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK; *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 9788071963622.

[Kelesoglu, 2015] KELESOĞLU, Ahmet a kol.; *Failures and Inabilities of High School Students about Quadratic Equations and Functions* [online]. Turkey, 2015 [cit. 2017-01-10]. Dostupné z: `https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1078261.pdf`. Faculty of Education, Uludag University, Turkey.

[MŠMT,2016] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy: Rámcové vzdělávací programy.*[online]. [cit. 2017-02-12]. Dostupné z: `http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy`

[Odvárko, 2018] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Funkce.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus) ISBN 9788071963578.

[Wilhelmi, 2007] WILHELMI, M., *Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value.*[online]. [cit. 2017-01-28]. Dostupné z: `http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf`