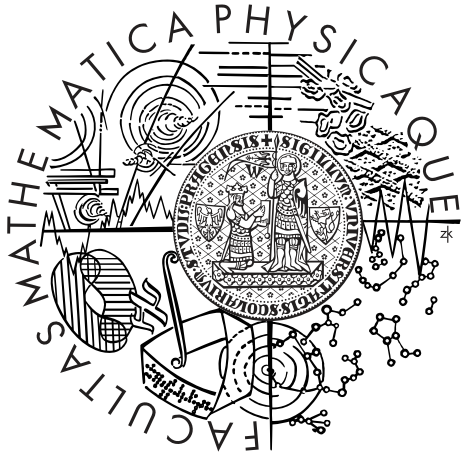
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Lukáš Ledvina

Mapování akrečního disku kvasaru gravitačním mikročočkováním

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: teoretická fyzika

Praha 2014

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucímu práce Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za velmi cenné připomínky a pomoc při přípravě podkladů pro tuto práci. Pak bych chtěl poděkovat rodině za podporu při studiu. V neposlední řadě bych rád poděkoval konzultantovi RNDr. Michalu Dovčiakovi, Ph.D. za navrhnutí a poskytnutí modelů používaných v práci i s jejich vysvětlením, Mgr. Michalovi Bursovi, Ph.D. za poskytnutí numerických dat a také RNDr. Přemyslu Kolorenčovi, Ph.D. za umožnění přístupu na `utf-cluster`, kde bylo provedeno nemálo výpočtů.

Tato práce byla podpořena ze studentského grantu GAUK 621912 a z grantu GAČR P209/10/1318. Přístup k výpočetním prostředkům CERIT-SC pod programem Center CERIT Scieentific Cloud, část operačního programu pro výzkum a vývoj pro inovace, číslo CZ. 1.05/3.2.00/08.0144, umožnil provedení části výpočtů v této práci.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Bc. Lukáš Ledvina

Název práce: Mapování akrečního disku kvasaru gravitačním mikročočkováním

Autor: Bc. Lukáš Ledvina

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Kvasarové mikročočkování je relativně nově zkoumaný jev, který je velmi vhodný pro studium prostorového rozložení emise centrální oblasti akrečního disku. Dnes již známe mnoho čočkovaných kvasarů, u kterých pozorujeme násobné obrazy způsobené ohybem světla v gravitačním poli mezilehlé galaxie. Pokud některý z obrazů přímo prochází hvězdnou populací této galaxie, může být dodatečně mikročočkován jednotlivými hvězdami. Gravitační pole těchto hvězd vytváří pro procházející světlo kaustickou síť. Jak se akreční disk pohybuje vůči této síti, pozorujeme změny jak ve světelné křivce, tak i ve spektru. V první části této práce studujeme statistiku intervalů mezi jednotlivými kaustickými přechody. Ve druhé části používáme plně relativistický model Kerrovy černé díry obklopené tenkým diskem pro studium změn na světelných křivkách během kaustického přechodu v závislosti na parametrech akrečního disku. V poslední kapitole simulujeme změny tvaru spektrální čáry železa během přechodu kaustiky modelované ideálním foldem. Našli jsme charakteristické změny v profilu spektrální čáry a analyticky je popsali. Nakonec jsem zmapovali maximální výšku čočkováním generovaných peaků na této čáře pro akreční disky různých parametrů

Klíčová slova: Gravitační čočky, kvasarové mikročočkování, kaustické sítě, kvasary, akreční disky, rentgenová čára železa.

Title: Quasar accretion disk mapping by gravitational microlensing

Author: Bc. Lukáš Ledvina

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Quasar microlensing is a relatively newly explored phenomenon, which is ideally suited for studying the spatial distribution of emission from the innermost accretion disc. By now we know many macrolensed quasars, in which we can observe multiple images formed by the deflection of light in the gravitational field of an intervening galaxy. In case one of these images passes directly through the stellar population of the galaxy, it can be additionally microlensed by individual stars. The gravitational field of these stars forms a caustic network for light passing by. When a quasar accretion disc crosses behind this network, induced changes can be observed in the light curve as well as in the spectrum. In the first part of this thesis we study the statistics of the time intervals between successive caustic crossings. In the second part we use a fully relativistic Kerr-metric thin-disc model for studying the light curve of a fold-caustic crossing and its dependence on the accretion-disc parameters. In the last part we simulate changes in the X-ray iron-line profile during a fold-caustic crossing. We find characteristic spectral features formed on the line, and derive their analytical description. Finally, we map the maximum strength of microlensing-generated peaks on the spectral line for different accretion-disc parameters.

Keywords: Gravitational lenses, quasar microlensing, caustic networks, quasars, accretion discs, X-ray iron line.

Obsah

1 Úvod **3**
- 1.1 Historie a režimy čočkování . . . 3
- 1.2 Odvození rovnic gravitačního čočkování . . . 6
  - 1.2.1 Čočkovací potenciál . . . 7
- 1.3 Unifikovaný model AGN . . . 8

2 Statistické vlastnosti světelných křivek **9**
- 2.1 Intervaly mezi kaustickými přechody a počty kaustických přechodů na světelné křivce . . . 9
  - 2.1.1 Algoritmus výběru světelných křivek . . . 10
  - 2.1.2 Podmínka pro detekci kaustického přechodu . . . 12
  - 2.1.3 Porovnání způsobů výběru světelných křivek . . . 13
  - 2.1.4 Výpočet korekce pro konečně dlouhou trajektorii . . . 17
  - 2.1.5 Asymptotické chování intervalů mezi kaustickými přechody 18
  - 2.1.6 Počty kaustických přechodů na světelné křivce . . . 18
- 2.2 Výsledky . . . 19
  - 2.2.1 Závislost doby mezi přechody na konvergenci hvězd . . . 19
  - 2.2.2 Závislost počtu kaustických přechodů na konvergenci hvězd 22
  - 2.2.3 Vhodné konvergence hvězd pro pozorování izolovaného kaustického přechodu . . . 22
  - 2.2.4 Závislost statistických vlastností na hmotnostním rozdělení hvězd . . . 23

3 Světelné křivky pro přechod akrečního disku kvasaru kaustikou **26**
- 3.1 Používané modely . . . 26
  - 3.1.1 Model kaustiky . . . 26
  - 3.1.2 Modely akrečního disku . . . 27
- 3.2 Algoritmus výpočtu světelného toku . . . 29
- 3.3 Výsledky . . . 30
  - 3.3.1 Popis geometrie kaustického přechodu . . . 30
  - 3.3.2 Základní vlastnosti světelné křivky . . . 31
  - 3.3.3 Škálování světelné křivky . . . 32
  - 3.3.4 Detaily na světelné křivce . . . 33

4 Mikročočkováním indukované změny v K_α čáře železa **41**
- 4.1 Vyzařování čáry K_α z centrální oblasti disku . . . 41
  - 4.1.1 Pozorování změn ve spektru akrečních disků . . . 41
- 4.2 Numerická simulace čočkování spektrální čáry železa . . . 43
  - 4.2.1 Zavedení souřadnic . . . 43
  - 4.2.2 Model kaustiky . . . 43
  - 4.2.3 Model vyzařování . . . 43
  - 4.2.4 Transformace intenzit a toků . . . 44
  - 4.2.5 Algoritmus výpočtu pozorovaného specifického toku . . . 45
- 4.3 Výsledky numerické simulace časových závislostí spekter . . . 45
  - 4.3.1 Jiné modely vyzařovaní akrečního disku . . . 47

4.4 Analýza vzniku peaků a hran v profilu čáry 47
4.4.1 První model rozvoje lokální struktury 50
4.4.2 Zbylé členy kvadratické aproximace 57
4.4.3 Selhání kvadratické aproximace 59
4.5 Aplikace asymptotického rozvoje peaku na akrečním disku 62
4.5.1 Závislost na inklinaci 62
4.5.2 Závislost na radiálním průběhu specifické intenzity 63
4.5.3 Závislost na spinu 63

5 Závěr **65**

Seznam použité literatury **67**

1. Úvod

1.1 Historie a režimy čočkování

Fenomén gravitačního čočkování předpověděl již Albert Einstein jako jeden z důsledků obecné teorie relativity. Avšak velmi brzy jej zavrhl. Domníval se totiž, že nebude nikdy pozorovatelný, viz [Einstein, 1936], ale o ohybu světla v gravitačním poli již předpověděl dříve [Einstein, 1911].

Každý hmotný objekt, dle výše zmíněné teorie relativity, zakřivuje časoprostor ve svém okolí. Prochází-li světlo okolo takovéhoto objektu, je jeho trajektorie také zakřivena. Prvně bylo toto zakřivení pozorováno při zatmění Slunce v roce 1919, viz [Dyson et al., 1920]. Vzhledem k tomu, že při úplném zatmění Slunce jsou viditelné i hvězdy, mohly být proto změřeny polohy hvězd blízkých Slunci a porovnávány s jejich skutečnými polohami. Použijeme-li pro výpočet odchylky fotonu Newtonovu teorii gravitace, kde budeme místo fotonů uvažovat testovací částice pohybující se rychlostí světla, získáme poloviční odchylku paprsku, než jakou předepisuje obecná relativita. Tímto byla Newtonova teorie prokázaná jako neúplná a Einsteinova obecná relativita byla přijata za správnou.

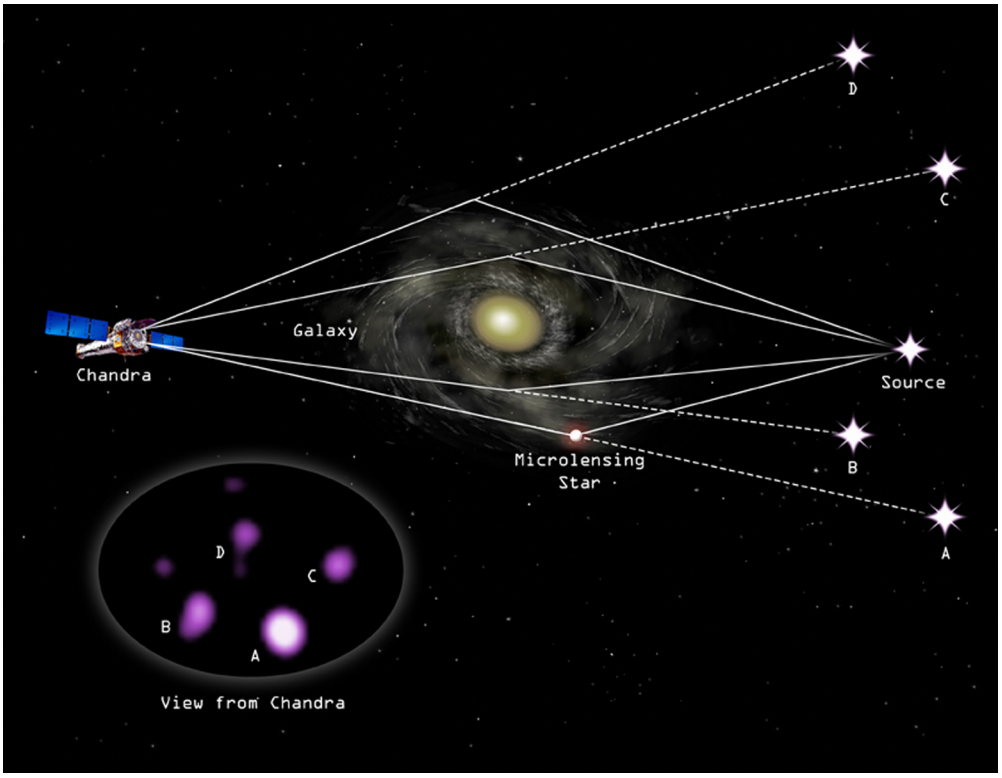
Astrofyzikální objekt označíme za gravitačně čočkovaný, pokud vlivem objektů ležících v okolí spojnice s pozorovatelem se změní jeho zdánlivý tvar nebo světelný tok nebo dokonce pozorujeme více obrazů zdroje. Rozlišujeme několik režimů čočkování:

- *Silné čočkování:* V tomto režimu pozorujeme přímo v dalekohledu několik obrazů tzv. makroobrazů typicky kvasaru, jehož světlo bylo ohnuto vlivem mezilehlé galaxie. Aby mohl vzniknout násobný obraz, musí mít čočkující objekt dostatečnou hustotu.
- *Slabé čočkování:* V tomto režimu není hustota v čočkové rovině dostatečná pro vznik násobných obrazů (gravitační pole je slabší), je pouze deformován tvar primárních obrazů velkého množství galaxií v pozadí. Pomocí tohoto režimu lze například mapovat rozložení temné hmoty ve vesmíru.
- *Mikročočkování:* V tomto režimu jde o čočkování objekty stelární či substelární hmotnosti. Pozorujeme jej na dvou škálách. Jednak pozorujeme-li kvasar přes hvězdné pole galaxie, jednak ohýbá-li se světlo vzdálené hvězdy v naší galaxii na bližší hvězdě či hvězdném systému. Hlavně ale nepozorujeme několik rozlišených obrazů (mají malou separaci), ale pouze variace ve světelném toku. První případ gravitačního mikročočkování byl pozorován v roce 1989, viz [Irwin et al., 1989].

Dále se budeme zabývat výhradně kvasarovým mikročokováním.

Pokud prochází světlo nějakého z makroobrazů kvasaru oblastí galaxie, kde se vyskytují hvězdy, může být tento obraz ještě dodatečně mikročočkován. V tomto režimu nepozorujeme přímo další násobné mikroobrazy zdroje, ale pouze změnu světelného toku způsobenou právě vznikem a zánikem několikanásobných obrazů při pohybu kvasaru vůči hvězdnému poli. Násobné obrazy přitom nepozorujeme, protože jsou mnohem blíže k sobě, než je rozlišovací schopnost kteréhokoli dalekohledu. Kombinaci mikro- a makro-čočkování názorně ilustrujeme na Obr. 1.1.

Nás bude hlavně zajímat zjasnění zdroje. To je poměr mezi pozorovaným

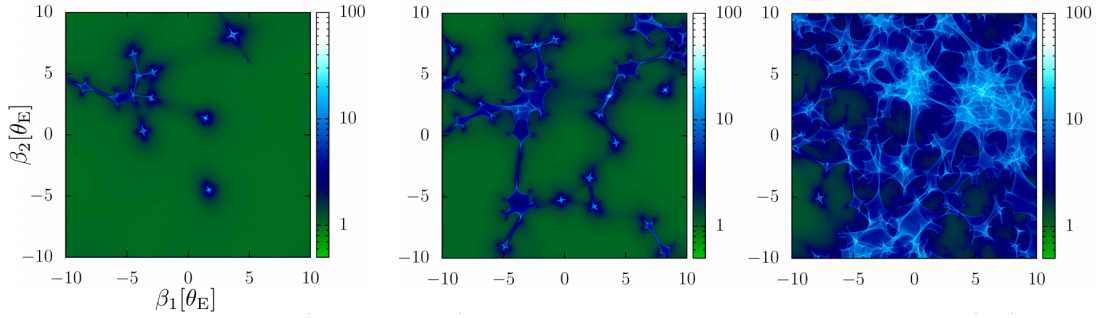


Obr. 1.1: Náčrtek gravitačního mikročočkování. Světlo ze zdroje (*Source*) je ohýbáno vlivem gravitace mezilehlé galaxie. Existuje několik trajektorií s extremální délkou a proto světlo přichází ze čtyř směrů a my pozorujeme čtyři zdánlivé obrazy zdroje (*A, B, C a D*). Světlo v obrazu *A* se ještě dodatečně ohýbá v gravitačním poli jednotlivých hvězd v galaxii, tento obraz je dodatečně mikročočkován. *Převzato z* `http://science.psu.edu`, *6. 4. 2014.*

světelným tokem a světelným tokem, který bychom pozorovali bez přítomnosti čočkující galaxie. Budeme-li měnit polohu zdroje, budeme pozorovat změnu zjasnění. Pokud bychom uvažovali bodový zdroj, existují ve zdrojové rovině křivky, na kterých zjasnění diverguje. Těmto křivkám říkáme kaustiky (název je odvozen od jejich typicky hrotnaté struktury). Příklady map zjasnění jsou na Obr. 1.2. Nachází-li se zdroj na kaustice, jeho obraz pozorujeme na tzv. kritické křivce, která se formálně nachází v rovině galaxie.

Typicky se kvasar vůči hvězdám galaxie pohybuje, a proto pozorujeme s časem se měnící zjasnění – světelnou křivku – tedy řez mapou zjasnění. Dále se také pohybují hvězdy uvnitř galaxie, a proto se s časem mění samotná kaustická struktura. Typické doby pro přechod kvasaru přes tzv. Einsteinův poloměr referenční hvězdy v galaxii jsou od několika týdnů po několik desítek let. Toto jsou velmi dobře měřitelné časy.

První prokázaná gravitační čočka 0957+561A, B byla objevena až v roce 1979, viz [Walsh et al., 1979]. Pro jejich prokázání musela být mimo jiné srovnána spektra jednotlivých obrazů. Pokud však srovnáme změřené poměry jasností jednotlivých makroobrazů s modelem galaxie uvažujícím pouze spojitou hmotu, zjistíme značný nesoulad, v rentgenové části spektra, viz [Mosquera et al., 2013] Kratší vlnové délky odpovídají vyšší teplotě vyzařující oblasti, tedy centrální oblasti kvasaru. Předpokládá se, že tento nesoulad je způsoben mikročočkováním jednot-



Obr. 1.2: Příklady map zjasnění (ve zdrojové rovině) pro klesající vzdálenost (projektovanou do zdrojové roviny) mezi hvězdami v mezilehlé galaxii. Barevná škála odpovídá hodnotě zjasnění zdroje v daném bodě. Einsteinův poloměr θ_E je charakteristickou škálou systému. Jednotlivé panely odpovídají středním mezihvězdným vzdálenostem zleva doprava $5{,}60\,\theta_E$, $3{,}90\,\theta_E$ a $2{,}39\,\theta_E$. Odpovídající konvergence (zavedeme později) jsou $\kappa_s = 0{,}1$, 0,2 a 0,55.

livých makroobrazů způsobeným hvězdami uvnitř galaxie.

Pomocí kvasarového mikročočkování je možné se dozvědět o poměru spojité a kompaktní hmoty v galaxii, velikosti kvasaru, profilu intenzity vyzařování a hmotnosti objektů v mezilehlé galaxii. Tímto tématem se již zabýval např. článek [Eigenbrod et al., 2008]. Byl zde diskutován vliv různých průměrů vyzařovací oblasti odpovídající různým vlnovým délkám, na světelnou křivku mikročočkovaného kvasaru. V tomto článku byl uvažován pouze kruhový zdroj s Gaussovským profilem vyzařování, místo reálnějšího modelu akrečního disku. Podobné analýzy byly provedeny i na dalších zdrojích opět s uniformním či Gaussovským nebo lineárním rozdělením intenzity [Congdon et al., 2007, Mortonson et al., 2005]. Tento model disku neuvažuje změnu energie fotonu při úniku z gravitačního pole ani beaming způsobený rotací disku. Ve výrazně starším článku [Jaroszynski et al., 1992] byly modelovány tvary světelných křivek ale již plně relativistický model uvažován byl, na tento článek navazoval článek [Abolmasov and Shakura, 2012], který se zabýval již diskem uvažujícím všechny relativistické efekty. Byly zde studovány tvary světelných křivek pro různé spiny centrální černé díry a byl proveden fit jak relativistických, tak nerelativistických (zanedbávajících rel. efekty ale majících stejné rozložení specifické intenzity) modelů na experimentální data vč. srovnání obou fitů. Tato pozorování byla provedena pro optickou oblast, ale efekty jsou stejné.

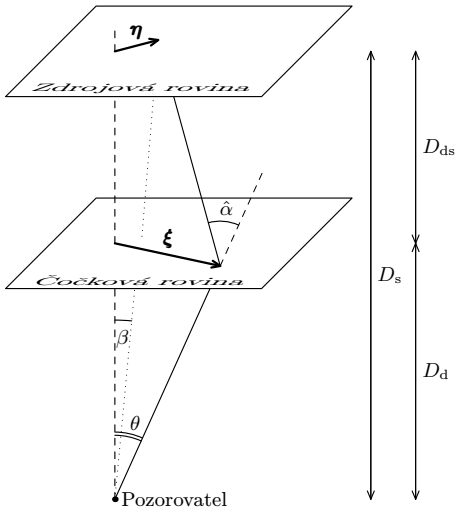
Dále byly pozorovány změny ve tvaru spektrální čáry železa emitované z centra disku [Chartas et al., 2002]. V tomto článku byla také provedena simulace změn tvaru čáry pro případ face-on Schwarzschieldova disku. O čáru železa se zajímáme především proto, že je nejintenzivnější z emitovaných spektrálních čar [Reynolds, 1996]. A také její tvar případně prostorové rozložení její emise závisí silně na parametrech centrální černé díry [Dovčiak et al., 2004]. Ve článcích [Chen et al., 2012, Chartas et al., 2004] byly pozorovány odlišnosti ve tvaru spektrální čáry pro různé makrookrazy, nakonec ve článku [Chartas et al., 2012] byly dokonce pozorovány časové změny ve spektru čočkovaného kvasaru. Má tedy smysl se zabývat simulacemi změn tvaru spektrální čáry pro přechody disku přes kaustickou síť.

1.2 Odvození rovnic gravitačního čočkování

Tato část byla převzata z bakalářské práce [Ledvina, 2011], původně podle [Schneider et al., 2006]. Předpokládáme slabé gravitační pole podél dráhy paprsku, můžeme předpokládat i velmi malou odchylku fotonu od přímé trajektorie. Proto nám stačí první post-newtonovské řešení Einsteinových rovnic. Pro úhel odklonu paprsku, který prošel okolo objektu hmotnosti M, ve vzdálenosti $\boldsymbol{\xi}$ platí

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4GM}{c^2}\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi^2}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, c rychlost světla a $\boldsymbol{\xi}$ je vektor největšího přiblížení paprsku ke hvězdě. Protože tloušťka čočkující galaxie je zanedbatelná vzhledem ke vzdálenostem mezi zdrojem galaxií a pozorovatelem, budeme dále uvažovat aproximaci tenké čočky. Budeme proto uvažovat dvojrozměrné rozdělení hmoty vzniklé integrací hustoty přes tloušťku galaxie. Pro úhlovou odchylku způsobenou spojitou hmotou platí



Obr. 1.3: Náčrtek ohybu paprsků při průchodu čočkou.

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2}\int \mathrm{d}^2\xi' \varrho(\boldsymbol{\xi}')\frac{\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'|^2}\,,$$

kde integrujeme přes průmět čočky a $\varrho(\boldsymbol{\xi})$ značí plošnou hustotu hmoty v konkrétním bodě.

Celá situace je znázorněna na Obr. 1.3. Polohový vektor obrazu v čočkové rovině značíme $\boldsymbol{\xi}$ a polohový vektor zdroje ve zdrojové rovině značíme $\boldsymbol{\eta}$, D_{s} je vzdálenost pozorovaného kvasaru od pozorovatele, D_{d} je vzdálenost galaxie od pozorovatele a D_{ds} je vzdálenost galaxie od kvasaru. Pokud však provádíme pozorování, nemůžeme přímo pozorovat vzdálenosti, ale měříme úhly. Z Obr. 1.3 můžeme odvodit, že platí

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_{\mathrm{s}}}{D_{\mathrm{d}}}\boldsymbol{\xi} - D_{\mathrm{ds}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})\,, \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{\xi}D_{\mathrm{s}}/D_{\mathrm{d}}$ je poloha bodu na zdrojové rovině odpovídající bodu $\boldsymbol{\xi}$ z čočkové roviny (Pozorovatel je vidí ve stejném bodě.). Protože se pohybujeme na kosmologických vzdálenostech, obecně platí $D_{\mathrm{s}} \neq D_{\mathrm{d}} + D_{\mathrm{ds}}$, protože tyto vzdálenosti jsou úhlové, tj. určujeme je tak, že podělíme reálnou vzdálenost pozorovaných objektů jejich úhlovou vzdáleností. Převodní vztahy mezi např. rudým posuvem a těmito úhlovými vzdálenostmi závisí na použitém kosmologickém modelu, viz např. [Schneider et al., 1992].

Označíme-li příslušné úhly

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{D_{\mathrm{s}}}\,, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{D_{\mathrm{d}}}\,, \quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(D_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\theta})\,,$$

rovnice (1.1) přejde do tvaru

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})\,. \tag{1.2}$$

Nyní je výhodné zavést tzv. kritickou hustotu ϱ_{cr} a dále hustotu udávat v násobcích kritické hustoty, tj. $\varrho(D_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\theta}) = \varrho_{\mathrm{cr}}\kappa(\boldsymbol{\theta})$. Platí

$$\varrho_{\mathrm{cr}} = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_{\mathrm{s}}}{D_{\mathrm{ds}}D_{\mathrm{d}}}\,.$$

Rovnice pro úhlovou odchylku (1.1) při použití(1.2) přejde do tvaru

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\theta'\kappa(\boldsymbol{\theta}')\frac{\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'|^2}\,. \tag{1.3}$$

Funkce $\kappa(\boldsymbol{\theta})$ se nazývá konvergence. Dále ji budeme používat jednak pro hustotu spojité hmoty κ_{c}, jednak pro střední hustotu hvězd κ_{s}, někdy budeme využívat též celkovou hustotu hmoty $\kappa = \kappa_{\mathrm{c}} + \kappa_{\mathrm{s}}$.

1.2.1 Čočkovací potenciál

Protože odchylka paprsku $\boldsymbol{\alpha}$ je pro jeden objekt centrální a axiálně symetrická, její rotace je rovna nule, dále je navíc aditivní. Můžeme proto nalézt potenciál ψ, jehož gradientem je právě $\boldsymbol{\alpha}$. Rovnici (1.3) lze přepsat do tvaru

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\theta'\kappa(\boldsymbol{\theta}')\ln|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'|\,,\quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \nabla\psi(\boldsymbol{\theta})$$

Platí $\nabla^2\ln|\boldsymbol{x}| = 2\pi\delta(\boldsymbol{x})$, kde $\delta(\boldsymbol{x})$ je dvojrozměrná δ-funkce. Čočkovací potenciál je proto řešením rovnice $\nabla^2\psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa(\boldsymbol{\theta})$

Označíme-li (používáme standardní značení parciálních derivací)

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi_{,11}+\psi_{,22})\,,\quad \gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{,11}-\psi_{,22})\,,\quad \gamma_2 = \psi_{,12}\,,\quad \gamma = \sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,,$$

můžeme rovnici (1.3) přepsat ve vhodně natočené soustavě do tvaru

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1-\kappa_{\mathrm{c}}-\gamma & 0 \\ 0 & 1-\kappa_{\mathrm{c}}+\gamma \end{pmatrix}\boldsymbol{\theta} - \sum_i \theta_{\mathrm{E}_i}^2\frac{\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_i}{|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_i|^2}$$

Parametry konvergence spojité hmoty κ_{c} a shear γ souvisí s geometrií gravitačního pole galaxie. Suma odpovídá vlivu gravitace jednotlivých hvězd vyskytujících se okolo pozorovaného makroobrazu. Jejich střední konvergenci (hustotu podělenou kritickou hustotou) budeme značit κ_{s}. Ve vztahu výše jsme označili θ_{E_i} Einsteinův poloměr dané hvězdy, pro který platí

$$\theta_{\mathrm{E}_i} = \sqrt{\frac{4\pi G M_i}{c^2}\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{d}}D_{\mathrm{s}}}}$$

kde M_i je její hmotnost.

1.3 Unifikovaný model AGN

Všechna aktivní galaktická jádra jsou popsána jedním modelem a podle inklinace se mění jejich vlastnosti. V centru je černá díra (může produkovat jet) obklopená akrečním diskem na který navazuje prachový torus. V okolí se nacházejí ještě oblaka plynu. Dále se budeme zabývat převážně akrečním diskem a vlivem černé díry na jeho vlastnosti. Okolní prostředí (torus,...) nebudeme uvažovat, protože emisi v rentgenové části spektra neovlivňují.

V této práci se budeme ve druhé kapitole zabývat statistikou kaustických přechodů na světelných křivkách. Ve třetí kapitole budeme studovat světelné křivky pro přechod plně relativistického modelu disku přes ideální fold a jejich závislostí na parametrech disku. V poslední, čtvrté kapitole budeme zkoumat změny ve spektrální čáře železa emitované z centrální oblasti disku při přechodu ideálního foldu. Navazujeme na výsledky z bakalářské práce [Ledvina, 2011].

2. Statistické vlastnosti světelných křivek

2.1 Intervaly mezi kaustickými přechody a počty kaustických přechodů na světelné křivce

V této kapitole budeme zkoumat, jednak jaká je četnost kaustických přechodů na světelné křivce dané délky a dále také jaké je rozdělení počtu kaustických přechodů pro světelné křivky dané délky. Nejdříve popíšeme postup výběru světelné křivky z mapy zjasnění, budeme se zabývat vlivem periodičnosti mapy na výsledky, dále uvedeme výsledky pro různé konvergence hvězd, nakonec se podíváme, jak mění statistiky jiné poměry hmotnostního zastoupení hvězd v čočkující galaxii.

V této části jsme se omezili na případ, kdy má čočkující galaxie lokálně nulový shear. Případ nenulového shearu je jistě zajímavé studovat, ale v této práci jej přeskočíme, protože shear vnáší do problému neizotropní chování, a proto bychom museli studovat statistické vlastnosti pro každý směr odděleně, což je výpočetně velmi náročné. Musíme totiž simulovat velké množství map zjasnění, abychom získali průkaznou statistiku.

Mapy zjasnění pro dané parametry čočkující galaxie, kterým je nyní již pouze konvergence hvězd (konvergenci spojité hmoty lze škálováním odtransformovat), byly simulovány programem vyvinutým v rámci bakalářské práce [Ledvina, 2011].

V literatuře [Schneider, 1992] byly zkoumány především pravděpodobnosti pozorování daného zjasnění zdroje (parametry jsou konvergence spojité a diskrétní hmoty a shear). Tato statistika je velmi důležitá hlavně z observačního hlediska, zajímáme se to, s jakou pravděpodobností (jak často) budeme moci pozorovat událost s daným zjasněním. Dále je důležitá pro určení vlivu mikročočkování na zjasnění makročočkovaného obrazu i v případě, že je zdroj velký a nemůžeme pozorovat mikročočkovací variabilitu. Dále ve článku [Paczynski, 1986] byla studována pravděpodobnost kaustického přechodu, což se částečně shoduje s naší prací ale pro případ galaktického hala, kde jsou hvězdy daleko od sebe a mají tedy je konvergenci velmi malou. Nakonec byly ze statistiky pozorovaných světelných křivek ve článku [Dai et al., 2010] diskutovány pravděpodobnosti různých parametrů (shear a konvergence) čočkující galaxie. Ve článku [Wyithe et al., 2000], kde je studována pravděpodobnost kaustického přechodu pro systém Q2237+0305. V simulacích též používají uniformní rozdělení hmotností hvězd v galaxii, ale používají jinými metodami určené konvergenci a shear. rozlišují případy, kdy zdroj přechází pouze přes jednu kaustiku a kdy přechází přes dvě kaustiky najednou a pak rozlišují případy dotyku s foldem z vnitřní či vnější strany, viz také [Witt et al., 1993].

2.1.1 Algoritmus výběru světelných křivek

Způsob určení světelné křivky z mapy

Pro jednoduchost budeme uvažovat světelné křivky pouze pro rovnoměrný přímočarý pohyb kvasaru vůči neměnné mapě zjasnění lokálního hvězdného pole čočkující galaxie. Kromě relativního zrychlení kvasaru vůči galaxii tak zanedbáváme i změny mapy způsobené pohyby jednotlivých hvězd.

Nejdříve si zvolíme na mapě zjasnění počáteční i koncový bod světelné křivky, tím, kde a jak je volit se budou zabývat další podkapitoly. Dále si zvolíme rozlišení světelné křivky, tj. vzdálenost jednotlivých bodů, zde volíme stejnou vzdálenost jako je vzdálenost pixelů na mapě.

Máme-li již zvolen počáteční i koncový bod a rozlišení, známe též souřadnice všech uvažovaných bodů na světelné křivce. Do světelné křivky zahrneme hodnotu zjasnění pixelu na mapě v němž se daný bod nachází. Tato volba umožňuje, že jeden pixel mapy bude vybrán maximálně dvakrát za sebou, což ale nevadí.

Nebyly použity žádné interpolační algoritmy, protože mapa zjasnění je nespojitá a divergentní, proto standardní interpolační algoritmy nedávají správné výsledky. Museli bychom nejprve rozhodnout, zda se nacházíme u kaustiky či nikoli a podle toho volit interpolační algoritmus, což ale neřeší problém, protože právě polohy kaustik chceme detekovat.

Neperiodická okrajová podmínka

Z nasimulovaných map zjasnění byly vybírány světelné křivky pro další zpracování. Délka křivek byla většinou rovna polovině rozměru mapy. Jeden z konců světelné křivky byl zvolen náhodně uvnitř mapy, druhý konec byl volen opět náhodně na průniku kružnice o poloměru rovnému délce křivky a mapy. Na Obr. 2.1 je vynesena relativní pravděpodobnost vzorkování konkrétního pixelu pro mapu o rozměrech $1\,024 \times 1\,024\,\mathrm{pix}^2$, za referenci považujeme vzorkování, kde by každý pixel byl vzorkován se stejnou pravděpodobností. Vidíme, že daný postup získání světelných křivek preferuje centrální oblast mapy oproti okrajům, ale ne nijak zásadně, je zde pouze dvakrát větší pravděpodobnost výběru pixelu než pro uniformní výběr.

		F		
	D	E		
A	B	C		

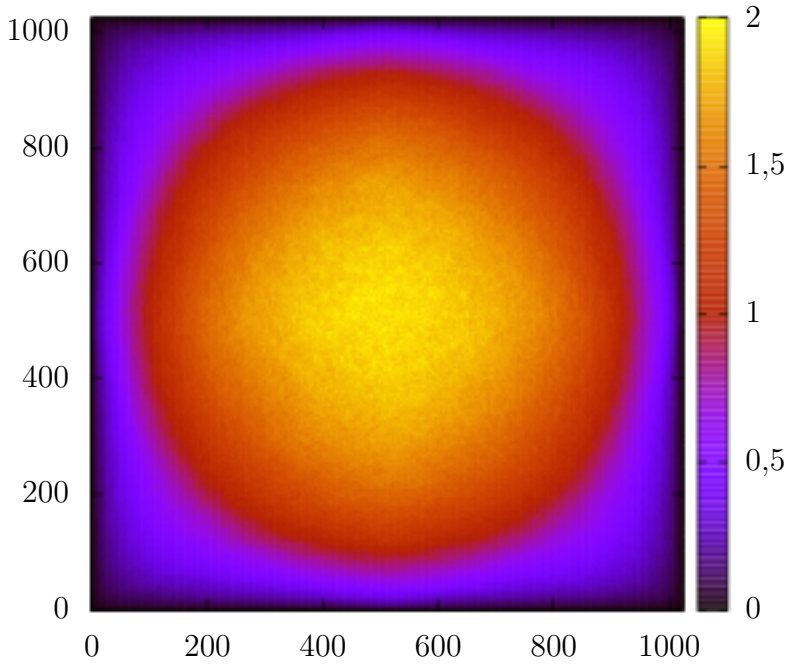
Obr. 2.2: Označení oblastí pro studium směrů křivek.

Bylo též studováno, jakými směry jsou vedeny světelné křivky v jednotlivých oblastech. Mapa zjasnění byla rozdělena na celkem 25 podoblastí a na každé z nich jsme udělali statistiku toho, jakým směrem jsou touto oblastí vedeny světelné křivky. Na Obr. 2.2 je označeno šest oblastí, ostatní nemá vzhledem k symetrii význam zkoumat. Na grafu na Obr. 2.3 jsou uvedeny histogramy pro směry světelných křivek procházejících danou oblastí. Započítán je každý bod na světelné křivce.

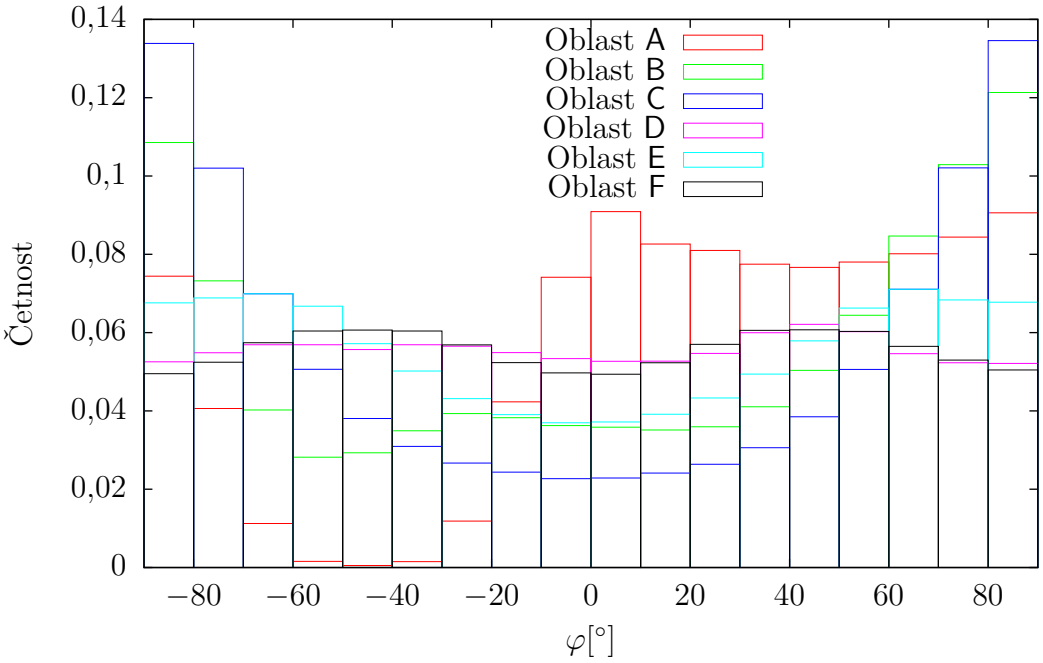
Výsledky jsou očekávatelné, protože pro oblast F je rozdělení směrů téměř rovnoměrné, drobné odchylky jsou způsobeny tím, že ve středech stran oblasti F je vzdálenost k okraji mapy menší než délka vybírané světelné křivky a proto jsou směry $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi/2$ diskriminované. Dále v oblasti A může světelná křivka

vycházet téměř ve směru pouze jednoho kvadrantu. Pro oblast C je diskriminován vertikální směr kvůli přítomnosti spodního okraje.

Protože jsou některé směry diskriminovány, není tento výběr vhodný pro studium vlivu shearu na statistické vlastnosti světelných křivek. Pokud bychom jej použili, museli bychom anizotropii vývěru zohlednit



Obr. 2.1: Relativní pravděpodobnost vzorkování konkrétního pixelu pro mapu o rozměrech $1\,024 \times 1\,024\,\mathrm{pix}^2$.



Obr. 2.3: Pravděpodobnost vzorkování daného směru v různých oblastech mapy, φ je úhel měřený od svislice ve směru hodinových ručiček.

Periodická okrajová podmínka

Problém okraje mapy můžeme též vyřešit tak, že mapu sbalíme do tvaru toru (tedy budeme uvažovat periodickou okrajovou podmínku), tím pádem si budou na mapě všechny body rovny a také všechny směry rovny. Zvolíme jakýkoli bod a jakýkoli směr a tímto máme jednoznačně definovanou světelnou křivku. Počátky budou rozděleny rovnoměrně po mapě a směry budou též uniformě rozděleny.

Jasnou výhodou je větší statistická výtěžnost mapy a také vhodnost daného postupu pro studium map s nenulovým shearem. Jediným problémem může být navázání na okraji, kde vznikne nespojitost mapy zjasnění, dále také korelovanost kaustické struktury pro příliš malé mapy, viz následující diskuse.

2.1.2 Podmínka pro detekci kaustického přechodu

Máme-li již vybrané světelné křivky, potřebujeme na nich určit okamžiky, kdy dochází ke kaustickým přechodům, abychom mohli následně studovat jejich statistické vlastnosti.

Definujeme proto, jak budeme z dat rozhodovat, že došlo ke kaustickému přechodu. Abychom řekli, že daný bod X na světelné křivce leží na kaustice, požadujeme, aby

- byl lokálním maximem,
- na každé straně se vyskytovaly body $\mathsf{Y}_{\mathrm{L,P}}$ se zjasněním menším než práh[1], tj. $A(\mathsf{Y}_{\mathrm{L,P}}) < A(\mathsf{X})$
- a body $\mathsf{Y}_{\mathrm{L,P}}$ byly blíže k X než jiné lokální maximum.

Ve druhé podmínce definice prahu souvisí s pozorováním daného jevu, chceme,

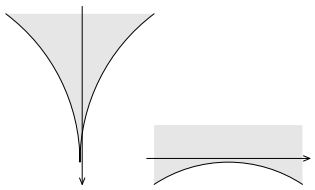
[1]Za prahovou hodnotu bylo zvoleno zjasnění $A_{\mathrm{práh}} = 0{,}9A_{\max} - 0{,}5$.

aby byl dostatečně odlišitelný od pozadí. Konstantní faktor diskriminuje slabé přechody, které by mohli pak být způsobeny pouze zašuměním světelné křivky. [2] Třetí podmínka zaručuje eliminaci detekce falešných maxim na náběžných či sestupných hranách světelných křivek.

Výše uvedený postup detekuje správně většinu kaustických přechodů. Detekuje též události, kdy světelná křivka přechází osu cuspu, ale nikoli přímo cusp, v tomto případě nejde přímo o přechod kaustiky, ale pozorujeme zvýšení světelného toku. I z takovéto události lze získat jistou informaci o přecházejícím zdroji, což je náš cíl.

Nejprvě jsme ručně procházeli všechny světelné křivky a našli charakteristiky problematických situací diskutovaných níže. Zjištěné problémy se týkaly pouze krátkkých křivek. Následně jsme ze všech světelných křivek vybrali takové, které obsahovaly krátké intervaly a ty procházeli znovu. Za chybné jsme nepovažovali ty detekce, které vytvářely intervaly kratší než ořez histogramu. Z tohoto postupu jsme odhadli chybovost algoritmu v určování poloh kaustických přechodů na řádově 10^{-3}.

Větší problém nastává, pokud světelná křivka prochází paralelně s osou cuspu v malé vzdálenosti, viz Obr. 2.4 vlevo. V tomto případě body na světelné křivce díky pixelovému charakteru mapy oscilují mezi oblastmi s malým a velkým zjasněním a tím pádem se na světelné křivce objevuje velké množství minim a maxim, jež mají větší hloubku než $A_{\text{práh}}$ a proto by tímto algoritmem byly falešně detekované. Konkrétní kroky pro odstranění tohoto nešvaru jsou uvedeny dále. Dalším problémem je, pokud světelná křivka prochází paralelně s foldem uvnitř kaustiky, protože zde opět dochází k oscilacím, viz též Obr. 2.4 vpravo.



Obr. 2.4: Problematické světelné křivky. Vyšší hodnota zjasnění je označena šedou barvou.

Zjistili jsme, že vzdálenost takto falešně detekovaných kaustických přechodů je malá, téměř vždy do 3 pix, z větší části se nám je povedlo algoritmicky eliminovat, ale prvních několik hodnot histogramu (právě do vzdálenosti několika pixelů) je tímto problémem ovlivněno. Nepodařilo se nám najít obecný algoritmus řešící všechny problematické situace. Proto intervaly mezi přechody kratší než 3 pix do histogramů nevynášíme.

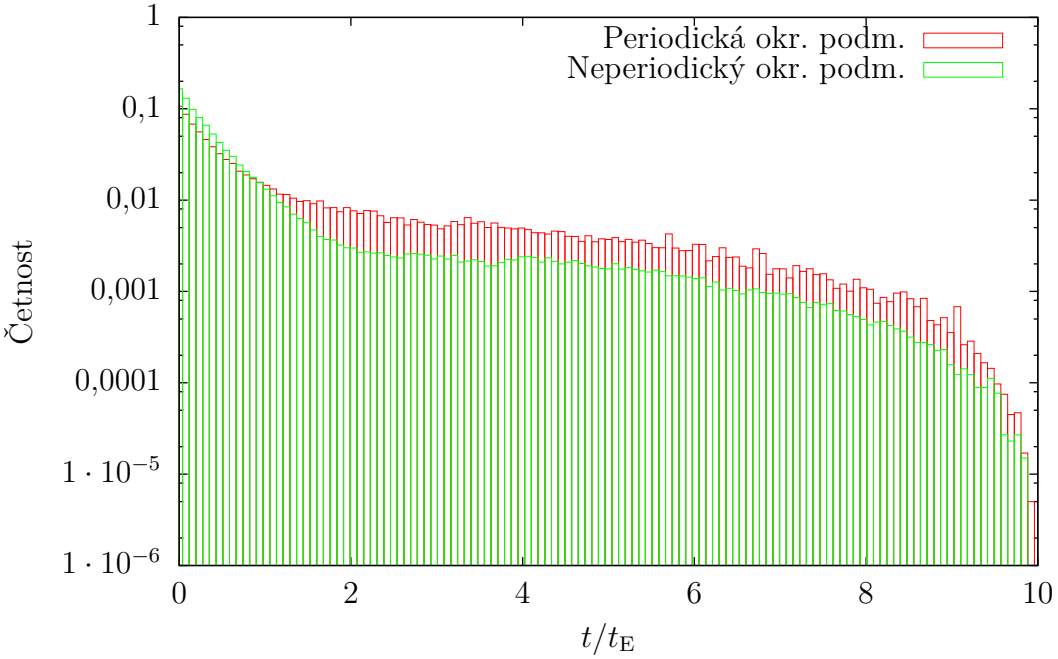
2.1.3 Porovnání způsobů výběru světelných křivek

V této části srovnáme výše uvedené způsoby výběru světelných křivek. Srovnání provedeme vzájemným porovnáváním histogramů získaných z různě velikých map zjasnění s periodickým či neperiodickým okrajem. Všechny následující histogramy byly normalizovány celkovým počtem detekovaných intervalů, pokud nezmíníme jinak.

Nasimulovali jsme 125 čtvercových map s rozlišením 4 096 pixelů v každém rozměru, délka hrany mapy byla $20\,\theta_{\text{E}}$. Konvergence byla $\kappa_{\text{S}} = 0{,}1$. Z každé mapy jsme vybrali celkem 4 096 světelných křivek. Na Obr. 2.5 jsou uvedeny pro srovnání histogramy vytvořené ze světelných křivek délky $10\,\theta_{\text{E}}$ vybraných jednak

[2] Světelná křivka je méně přesná v oblastech malého zjasnění, protože je určována Monte-Carlo integrací.

způsobem uvedeným v začátku podkapitoly, jednak pro periodický okraj. Je vidět, že se značně liší, tj. histogram závisí na volbě okrajové podmínky. To, že histogram závisí na použité okrajové podmínce, resp. způsobu výběru světelné křivky, není v pořádku. Znamená to, že mapa má jiné vlastnosti na okraji a v centru mapy nebo je problém již se samotným způsobem výběru. Ověříme to tedy na větší simulované mapě. A rozhodneme, který ze způsobu výběru křivek je správný.

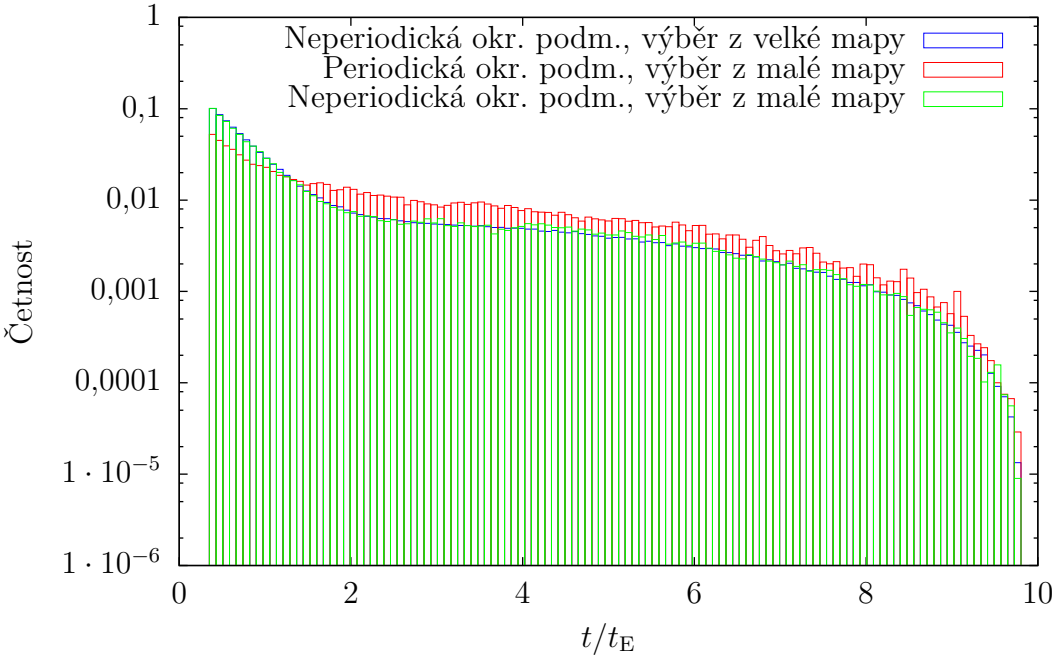


Obr. 2.5: Intervaly mezi jednotlivými kaustickými přechody pro světelné křivky délky $10\theta_{\mathrm{E}}$. Porovnání různých způsobů výběru sv. křivek pro mapy s rozlišením $4\,096 \times 4\,096\,\mathrm{pix}^2$ o délce hrany $20\,\theta_{\mathrm{E}}$ a velikostí pixelu $4{,}8 \cdot 10^{-3}\,\theta_{\mathrm{E}}$. Šířka binu histogramu je 16 pix, což odpovídá $0{,}078\theta_{\mathrm{E}}$.

Na Obr. 2.6 jsou též uvedeny histogramy rozdělení intervalů kaustických přechodů, ale získané z map s většími pixely. Důvodem je, abychom mohli studovat větší mapu (více Einsteinových poloměrů), ale nemuseli jsme zvyšovat rozlišení, pro které je limitujícím faktorem množství paměti v počítači. Srovnáváme výběr křivek délky $10\,\theta_{\mathrm{E}}$ z malých map (o rozlišení $256 \times 256\,\mathrm{pix}^2$ a délce hrany $20\,\theta_{\mathrm{E}}$) s periodickou a neperiodickou okrajovou podmínkou s výběrem z velkých map s neperiodickou podmínkou. Velké mapy měly rozlišení $16\,384 \times 16\,384\,\mathrm{pix}^2$ a délku hrany $1\,280\,\theta_{\mathrm{E}}$, tj. velikost pixelu $78 \cdot 10^{-3}\,\theta_{\mathrm{E}}$. Ze 125 malých nezávislých map bylo vybráno po 4 096 světelných křivkách pro periodickou a neperiodickou okrajovou podmínku. Ze čtyř velkých map bylo vybráno po 2^{20} světelných křivkách z každé. U velké mapy by nemělo záviset na způsobu výběru světelných křivek, protože jsou výrazně kratší než hrana mapy, takže okraj by měl mít zanedbatelný vliv. Jasně vidíme, že s histogramem z velké mapy (modrý) se shoduje histogram odpovídající výběru s neperiodickým okrajem z malé mapy (zeleně), ale neshoduje se s histogramem malé mapy a periodickou okrajovou podmínkou (červeně). Z tohoto usuzujeme, že pro malé mapy je výběr světelných křivek za použití periodické okrajové podmínky nesprávný. Srovnáním histogramů z Obr. 2.5 a Obr. 2.6 zjistíme, že snížení rozlišení nemělo na histogramy zásadní vliv. Pozorujeme pou-

ze vertikální posun způsobený absencí velmi krátkých intervalů, který pozmění normalizaci delších intervalů.

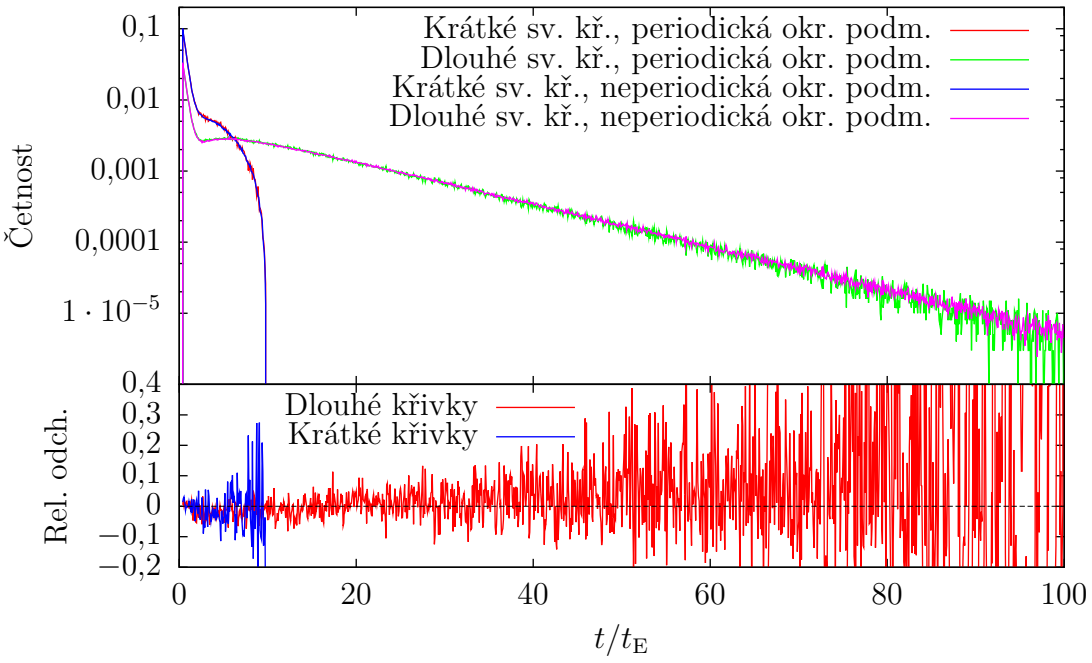
Poznamenejme, že počet křivek nutných pro vytvoření kvalitního histogramu závisí na konvergenci. Pro malé konvergence nemusí ani velký statistický soubor stačit na sběr kvalitní statistiky. Proto, pokud bychom použili málo malých map, tak bychom nedosáhli shody s histogramem z velké mapy.



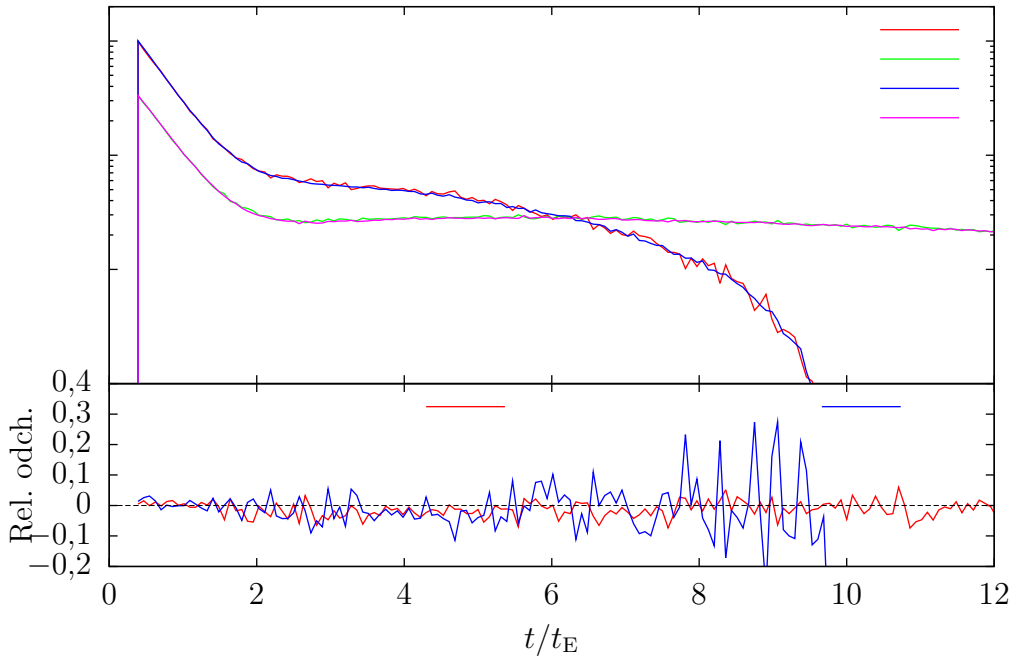
Obr. 2.6: Porovnání různých okrajových podmínek pro výběr sv. křivek délky $10\,\theta_{\mathrm{E}}$. Mapy měly velikost pixelu $0{,}078\,\theta_{\mathrm{E}}$. Porovnáváme světelné křivky z malých map s periodickou/neperiodickou okrajovou podmínkou se světelnými křivkami z velké mapy. Šířka binu histogramu je 1 pix, což odpovídá $78 \cdot 10^{-3}\,\theta_{\mathrm{E}}$.

Nyní ověříme výše zmíněný předpoklad, že pro velkou mapu a krátké křivky nezávisí na okrajové podmínce, dále pak ověříme, zdali závisí na okrajové podmínce pro velké mapy a dlouhé křivky. V dalším textu budeme kvůli přehlednosti uvádět místo histogramů pouze křivky spojující jejich vrcholy, ale vzhledem k původu jim budeme dále říkat histogramy.

Na Obr. 2.7 a Obr. 2.8 jsou uvedeny histogramy pro výběr krátkých ($10\,\theta_{\mathrm{E}}$) i dlouhých ($640\,\theta_{\mathrm{E}}$) světelných křivek z velkých map (o rozlišení $16\,384 \times 16\,384\,\mathrm{pix}^2$ délce hrany $1\,280\,\theta_{\mathrm{E}}$) s periodickou i neperiodickou okrajovou podmínkou. Krátkých křivek jsme z map uvažovali 262 144 a dlouhých jsme uvažovali 4 096, což odpovídá stejné celkové délce. V dolní části je uveden relativní rozdíl mezi výběrem s periodickou a neperiodickou okrajovou podmínkou. Vidíme, že odchylky jsou malé a mají charakter šumu, který je způsoben statistickou povahou dat. Není zde velký systematický rozdíl. Z toho plyne, že pro dostatečně veliké mapy nemá okrajová podmínka vliv na statistiku, pro malé (jak jsme ukázali výše) je vliv značný.



Obr. 2.7: Histogramy dob mezi kaustickými přechody z velkých map s periodickým/neperiodickým okrajem pro, dlouhé/krátké křivky.



Obr. 2.8: Histogramy bod mezi kaustickými přechody z velkých map s periodickým/neperiodickým okrajem pro, dlouhé/krátké křivky (detail Obr. 2.7).

2.1.4 Výpočet korekce pro konečně dlouhou trajektorii

Protože studujeme pouze konečně dlouhou světelnou křivku, ale zajímají nás ideálně histogramy pro „nekonečně“ dlouhou světelnou křivku, odvodíme si dále, jak se liší pravděpodobnost detekce intervalu dané délky na konečně a nekonečně dlouhé světelné křivce. Je jisté, že nejsme schopni detekovat interval delší než je studovaná světelná křivka, ale i kratší intervaly budeme detekovat s menší pravděpodobností, protože mohou mít jeden z konců mimo světelnou křivku.

V tomto odstavci budeme všechny délky měřit v pixelech, nebude-li uvedeno jinak. Označme L délku studované světelné křivky, N délku intervalu mezi kaustickými přechody, p_N pravděpodobnost jevu: „libovolně zvolený bod se nachází uvnitř intervalu délky N“ a $q_N(L)$ pravděpodobnost jevu: „libovolně zvolený bod na světelné křivce délky L se nachází uvnitř *detekovaného* intervalu délky N“.

Nebudeme uvažovat „časové“ korelace mezi intervaly jedné délky. A také budeme uvažovat, že $p_N \ll 1$. pravděpodobnost, že bude interval délky N začínat v konkrétním pixelu je $P_N = p_N/N$. Aby došlo k detekci na světelné křivce délky L, musí studovaný interval začínat někde v množině bodů délky $L - N$, jinak by koncový bod byl již mimo studovanou světelnou křivku a proto by nedošlo k detekci. Pravděpodobnost detekce je tedy

$$Q_N(L) = P_N(L - N) = p_N \left(\frac{L}{N} - 1 \right) ,$$

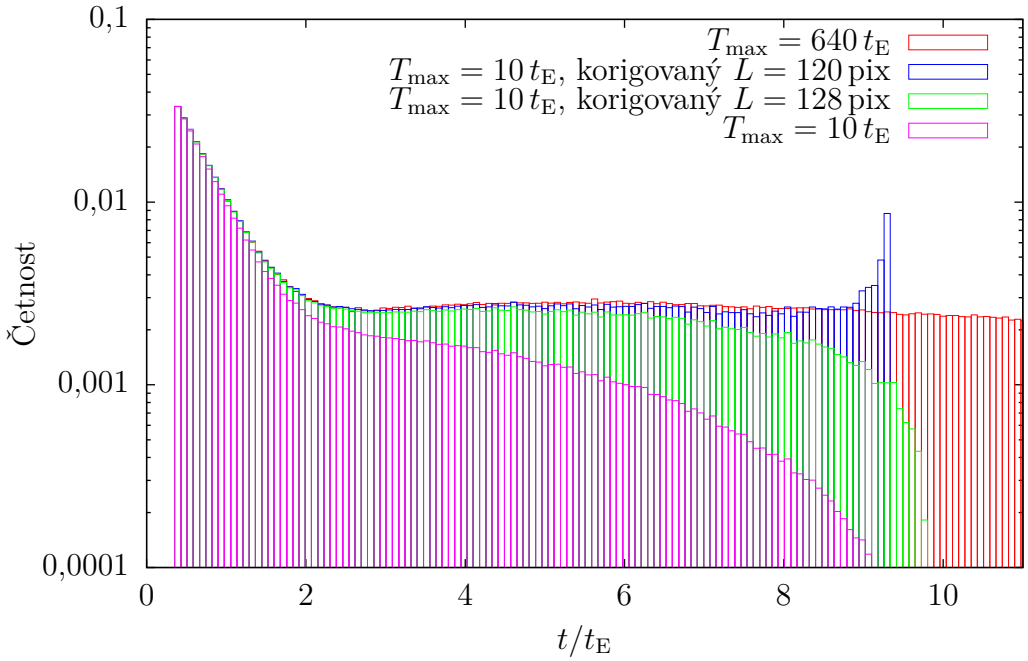
zde jsme využili právě aproximace $p_N \ll 1$. Ale pravděpodobnost jevu: „libovolně zvolený bod na světelné křivce délky L se nachází uvnitř *detekovaného* intervalu délky N“ je

$$q_N(L) = Q_N(L) \cdot \frac{N}{L} = p_N \left(1 - \frac{N}{L} \right) ,$$

faktor N/L vystihuje zaplnění světelné křivky intervalem délky N. Z tohoto vztahu jednoduchou inverzí dostaneme vztah pro p_N, tj. hledanou veličinu

$$p_N = \frac{q_N(L)}{1 - N/L} . \tag{2.1}$$

Pro ověření funkčnosti této korekce bylo napočítáno 10 map o délce hrany $1\,280\,\theta_\mathrm{E}$ a rozlišení $16\,384 \times 16\,384\,\mathrm{pix}^2$ a z nich byly jednak uváženy křivky délky $640\,\theta_\mathrm{E}$, jednak $10\,\theta_\mathrm{E}$ na kterých byla provedena korekce (2.1). Ačkoli výše uvedený postup funguje pouze pro $N < L$, protože delší intervaly nejsme schopni detekovat, dává pro $N < L$ dává dobrou korekci, viz Obr. 2.9, histogramy byly normalizovány před použitím korekce. Jak vidíme, nejde o úplně dokonalou korekci (nejspíše způsobenou korelovaností délek intervalů), ale histogram je po korekci výrazně přesnější (oproti referenčnímu histogramu). Protože je mapa relativně řídká (oddělené ostrůvky kaustik), tak můžeme říci, že po krátkém intervalu je pravděpodobné, že bude následovat dlouhý a naopak. Druhým důvodem pro neúplně dokonalou korekci je fakt, že nejsme algoritmicky schopni detekovat kaustický přechod na počátku či konci křivky. Efektivní délka světelné křivky je menší než její skutečná délka. Na tomto případě se ukazuje, že ukazuje, že nejlepších korekčních výsledků dosáhneme pro efektivní délku křivky 120 pix (odpovídá $9{,}38\,\theta_\mathrm{E}$) místo 128 pix (odpovídá $10\,\theta_\mathrm{E}$).



Obr. 2.9: Ukázka korekce histogramu. Srovnáváme zde nekorigovaný histogram (růžový) s histogramem korigovaným dle (2.1) (zelený) a korigovaným pro efektivní délku křivky (modrý) vůči referenci (červený). Uvedené časy T_max odpovídají délce světelné křivky. Délka $L = 120\,\mathrm{pix}$ odpovídá délce křivky $9{,}38\,\theta_\mathrm{E}$, $L = 128\,\mathrm{pix}$ odpovídá křivce délky $10\,\theta_\mathrm{E}$. Velikost pixelu je $7{,}8 \cdot 10^{-2}\,\theta_\mathrm{E}$.

2.1.5 Asymptotické chování intervalů mezi kaustickými přechody

Zde zkusíme odhadnout, jak by se měl histogram intervalů kaustických přechodů chovat pro dlouhé intervaly. Pokud v kaustické síti předpokládáme pouze uspořádání na malou vzdálenost, můžeme pro asymptotiku délek intervalů předpokládat toto. Pokud máme v každém bodě pravděpodobnost p, že narazíme na kaustiku (tedy nepředpokládáme žádnou korelační funkci mezi kaustikami, což, s ohledem na výše publikované výsledky, není v pořádku na krátkých vzdálenostech, ale ověříme platnost ještě na větších vzdálenostech), pak pravděpodobnost $p(N)$, že bude existovat interval délky N je

$$p(N) = p \cdot (1-p)^N \,. \tag{2.2}$$

Požadujeme, abychom N krát nenarazili na kaustiku a pak na ni narazili. Funkce $p(N)$ by měla být aproximace histogramu pro dlouhé intervaly.

2.1.6 Počty kaustických přechodů na světelné křivce

Poslední zajímavou statistikou pro nás bude, kolik kaustických přechodů nastane světelné křivce dané délky. Tato statistika je zajímavá hlavně proto, abychom dokázali určit kolik budeme pozorovat kaustických přechodů během pozorování daného objektu.

Postup určení je přímočarý, vezmeme naši množinu světelných křivek, zjistíme, kolik je na které kaustických přechodů, a ze získaných dat vykreslíme histogram.

Vodorovnou osu ještě přeškálujeme tak, abychom věděli, ke kolika kaustickým přechodům dojde na délce jednoho Einsteinova poloměru, což je charakteristická délková škála.

2.2 Výsledky

2.2.1 Závislost doby mezi přechody na konvergenci hvězd

V této sekci uvedeme histogramy intervalů mezi kaustickými přechody pro konvergence $\kappa_\mathrm{s} \in \{0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5\}$ a dále také histogramy počtů kaustických přechodů na jednotlivých křivkách. Výše uvedené konvergence odpovídají střední vzdálenosti nejbližší hvězdy $\langle d \rangle / \theta_\mathrm{E} \in \{5{,}60, 3{,}96, 3{,}23, 2{,}80, 2{,}51\}$.

Nasimulovali jsme 10 map s rozlišením $32\,768 \times 32\,768\,\mathrm{pix}^2$ a délkou hrany $400\,\theta_\mathrm{E}$, z nich jsme pomocí neperiodické okrajové podmínky použili 32 768 světelných křivek z každé. Používáme zde pixel velikost $12 \cdot 10^{-3}\,\theta_\mathrm{E}$. Na získaných světelných křivkách jsme detekovali kaustické přechody a z jejich poloh jsme následně určili vzájemné vzdálenosti.

Na Obr. 2.10 jsou vykresleny histogramy pro výše uvedené konvergence a na Obr. 2.11 je detailní pohled na počátek histogramů. Histogramy jsou dále proloženy asymptotikou (2.2). Vidíme, že na velkých vzdálenostech asymptotika sedí velmi dobře, což znamená, že na velkých vzdálenostech není již mapa zjasnění korelována. Dále vidíme očekávaný výsledek, že pro větší konvergence je pravděpodobnost detekce delších intervalů výrazně menší než pro menší konvergence. Nakonec převážně na Obr. 2.11 vidíme, že pro malé vzdálenosti se již histogram nechová dle vztahu (2.2), což je důsledkem uspořádání na malou vzdálenost. V Tab. 2.1 uvádíme výsledky simulací: konvergenci, střední vzdálenosti nejbližších hvězd, pravděpodobnost setkání s kaustikou p z rovnice (2.2) a střední počet kaustických přechodů na jeden Einsteinův poloměr.

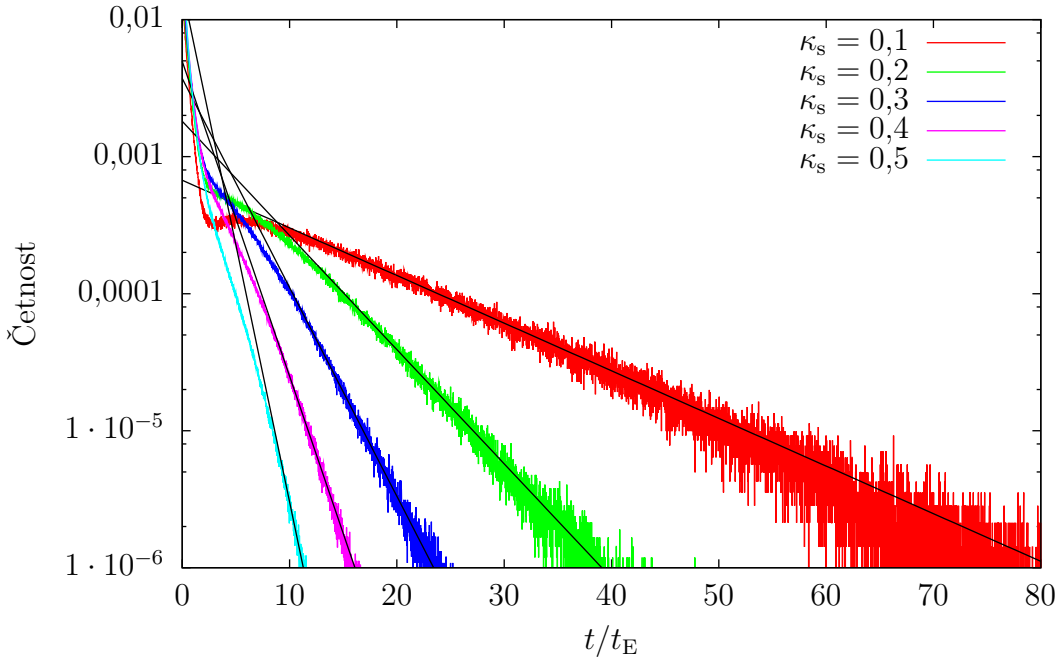
Na detailním histogramu 2.11 zjišťujeme, že podíl krátkých intervalů je značný, tyto krátké intervaly jsou způsobeny přechodem světelné křivky v blízkosti cuspu, kde pozorujeme dva kaustické přechody těsně po sobě. Další zajímavou vlastností je, histogramy nejsou monotónní pro malé konvergence ($\kappa_\mathrm{s} = 0{,}1$). Pro ně je pravděpodobnější, že budeme pozorovat další interval (např. $7\,\theta_\mathrm{E}$) než kratší (např. $3\,\theta_\mathrm{E}$).

Hlavním významem těchto histogramů je možnost určení pravděpodobnosti

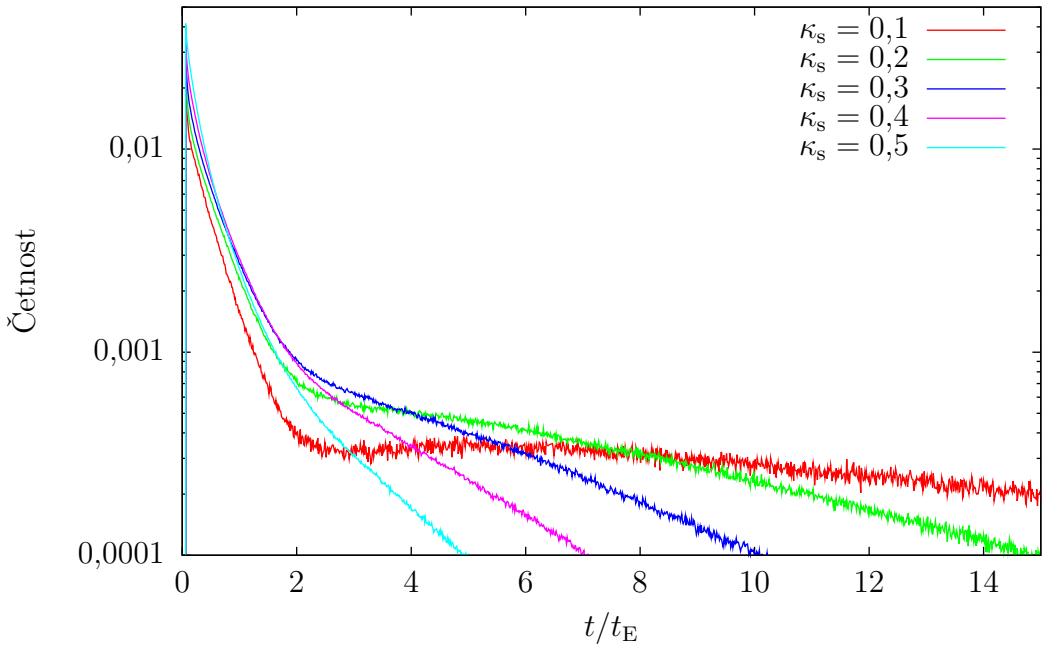
κ_s	$\langle d \rangle / \theta_\mathrm{E}$	p	$\#/\theta_\mathrm{E}$
0,1	5,60	0,080	0,053
0,2	3,96	0,191	0,150
0,3	3,23	0,351	0,294
0,4	2,80	0,528	0,504
0,5	2,51	0,862	0,813

Tab 2.1: Porovnání středních vzdáleností mezi hvězdami v čočkující galaxii s asymptotickou pravděpodobností protnutí kaustiky dle (2.2) a středním počtem přechodů kaustiky, viz Obr. 2.12, na jeden Einsteinův poloměr pro studované konvergence hvězd. Délka světelné křivky byla $200\,\theta_\mathrm{E}$.

osamoceného kaustického přechodu pro zdroj dané velikosti. Osamocené přechody budeme zkoumat v dalších kapitolách. Aby šlo o osamocený kaustický přechod, musí být interval mezi kaustickými přechody větší než je rozměr zdroje, v opačném případě se budou na zdroji nacházet dvě kaustiky zároveň a to by výrazně ztěžovalo následnou diskusi. Z tohoto histogramu tedy můžeme odečíst vhodnou velikost zdroje, aby byl zasažen nejvýše jednou kaustikou.



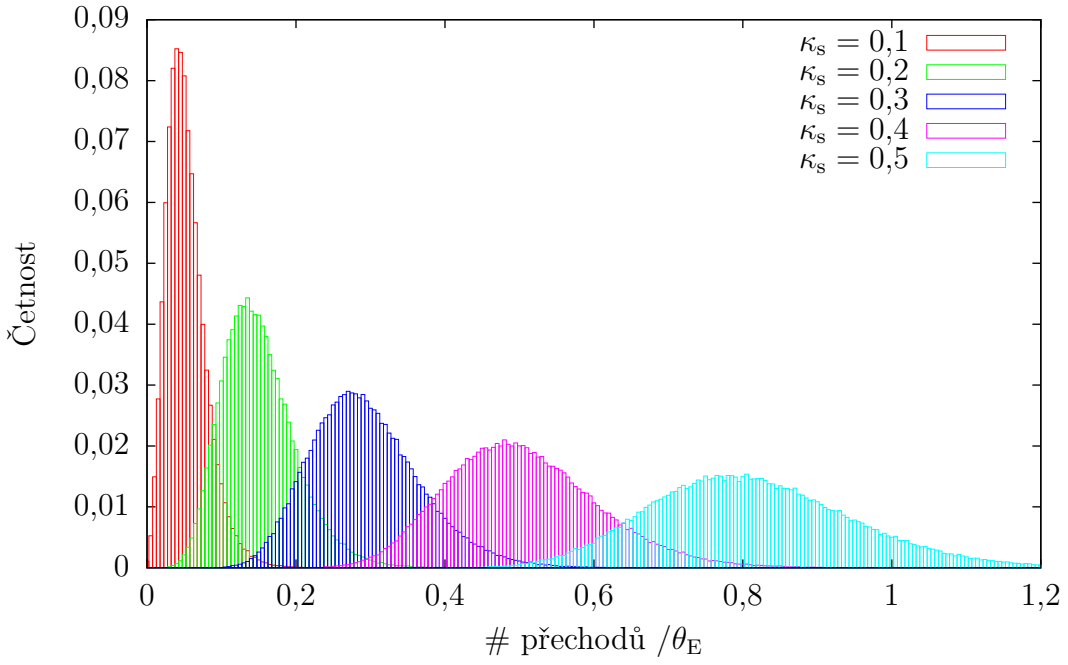
Obr. 2.10: Intervaly mezi kaustickými přechody pro různé konvergence. Mapy měly hranu délky $400\,\theta_{\mathrm{E}}$ a rozlišení $32\,768 \times 32\,768\,\mathrm{pix}^2$, tj. velikost pixelu $12 \cdot 10^{-3}\,\theta_{\mathrm{E}}$. Černou čarou je vyznačena asymptotika (2.2).



Obr. 2.11: Intervaly mezi kaustickými přechody pro různé konvergence (detail Obr. 2.10).

2.2.2 Závislost počtu kaustických přechodů na konvergenci hvězd

Počet kaustických přechodů je důležitou informací hlavně z observačního hlediska. Zde uvádíme výsledky pro světelnou křivku délky $200\,\theta_\mathrm{E}$ (a pro stejné parametry jako výše), ale pro jinou délku by histogram kvůli centrální limitní větě vypadal jinak. Střední hodnota přepočtená na jednotkovou délku by se nezměnila, peak by byl užší. Ale má smysl vykreslovat celý histogram, protože není splněn její předpoklad a to nezávislost dob mezi kaustickými přechody. Ale i tak můžeme předpokládat, že extrémních případů (hodně či velmi málo kaustických průsečíků) bude s rostoucí délkou ubývat. Na Obr. 2.12 jsou uvedeny počty kaustických přechodů vydělené celkovou délkou křivky, abychom mohli případně srovnávat různě dlouhé světelné křivky. Vidíme, že pro větší konvergence je na světelných křivkách více kaustických přechodů, což je očekávatelné, protože i kaustická struktura je hustší. Můžeme říci, že naše výsledky se shodují s výsledky ze článku [Wyithe et al., 2000] co do tvaru. Přesného porovnání nejsme aktuálně schopni, protože naše simulace se omezily na případ nulového shearu.

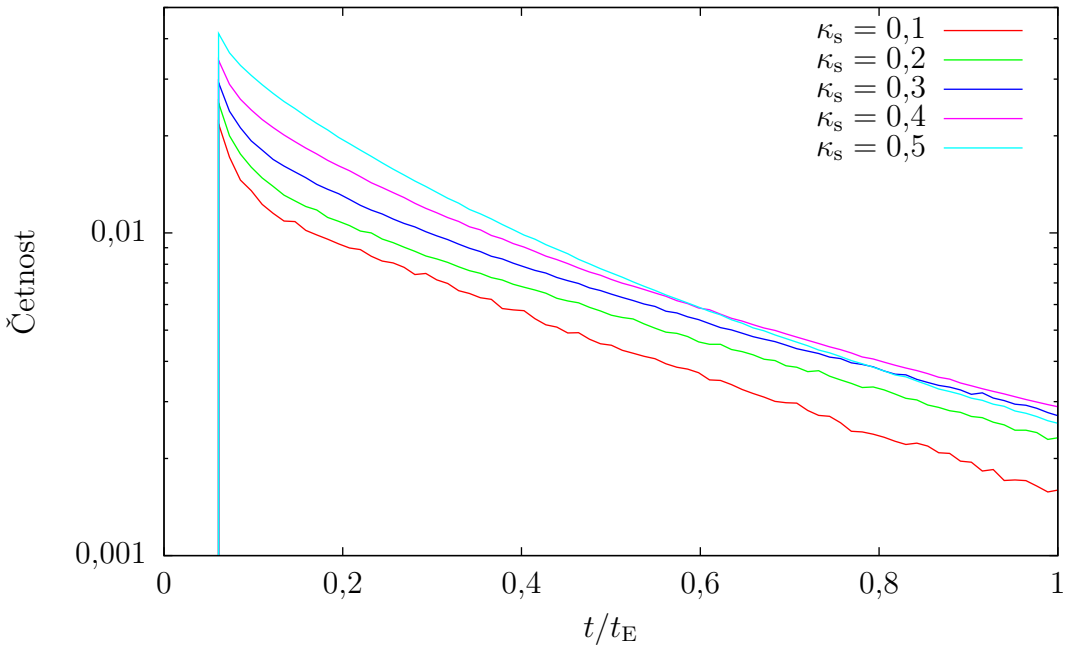


Obr. 2.12: Počty kaustických přechodů na jedné světelné křivce délky $200\,\theta_\mathrm{E}$ pro různé konvergence. Mapy měly hranu délky $400\,\theta_\mathrm{E}$ a rozlišení $32\,768 \times 32\,768\,\mathrm{pix}^2$, tj. velikost pixelu $12 \cdot 10^{-3}\,\theta_\mathrm{E}$.

2.2.3 Vhodné konvergence hvězd pro pozorování izolovaného kaustického přechodu

Na Obr. 2.13 je detail z histogramu na Obr. 2.10. Z něj vidíme, že poměr krátkých intervalů vychází velký, tedy zdroj musí být velmi malý, ale i tak bude pravděpodobnost přechodu dvou kaustik najednou veliká. Za nejvhodnější podmínky

považujeme konvergence nejvyšší studovanou konvergenci $\kappa_s = 0{,}5$, protože dává nejvyšší pravděpodobnost osamoceného kaustického přechodu pro zdroj menší než polovina Einsteinova poloměru. Nehledě na to, že pro tuto konvergenci dochází k nejvíce kaustickým přechodům na jednotku délky, takže pro vysoké konvergence budeme pozorovat jednak časté kaustické přechody, jednak s vysokou pravděpodobností bude akreční disk zasažen pouze jednou kaustikou. Ale nejsme si s těmito výsledky jisti vzhledem k silné převaze krátkých intervalů, které mohou být chybou numeriky.



Obr. 2.13: Intervaly mezi kaustickými přechody pro různé konvergence (detail Obr. 2.10).

2.2.4 Závislost statistických vlastností na hmotnostním rozdělení hvězd

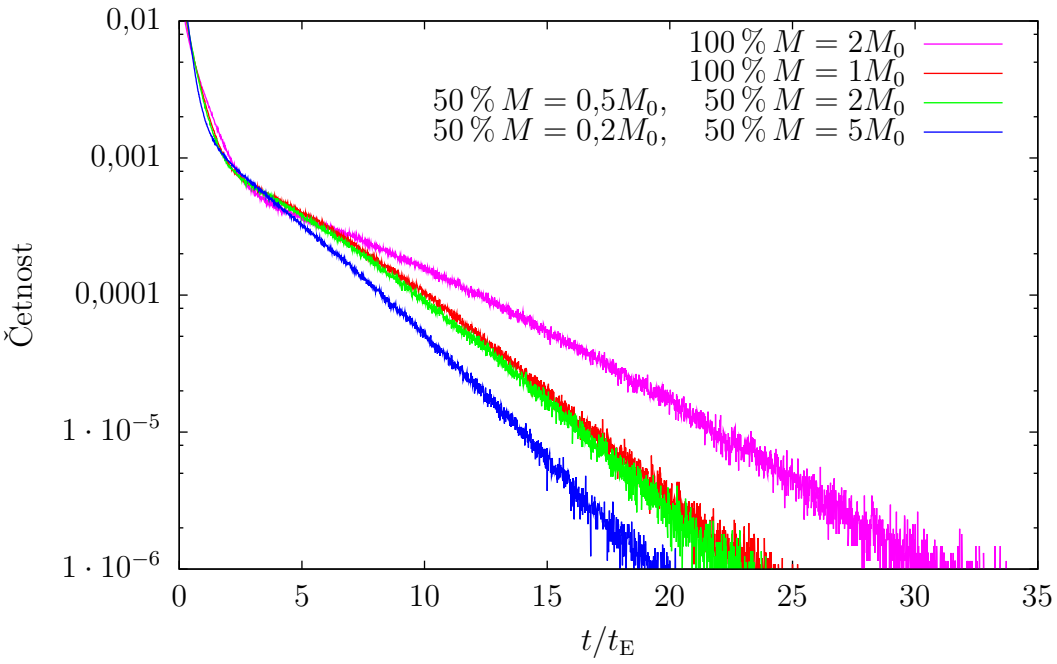
Protože v galaxii nemají všechny hvězdy jednu hmotnost, ukážeme zde, jak závisí dvě výše uvedené statistiky na testovacím poměru hvězd. Budeme testovat pouze dvě různé hmotnosti, a to jednak polovinu hmotnosti ve hvězdách o hmotnosti $2\,M_0$ a druhou polovinu o hmotnosti $0{,}5\,M_0$, jednak polovinu hmotnosti ve hvězdách o hmotnosti $5\,M_0$ a druhou polovinu o hmotnosti $0{,}2\,M_0$. Realistická rozdělovací funkce hvězd v galaxii je power-law se sklonem 2,35, viz [Salpeter, 1955]. Ale pro zkoumání základních vlastností jde o jednodušší model vícehmotnostní populace. Poznamenejme, že pokud změníme hmotnost všech hvězd, např. z M_0 na $2M_0$, tak se intervaly prodlouží $\sqrt{2}$krát, protože tato transformace znamená zvětšení Einsteinova poloměru v poměru $\sqrt{2}$.

Ve smíšené populaci nelze provést nějakou škálovací transformaci, která by vzniklé situace na sebe převedla. Níže jsou tedy vyneseny jednak intervaly mezi kaustickými přechody, jednak počty přechodů kaustiky na světelné křivce.

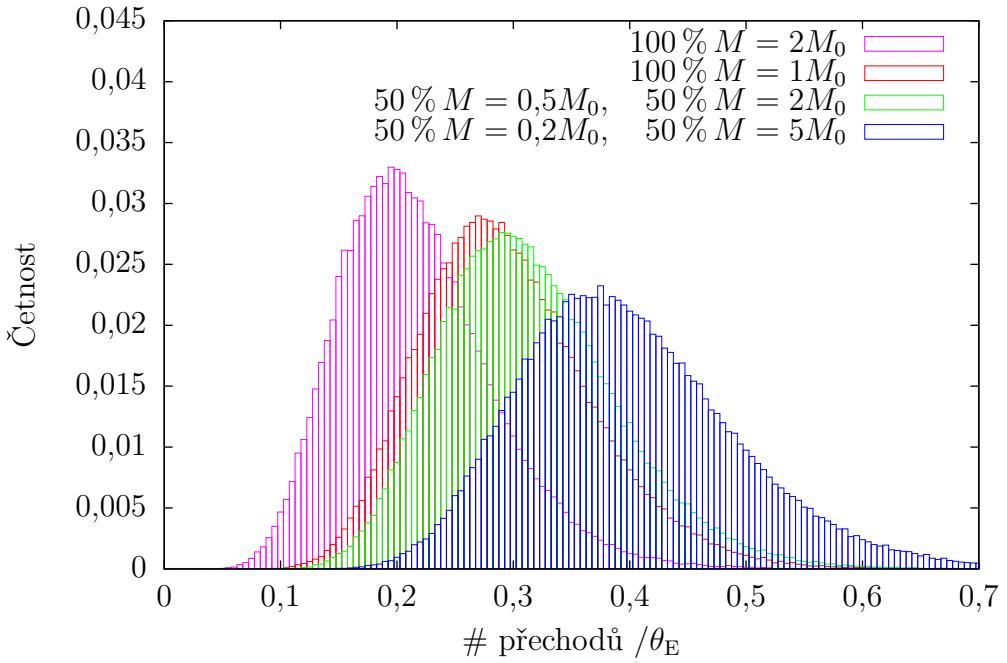
Simulovali jsme 10 map se stejnou velikostí a stejným rozlišením, jako v případě jedné hmotnosti hvězd pro konvergenci $\kappa_s = 0{,}3$. V tomto případě je pro nás délkovou jednotkou týž Einsteinův poloměr, tedy Einsteinův poloměr odpovídající průměrné hmotnosti hvězdy M_0.

Na Obr. 2.14 jsou histogramy intervalů a na Obr. 2.15 jsou histogramy počtu kaustických přechodů. Vidíme, že, vyšší střední počet kaustických přechodů je korelován s vyšší četností dlouhých intervalů mezi kaustickými přechody. Dále vidíme, že strukturu kaustické sítě ovlivňují (zjemňují) hlavně malé hvězdy. Z našich simulací vyplývá, že čím je lehčí komponenta méně hmotná, tím pozorujeme více kaustických přechodů.

V další práci bychom rádi analyzovali počty kaustických přechodů a intervaly mezi jednotlivými kaustickými přechody podrobněji. Zde je uvádíme pouze pro ilustraci.



Obr. 2.14: Intervaly mezi kaustickými přechody pro $\kappa_s = 0{,}3$ a různé zastoupení hmotností. Mapy měly hranu délky $400\,\theta_E$ a rozlišení $32\,768 \times 32\,768\,\mathrm{pix}^2$, tj. velikost pixelu $12 \cdot 10^{-3}\,\theta_E$.



Obr. 2.15: Počty kaustických přechodů na jedné světelné křivce pro $\kappa_\mathrm{s} = 0{,}3$ a různé zastoupení hmotností. Parametry jous shodné s Obr. 2.14.

3. Světelné křivky pro přechod akrečního disku kvasaru kaustikou

V této kapitole se budeme zabývat porovnáváním tvarů světelných křivek při přechodu akrečního disku kvasaru kaustickou strukturou generovanou čočkující galaxií. Budeme rozebírat různé modely akrečních disků přecházejících přes jednoduchý model nekonečně dlouhého rovného foldu.

Článek [Morgan et al., 2008] se zabýval odhadnutím velikosti vyzařovací oblasti akrečního disku kvasaru PG 1115+080. Došli k závěru, že velikost oblasti emise rentgenového záření 1,4 − 21,8 keV je přibližně $20\,r_{\mathrm{g}}$ a také, že velikost oblasti optické emise je přibližně desetkrát větší. Tento výsledek byl podpořen článkem [Mosquera et al., 2013], kde též prováděli Monte-Carlo simulace variability a porovnávali ji s experimentálními daty tentokrát pro kvasar Q 2237+0305. Tento kvasar byl studován již dříve ve článku [Eigenbrod et al., 2008], kde byly nalezeny omezení na teplotní profil disku pro optickou emisi. Podobná studie byla provedena i pro kvasar RX J1131–1231 [Chartas et al., 2009], kde amplifikační faktor $A = F_A/F_C$, kde F_A a F_C jsou světelné toky z obrazů A resp. C dosahuje hodnoty 4 pro rentgenovou část spektra ale pouze 1,4 pro optické vlnové délky. Tento kvasar je předmětem intenzivního zájmu také protože vlastní variabilita (nezpůsobená čočkováním) dosahuje faktoru 20.

Všechny výše uvedené články ale používaly gaussovské, lineární či dokonce uniformní profily vyzařování většinou pro face-on disk. Prvním článkem, který simuloval světelné křivky pro plně relativistický model byl [Jaroszynski et al., 1992].

Ve článku [Chen et al., 2013] jsou simulovány světelné křivky pro přechod plně relativistického modelu akrečního disku přes kaustickou strukturu (nikoli přes osamocený fold, což budeme simulovat my) a dochází k závěru, že světelné křivky se značně odlišují od dříve používaných modelů akrečního disku.

3.1 Používané modely

Prvně si rozebereme model používaný v následujících simulacích. Půjde o lokální model kaustiky, konkrétně foldu, a také o model vyzařování akrečního disku. V rámci modelu vyzařování akrečního disku popíšeme také ovlivnění dráhy a energie fotonu gravitačním polem centrální černé díry.

3.1.1 Model kaustiky

V simulacích budeme uvažovat pouze modelu ideálního nekonečně dlouhého foldu. Jde o nejjednodušší model kaustické sítě. Druhou nejjednodušší strukturou je cusp. Pokud se ale zabýváme emisí disku v rentgenové oblasti, emituje pouze centrální oblast, která je úhlově malá vůči struktuře typické kaustické sítě. Použití lokální aproximace kaustiky foldem poskytne dobrou základní představu o fotometrickém i spektroskopickém průběhu přechodu akrečního disku kvasaru přes kaustiku.

Uvažujeme-li nekonečně dlouhý fold, tak můžeme v kartézských úhlových souřadnicích na mapě zjasnění (α, β) napsat zjasnění světelného toku ve tvaru, viz [Chang and Refsdal, 1984, Schneider and Weiss, 1986]

$$A_{\mathrm{fold}}(\alpha,\beta) = a_{\mathrm{f}} + b_{\mathrm{f}}\alpha + \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \alpha \geq 0 \\ \sqrt{-\alpha_0/\alpha} & \text{pro} \quad \alpha < 0 \end{cases} , \tag{3.1}$$

kde a_{f} je zjasnění v $\alpha = 0$ (vně kaustiky). Parametry a_{f} a b_{f} odpovídají lokální aproximaci mapy zjasnění vně kaustiky. Na dále popisované efekty nemají podstatný vliv. Pro jednoduchost proto budeme většinou pokládat $a_{\mathrm{f}} = 1$ a $b_{\mathrm{f}} = 0$.

3.1.2 Modely akrečního disku

Nyní si ukážeme, jaký model disku budeme používat a dále jaké efekty budeme uvažovat. Prvně rozebereme prostorové rozložení specifické intenzity na disku, dále speciálně i obecně relativistické efekty ovlivňující emitované záření a nakonec postup výpočtu pozorovaného světelného toku z emitované specifické intenzity a změny energie fotonu při úniku z gravitačního pole centrální černé díry.

Specifická intenzita

Předpokládáme, že akreční disk je geometricky tenký ale opticky tlustý a že se rozprostírá v rovníkové rovině centrální Kerrovy černé díry. Též neuvažujeme vliv hmotnosti disku na deformaci gravitačního pole centrální BH. Pro emitovanou fotonovou specifickou intenzitu předpokládáme, že má klesající mocninnou závislost na Boyer-Lindquistově (dále B-L) poloměru r a nezávisí na úhlu φ. Tedy pro emitovanou specifickou intenzitu platí

$$I^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{em}}(r,\varphi,E_{\mathrm{em}}) = I^{\mathrm{cont}}_0 \left(\frac{r}{r_{\mathrm{g}}}\right)^{-q} \left(\frac{E_{\mathrm{em}}}{\mathrm{keV}}\right)^{-\Gamma} , \tag{3.2}$$

kde I^{cont}_0 je konstanta, q je kladný radiální index, Γ je spektrální index, $r_{\mathrm{g}} = \\ = GM/c^2$ je gravitační poloměr centrální černé díry a E_{em} je emitovaná energie. Škálovací konstantu u intenzity označujeme též indexem `cont`, abychom měli značení konzistentní s další kapitolou. Předpokládáme, že pod poslední stabilní orbitou disk již nezáří. Poloměr poslední stabilní orbity závisí na spinu černé díry. Používané tabulky (podrobněji dále) nám neumožňují uvažovat větší poloměr disku než $1\,000\, r_{\mathrm{g}}$.

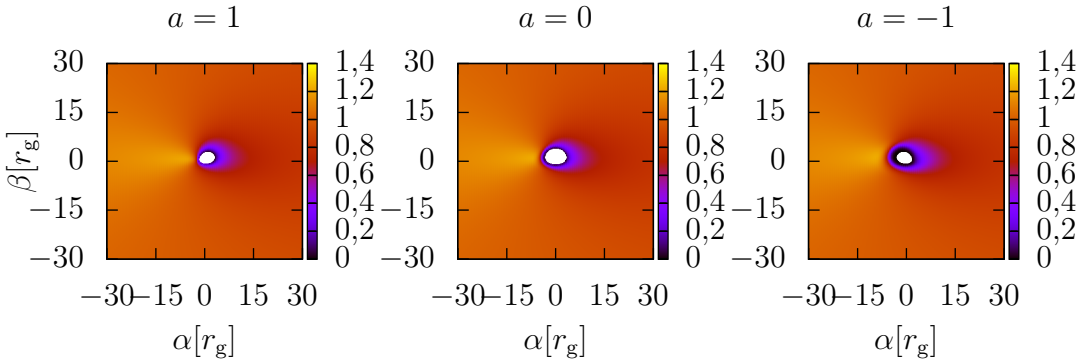
Ohyb emitovaného záření centrální černou dírou

Fotony emitované z akrečního disku jsou jednak ohýbány gravitačním polem, jednak dochází ke změně jejich energie podél geodetiky. Pro popis trajektorie fotonů pohybujících se v Kerrově časoprostoru můžeme použít Carterovy rovnice. Jejich integrací získáme mapování mezi kartézskými souřadnicemi (α, β) v asymptotické oblasti Kerrova časoprostoru (pro nás v rovině nebe) a B-L souřadnicemi (r, φ) na akrečním disku. Předpokládáme, že disk obíhá okolo černé díry po keplerovských orbitách. Celková změna energie fotonu od emise po odlet do asymptotické oblasti je efektivně popsána tzv. g-faktorem, kde

$$g(\alpha,\beta) = \frac{E_{\mathrm{obs}}(\alpha,\beta)}{E_{\mathrm{em}}(r,\varphi)} .$$

Na Obr. 3.1 jsou mapy g-faktoru pro inklinaci akrečního disku od roviny nebe $i = 60°$ a hodnoty spinu černé díry $a \in \{1, 0, -1\}$, což odpovídá extrémnímu Kerrovi, Schwarzschildovi a opět extrémnímu Kerrovi, ale s obráceným spinem. Celková změna energie fotonu od emise po odlet do asymptotické oblasti je efektivně popsána tzv. g

Hlavním rozdílem mezi případy $a = 1$ a $a = 0$ je, že Kerrova černá díra má menší poloměr horizontu, jinak jsou tyto dvě mapy velmi podobné. Pro extrémního Kerra s opačným spinem (případ $a = -1$) pozorujeme větší centrální oblast malého g-faktoru.



Obr. 3.1: Výřezy z map g-faktoru o rozměrech $60\,r_\mathrm{g} \times 60\,r_\mathrm{g}$, barevná škála odpovídá hodnotám g-faktoru a je na všech panelech stejná. Vše pro inklinaci $i = 60°$ a spiny $a \in \{1, 0, -1\}$.

Světelný tok

Zde si odvodíme vztah mezi emitovanou specifickou intenzitou a pozorovanou intenzitou záření, následně i vztah pro světelný tok.

Budeme předpokládat, že detektor detekuje fotony mezi energiemi E_1 a E_2 a že disk vyzařuje v celém spektru dle vztahu (3.2). Proto pro pozorovanou intenzitu záření můžeme psát

$$I_\mathrm{obs}(\alpha, \beta) = \int_{E_1}^{E_2} I_\mathrm{obs}(\alpha, \beta, E_\mathrm{obs}) \mathrm{d}E_\mathrm{obs}\,, \tag{3.3}$$

kde I_obs je pozorovaná specifická intenzita v asymptotické oblasti Kerrova časoprostoru. Dle vztahu (A1) z [Dovčiak et al., 2004] můžeme napsat[1]

$$I_\mathrm{obs}(\alpha, \beta, E_\mathrm{obs}) = g^2(\alpha, \beta) I_\mathrm{em}(r(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta), E_\mathrm{obs}/g(\alpha, \beta))\,. \tag{3.4}$$

Dosazením (3.2) a (3.4) do (3.3), a uvážením $E_\mathrm{obs} = gE_\mathrm{em}$, dostáváme

$$I_\mathrm{obs}(\alpha, \beta) = I_0^\mathrm{cont} \left(\frac{r(\alpha, \beta)}{r_\mathrm{g}}\right)^{-q} \int_{E_1}^{E_2} g^2(\alpha, \beta) \left(\frac{E_\mathrm{em}}{\mathrm{keV}}\right)^{-\Gamma} \mathrm{d}E_\mathrm{obs}\,.$$

[1]Protože uvažujeme fotonovou specifickou intenzitu, tak je I/E^2 lorentzovým invariantem.

V integrálu provedeme substituci $E_{\rm em}$ za $E_{\rm obs}$, vytkneme g-faktor a dostaneme

$$\begin{aligned} I_{\rm obs}(\alpha,\beta) &= I_0^{\rm cont}\left(\frac{r(\alpha,\beta)}{r_{\rm g}}\right)^{-q} g^{\Gamma+2}(\alpha,\beta)\int_{E_1}^{E_2}\left(\frac{E_{\rm obs}}{\rm keV}\right)^{-\Gamma}{\rm d}E_{\rm obs} \\ &= F_0^{\rm cont} g^{\Gamma+2}(\alpha,\beta) r^{-q}(\alpha,\beta)\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde jsme zavedli konstantu $F_0^{\rm cont}$, která závisí na detekčních mezích E_1, E_2, na spektrálním indexu Γ, na radiálním indexu q, na gravitačním poloměru $r_{\rm g}$, avšak nezávisí na poloze (α,β). Konkrétní hodnota této konstanty a tedy i rozsah uvažovaných energií, je pro nás dále nezajímavý, protože se budeme zabývat poměry světelného toku disku během čočkování a případem, kdy je disk mimo dosah vlivu kaustik. Pro pozorovaný světelný tok musíme intenzitu integrovat přes plochu disku. Budeme již předpokládat, že světelný tok z disku je modifikován kaustikou, která je vůči disku posunutá o $(\alpha_{\rm F},\beta_{\rm F})$. Pak pro pozorovaný tok platí

$$\begin{aligned} F(\alpha_{\rm F},\beta_{\rm F}) &= \int_{\rm disk} I_{\rm obs}(\alpha,\beta) A_{\rm fold}(\tilde\alpha,\tilde\beta){\rm d}\alpha{\rm d}\beta \\ &= F_0^{\rm cont}\int_{\rm disk} g^{\Gamma+2}(\alpha,\beta) r^{-q}(\alpha,\beta) A_{\rm fold}(\tilde\alpha,\tilde\beta){\rm d}\alpha{\rm d}\beta\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde bod $(\tilde\alpha,\tilde\beta)$ je bod (α,β) otočený o orientaci kaustiky vůči disku a posunutý o $(\alpha_{\rm F},\beta_{\rm F})$.

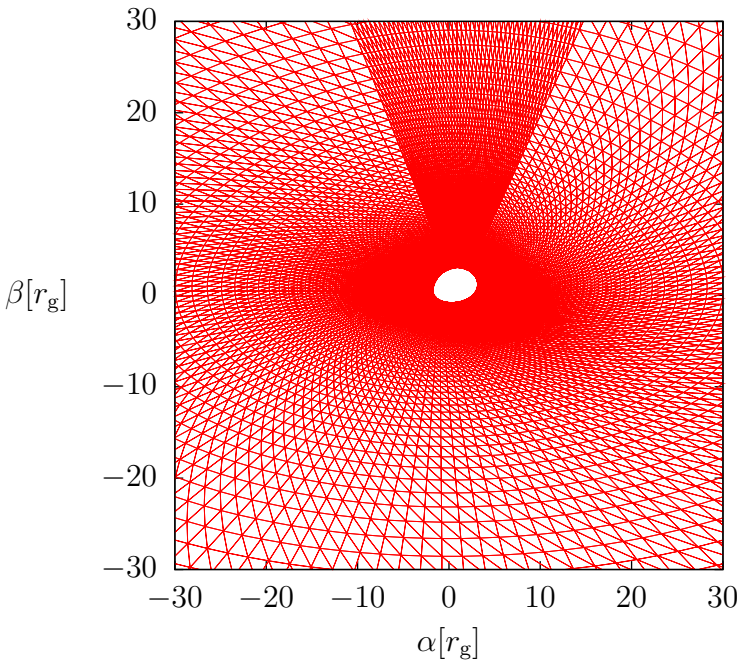
Světelné křivky mikročočkování se většinou vynášejí jako závislost zjasnění světelného toku na čase. Zjasnění obdržíme ze světelného toku vydělením světelným tokem v nepřítomnosti čočkování, který získáme položením $A_{\rm fold}=1$ ve vztahu (3.6).

3.2 Algoritmus výpočtu světelného toku

Pro výpočet hodnot g-faktoru a specifické intenzity v rovině oblohy používáme tabulky zveřejněné ve článku [Dovčiak et al., 2004]. Z tabulek známe hodnoty souřadnic (α,β) v závislosti na (r,φ) na mříži odpovídající kartézskému součinu hodnot r a φ. Hodnotu g-faktoru dopočítáme ze znalosti spinu, inklinace a této transformace. Nejprve proto provedeme triangulaci. Pro výpočet integrálu (3.6) ale potřebujeme g a r jako funkci (α,β). Tu děláme tak, že nejprve vytvoříme čtyřúhelníkovou síť spojením bodů se stejným poloměrem a stejným azimutem, dále tyto čtyřúhelníky úhlopříčně rozdělíme. Tato síť není optimální co se týče velikosti vnitřních úhlů v jednotlivých trojúhelnících, ale je ideální pro rychlé vyhledávání souřadnic vrcholů trojúhelníku. Ukázka triangulace je uvedena na Obr. 3.2.

Nyní byl v každém z trojúhelníků integrand aproximován lineární interpolací a byl vyčíslen integrál (3.6). Celkový světelný tok získáme součtem světelných toků od jednotlivých trojúhelníků. Toto provedeme pro různé polohy kaustiky s ekvidistantním posunutím a získáme tak světelnou křivku, neboli časovou závislost pozorovaného světelného toku F.

Z důvodu ušetření výpočetního času nejprve určíme celkový světelný tok produkovaný diskem do vzdálenosti $1\,000\,r_{\rm g}$ a následně poloměr $r_{\rm max}$, pod kterým je vyzařováno 99 % světelného toku. Světelné křivky jsou následně počítány pouze z části disku blíže k centru než $r_{\rm max}$.



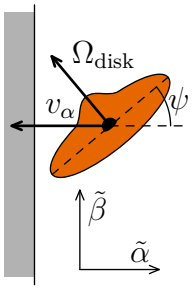
Obr. 3.2: Ukázka triangulace pro extrémní Kerrovu BH (spin $a = 1$) při inklinaci $i = 60°$.

3.3 Výsledky

V této části shrneme hlavní výsledky. Půjde převážně o světelné křivky a popis jejich vlastností a závislosti na parametrech akrečního disku a přecházející kaustiky. Navazujeme na výsledky publikované v bakalářské práci, kde jsme používali jednodušší modely akrečních disků (uniformní, gaussovské a Shakurovy-Sunyaevovy) a na nich studovali vlastnosti světelných křivek během kaustického přechodu.

3.3.1 Popis geometrie kaustického přechodu

Na Obr. 3.3 je náčrtek geometrie kaustického přechodu. Vidíme zde kaustiku označenou černou čarou, dále vnitřní oblast kaustiky označenou šedou barvou. Disk se pohybuje směrem ke kaustice rychlostí v_α a je vůči ní natočen o orientovaný úhel ψ, tomuto úhlu budeme říkat *orientace kaustiky*. Ω_{disk} označuje směr momentu hybnosti akrečního disku. Pokud bude mít černá díra spin v opačném směru, budeme jej značit záporným znaménkem (předpokládáme, že spin černé díry i disku je paralelní). Vyboulenina disku znázorňuje vzdálenou stranu disku zdeformovanou ohybem paprsků okolo černé díry.



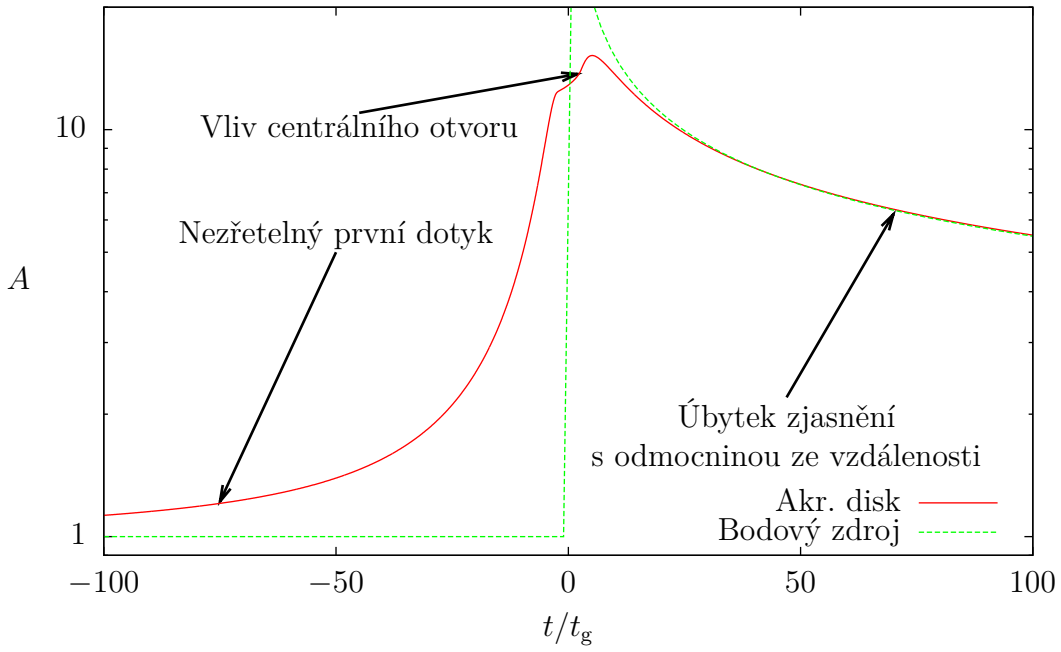
Obr. 3.3: Geometrie kaustického přechodu.

Za okraj disku budeme uvažovat hranici kruhu na akrečním disku z jehož vnitřku vychází 99 % celkového světelného toku disku. Dobu přechodu této části disku přes kaustiku označíme $2t_p$. Dále budeme definovat čas t_g, což je doba posunu disku o jeden gravitační po-

loměr ve směru kolmém na fold.[2] Nakonec zavedeme ještě čas t_{n}, což je doba mezi zvýšením světelného toku na prahovou hodnotu a okamžikem maximálního zjasnění. Časové škálování zavedeme podrobněji v části 3.3.3.

3.3.2 Základní vlastnosti světelné křivky

Na Obr. 3.4 je uveden příklad světelné křivky pro orientaci $\psi = \pi/4$, parametry disku $a = 1$, $\Gamma = 2$ a $q = 3$, inklinaci $i = 5°$ a sílu kaustiky $\alpha_0 = 2\,000\,r_{\mathrm{g}}$. Čas $t_{\mathrm{g}} = 0$ odpovídá přechodu foldu přes střed disku.



Obr. 3.4: Příklad světelné křivky přechodu foldu přes akreční disk s vyznačenými charakteristikami (červeně). Je porovnán se zjasněním bodového zdroje (zeleně) nacházejícího se ve středu disku.

Na světelné křivce pozorujeme typický tvar jako v případě přechodu foldu přes zdrojovou hvězdu v galaktickém mikročočkování, ale s drobnými změnami. Na rozdíl od galaktického mikročočkování nemůžeme přesně určit okamžik dotyku „okraje“ disku s kaustikou, protože v našem modelu specifická intenzita klesá postupně a není na okraji žádný skok. Dále pozorujeme malý zlom na světelné křivce v okolí maxima. Tento zlom je způsoben nulovou specifickou intenzitou ve středu disku pod poslední stabilní orbitou. Existují však situace, kde tento zlom nemusí být patrný. Šířka této části tedy odpovídá průmětu nezářivé oblasti v centru. Nakonec vidíme, že světelný tok klesá po přechodu přes kaustiku přibližně jako odmocnina ze vzdálenosti. Můžeme srovnat se světelnou křivkou odpovídající bodovému zdroji, od kterého se světelná křivka kvasaru moc neliší. Toto je způsobeno tím, že ve vnitřní oblasti kaustiky se zjasnění na škále hlavní vyzařovací oblasti disku mění málo, proto se křivka blíží světelné křivce bodové-

[2] Rychlost pohybu ve směru rovnoběžném s kaustikou je pro nás nepodstatná, protože fold je translačně invariantní vzhledem k posunu v podélném směru.

ho zdroje světla dané vztahem (3.1). Amplifikační mapa má rozlišovací schopnost pouze okolo kaustiky.

3.3.3 Škálování světelné křivky

Světelné křivky lze škálovat jak v časovém směru, tak i v amplitudovém směru. Můžeme toho docílit jednak změnou parametrů kaustiky, jednak různými definicemi časové jednotky a translací v časovém směru.

Škálování amplitudy

Amplitudu světelné křivky můžeme jednoduše škálovat změnou síly kaustiky α_0. Zde si odvodíme vztah mezi světelnými křivkami, pokud měníme sílu kaustiky.

Označíme-li $I(\alpha, \beta)$ intenzitu vyzařování akrečního disku (zde již po aplikaci rotace způsobené orientací) a α_F polohu kaustiky na akrečním disku, pak pro pozorovaný světelný tok F platí

$$F(\alpha_\mathrm{F}) = \int I(\alpha, \beta) A_\mathrm{fold}(\alpha - \alpha_\mathrm{F}, \beta) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \,.$$

Označíme-li $I_\beta(\alpha) = \int I(\alpha, \beta) \mathrm{d}\beta$ a použijeme-li (3.1), dostáváme

$$\begin{aligned} F(\alpha_\mathrm{F}) &= \int I_\beta(\alpha) A_\mathrm{fold}(\alpha - \alpha_\mathrm{F}) \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I_\beta(\alpha) \left(a_\mathrm{f} + b_\mathrm{f} \left(\alpha - \alpha_\mathrm{F}\right)\right) \mathrm{d}\alpha + \int_0^{\infty} I_\beta(\alpha) \sqrt{\frac{-\alpha_0}{\alpha - \alpha_\mathrm{F}}} \mathrm{d}\alpha \\ &= F_\mathrm{B}\left(\alpha_\mathrm{F}\right) + \sqrt{\alpha_0} F_\mathrm{F}\left(\alpha_\mathrm{F}\right) \,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde $F_\mathrm{B}\left(\alpha_\mathrm{F}\right)$ je světelný tok pozadí, jenž je lineární funkcí α_F, a $F_\mathrm{F}\left(\alpha_\mathrm{F}\right)$ je část světelného toku způsobená přítomností foldu. Též je vidět, že $F_\mathrm{F}\left(\alpha_\mathrm{F}\right)$ již závisí pouze na poloze kaustiky, na parametrech akrečního disku a celkové geometrii systému.

Zjasnění $A(\alpha_\mathrm{F})$ definujeme jako poměr světelných toků $F(\alpha_\mathrm{F})$, určeného výše, a F_0, toku při absenci čočkování. Příbytek na světelné křivce způsobený kaustikou je přímo úměrný $\sqrt{\alpha_0}$, jeho tvar však na tomto parametru nezávisí.

Škálování času

Začněme s nejtypičtější časovou jednotkou. Jde o t_g, tedy čas za který se disk posune o jeden gravitační poloměr ve směru kolmém na fold. Tato jednotka je vhodná, pokud budeme srovnávat navzájem světelné křivky přechodu několika různě orientovaných kaustik, ale je nevhodná pro jeden kaustický přechod. Nevhodnost souvisí s tím, že pro jedno osamocené měření je podstatnější časová škála konkrétního přechodu přes kaustiku. Nulový čas příslušných světelných křivek volíme v okamžiku, kdy kaustika přechází střed disku.

Druhou časovou jednotkou budeme značit t_p a bude označovat polovinu doby přechodu části disku, ze kterého je emitováno 99 % světelného toku. Tato časová jednotka již charakterizuje přímo příčný pohyb přes kaustiku, ale stále se na pozorované světelné křivce špatně určuje. Bohužel není v našem případě možno zjistit, kdy ke kontaktu přesně došlo, protože intenzita vyzařování disku rapidně

klesá k nule v radiálním směru. Časovou osu volíme tak, aby při prvním dotyku disku s kaustikou byl $t = t_\mathrm{p}$ a při posledním dotyku aby platilo $t = t_\mathrm{p}$.

Dále můžeme definovat časovou jednotku t_n čistě z vlastností světelné křivky. Lze jí brát jako dobu, za kterou zjasnění vystoupá z nějakého prahového zlomku maxima do maxima křivky. Podobně lze nulový čas položit v maximu křivky. Pak nulovému času odpovídá okamžik maximálního zjasnění a času $t = -t_\mathrm{n} =$ $=$ odpovídá okamžik, kdy vzroste zjasnění zdroje na hodnotu. Výhoda tohoto škálování je hlavně v tom, že pokud máme pozorovaný pouze jeden kaustický přechod (máme tady minimum informací), můžeme o parametrech disku něco říci, pokud mají simulované světelné křivky v tomto škálování odlišné tvary. Hodnotu zjasnění maxima i prahu jsme volili libovolně.

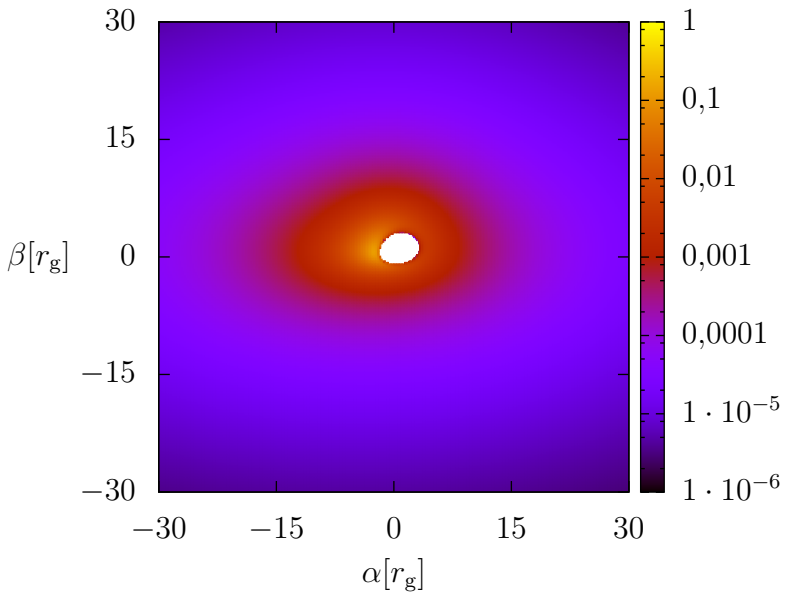
V případě obecné kaustické sítě se nakonec běžně používá jako časová jednotka doba t_E, za kterou kvasar urazí jeden Einsteinův poloměr určený z lokální hvězdné populace čočkující galaxie.

3.3.4 Detaily na světelné křivce

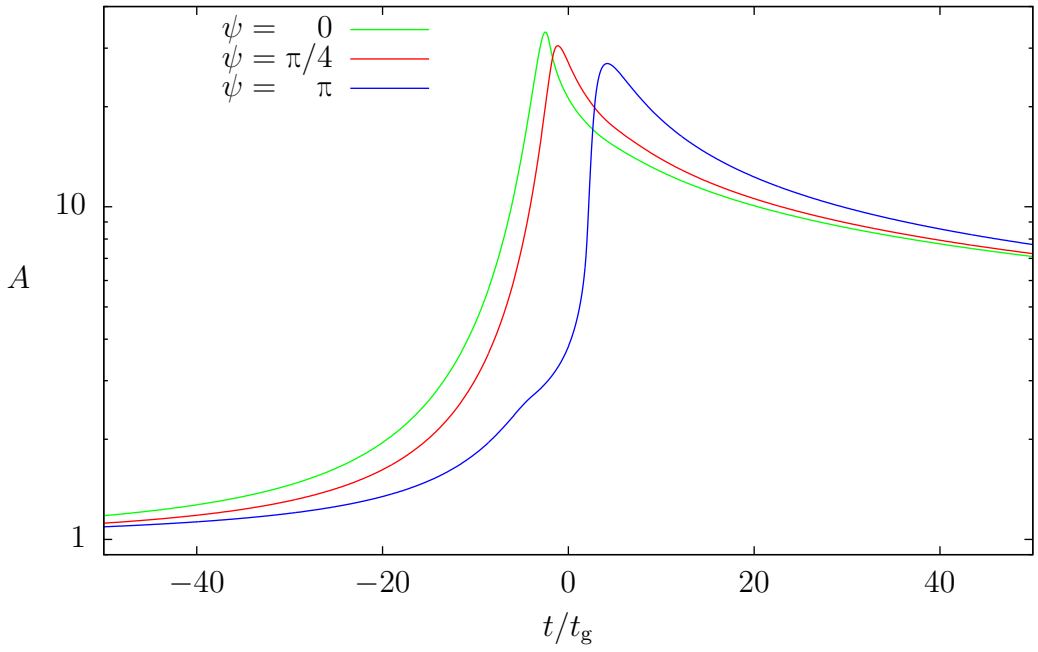
Orientace disku vůči kaustice

Jako první se zaměříme na orientaci kaustiky vůči disku. Ukážeme, jak souvisí tvar světelné křivky s rozložením specifické intenzity disku. Na Obr. 3.5 je vyobrazena intenzita vyzařování (3.5) odpovídající parametrům $q = 3$, $\Gamma = 2$, $a = 1$ a inklinaci $i = 60°$. Na Obr. 3.6 jsou uvedeny příklady světelných křivek pro různé orientace disku vůči kaustice. Vidíme, že pro orientaci $\psi = 0$, kaustika přichází zleva, dochází k maximálnímu zjasnění nejdříve. Naopak pro $\psi = \pi$, tedy pokud kaustika přichází zprava, nejpozději. Zde polohu maxima porovnáváme vzhledem k času průchodu kaustiky středem disku, ale to typicky nedokážeme na pozorované světelné křivce určit.

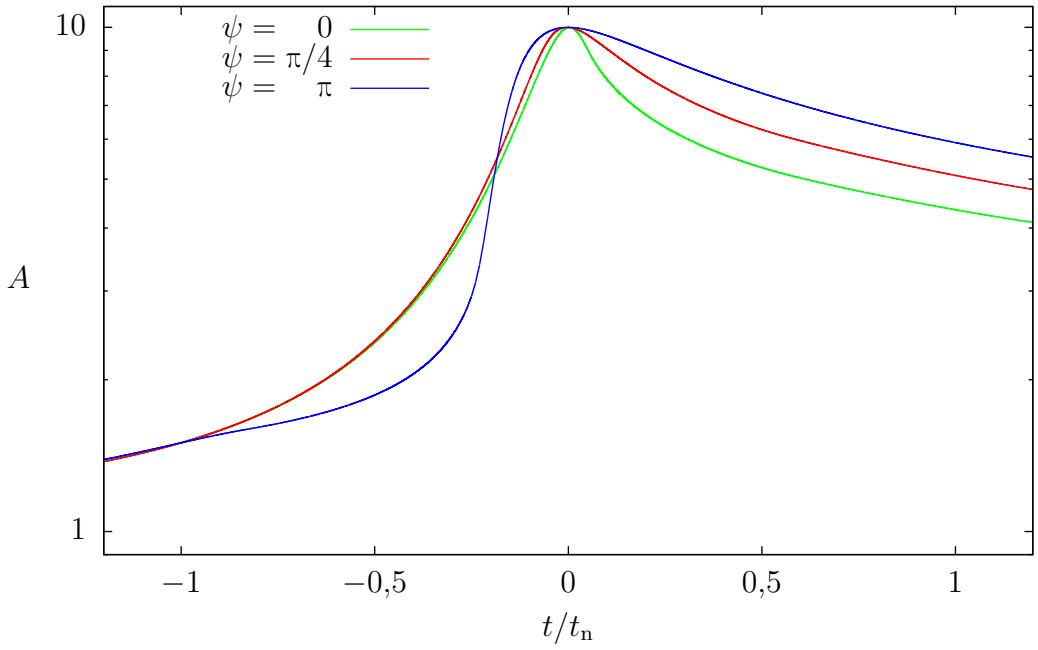
Proto bychom měli spíše porovnávat normalizované světelné křivky ve škálování odpovídajícím časové jednotce t_n, viz příklad na Obr. 3.7, kde je hlavním rozdílem to, že světelná křivka pro $\psi = \pi$ nabíhá rychleji, protože intenzita vyzařování roste mezi přechodem centrálního otvoru a maximem rychleji něž při přiblížení k maximu z opačné strany.



Obr. 3.5: Mapa intenzity vyzařování centrální části disku. Parametry jsou spin $a = 1$, inklinace $i = 60°$, radiální index $q = 3$ a spektrální index $\Gamma = 2$, normalizace $F_0^{\text{cont}} = 1$.



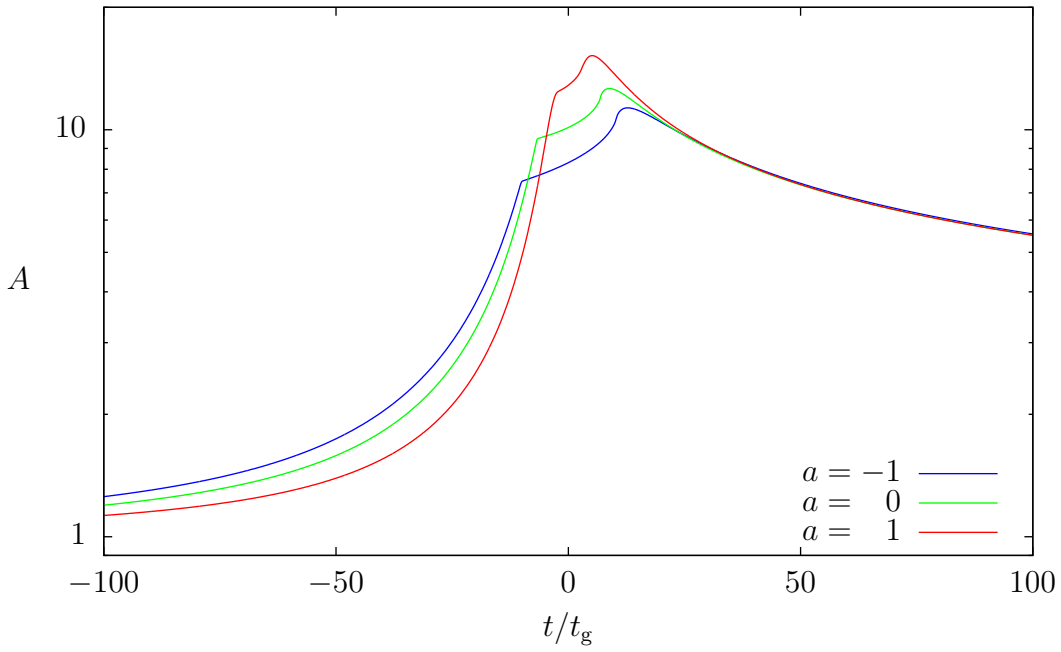
Obr. 3.6: Závislost tvaru světelné křivky na orientaci disku ke kaustice. Čas odpovídá vzdálenosti kaustiky od přechodu přes střed disku. Parametry jsou $a = 1$, $i = 60°$, $q = 3$ a $\Gamma = 2$.



Obr. 3.7: Závislost tvaru světelné křivky na orientaci disku ke kaustice. Čas i amplituda byly normalizovány, ale jde o stejné světelné křivky jako na Obr. 3.6. Parametry jsou $a = 1$, $i = 60°$, $q = 3$ a $\Gamma = 2$.

Zlom na světelné křivce okolo maxima

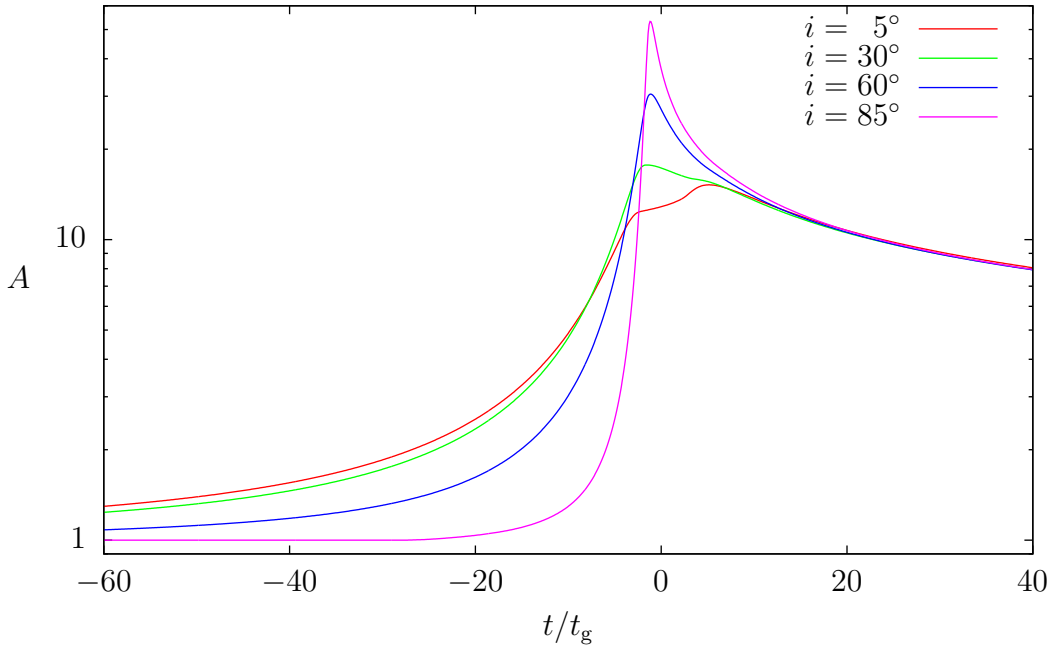
V okolí maxima pozorujeme zlom na světelné křivce. Velmi dobře můžeme tento jev ilustrovat na menší inklinaci $i = 5°$, tedy skoro face-on disk. Na Obr. 3.8 je zřetelně vidět, že pro nulový spin trvá pokles světelného toku po delší dobu. Pro spin $a = -1$, tedy pro případ, kdy disk obíhá okolo extrémní černé díry ale v opačném směru než je její spin, pozorujeme ještě delší pokles světelného toku. Tento jev je způsoben tím, že předpokládáme nulovou intenzitu vyzařování pod poslední stabilní orbitou. Poslední stabilní orbita pro spin $a = 1$ je $r_{\mathrm{isco}}(a = 1) = 1\, r_{\mathrm{g}}$, pro Schwarzschildovo řešení ($a = 0$) je $r_{\mathrm{isco}}(a = 0) = 6\, r_{\mathrm{g}}$ a pro inverzního extrémního Kerra to je dokonce $r_{\mathrm{isco}}(a = -1) = 9\, r_{\mathrm{g}}$. Pozorovaná délka poklesu světelného toku ale závisí jednak na inklinaci, dále pak směru příchodu kaustiky. Při změně inklinace i směru příchodu kaustiky se mění délka projekce oblasti pod poslední stabilní orbitou do směru kolmého na kaustiku. Délka projekce pak přímo odpovídá délce gapu.



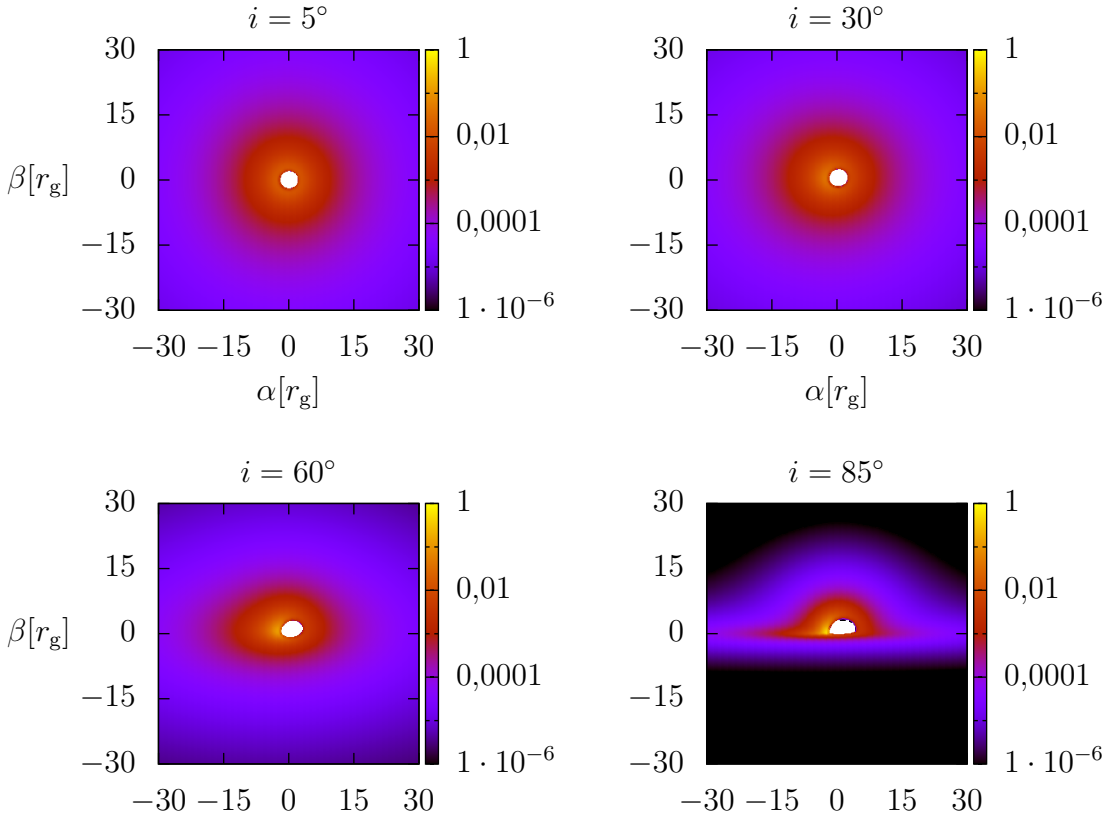
Obr. 3.8: Závislost tvaru světelných křivek na spinu černé díry. Parametry jsou $i = 5°$, $\psi = \pi/4$, $q = 3$ a $\Gamma = 2$.

Inklinace disku

Inklinace má silný vliv na světelnou křivku, viz Obr. 3.9. Hlavním důvodem je, že zvýšením inklinace se koncentruje vyzařování do menší oblasti; kontrahuje se ve vertikálním směru a vlivem Dopplerova posunu se též zvýší celkový tok vyzařování. Koncentraci oblasti vyzařování můžeme vidět na Obr. 3.10. Dále zde vidíme, že pro velké inklinace je naprostá většina světelného záření emitována z oblasti okolo maxima g-faktoru a proto nepozorujeme zlom na světelné křivce způsobený nulovou intenzitou ve středu disku pro velké inklinace.



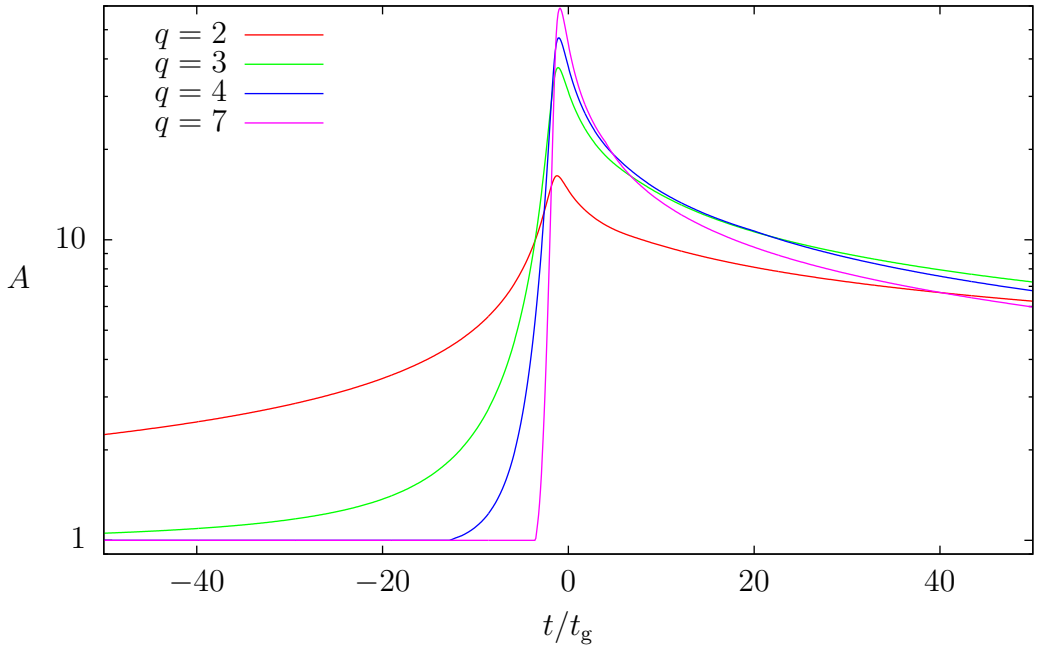
Obr. 3.9: Závislost tvaru světelných křivek na inklinaci. Parametry jsou $a = 1$, $\psi = \pi/4$, $q = 3$ a $\Gamma = 2$.



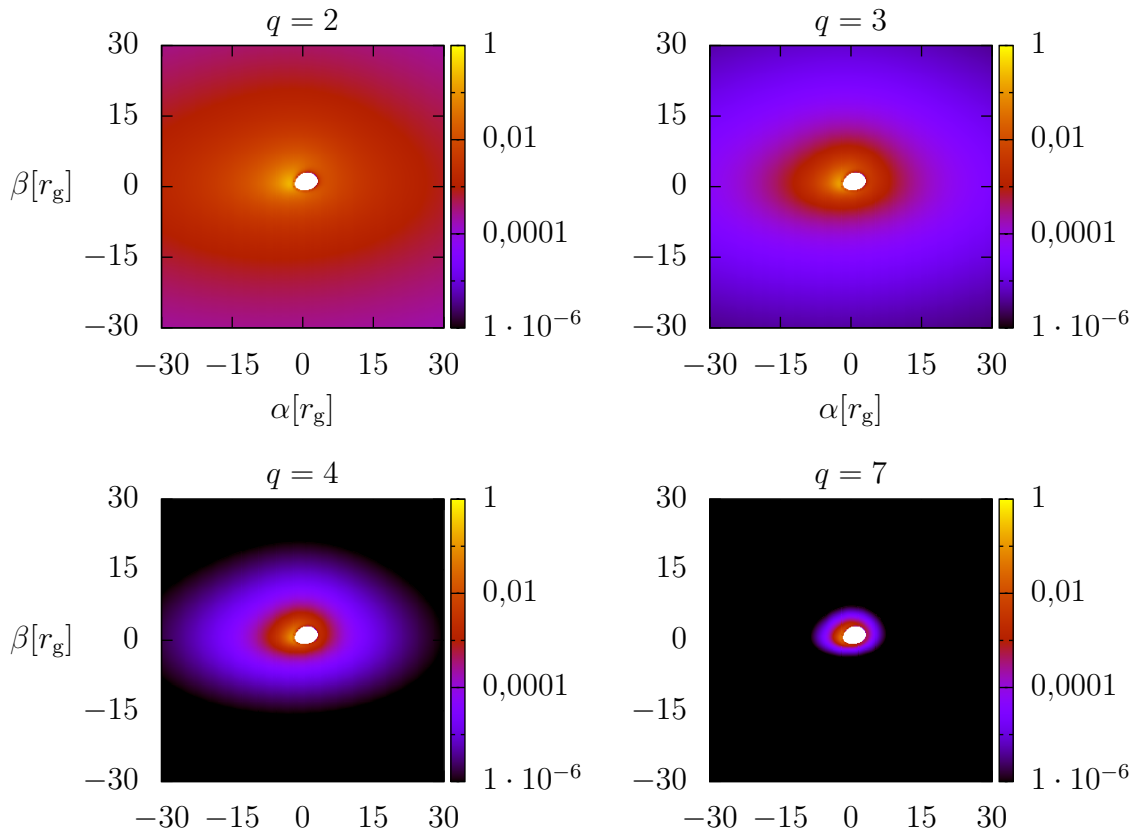
Obr. 3.10: Mapy specifické intenzity pro centrální oblast disku, pro parametry $a = 1$, $q = 3$, $\Gamma = 2$ a $F_0^{\mathrm{cont}} = 1$.

Rychlost náběhu

Rychlost náběhu světelné křivky do maxima souvisí převážně s velikostí vyzařovací oblasti, tento jev byl již zkoumán v [Ledvina, 2011]. Zde jsme jej ověřili i při použití realističtějších modelů akrečního disku. Velikost vyzařovací oblasti souvisí v naší třídě modelů převážně s velikostí radiálního indexu q. Pro větší radiální indexy je vyzařovací plocha menší a proto je i maximální zjasnění větší a doba události kratší. S tím souvisí i větší derivace světelné křivky. Simulace světelných křivek je uvedena na Obr. 3.11. Odpovídající mapy intenzity vyzařování jsou na Obr. 3.12. Simulace byla provedena pro inklinaci $i = 70°$, spin $a = 1$ a spektrální index $\Gamma = 2$.



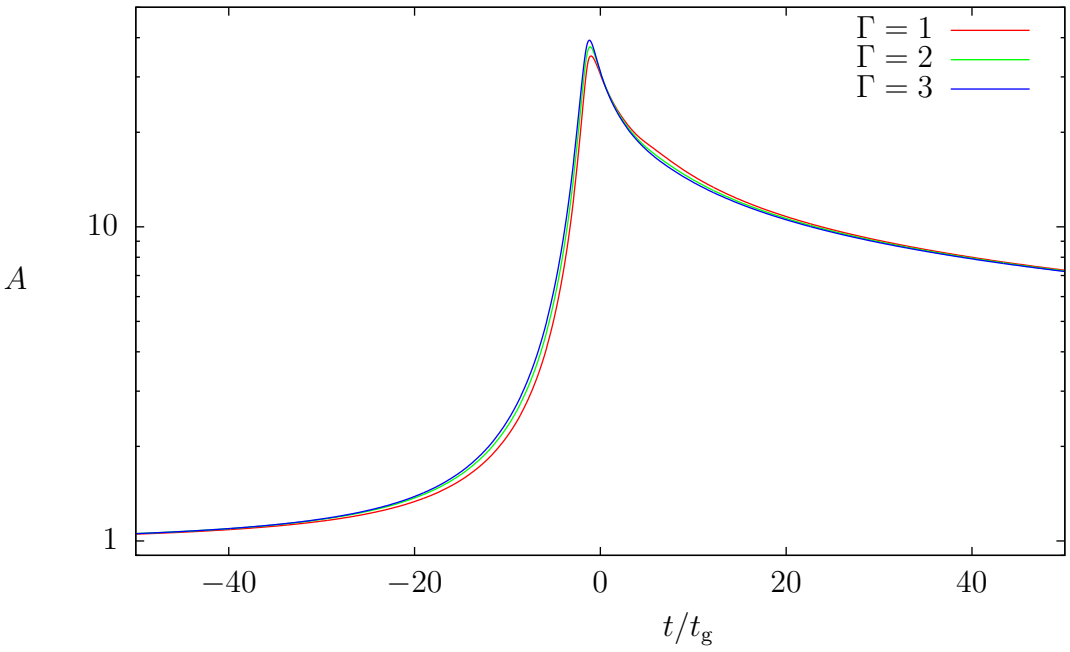
Obr. 3.11: Závislost tvaru světelných křivek na radiálním indexu q. Ostatní parametry jsou $i = 70°$, $a = 1$, $\psi = \pi/4$ a $\Gamma = 2$.



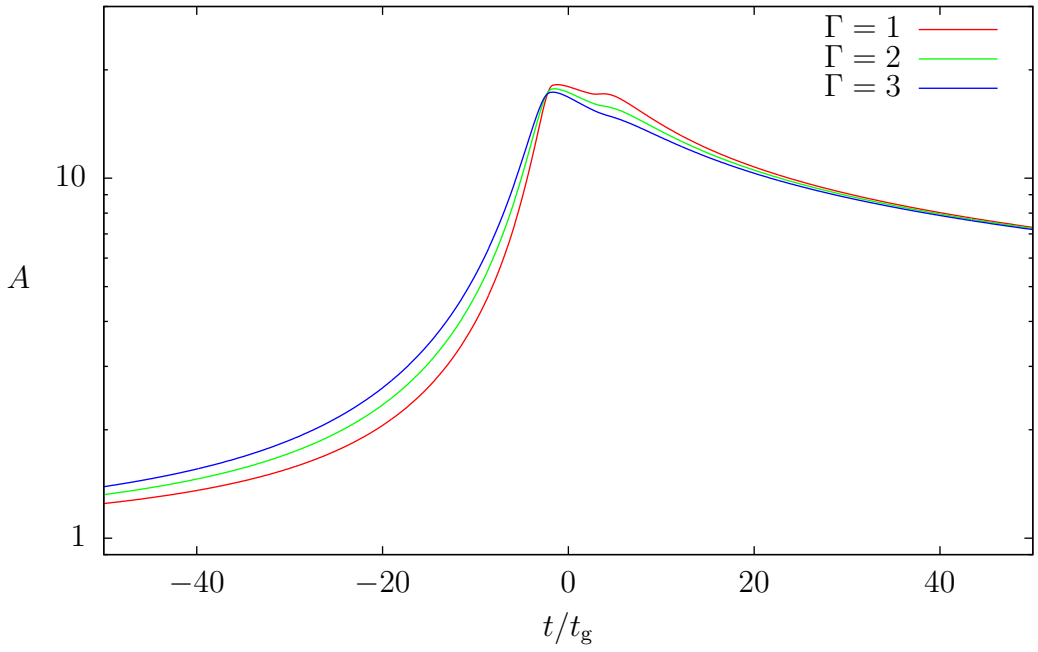
Obr. 3.12: Mapy vyzařování disku pro různé radiální indexy. Ostatní parametry jsou $a = 1$, $i = 70°$, $\Gamma = 2$ a $F_0^{\mathrm{cont}} = 1$.

Spektrální index

Nakonec ještě ověříme, jak závisí světelné křivky na spektrálním indexu. Na Obr. 3.13 pro inklinaci $i = 70°$ a na Obr. 3.14 pro inklinaci $i = 30°$, dále pro spin $a = 1$ a radiální index $q = 3$. Vidíme, že se křivky liší pouze velmi minimálně a pokud použijeme škálování odpovídající t_{n}, tak jsou rozdíly ještě výrazně menší.



Obr. 3.13: Závislost tvaru světelných křivek na spektrálním indexu Γ. Parametry jsou $i = 70°$, ($a = 1$, $\psi = \pi/4$ a $q = 3$).



Obr. 3.14: Závislost tvaru světelných křivek na spektrálním indexu Γ. Parametry jsou $i = 70°$, ($a = 1$, $\psi = \pi/4$ a $q = 3$).

4. Mikročočkováním indukované změny v K_α čáře železa

V této kapitole budeme rozebírat změny, které mohou být pozorovatelné na rentgenové spektrální čáře železa K_α vyzařované z centrální oblasti akrečního disku. Nejprve se zaměříme na podstatu vyzařování, dále pak na algoritmus, kterým simulujeme změny ve spektrální čáře, nakonec rozebereme asymptotické chování peaků a hran, které mohou být mikročočkováním na čáře generované.

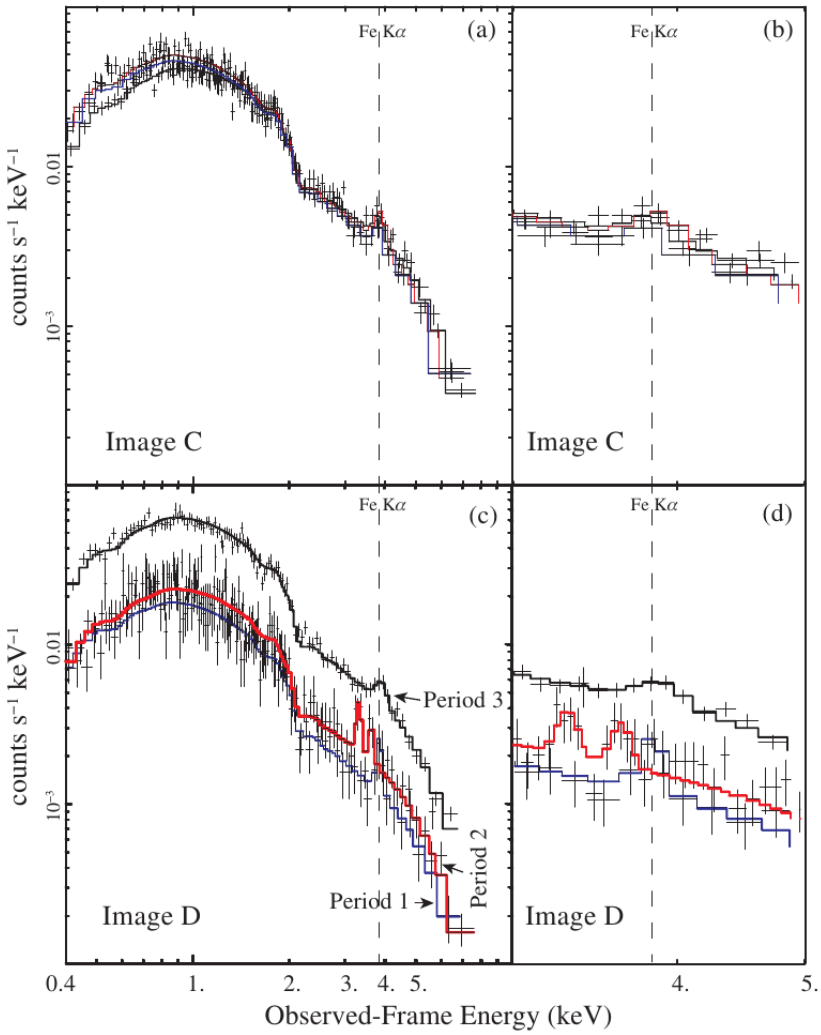
4.1 Vyzařování čáry K_α z centrální oblasti disku

V práci budeme uvažovat tzv. Lamp-post model vyzařování. Bodová korona, která je zdrojem záření kontinua, se nachází nad centrální černou dírou a osvětluje disk. Toto záření je pak odráženo od disku a dominují v něm rentgenové spektrální čáry prvků obsažených v disku, viz [Reynolds, 1996, Chartas et al., 2012]. My se budeme zabývat hlavně nejvýraznější čarou železa (protože je nejintenzivnější), ale studované efekty postihují všechny spektrální čáry stejně.

Od disku odražené fotony jsou silně ovlivňovány gravitačním polem centrální černé díry, jednak jsou odchýleny, jednak se změní jejich energie. Tyto změny souvisí s místem, odkud jsou dané fotony emitovány. Podrobněji byl tento jev diskutován v kapitole 3.

4.1.1 Pozorování změn ve spektru akrečních disků

Ačkoli je samotné mikročočkování, ale i obecně veškeré gravitační čočkování, nezávislé na energii čočkovaných fotonů, protože světlo se pohybuje po nulových geodetikách, můžeme za jistých okolností pozorovat různá zjasnění světelného toku na různých vlnových délkách, viz Obr. 4.1. Tento jev je způsoben tím, že rozložení specifické intenzity zdroje, které závisí na vlnové délce, je při přechodu kaustiky prostorově rozlišené. Odpovídající úhlová škála je o několik řádů menší než rozlišovací schopnost jakéhokoli dalekohledu. Pokud je charakteristická škála kaustické sítě dostatečně větší než je rozměr hlavní vyzařovací oblasti zdroje, přecházející kaustika diferenciálně zjasní povrch zdroje, což obecně vede k různým světelným křivkám na různých vlnových délkách. Tento jev [Kayser et al., 1986] byl podrobněji diskutován v [Ledvina, 2011]. V případě galaktického mikročočkování je běžně používán k měření rozlišení specifické intenzity na povrchu zdrojové hvězdy [Heyrovský, 2003, Fouqué et al., 2010]. Ve článku [Eigenbrod et al., 2008] byla pomocí něj odhadována velikost vyzařující oblasti kvasaru pro optickou část spektra. Byla zde též stanovena omezení pro radiální závislost teploty. Dále byly ve článku [Chartas et al., 2012] pozorovány časové změny v rentgenové části spektra a to včetně změn ve tvaru spektrální čáry železa, kterými se zde budeme zabývat, viz Obr. 4.1. Ve článku [Chen et al., 2011] byla pozorována chromatická variabilita pro energie odpovídající rentgenové části spektra. V tomto článku [Dai et al., 2010] byla odhadnuta velikost vyzařující oblasti rentgenového záření na $10\,r_\mathrm{g}$, což pro nás bude důležité z hlediska nutné velikosti zkoumané oblasti. V těchto článcích [Chen et al., 2012, Chartas et al., 2004] nebyly sice



Obr. 4.1: Pozorované časové změny ve spektru obrazu D (dolní panely) čočkovaného kvasaru RX J1131–1231. V různých časech pozorujeme buď žádný, jeden nebo dva peaky na čáře železa. Absence změn v obrazu C (horní panely) poukazuje na mikročočkový původ změn v obrazu D. *Převzato ze článku [Chartas et al., 2012].*

pozorovány přímo časové změny ve specifickém toku, ale byly pozorovány nestandardní tvary spektrální čáry železa v některých z makroobrazů. Protože byly změny pozorovány pouze v některých z makroobrazů, jsou tyto změny téměř jistě způsobeny mikročočkováním. Ve článku [Chartas et al., 2002] byla provedena simulace přechodu kaustiky přes disk tvaru prstence okolo Schwarzschildovy černé díry pro případ face-on disku. Ve článku [Popović et al., 2003] byla simulována spektra pro přechod kaustiky přes Schwarzschildův a Kerrův disk, ale ve velmi malém jak prostorovém, tak energetickém rozlišení. Závěrem tohoto článku je, že pro malé vyzařovací oblasti má metrika vliv na pozorovaný tvar čáry, ale hlubší závěry zde chybí.

4.2 Numerická simulace čočkování spektrální čáry železa

V této podkapitole popíšeme algoritmus pro výpočet tvaru čočkované železné čáry. Nejdříve zavedeme dále využívané souřadné soustavy, pak uvedeme použité modely a důležité transformační vztahy pro specifické intenzity.

4.2.1 Zavedení souřadnic

V dalším popisu budeme používat celkem tři typy kartézských souřadnic, všechny jsou v rovině oblohy a jsou vyobrazeny na Obr. 4.2. Souřadnice (α, β) se standardně používají k popisu vyzařování akrečních disků. Souřadnice β je paralelní s projekcí spinu černé díry. Dále používáme souřadnice $(\tilde{x}, \tilde{y})$, které jsou spojeny s kaustickou sítí generovanou čočkující galaxií. V těchto souřadnicích budeme většinou udávat mapy zjasnění, někdy bude ale přehlednější tyto mapy udávat přímo v souřadnicích (α, β). V našem modelu ideálního foldu budeme volit souřadnici $\tilde{x}$ paralelní ke kaustice, a souřadnici $\tilde{y}$ směřující vně kaustiky. Nakonec budeme používat souřadnice (x, y), které budou mít stejný počátek jako souřadnice $(\tilde{x}, \tilde{y})$, ale mohou být otočené. Budeme v nich rozvíjet lokálně g-faktor, popřípadě specifickou intenzitu.

4.2.2 Model kaustiky

Budeme, stejně jako v minulé kapitole, uvažovat přechod ideálního foldu přes centrální oblast akrečního disku. Pro faktor zjasnění ideálního nekonečně dlouhého foldu platí (viz kapitola 3 a [Chang and Refsdal, 1984, Schneider and Weiss, 1986])

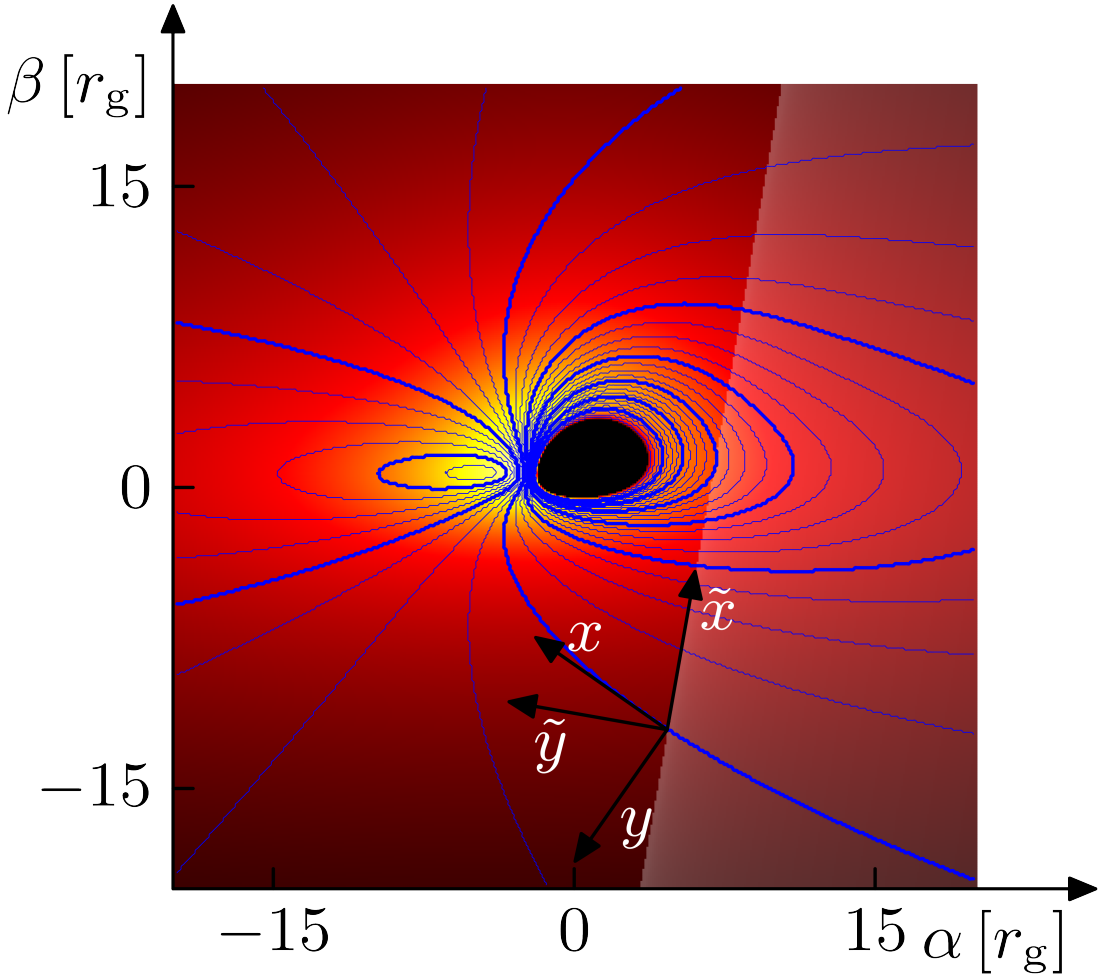
$$A(\tilde{x}, \tilde{y}) = a + \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \tilde{y} \geq 0 \\ \sqrt{\tilde{y}_0 / - \tilde{y}} & \text{pro} \quad \tilde{y} < 0 \end{cases} , \tag{4.1}$$

kde $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ jsou kartézské souřadnice v rovině oblohy, viz Obr. 4.2 a definici výše. Zde jsme pro jednoduchost vynechali lineární člen aproximace zjasnění.

4.2.3 Model vyzařování

Pro energetický profil vyzařované spektrální čáry předpokládáme v lokálním inerciálním systému tvar

$$I_E \sim \delta[E - E_{\mathrm{Fe}}] .$$



Obr. 4.2: Používané souřadnicové systémy. Modré čáry jsou kontury g-faktoru s krokem 0,25 keV. Šedý stín odpovídá poloze kaustiky, barva odpovídá specifické intenzitě vyzařování.

V článku [Reeves and Turner, 2000] používají ekvivalentní šířku čáry 10 eV. S ohledem na relativistické rozšíření pozorované čáry na energie řádu keV, je k výpočtu změn celkové pozorované čáry δ-funkční lokální model zcela postačující.

Stejně jako v kapitole 3 uvažujeme geometricky tenký, opticky tlustý disk okolo Kerrovy černé díry. Zanedbáváme vlastní gravitační pole disku. Pro specifickou intenzitu vyzařování spektrální čáry železa používáme tento jednoduchý model

$$I_\mathrm{em}^\mathrm{Fe} = I_0^\mathrm{Fe} \left(\frac{r}{r_\mathrm{g}}\right)^{-q} \delta\left[E - E_\mathrm{Fe}\right] , \tag{4.2}$$

kde r je Boyer-Lindquistův poloměr, E_Fe je 6,4 keV – klidová energie K_α čáry neutrálního železa, I_0^Fe je konstanta a q je radiální koeficient. Pro specifickou intenzitu vyzařování kontinua používáme vztah (3.2) z předešlé kapitoly.

4.2.4 Transformace intenzit a toků

Nejprve určíme transformaci mezi emitovanou specifickou intenzitou $I_\mathrm{em}^\mathrm{Fe}(E_\mathrm{em})$ a mimo gravitační pole centrální černé díry pozorovanou specifickou intenzitou

$I^{\mathrm{Fe}}_{\mathrm{obs}}(gE_{\mathrm{em}})$. I v této kapitole budeme uvažovat fotonovou specifickou intenzitu a tok. Pro fotonovou specifickou intenzitu je invariantem I/E^2. Pro transformaci mezi emitovanou a pozorovanou specifickou intenzitou platí vztah (3.4). Pokud uvážíme, že platí $E_{\mathrm{obs}} = gE_{\mathrm{em}}$, pak pro pozorovaný specifický světelný tok čáry, po čočkování, můžeme napsat

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{Fe}}_{\mathrm{obs}}(E_{\mathrm{obs}}) &= \int_{\mathrm{disk}} A(\alpha,\beta) I^{\mathrm{Fe}}_{\mathrm{obs}}(\alpha,\beta,E_{\mathrm{obs}}) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ &= F^{\mathrm{Fe}}_0 \int_{\mathrm{disk}} A(\alpha,\beta) g^2(\alpha,\beta) r^{-q}(\alpha,\beta) \delta\left[\frac{E_{\mathrm{obs}}}{g(\alpha,\beta)} - E_{\mathrm{Fe}}\right] \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta\,, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde jsme analogicky se vztahem (3.5) zavedli konstantu F^{Fe}_0 nezávislou na poloze (α,β). Pro transformaci specifické intenzity pro power-law kontinuum, podrobné odvození viz kapitola 3, používáme též vztah (3.4).

4.2.5 Algoritmus výpočtu pozorovaného specifického toku

Stejným postupem jako v kapitole 3 získáme g-faktor a r potřebné pro výpočet toku interpolací z triangulační mříže. Protože se ve vztahu pro specifickou intenzitu vyskytuje delta-funkce, tak můžeme integrál (4.3) zjednodušit na jednorozměrný pomocí identit pro počítání s delta-funkcemi. Tento integrál pak vyčíslujeme pro každý z trojúhelníků zvlášť a vysčítáme přes všechny. Tento výpočet provedeme pro všechny energie z dané množiny (typicky ekvidistantně rozdělené). Tento program je uveřejněn na přiloženém DVD.

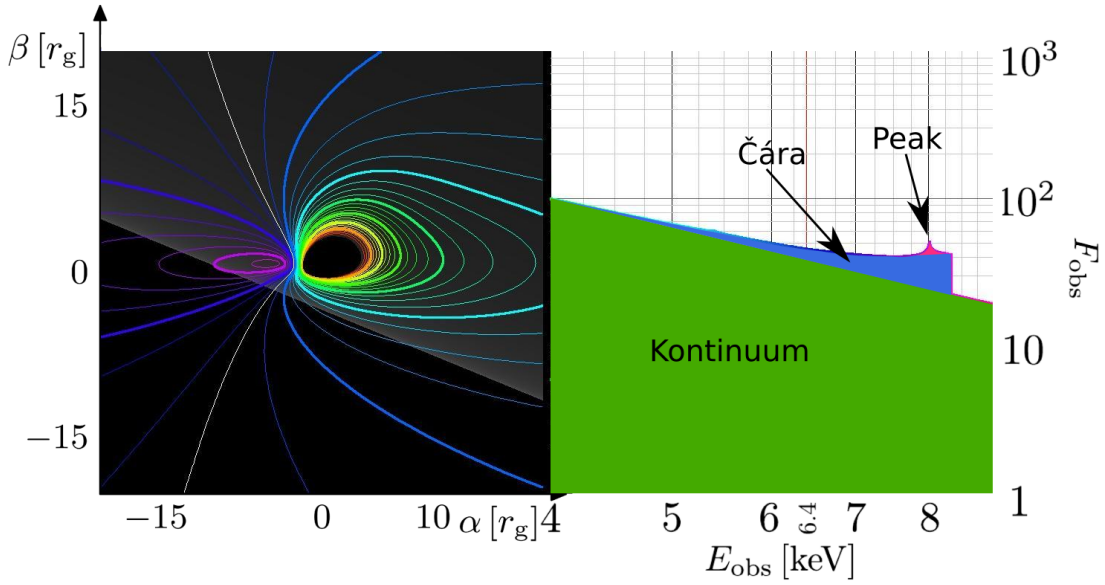
Naše simulace má několik parametrů. Jednak jde o závislosti specifických intenzit (kontinua a čáry) na vzdálenosti od černé díry, jednak o geometrické parametry: spin, inklinaci, směr kolmý na přicházející fold a sílu foldu (obecněji konkrétní tvar kaustické sítě). Směr kolmý na přicházející fold, nebo také orientaci, definujeme podle obrázku 3.3 analogicky s předchozí kapitolou. Síla foldu má vliv pouze jako multiplikativní konstanta, viz (3.7).

4.3 Výsledky numerické simulace časových závislostí spekter

Nejprve si řádně zadefinujeme, na jaké části spektrum dělíme. Je to jednak záření kontinua, které je během čočkování pouze násobeno příslušným zjasněním (díky tomu, že radiální index v použitém modelu nezávisí na energii), jednak záření čáry. Na čáře můžeme během čočkování pozorovat kromě základního tvaru dodatečné peaky (příklad znázorněn na Obr. 4.5 uprostřed) nebo hrany (viz spodní panel Obr. 4.4). Vše je ukázáno na Obr. 4.3.

Nejprve rozebereme podrobněji jeden z možných přechodů kaustiky přes disk. Na Obr. 4.4 a 4.5 je uvedena sekvence spekter a poloh kaustiky odpovídající jednomu konkrétnímu přechodu idealizovaného foldu přes disk. Jsou vybrány některé zajímavé polohy kaustiky a jim odpovídající spektra pro níže uvedené parametry. Tato spektra budou dále diskutována.

Celá simulace byla provedena pro extrémně rotující centrální černou díru (spinový parametr $a = 1$), s inklinací disku 70°, pro parametry $\Gamma = 2$, $q = 3$, $I^{\mathrm{Fe}}_0 = 3{,}8\,\mathrm{ph{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-2}{\cdot}sr^{-1}}$, $I^{\mathrm{cont}}_0 = 380\,\mathrm{ph{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-2}{\cdot}sr^{-1}{\cdot}keV^{-1}}$, sílu kaustiky $\tilde{y}_0 = 500\,r_{\mathrm{g}}$ a orientaci kaustiky $\psi = 2{,}761\,\mathrm{rad}$. Tento úhel byl zvolen záměrně, aby



Obr. 4.3: Rozdělení pozorovaného spektra na kontinuum (zeleně) a čáru (modře a růžově), dále pak rozdělení čáry na hladkou část (modře) a peak (růžově). Na levém panelu jsou kontury g-faktoru a poloha kaustiky odpovídající spektru napravo.

se na spektru vyskytovaly všechny studované efekty. Výše uvedené specifické toky nesouvisí s žádným kvasarem, jde pouze o ilustrační hodnoty, které nejsou podstatné pro následující diskusi.

V levé části je vyobrazen disk tak, jak by jej viděl pozorovatel vně Kerrova prostoročasu. Silnými linkami jsou vyznačeny kontury g-faktoru odpovídající celočíselné (v keV) pozorované energii čáry železa. Slabými linkami jsou vyznačeny izokřivky odpovídající čtvrtinám keVu. Jejich barva odpovídá barvě spetra na pravém panelu. Dále je zde ještě šedý stín označující polohu kaustiky. V pravé části je vyobrazeno jednak spektrum, které by bylo pozorováno bez čočkování, a jednak čočkované spektrum při poloze kaustiky vyznačené v levé části. Čočkované spektrum je vždy nad nečočkovaným, díky zjasnění světelného toku čočkováním. Obě škály jsou logaritmické. Časy opět měříme v jednotkách t_g, což je doba, za kterou se kaustika vůči disku posune v kolmém směru o jeden gravitační poloměr.

Nyní popíšeme, co je na jednotlivých spektrech na Obr. 4.4 a 4.5 a jim odpovídajících polohách kaustiky zajímavé. Pořadí budeme volit podle relevance nikoli chronologicky.

Na prvním obrázku v čase $t_1 = -10{,}38\,t_\mathrm{g}$ je kaustika ještě daleko od centra vyzařování, a proto je spektrum téměř nezasaženo čočkováním.

Na posledním obrázku z času $t_6 = 18{,}0\,t_\mathrm{g}$ má již čočkované spektrum tvar téměř identický jako v nečočkovaném případě, pouze je celkově zjasněné. Na spektru nepozorujeme téměř žádné efekty kromě slabého peaku u 7,6 keV (vysvětlení viz níže). Důvodem je to, že maximum emise na všech energiích vychází z centrální oblasti disku, která již leží dále od kaustiky a bude tedy pro všechny energie podobně zjasněna.

Pro čas $t_3 = 2{,}79\,t_\mathrm{g}$ pozorujeme kromě dvou slabých peaků výraznou hranu na energii 8 keV. Tato hrana je způsobena vnějším dotykem kaustiky s 8 keV kontu-

rou (obarvenou fialově), podrobněji budeme tento případ rozebírat v části 4.4.1. Podobné tvary na spektru lze pozorovat často, tzn. existují intervaly během kaustického přechodu, kdy můžeme pozorovat jednu nebo několik hran na různých energiích.

Dále v čase $t_5 = 8{,}77\,t_\mathrm{g}$ pozorujeme peak na energii 8 keV. Tento peak je způsoben vnitřním dotykem kaustiky s konturou odpovídající 8 keV. Tato situace bude dále studována spolu s tvorbou hrany v sekci 4.4.1. Stejně jako v případě hrany jde o častý jev.

V čase $t_4 = 4{,}41\,t_\mathrm{g}$ prochází kaustika bodem s maximální hodnotou g-faktoru. Pozorujeme nesymetrický peak přesně na hraně nečočkované čáry. Tuto situaci budeme rozebírat v sekci 4.4.3. Jde o vzácný případ, který nastane právě jedenkrát za celý kaustický přechod.

V čase $t_2 = 1{,}83\,t_\mathrm{g}$ je kaustika tečná ke kontuře odpovídající 6,25 keV a pozorujeme neobvyklý peak díky tomu, že tečný bod je zároveň inflexním bodem kontury. Tuto situaci budeme dále studovat v části 4.4.3. Poznamenejme, že jde o velmi speciální případ, který nastane pouze pro některé orientace kaustiky.

4.3.1 Jiné modely vyzařovaní akrečního disku

Pro modelování vyzařování akrečního disku budeme jednak používat model zavedený výše v sekci 4.2.3 a to převážně pro $q = 3$, jednak můžeme použít v tomto modelu např. $q = 8$, čímž se nám začne disk podobat spíše prstenci okolo centrální černé díry.

Další možnosti již nebudou studovány v této práci, spíše jde o výčet toho, co je možno dále studovat. Můžeme studovat prstencové disky, což způsobí jednak zmenšení počtu peaků i hran (generují se lokálně na disku, který takto zmenšíme), jednak se zvýší jejich relativní intenzita (budou mít stále stejnou absolutní výšku, ale bude potlačeno pozadí, což způsobí nárůst relativní výšky). Specifická intenzita je též zasažena limb-darkening efekty, tj. neizotropní emisí fotonů z povrchu disku. Tyto efekty budou mít vliv pouze na výšku peaků nikoli na jejich polohu, ta je dána geometrickým uspořádáním. Dále může být zdroj záření kontinua lokalizován jinde než je lokalizován zdroj záření železné čáry. Faktor zjasnění kontinua a čáry tím pádem nebude plně korelován, což zde předpokládáme. Opět to ale nemá vliv na hlavní výsledek – tvorbu peaků, pouze na jejich relativní výšku.

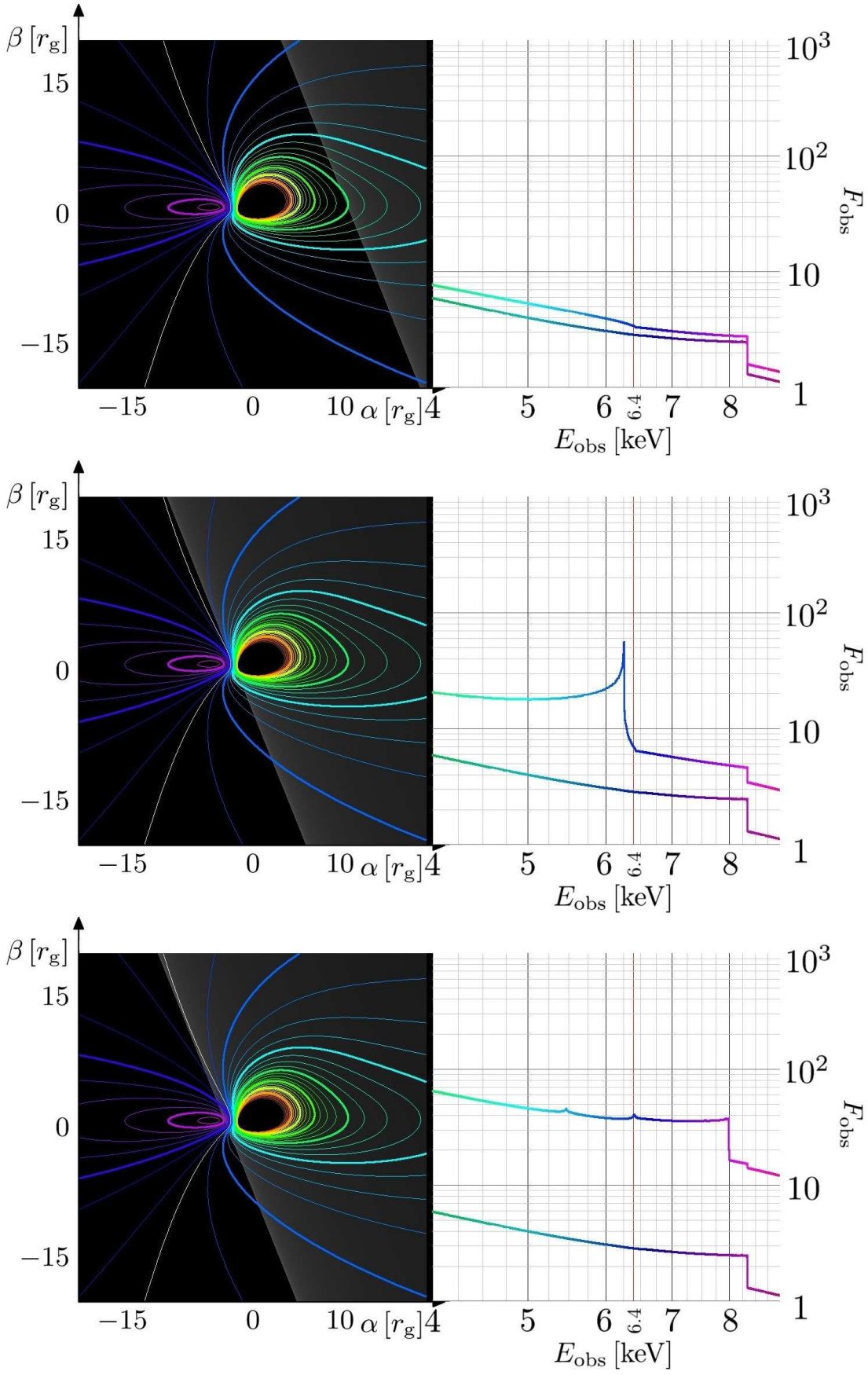
4.4 Analýza vzniku peaků a hran v profilu čáry

Na simulaci jsme pozorovali vznik peaků a hran. Peaky a hrany vznikaly, pokud byla kaustika tečná k některé kontuře g-faktoru. Ve spektru pak byly vidět právě na energii odpovídající tomuto g-faktoru. V této části zkusíme najít minimální model, který by dokázal popsat vznik spektrálních útvarů modelovaných výše.

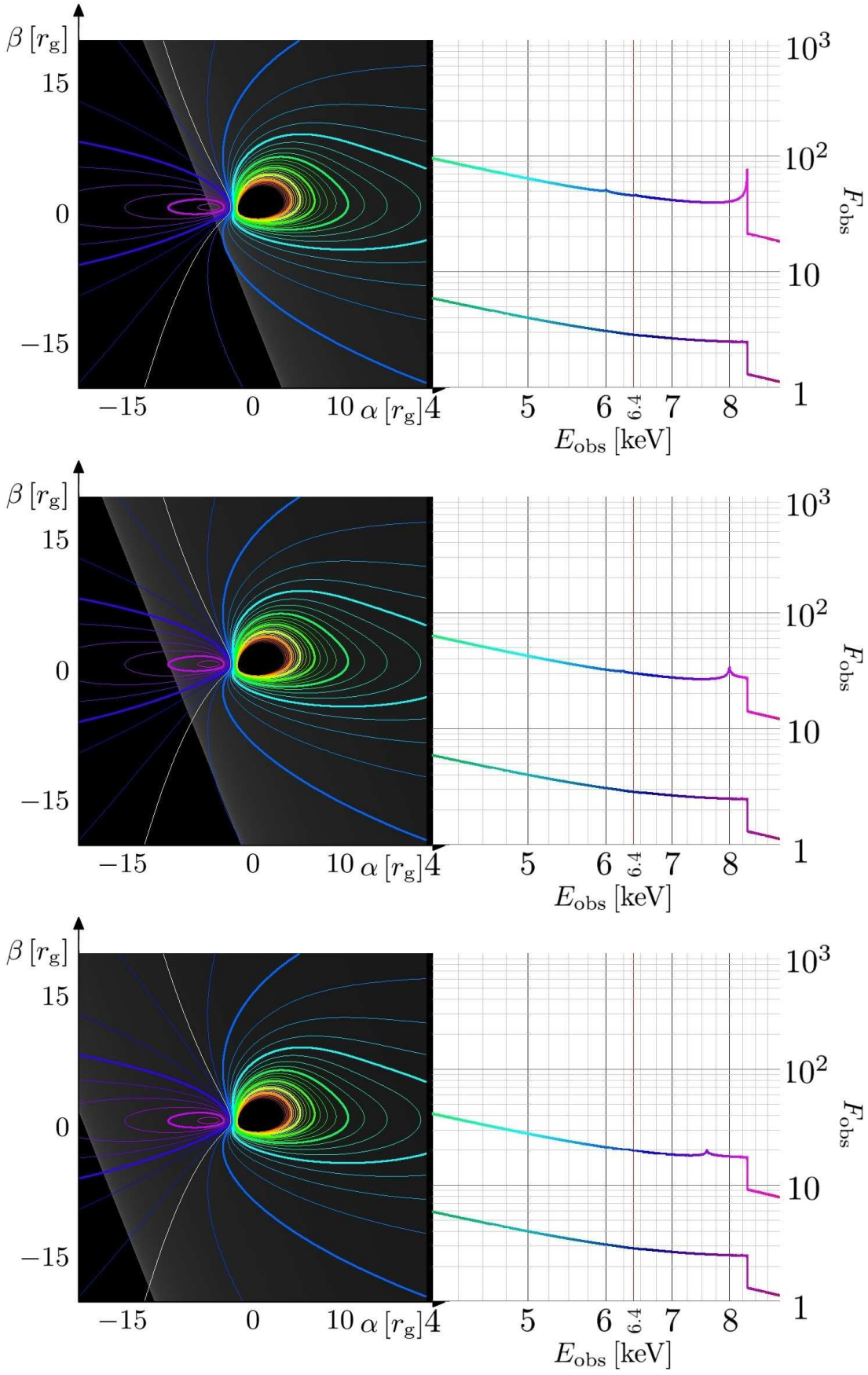
Proto budeme rozvíjet g-faktor lokálně do Taylorova polynomu

$$g(x', y') = g_0 + g_x x' + g_y y' + g_{xy} x' y' + \frac{1}{2} g_{xx} x'^2 + \frac{1}{2} g_{yy} y'^2 + \dots , \tag{4.4}$$

kde konstanty g_x, g_y, g_{xy} označují příslušné parciální derivace v bodě $(0, 0)$. Ze simulace víme, že pozorujeme odlišné spektrální útvary v případě, že jde o vnější



Obr. 4.4: Polohy kaustiky a odpovídající spektra pro časy $t_1 = -10{,}38\,t_\mathrm{g}$, $t_2 = -1{,}83\,t_\mathrm{g}$ a $t_3 = 2{,}79\,t_\mathrm{g}$. Podrobnější popis je v textu.



Obr. 4.5: Polohy kaustiky a odpovídající spektra pro časy $t_4 = 4{,}41\,t_\mathrm{g}$, $t_5 = 8{,}77\,t_\mathrm{g}$ a $t_6 = 18{,}0\,t_\mathrm{g}$. Podrobnější popis je v textu.

resp. o vnitřní dotyk kaustiky. Pokud bychom ale rozvíjeli g-faktor pouze do prvního řádu Taylorova rozvoje, tak by kontury byly přímkami a nemohli bychom rozhodnout, o jaký druh dotyku jde. Otočení kaustiky paralelní s těmito konturami o 180° je ekvivalentní záměně $g \to 2g_0 - g$ ve spektru, což je lineární transformace zrcadlící spektrum okolo bodu g_0. Nemůže tedy zapříčinit záměnu peaku a hrany. Musíme proto uvažovat alespoň druhý řád Taylorova rozvoje. Nejjednodušším rozvojem druhého řádu, který generuje zakřivené kontury je

$$g(x', y') = g_0 + g_y y' + \frac{1}{2} g_{xx} x'^2 \,, \tag{4.5}$$

kde $g_y \neq 0$ a $g_{xx} \neq 0$. Nejdříve proto budeme studovat tento model.

V celé této sekci budeme uvažovat jednotkovou sílu kaustiky, protože jde pouze o multiplikativní konstantu, pokud nebude uvedeno jinak.

4.4.1 První model rozvoje lokální struktury

Orientace kaustiky

V této části ukážeme, že nutnou podmínkou pro divergenci pozorovaného světelného toku je paralelnost kaustiky a kontur. Nejprve ukážeme analyticky nutnou podmínku divergence. Pak na simulaci předvedeme závislost tvaru spektra na vzájemné poloze kontur a kaustiky, ze které ukážeme, že nejde o podmínku postačující. Na druhou stranu ukážeme, že tento jednoduchý model je schopen generovat některé ze spektrálních tvarů nalezených v sekci 4.3.

Pro nalezení nutné podmínky pro divergenci pozorovaného specifického toku, určené vztahem (4.3), budeme uvažovat velmi malou oblast okolo kaustiky. Můžeme to udělat, protože integrujeme pouze přes omezenou oblast, tak integrál může divergovat pouze pokud diverguje integrand. Integrandy máme dva, jednak specifickou intenzitu, ta je součinem omezené funkce a delta-funkce, jednak amplifikační faktor. Delta-funkce se zbavíme integrací a zbude nám tak pouze křivkový integrál místo plošného

$$\iint \varphi(x,y)\delta[h(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\gamma \varphi(x,y)\frac{1}{|\nabla h|}\mathrm{d}t \,, \tag{4.6}$$

kde funkce $h(x,y)$ je nulová na křivce γ, křivka γ je parametrizována parametrem t odpovídajícím její délce a $\varphi(x,y)$ je libovolná testovací funkce. V našem případě budeme dosazovat $\varphi(x,y) = I(x,y)A(x,y)g(x,y)$ a $h = g(x,y) - g_0$, kde $g(x,y)$ je dáno vztahem (4.4).

- Pro případ, že $\sqrt{g_x^2 + g_y^2} > C_1$ na integrační oblasti, tj. nejsme v okolí extrému je $1/|\nabla h|$ omezená shora konstantou C_1^{-1}, tak jedinou funkcí, která může způsobit divergenci je $A(x,y)$. Specifickou intenzitu můžeme též odhadnout konstantou C_2 shora. Pro integrál (4.3) při použití identity (4.6) platí

  $$|F(g_0)| \leq \frac{C_2}{C_1}\int_\gamma A(x(t),y(t))\mathrm{d}t = \frac{C_2}{C_1}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{\tilde{y}(t)}}\mathrm{d}t \,,$$

  kde $\tilde{y} = y\cos\vartheta + x\sin\vartheta$ odpovídá rotaci souřadnic zavedené v sekci 4.2.1. Je vidět, že výraz na pravé straně je konečný, pokud v každém bodě t_0,

kde $\tilde{y}(t_0) = 0$ bude $\tilde{y}$ růst pomaleji než $(t - t_0)^2$. Jinými slovy to znamená, spektrum je omezené, pokud nejsou kontury tečné ke kaustice.
Podmínka $\tilde{y}(t_0) = 0$ je splněna pouze na kaustice. Pokud uvažujeme rozvoj g-faktoru pouze do druhého řádu, tak $\tilde{y}(t)$ může být nejvýše kvadratická, tak k divergenci integrálu může dojít pouze při vymizení lineárního členu z čehož vyplývá nutná podmínka divergence—*tečnost kaustiky a kontury.* Konkrétní rozbor pro různé modely je uveden níže.
Postačující podmínkou je (kromě splnění nutné podmínky), aby existovalo alespoň jednostranné neprázdné okolí P bodu t_0, pro které bude platit, že pro $\tilde{t} \in P$ je $(x(\tilde{t}), y(\tilde{t}))$ uvnitř kaustiky (tj. $y(\tilde{t}) < 0$ pro zde studovaný konkrétní případ). Tato podmínka je splněna pro vnitřní dotyk, ale nikoli pro dotyk vnější. Lze jí odvodit tak, že odhadneme specifickou intenzitu zdola a normu prvních derivací shora, dále budeme postupovat identicky.

- Je-li $g_x = g_y = 0$, tj. provádíme rozvoj okolo maxima, integrál může divergovat kvůli divergenci jak amplifikačního faktoru, tak nulovosti gradientu. Konkrétní diskuse bude provedena v sekci 4.4.3. V tomto případě nelze definovat směr kaustiky tečný ke konturám.

Nyní ukážeme výsledky simulace tvaru spektra generovaného na kruhovém okolí bodu $(x, y) = (0, 0)$. V rámci simulace jsme počítali numericky[1] integrál (4.3) na jednotkovém kruhu, za předpokladu konstantní specifické intenzity $I^{\mathrm{Fe}}_{\mathrm{obs}}$, pro g-faktor daný vztahem (4.5). Výpočet jsme provedli celkem pro osm různých orientací kaustiky vůči lokální struktuře g-faktoru. Výsledek je vidět na obrázku 4.6. Vidíme zde, že pro první tři orientace je na spektru peak. Pro druhou a třetí je způsoben tečností kaustiky s konturou mimo počátek, viz čárkovaná kontura. Na čtvrtém a pátém nepozorujeme žádný charakteristický tvar spektra. Hrany vygenerované čáry totiž pochází od okraje disku, kde lokální aproximace selhává. Na posledních třech náčrtcích pozorujeme na spektru místo peaku hranu. Nejdříve je způsobena tečností kontury neprocházející středem. Na posledním obrázku již způsobena konturou procházející středem. Zde můžeme vidět, že je-li kaustika tečná ke konturám, nejde o nutnou podmínku pro vznik divergence. Může například vzniknout hrana, jako v tomto případě. Na druhou stranu simulace ukazuje, že zajímavé chování nastává pouze pro případ, kdy je kaustika tečná ke konturám. Proto dále budeme rozebírat pouze tento případ. Z tohoto důvodu též sjednotíme naše dvě souřadné soustavy—budeme uvažovat

$$x \equiv \tilde{x} \qquad y \equiv \tilde{y}\,.$$

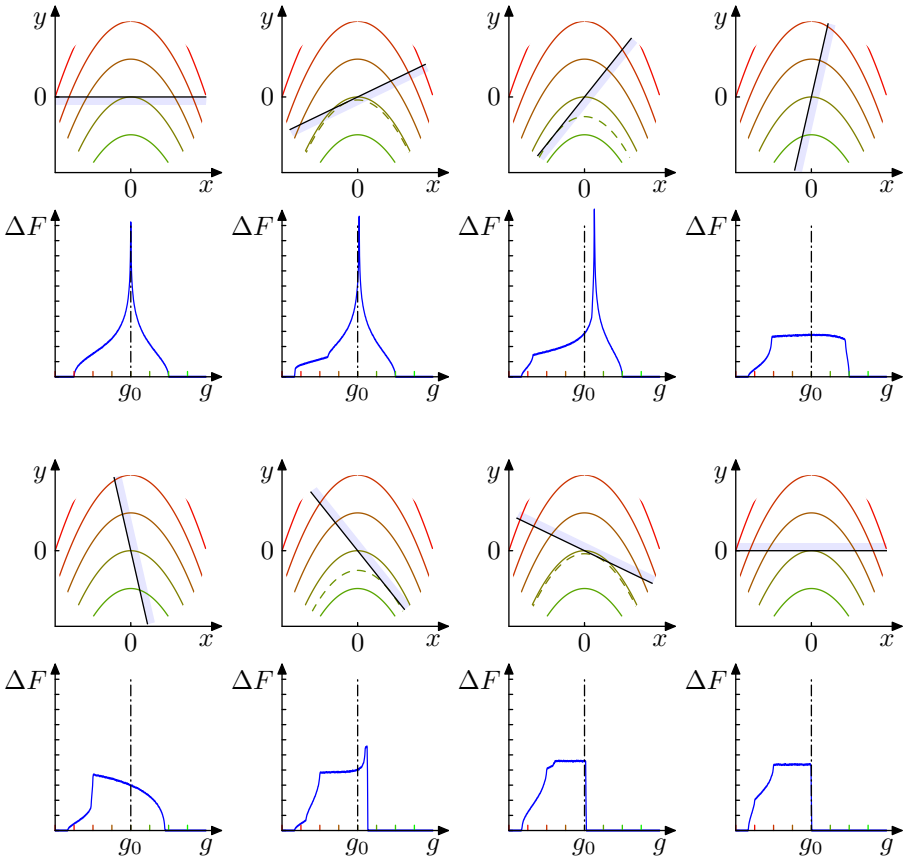
Asymptotický rozvoj

Zde se zaměříme na určení asymptotického rozvoje pro dva paralelní případy (kdy je kaustika paralelní s konturami) diskutované výše. Nejdříve si odvodíme vztahy, které budeme využívat v obou paralelních případech.

Opět budeme vyčíslovat integrál (4.3) na okolí počátku (x, y). Nejprve převedeme δ-funkci ve specifické intenzitě na g-faktor, abychom zobecnili úlohu pro libovolnou spektrální čáru. Platí

$$\delta\left[\frac{E}{g} - E_{\mathrm{Fe}}\right] = \frac{g}{E_{\mathrm{Fe}}}\delta\left[g - \frac{E}{E_{\mathrm{Fe}}}\right]\,.$$

[1] Použili jsme Monte-Carlo metodu.



Obr. 4.6: Tvary spektra pro různé orientace kaustiky vůči konturám g-faktoru. Obě osy jsou škálovány lineárně. Kontury g-faktoru (energie) barevně odpovídají dílkům na vodorovné ose. Čárkovanou čarou je v náčrtku geometrie označena kontura odpovídající energii peaku resp. hrany, čerchovanou čarou ve spektru je označena klidová energie čáry.

Jde o dvojrozměrný integrál, ale s δ-funkcí, proto jej lze přepsat na jednorozměrný, s použitím (4.6) a zaměnit integrační proměnnou za x, tj. $\mathrm{d}t = \sqrt{1 + g_x^2/g_y^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} F(g) &= \int_\gamma I_E(x(t), y(t)) A(x(t), y(t)) \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}} \mathrm{d}t \\ &= \int I_E(x, y(x)) A(x, y(x)) \frac{1}{|g_y|} \mathrm{d}x \,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde jsme vybrali jednu konkrétní parametrizaci $\gamma : (x, y(x))$ a označili $I_\mathrm{E} = g/E_\mathrm{Fe} I_\mathrm{obs}^\mathrm{Fe}$. Z uvažovaného rozvoje energetického posunu (4.5) získáme integrační křivku explicitně

$$y(x) = \frac{g - g_0 - \frac{1}{2} g_{xx} x^2}{g_y} \,, \tag{4.8}$$

kde g indexuje jednotlivé kontury. Dále nás bude zajímat pouze vedoucí člen rozvoje, proto budeme pro jednoduchost integrovat v mezích $[-1, 1]$. Pro identický výpočet se simulací na jednotkovém kruhu by bylo třeba brát v potaz meze odpovídající průsečíku disku s parabolami (4.8). Naše zjednodušení však pro získání tvaru divergence stačí, jak ukážeme později na Obr. 4.7.

Nyní již přistoupíme k vlastnímu určování asymptotiky specifického světelného toku pro vnitřní resp. vnější dotyk, tj. odpovídající první resp. poslední situaci na Obr. 4.6. Ve výpočtu budeme uvažovat konstantní specifickou intenzitu velikosti I_0.

Asymptotický rozvoj pro vnitřní dotyk

V této části budeme řešit situaci z prvního náčrtku na Obr. 4.6. Integraci rozdělíme na dva případy, a to $g > g_0$ a $g < g_0$, protože se kvůli průsečíku s kaustikou mění integrační křivka. BÚNO předpokládáme, že $g_y > 0$ i $g_{xx} > 0$.

Pro $g < g_0$ je integrační křivka (4.8) souvislá a integrál (4.7) přejde do tvaru

$$\begin{aligned} F(g) &= I_0 \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{g_y}{\frac{1}{2}g_{xx}x^2 + g_0 - g}} \frac{1}{|g_y|} \mathrm{d}x \\ &= 2I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{g_{xx}}{2(g_0 - g)}} \,. \end{aligned}$$

Pokud $g_0 - g \ll 1$, tak můžeme $\sinh^{-1}$ rozvést na okolí nekonečna.

$$\sinh^{-1}(z) = \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) \approx \ln(2z) = \ln 2 + \ln z \,.$$

Ve vedoucím řádu tak dostáváme specifický tok

$$F(g) \sim -I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \ln(g_0 - g) \,.$$

Pro $g > g_0$ budeme integrovat pouze v mezích $[-1, -x_0]$ a $[x_0, 1]$, kde $x_0 = \sqrt{2(g - g_0)/g_{xx}}$ je průsečíkem energetické kontury (4.8) s kaustikou. Vzhledem k sudosti integrandu platí

$$\begin{aligned} F(g) &= 2\int_{x_0}^{1} I_0 \sqrt{\frac{g_y}{\frac{1}{2}g_{xx}x^2 + g_0 - g}} \cdot \frac{1}{|g_y|} \mathrm{d}x \\ &= 2I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \int_{x_0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - \frac{2}{g_{xx}}(g - g_0)}} \\ &= 2I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \cosh^{-1} \sqrt{\frac{g_{xx}}{2(g_0 - g)}} \,. \end{aligned}$$

Dále pro $g - g_0 \ll 1$ můžeme inverzní hyperbolický kosinus rozvést okolo nekonečna, platí

$$\cosh^{-1}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \approx \ln 2 + \ln z \,.$$

Pro specifický tok tak dostáváme identický výsledek, akorát s opačným znaménkem u argumentu logaritmu. Můžeme tedy uzavřít, že divergentní příspěvek ke spektru má rozvoj okolo bodu dotyku

$$F(g) \sim -I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \ln|g_0 - g| \,. \tag{4.9}$$

Asymptotický rozvoj pro vnější dotyk

V této část budeme řešit situaci z posledního náčrtku na Obr. 4.6. Opět rozdělíme integraci na dva případy dle znaménka $g - g_0$, předpokládáme kladnost derivací g-faktoru jako výše a aplikujeme rotaci o úhel π na zjasnění. To je ekvivalentní zmámeně $g_y \to -g_y$.

Pro $g < g_0$ je integrační křivka (4.8) mimo vnitřní oblast kaustiky, proto je příspěvek kaustiky ke specifickému toku nulový.

Pro $g > g_0$ je integrační křivka protnuta kaustikou, proto integrál (4.7) přejde do tvaru (opět jsme využili sudosti integrandu a definice x_0 z předešlého případu)

$$\begin{aligned} F(g) &= 2\int_0^{x_0} I_0 \sqrt{\frac{g_y}{g - g_0 - \frac{1}{2}g_{xx}x^2}} \cdot \frac{1}{|g_y|}\mathrm{d}x \\ &= 2I_0\sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}}\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{g_{xx}}(g-g_0) - x^2}} \\ &= \pi I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}}\,. \end{aligned}$$

Při přiblížení z opačné strany je tedy specifický tok konstantní. Proto označíme-li $H(x)$ skokovou funkci, můžeme pro příspěvek psát

$$\Delta F(g) = \pi I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} H(g - g_0)\,, \tag{4.10}$$

zde jde přitom o zvýšení vůči konstantně zjasněnému toku vně kaustiky.

Znaménka derivací

V úvaze výše jsme předpokládali kladnost obou uvažovaných derivací a ve druhém případě jsme otáčeli s kaustikou nikoli s konturami. Směr vzrůstu energie na Obr. 4.6 (kontury odshora dolů) však podle vztahu (4.8) vyžaduje $g_y < 0$ a $g_{xx} < 0$. Zobecníme tedy výsledky pro případ, kdy je kaustika statická s orientací do oblasti $y < 0$ (jako na prvním panelu Obr. 4.6) a manipulujeme s pouze derivacemi.

Pokud změníme znaménko první i druhé derivace, je to identické, jako bychom provedli substituci $g \to 2g_0 - g$, což má za následek levopravé převrácení pozorovaných spekter okolo g_0. Pro asymptotiku vnitřního dotyku žádná změna nenastane a můžeme shrnout, že pro $g_y g_{xx} > 0$ nastává vnitřní dotyk.

Při opačných znaménkách g_y a g_{xx} dostaneme z výrazu (4.8) paraboly otočené směrem vzhůru. S ohledem na orientaci kaustiky tedy situace $g_y g_{xx} < 0$ odpovídá vnějšímu dotyku. Pokud $g_y > 0$, kontury s vyšším g budou na vyšších hodnotách y a hrana ve spektru bude spadat smerem k vyssim energiím. Naopak, při $g_y < 0$ budou kontury s nižším g na vyšších hodnotách y a hrana bude spadat směrem k nižším energiím.

Asymptotický rozvoj – závěr

Ukázali jsme, že dotýká-li se kontura g-faktoru z vnitřní strany, tj. $g_y g_{xx} > 0$ při orientaci kaustiky do poloroviny $y < 0$, tak se spektrum asymptoticky chová jako

$$F(g) \sim -I_0 \sqrt{\frac{2}{g_y g_{xx}}} \ln|g_0 - g|\,,$$

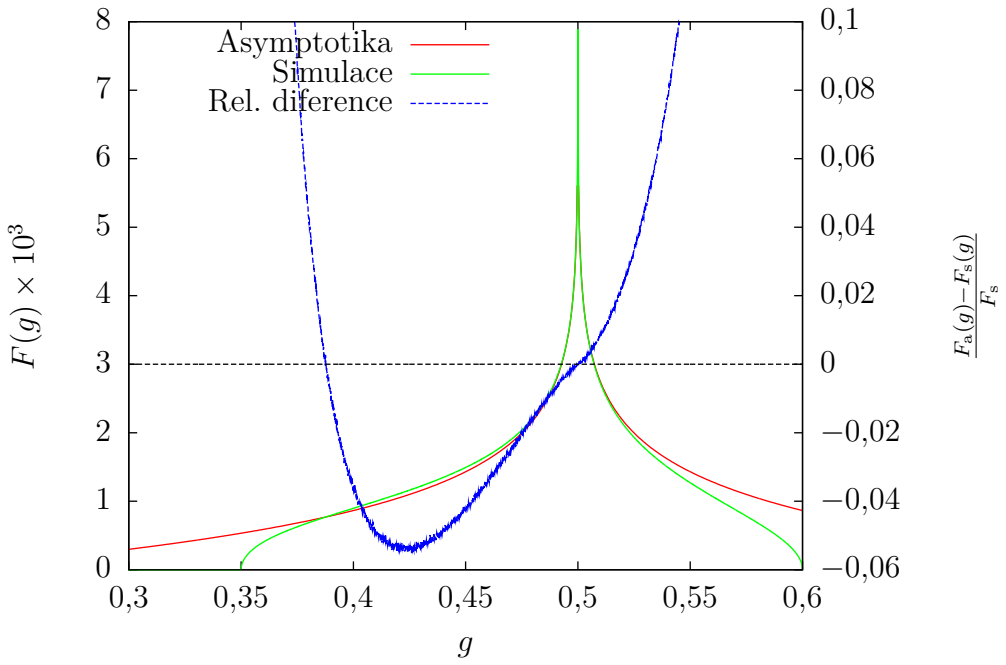
a dotýká-li se z vnitřní strany ($g_y g_{xx} < 0$), tak v asymptotickém případě platí

$$\Delta F(g) = \pi I_0 \sqrt{\frac{-2}{g_y g_{xx}}} H\left[(g_0 - g)\,\mathrm{sgn}\,(g_y)\right] .$$

V dalším textu budeme označovat $P_0 = \sqrt{2/(g_{xx} g_y)}$ a $P = P_0 I_0$. Dále se tedy budeme při studiu výrazných spektrálních rysů zabývat již pouze situacemi, kdy je kaustice tečná k některé energetické kontuře.

Srovnání asymptotického rozvoje a simulace

Na Obr. 4.7 jsou srovnány asymptotické rozvoje s integrací přes kruhovou oblast. Je vidět, že pro hodnoty v okolí peaku, kde ještě nemají vliv okrajové podmínky, ze obě spektra velmi dobře shodují. Parametry kontur jsou stejné jako na Obr. 4.6.

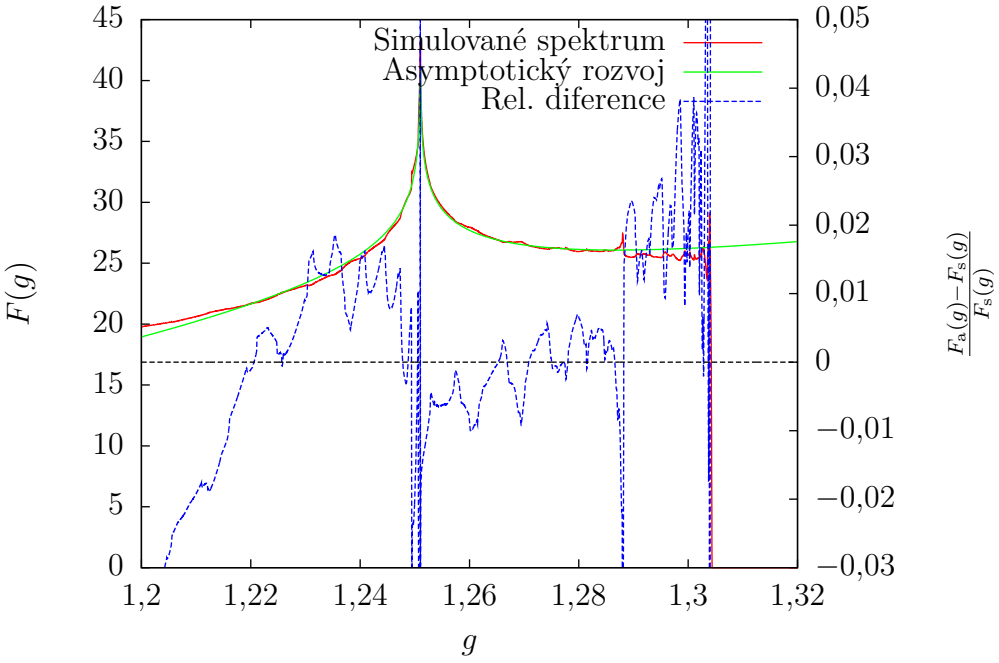


Obr. 4.7: Srovnání asymptotického rozvoje spektra a přesné integrace přes kruhovou oblast. Na levé ose jsou specifické světelné toky, na pravé je relativní rozdíl asymptotického rozvoje (4.9) se spektrem z Obr. 4.6. K asymptotice byla přičtena konstantní funkce tak, aby absolutní rozdíl specifických toků v maximu byl nulový.

Dále budeme ověřovat platnost modelu tak, že budeme fitovat spektra se simulace 4.4 a 4.5 asymptotickým modelem (4.9), ke kterému budeme jako pozadí přičítat lineární funkci. Koeficienty lineární funkce budeme volit tak, aby v okolí peaku byla minimální absolutní odchylka spektra a modelu.

Na Obr. 4.8 je znázorněno srovnání simulovaného tvary peaku se spektrem z prostředního panelu Obr. 4.5. Od spektra bylo odečteno záření kontinua a bylo fitováno součtem předpokládané logaritmické asymptotiky (4.9) a lineárního pozadí na intervalu g-faktoru (1,22, 1,28). Vidíme, že fit velmi dobře sedí, protože odchylka v tomto spektrálním rozsahu nepřesahuje 1 %. Pouze v centrální oblasti

je odchylka větší. To je způsobeno metodou výpočtu spektra v simulacích 4.4 a 4.5, kde je g-faktor nahrazován po částech lineární funkcí. Koeficienty fitu jsou $g_0 = 1{,}25101 \pm 0{,}00005$ a faktor před logaritmem $P = 0{,}1147 \pm 0{,}0002$. Určíme-li v daném bodě velikosti prvních a druhých derivací, dostaneme dle vztahu (4.9) geometrický faktor 0,124. Hodnota extrému g-faktoru podél kaustiky[2] je 1,25, což se shoduje s polohou peaku. Vidíme, že výsledky fitu se shodují s předpovědí. Na Obr. 4.7 též vidíme, že pro energii odpovídající $g \doteq 1{,}304$ se na spektru objevuje hrana, která odpovídá maximální dosahované hodnotě g-faktoru, což je důvodem selhání logaritmické aproximace peaku pro větší hodnoty g-faktoru.



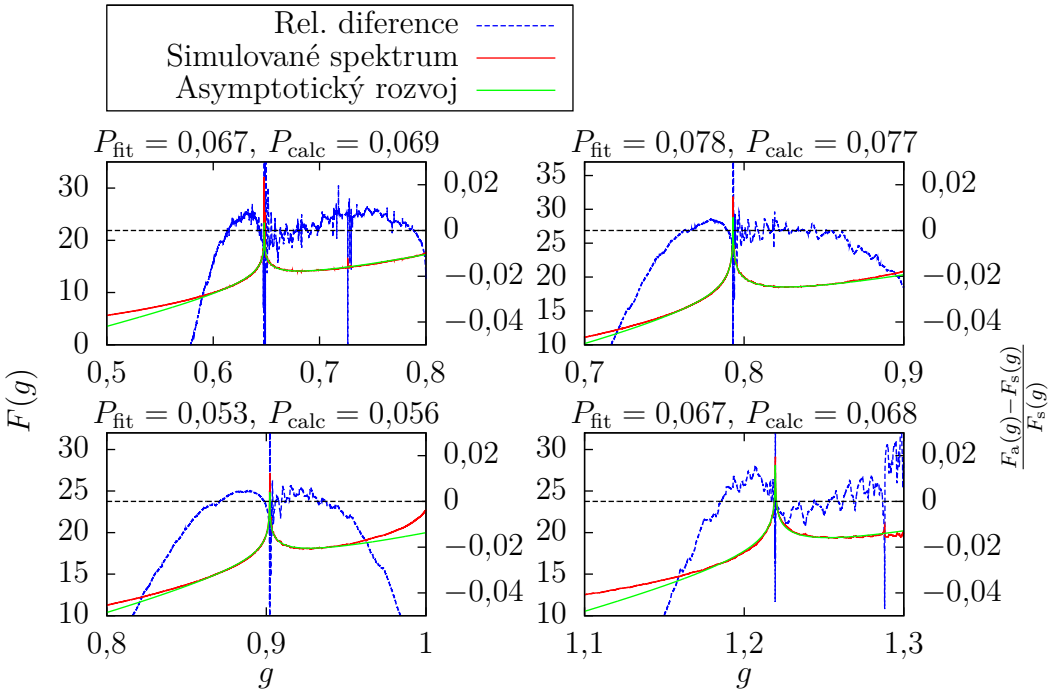
Obr. 4.8: Srovnání reálného tvaru peaku (po odečtení kontinua) z Obr. 4.5 (druhý případ) s asymptotickým rozvojem. Na levé ose jsou specifické toky a na pravé ose je relativní diference mezi asymptotiku s přičteným pozadím a simulací. Kromě peaku je na spektru vyobrazena i hrana odpovídající konci spektra čáry.

Na Obr. 4.9 jsou uvedeny další příklady peaků pro studovaný kaustický přechod. Nafitované energie peaku se velmi dobře shodují s hodnotami extrémů g-faktoru podél jednotlivých poloh kaustiky. Výšky peaků P se též velmi dobře shodují mezi fitem a analytickým výpočtem.

Závislost tvaru peaku a hrany na velikosti oblasti

Abychom ještě lépe ilustrovali postupnou tvorbu divergence, je na levé části Obr. 4.10 vyobrazeno, jaké části spektra se generují v jaké vzdálenosti od tečného bodu. Na náčrtku s konturami jsou barevně vyznačené prstence a jim odpovídající části světelného toku při rozšiřování prstence zvnějšku směrem dovnitř. Opět vidíme, že část specifického toku generující divergenci vychází z centrální oblasti, vzdálenější prstence již negenerují divergentní příspěvek. Vidíme, že pro vygenerování logaritmické asymptotiky je zapotřebí pouze nejmenší modrá oblast. Pro

[2]Extrému se nabývá v bodě, kde je kontura g-faktoru tečná ke kaustice.



Obr. 4.9: Další příklady peaků a jejich fitů. Značení je stejné jako na Obr. 4.8. Spektra odpovídají časům přechodu $t/t_{\text{g}} \in \{2{,}00, 2{,}40, 3{,}40, 12{,}30\}$. V titulku je uvedena hodnota faktoru ze vztahu (4.9) určeného jednak fitem, jednak z derivací g-faktoru v bodu dotyku. Faktory P_{fit} byly vyděleny odmocninou ze síly kaustiky ($\tilde{y}_0 = 500\, r_{\text{g}}$).

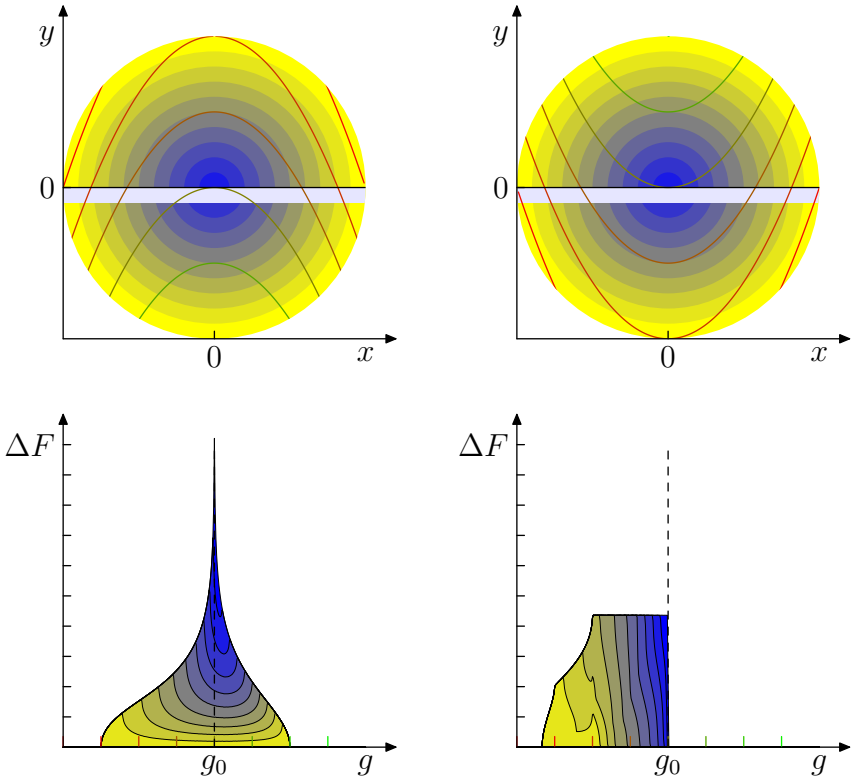
hranu vidíme, že všechna mezikruží neobsahující počátek generují spojitý příspěvek ke spektru. Až vnitřní kruhová oblast vytvoří samotnou hranu.

Na Obr. 4.11 je uvedeno skoro totéž, ale začínáme od vnitřního kruhu (pak mezikruží), rozšiřujeme směrem ven. Opět vidíme, že divergenci generuje již prostřední kruh, ale další mezikruží rozšiřují oblast, kde můžeme použít asymptotickou aproximaci, modelují křídla peaku a rozšiřují jej. Větší oblast tedy znamená větší rozsah g-faktoru, kde je tato aproximace platná. Jak ukážeme později, tato oblast může být zmenšena také příliš velikými derivacemi specifické intenzity. Pro hranu zde vidíme, že větší poloměr kruhu znamená širší oblast, kde je specifický tok konstantní. Tento výsledek poukazuje na širší oblast aplikovatelnosti našeho asymptotického rozvoje.

4.4.2 Zbylé členy kvadratické aproximace

Až dosud jsme se zabývali pouze jedním z kvadratických členů v Taylorově rozvoji (4.4) a zbylé dva jsme zanedbávali (lineární člen g_x je nulový z podmínky na tečnost kontury ke kaustice). Proto se podíváme na vliv těchto zbylých kvadratických členů na spektrum.

Z výše uvedené poznámky bychom mohli usuzovat, že ostatní dva kvadratické členy nebudou mít vliv na asymptotiku, ale budou pouze modulovat křídla peaku. Přesvědčit se o tom můžeme např. simulací. Na Obr. 4.12 jsou vyobrazena spektra odpovídající nulovým resp. nenulovým derivacím g_{xy} a g_{yy}. Dále je zde uveden relativní rozdíl specifických toků vůči logaritmické asymptotice spektra



Obr. 4.10: Ukázka postupné konstrukce peaku a hrany na zvětšující se oblasti. Postupně přidáváme mezikruží od zevního.

bez příspěvku g_{xy} a g_{yy}. K logaritmu přičítáme konstantu tak, aby rozdíl simulovaného spektra a logaritmu byl na okolí extrému nulový. Vidíme, že rozdíl je omezenou a v nejbližším okolí peaku lineární funkcí, tedy můžeme usuzovat, že zbylé dvě druhé derivace opravdu nezasahují do hlavní asymptotiky.

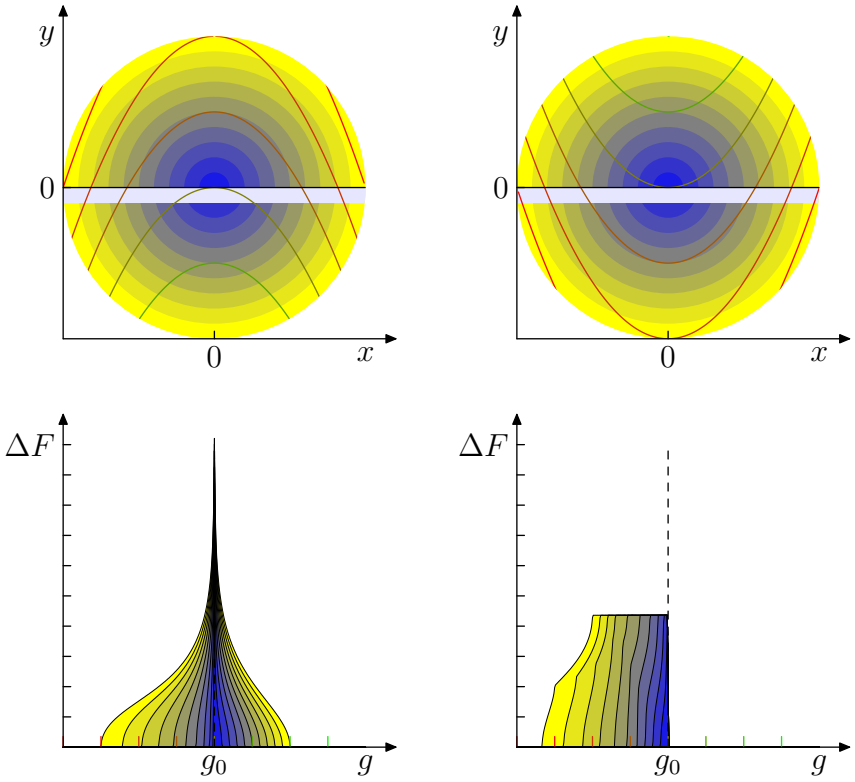
Definice výšky peaku

Zavedeme výšku peaku, a to tak, že si zvolíme interval okolo peaku, pozadí aproximujeme lineární funkcí, odečteme jej, a plochu peaku vydělíme délkou zvoleného intervalu. Dále ukážeme, že tato definice je vhodná pro logaritmické peaky, protože nezávisí na volbě intervalu, pokud můžeme pozadí aproximovat lineární funkcí.

Nyní se budeme zabývat intervalem g-faktoru $\mathcal{I} = (g_0 - \Delta g, g_0 + \Delta g)$, kde g_0 je poloha peaku a Δg poloměr nějakého okolí. Pro dané Δg můžeme vypočítat plochu peaku danou výrazem $\int_{g_0-\Delta g}^{g_0+\Delta g} F(g)\mathrm{d}g$. Protože se však zabýváme přírůstkem spektra, měli bychom od plochy odečíst „pozadí“, které budeme aproximovat lineární funkcí spojující body $F(g_0 - \Delta g)$ a $F(g_0 + \Delta g)$. Chceme-li určit výšku dle uvedené definice, podělíme tento výraz ještě délkou intervalu $2\Delta g$. Pro výšku dostáváme

$$h_{\Delta g}[F] = \frac{\int_{g_0-\Delta g}^{g_0+\Delta g} F(g)\mathrm{d}g}{2\Delta g} - \frac{1}{2}\left(F(g_0 - \Delta g) + F(g_0 + \Delta g)\right) . \tag{4.11}$$

Zkusíme nyní vyčíslit tento výraz pro nejtypičtější peak s lineárním pozadím $F_\mathrm{a}(g) = a + bg - P \ln|g - g_0|$, tj. asymptotický rozvoj (4.9). Dosazením do vztahu (4.11) dostaneme $h_{\Delta g}[F_\mathrm{a}] = P$. Takto definovaná výška peaku nezávisí na



Obr. 4.11: Ukázka postupné konstrukce peaku a hrany na zvětšující se oblasti. Postupně přidáváme mezikruží od vnitřního.

volbě parametru Δg a lze jí velmi jednoduše vyčíslit z pozorovaného spektra. Navíc dává přímo hodnotu faktoru před logaritmem. Můžeme proto skoro okamžitě určit velikost specifické intenzity čáry na disku v tečném bodě.

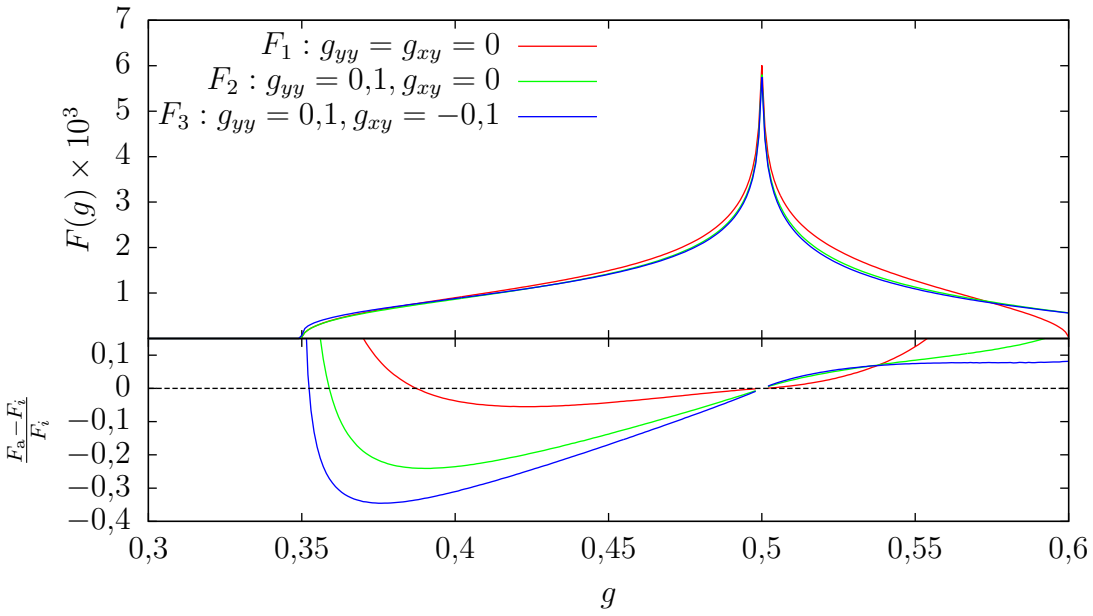
4.4.3 Selhání kvadratické aproximace

Interval platnosti aproximace

Interval g-faktoru, kde je výše studovaná aproximace platná, souvisí s velikostí kruhové oblasti na disku okolo bodu dotyku, kde je použitelný rozvoj g-faktoru do druhého řádu. Poloměr této oblasti tedy závisí na velikosti třetích derivací. Podle velikosti kruhové oblasti, kde platí kvadratická aproximace můžeme odhadnout rozsah energií, kde bude logaritmická či skoková aproximace platná. Velikost oblasti může být ovlivněna i velikostí derivací specifické intenzity.

Divergence amplifikačního faktoru

Ukázali jsme, že asymptotické rozvoje (4.9) a (4.10) jsou použitelné též pro případ, kdy jsou nenulové všechny druhé derivace. Zajisté ale může nastat případ, kdy nejednodušší model zakřivených kontur (4.8) nebude vhodný.To může nastat ve dvou případech, jednak je-li $g_{xx} = 0$, jednak pro $g_y = 0$. První případ odpovídá situaci, kdy je kaustika tečná k inflexnímu bodu na kontuře. Druhý případ odpovídá průchodu kaustiky přes maximum (minimum, sedlový bod) g-faktoru. Pro naše modely vyzařování se minimum a sedlový bod g-faktoru nerealizuje. Nebudeme se jimi tedy dále zabývat.



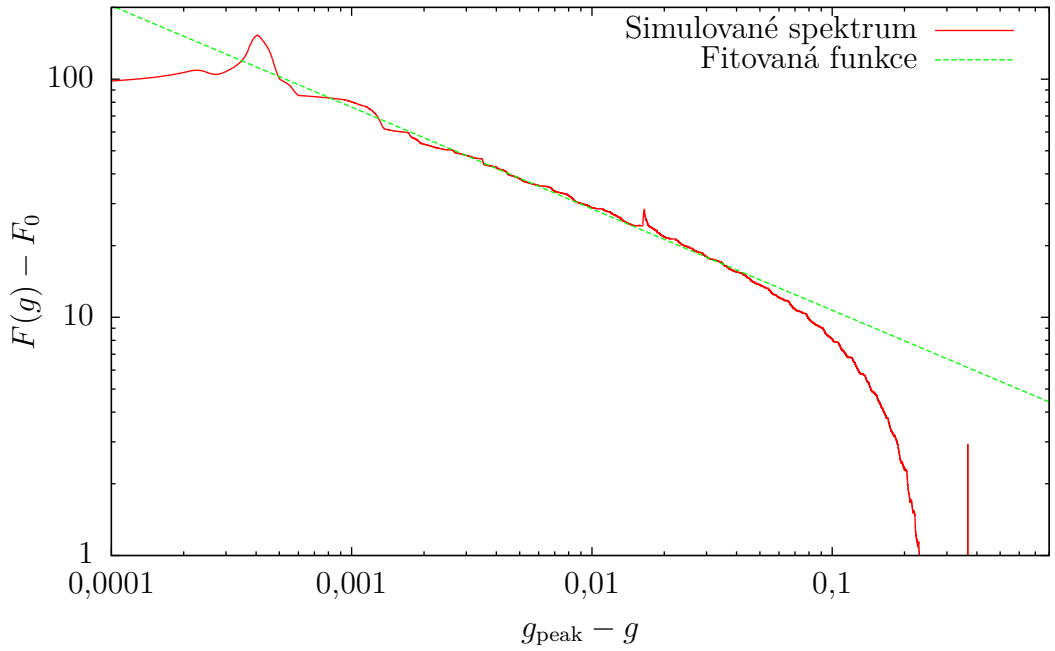
Obr. 4.12: Závislost tvaru spektra na derivacích g_{yy} a g_{xy}. Na horním panelu jsou uvedena simulovaná spektra kruhového zdroje odpovídající různým hodnotám zbylých druhých derivací (derivace g_y a g_{xx} držíme konstantní, což zaručuje stejnou asymptotiku). Na spodním je uvedena rel. odchylka od asymptotiky spektra bez těchto derivací (F_1) ke které opět přičítáme konstantní funkci.

Očekáváme, že v těchto případech bude výška peaku větší (předpovídá nám to jednodušší model), proto se jimi budeme dále zabývat. I když jsou vzácnější, viz diskuse u popisu Obr. 4.4 a Obr. 4.5, produkovaný světelný tok by měl být velmi vysoký.

Vymizení prvních derivací

První derivace g-faktoru vymizí v lokálních maximech g-faktoru. Maximum máme na disku právě jedno pro větší inklinace ($i > 50°$), pro menší inklinace se buď nachází ve vzdálenosti $> 20\,r_g$ nebo neexistuje, viz Obr. 4.15. Ať bude kaustika přicházet z libovolného směru, vždy jej protne. Na Obr. 4.13 je detail spektra v okamžiku, kdy kaustika protíná maximum (viz Obr. 4.5 horní panel). Spektrum bylo fitováno funkcí $F(g) = A + B(g_0 - g)^C$ přes všechny čtyři parametry, z nichž nás zajímá hlavně parametr C. Fitováním v GNUPlotu vyšlo $C = -0{,}38 \pm 0{,}11$. Tedy v tomto případě jde dokonce o mocninnou divergenci nikoli pouze o logaritmickou. Lze tedy předpokládat, že peak bude výraznější než v případě divergence logaritmické. Šum na spektru je způsoben opět použitou integrační metodou.

Použijeme-li náš „kolečkový model zdroje“, tj. omezíme se na kruhovou oblast na disku, a dosadíme-li rozvoj g-faktoru okolo maxima, můžeme fity zjistit, že hlavní asymptotika spektra je $(g_0 - g)^{-0{,}40}$ nezávisle na zkoušených velikostech druhých derivací, což je ve shodě s fitem kompletního spektra.

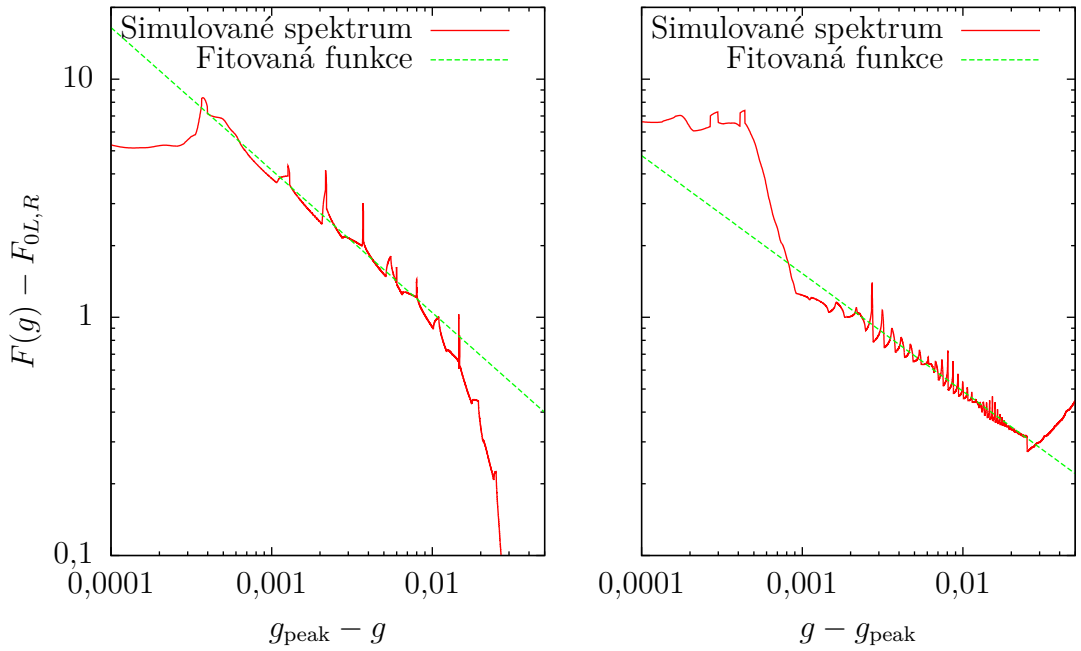


Obr. 4.13: Fit spektra pro případ, kdy kaustika prochází maximem g-faktoru. Fitováno bylo pro hodnoty $g_{\mathrm{peak}} - g \in (4 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-2})$.

Vymizení druhé derivace v tečném směru

Druhým případem selhání kvadratické aproximace je vymizení druhé derivace v tečném směru. K této situaci dochází v inflexních bodech jednotlivých kontur g-faktoru. Ty dohromady vytvářejí speciální křivky v rovině (α, β). Pro různé inklinace pozorujeme různý počet těchto křivek. Můžeme to vidět na výsledcích simulace na Obr. 4.15, kde právě na těchto křivkách divergují výšky peaků počítané podle (4.9) z jednoduchého modelu (4.8). Pro menší inklinace se v centrální oblasti disku tento efekt nevyskytuje, pro vyšší inklinace disku existuje na disku dokonce více křivek, kde se tato degenerace vyskytuje. Zdá se, že tento jev může být výrazný i ve velké vzdálenosti od centra disku. Jeho význam v těchto případech bude snížen díky radiálnímu poklesu intenzity. Např. radiální index $q = 5$ je již dokáže potlačit, viz Obr. 4.16.

Na Obr. 4.14 je detail spektra ze simulace na Obr. 4.4 (druhý panel). Spektra byla opět fitována mocninnou funkcí jako v předešlém případě. Dovolili jsme ale, aby na obou stranách byl odlišný vertikální posun, proto se spektra na ose peaku nesetkala. Pro levou stranu peaku fitováním v GNUPlotu vyšel sklon $C_{\mathrm{L}} = -0{,}59 \pm 0{,}21$ a pro pravou část peaku vyšel sklon $C_{\mathrm{R}} = -0{,}49 \pm 0{,}04$. Menší odchylka je způsobena fixací parametru g_0 při tomto fitu. Pro tyto exponenty nemáme ověření pomocí modelu uvažujícího pouze kruhový výřez disku. Tuto degeneraci chceme v budoucnu studovat podrobněji.



Obr. 4.14: Fit spektra pro případ inflexního bodu na kontuře g-faktoru pro levou a pravou stranu peaku. Spektra byla posunuta vertikálně i horizontálně. Vertikální posun je odlišný, horizontální stejný. Levé okolí bylo fitováno na intervalu $g_{\text{peak}} - g \in (6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-3})$, pravé na intervalu $g - g_{\text{peak}} \in (3 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-2})$.

4.5 Aplikace asymptotického rozvoje peaku na akrečním disku

V této části uvedeme mapy výšek peaků (faktorů před logaritmem) pro různé inklinace a oba hlavní případy spinu $a = 1$ (extrémní Kerr) a $a = 0$ (Schwarzschild). Podíváme se také na rozdíly mezi výsledky pro různé radiální indexy, a to $q = 3$, $q = 5$ a $q = 8$, kde disk připomíná spíše prstenec.

V této sekci budeme podle analýzy v kapitole 4.4.1 označovat $P_0 = \sqrt{2/(g_{xx}g_y)}$ a $P = I_0 P_0$, kde I_0 je specifická intenzita ze vztahu (4.9).

4.5.1 Závislost na inklinaci

Nejprve se zaměříme na závislost map na inklinaci. Budeme používat $\{I_0^{\text{Fe}}\} = 3{,}8$, radiální index $q = 3$, jako v úvodní simulaci. Na Obr. 4.15 jsou výsledky pro spin černé díry $a = 1$ a inklinace $i \in \{10°, 30°, 50°, 70°, 75°, 80°\}$. Na mapách jsou fialovými křivkami vykresleny kontury g-faktoru (s krokem 0,25 keV), tj. podél kterých musí být kaustika orientována, aby se na spektru objevil peak výšky označené odpovídající barvou.

Na prvním panelu Obr. 4.15 vidíme skoro face-on disk, kde je výška peaku skoro konstantní. Na druhém panelu pro inklinaci 30° se již objevuje oranžová křivka, na které amplifikační faktor diverguje (je to spojnice inflexních bodů kontur g-faktoru). Na dalším panelu pro inklinaci 50° se objevuje navíc ještě bodová divergence odpovídající maximu g-faktoru. Na dalším panelu pro $i =$ $= 70°$ se maximum g-faktoru přibližuje k horizontu, ale také roste výška peaku

v pravém horním rohu. Pro inklinaci 75° se v prvním kvadrantu objeví další křivka procházející inflexními body. Na posledním panelu pro $i = 80°$ se objevuje navíc ještě jedna divergentní křivka ve druhém kvadrantu, ale v současné době nejsme schopni říci, zdali se jedná o numerický artefakt nebo skutečná data, protože v této oblasti je výpočet zvláště druhých derivací g-faktoru obtížný.

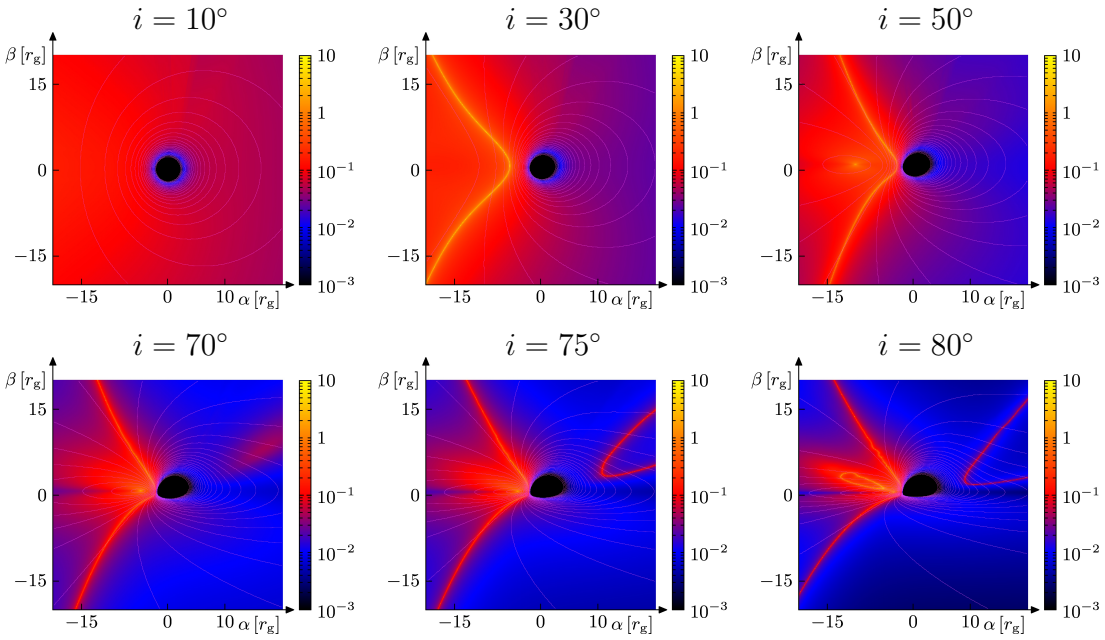
Obecně vidíme, že s rostoucí inklinací se kompaktifikuje oblast vysokých peaků. Výsledky také naznačují, že i ve vzdálenosti $20\,r_{\mathrm{g}}$ je možno generovat značně silný peak na čáře, i když specifická intenzita je zde malá.

4.5.2 Závislost na radiálním průběhu specifické intenzity

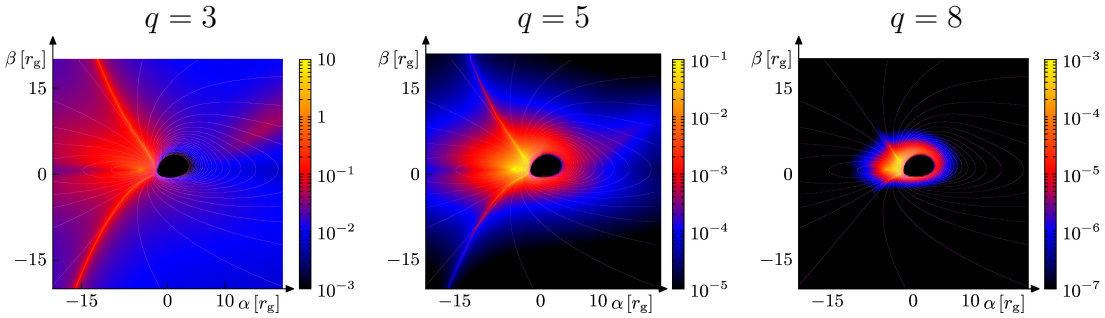
Na Obr. 4.16 jsou vyobrazeny výšky peaku pro inklinaci 70°, spin $a = 1$ a radiální indexy $q \in \{3, 5, 8\}$. Lze předpokládat, že pro vyšší radiální index bude oblast vysoké emise kompaktnější, což je na mapách vidět. Důležitým efektem je, že křivka inflexních bodů je již potlačena (pro rostoucí poloměr) a to i pro $q = 5$.

4.5.3 Závislost na spinu

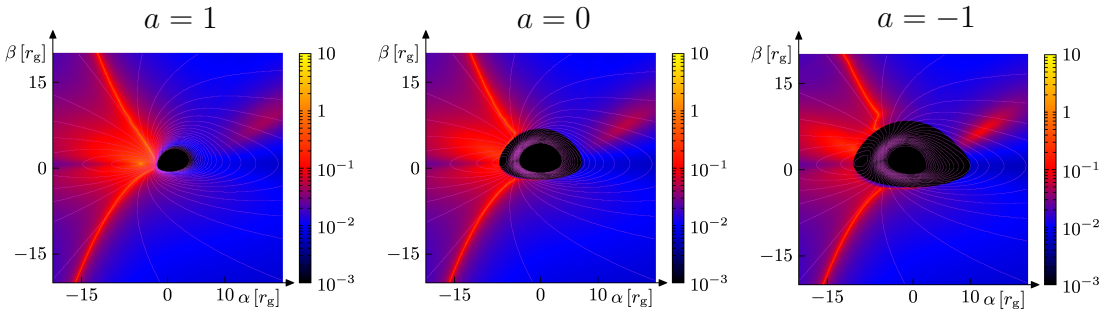
Na Obr. 4.17 jsou srovnány mapy výšky peaku pro spiny $a \in \{1, 0, -1\}$. Ačkoli spin mění geometrii kontur g-faktoru, tvar křivek inflexních bodů i celkově výšky peaku závisí na spinu pouze slabě. Výrazně zde vidíme hlavně centrální oblast pod poslední stabilní orbitou, kde disk neemituje záření. Pro spin $a = -1$ si můžeme všimnout numerického artefaktu poblíž poslední stabilní orbity (přibližně na souřadnicích $(-7\,r_{\mathrm{g}}, 7\,r_{\mathrm{g}})$).



Obr. 4.15: Výšky peaků P pro inklinace $i \in \{10°, 30°, 50°, 70°, 75°, 80°\}$, pro spin $a = 1$ a radiální index $q = 3$.



Obr. 4.16: Výšky peaků P pro inklinaci $i = 70°$, pro spin $a = 1$ a radiální indexy $q \in \{3, 5, 8\}$. Barevné škály jednotlivých panelů jsou navzájem posunuté o dva řády.



Obr. 4.17: Výšky peaků P pro inklinaci $i = 70°$, pro radiální index $q = 3$ a pro spiny $a \in \{1, 0, -1\}$.

5. Závěr

V této práci jsme se zabývali použitím gravitačního mikročokování ke studiu vlastností akrečních disků. Věnovali jsme se hlavně emisi rentgenového záření pocházejícího z nejvnitřnější části akrečního disku. Speciálně jsme se zabývali emisí spektrální čáry železa, jejíž pozorovaný profil je velmi silně ovlivněn geometrií časoprostoru okolo horizontu centrální černé díry.

V první kapitole jsme zkoumali vlastnosti kaustických map vytvořených mezilehlou čočkující galaxií. Zajímalo nás, jaké je rozdělení časových intervalů mezi jednotlivými kaustickými přechody. V první části jsme se podrobně zabývali způsoby výběru světelných křivek z map zjasnění a algoritmem pro detekci kaustických přechodů. Z našich simulací ve druhé části první kapitoly vyplynulo, že na světelných křivkách dominují krátké intervaly mezi následujícími přechody Dále jsme ověřili, že dlouhé intervaly mají exponenciální rozdělení. Pokusili jsme se odhadnout, pro jak veliký zdroj se budou na světelné křivce vyskytovat spíše osamocené kaustické přechody a pro jak velký zdroj bude přecházet několik kaustik najednou. Tyto statistiky jsme určovali pro pět různých konvergencí hvězd.

Ve druhé kapitole jsme se zaměřili na prohloubení výsledků z bakalářské práce studiem vlastností světelných křivek během přechodu kvasaru přes ideální fold. Simulace jsme provedli pro model akrečního disku uvažujícího speciálně- i obecně-relativistické efekty. Zjistili jsme, že charakteristický tvar světelné křivky získaný pro Shakurův-Sunyaevův vyzařovací profil je značně odlišný od zde studovaného. Hlavně se v našem modelu neobjevují dvě maxima charakteristická pro S-S vyzařovací profil. Zjistili jsme, že spin centrální černé díry má vliv na světelnou křivku. Pro vhodně malou inklinaci můžeme pozorovat charakteristický zlom na světelné křivce při průchodu kaustiky přes nevyzařující oblast pod poslední stabilní orbitou. Ukázali jsme, že kromě vyzařovacího profilu a spinu černé díry závisí tvar světelné křivky také na inklinaci disku. Již v bakalářské práci jsme zjistili a zde ověřili, že šířka světelné křivky je určována velikostí vyzařující oblasti, tedy radiální rychlostí klesání specifické intenzity. Zjistili jsme, že světelné křivky nejsou skoro vůbec závislé na spektrálním indexu akrečního disku. Můžeme ale říci, že jde o silný nástroj, kterým lze zkoumat vlastnosti emise záření z okolí poslední stabilní orbity, dále velikost spinu centrální černé díry nebo také inklinaci disku.

V poslední kapitole jsme se zabývali změnami ve tvaru spektrální čáry železa. Tato spektrální čára je emitována z velmi malé centrální oblasti akrečního disku, proto se za jejich vlastnostech silně odráží geometrie časoprostoru a fyzikální procesy, probíhající za extrémních podmínek panujících nad horizontem. Objevili jsme, že pokud je kaustika paralelní ke konturám energetického posunu, objevují se na spektru další peaky či hrany. Vytvořili jsme model uvažující pouze lokální vlastnosti akrečního disku, který je schopen modelovat jak peaky, tak i hrany. Charakter obou jsme analyticky popsali Peaky jsou charakteristické oboustrannou logaritmickou divergencí, na hranách se specifický tok schodovitě mění. Následně jsme ověřili, že lokální model předpovídá stejné parametry peaků jako se objevují v simulovaném spektru. Okrajově jsme se zabývali případy, kdy použitý jednoduchý model selže. Nakonec jsme napočítali mapy výšky peaků generovaných na akrečním disku pro sadu inklinací, radiálních indexů a spinů černé díry.

Získané výsledky mohou posloužit k demonstrování plné škály možných spektrálních změn na K_α čáře železa s použitým modelem akrečního disku při přechodu jednoduché kaustiky. Porovnaní s pozorovanými změnami této čáry během mikročočkování kvasaru RX J1131–1231 [Chartas et al., 2012] pak může ověřit platnost těchto modelů. V případě souhlasu bude možné získat unikátní informace o parametrech vnitřního disku. Naopak v případě nesouladu bude možné alespoň odhadnout, bude-li stačit použít pokročilejší aproximaci kaustiky, nebo bude nutné přejít ke zcela odlišnému modelu vnitřního akrečního disku kvasaru.

Seznam použité literatury

[Abolmasov and Shakura, 2012] Abolmasov, P. and Shakura, N. I. (2012). Resolving the inner structure of QSO discs through fold-caustic-crossing events. MNRAS, 423:676–693.

[Chang and Refsdal, 1984] Chang, K. and Refsdal, S. (1984). Star disturbances in gravitational lens galaxies. A&A, 132:168–178.

[Chartas et al., 2002] Chartas, G., Agol, E., Eracleous, M., Garmire, G., Bautz, M. W., and Morgan, N. D. (2002). Caught in the Act: Chandra Observations of Microlensing of the Radio-loud Quasar MG J0414+0534. ApJ, 568:509–521.

[Chartas et al., 2004] Chartas, G., Eracleous, M., Agol, E., and Gallagher, S. C. (2004). Chandra Observations of the Cloverleaf Quasar H1413+117: A Unique Laboratory for Microlensing Studies of a LoBAL Quasar. ApJ, 606:78–84.

[Chartas et al., 2012] Chartas, G., Kochanek, C. S., Dai, X., Moore, D., Mosquera, A. M., and Blackburne, J. A. (2012). Revealing the Structure of an Accretion Disk through Energy-dependent X-Ray Microlensing. ApJ, 757:137.

[Chartas et al., 2009] Chartas, G., Kochanek, C. S., Dai, X., Poindexter, S., and Garmire, G. (2009). X-Ray Microlensing in RXJ1131-1231 and HE1104-1805. ApJ, 693:174–185.

[Chen et al., 2013] Chen, B., Dai, X., Baron, E., and Kantowski, R. (2013). Effects of Kerr Strong Gravity on Quasar X-Ray Microlensing. ApJ, 769:131.

[Chen et al., 2011] Chen, B., Dai, X., Kochanek, C. S., Chartas, G., Blackburne, J. A., and Kozłowski, S. (2011). Discovery of Energy-dependent X-Ray Microlensing in Q2237+0305. ApJ, 740:L34.

[Chen et al., 2012] Chen, B., Dai, X., Kochanek, C. S., Chartas, G., Blackburne, J. A., and Morgan, C. W. (2012). X-Ray Monitoring of Gravitational Lenses with Chandra. ApJ, 755:24.

[Congdon et al., 2007] Congdon, A. B., Keeton, C. R., and Osmer, S. J. (2007). Microlensing of an extended source by a power-law mass distribution. MNRAS, 376:263–272.

[Dai et al., 2010] Dai, X., Kochanek, C. S., Chartas, G., Kozłowski, S., Morgan, C. W., Garmire, G., and Agol, E. (2010). The Sizes of the X-ray and Optical Emission Regions of RXJ 1131-1231. ApJ, 709:278–285.

[Dovčiak et al., 2004] Dovčiak, M., Karas, V., and Yaqoob, T. (2004). An Extended Scheme for Fitting X-Ray Data with Accretion Disk Spectra in the Strong Gravity Regime. ApJS, 153:205–221.

[Dyson et al., 1920] Dyson, F. W., Eddington, A. S., and Davidson, C. (1920). A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 220:291–333.

[Eigenbrod et al., 2008] Eigenbrod, A., Courbin, F., Meylan, G., Agol, E., Anguita, T., Schmidt, R. W., and Wambsganss, J. (2008). Microlensing variability in the gravitationally lensed quasar QSO 2237+0305 the Einstein Cross. II. Energy profile of the accretion disk. A&A, 490:933–943.

[Einstein, 1911] Einstein, A. (1911). Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. *Annalen der Physik*, 340:898–908.

[Einstein, 1936] Einstein, A. (1936). Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, 84:506–507.

[Fouqué et al., 2010] Fouqué, P., Heyrovský, D., Dong, S., Gould, A., Udalski, A., Albrow, M. D., Batista, V., Beaulieu, J.-P., Bennett, D. P., Bond, I. A., Bramich, D. M., Calchi Novati, S., Cassan, A., Coutures, C., Dieters, S., Dominik, M., Dominis Prester, D., Greenhill, J., Horne, K., Jørgensen, U. G., Kozłowski, S., Kubas, D., Lee, C.-H., Marquette, J.-B., Mathiasen, M., Menzies, J., Monard, L. A. G., Nishiyama, S., Papadakis, I., Street, R., Sumi, T., Williams, A., Yee, J. C., Brillant, S., Caldwell, J. A. R., Cole, A., Cook, K. H., Donatowicz, J., Kains, N., Kane, S. R., Martin, R., Pollard, K. R., Sahu, K. C., Tsapras, Y., Wambsganss, J., Depoy, D. L., Gaudi, B. S., Han, C., Lee, C.-U., Park, B.-G., Kubiak, M., Szymański, M. K., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Szewczyk, O., Ulaczyk, K., Abe, F., Fukui, A., Furusawa, K., Gilmore, A. C., Hearnshaw, J. B., Itow, Y., Kamiya, K., Kilmartin, P. M., Korpela, A. V., Lin, W., Ling, C. H., Masuda, K., Matsubara, Y., Miyake, N., Muraki, Y., Nagaya, M., Ohnishi, K., Okumura, T., Perrott, Y., Rattenbury, N. J., Saito, T., Sako, T., Sato, S., Skuljan, L., Sullivan, D., Sweatman, W., Tristram, P. J., Allan, A., Bode, M. F., Burgdorf, M. J., Clay, N., Fraser, S. N., Hawkins, E., Kerins, E., Lister, T. A., Mottram, C. J., Saunders, E. S., Snodgrass, C., Steele, I. A., Anguita, T., Bozza, V., Harpsøe, K., Hinse, T. C., Hundertmark, M., Kjærgaard, P., Liebig, C., Mancini, L., Masi, G., Rahvar, S., Ricci, D., Scarpetta, G., Southworth, J., Surdej, J., Thöne, C. C., Riffeser, A., and Seitz, S. (2010). OGLE 2008-BLG-290: an accurate measurement of the limb darkening of a galactic bulge K Giant spatially resolved by microlensing. A&A, 518:A51.

[Heyrovský, 2003] Heyrovský, D. (2003). Measuring Stellar Limb Darkening by Gravitational Microlensing. ApJ, 594:464–482.

[Irwin et al., 1989] Irwin, M. J., Webster, R. L., Hewett, P. C., Corrigan, R. T., and Jedrzejewski, R. I. (1989). Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event. AJ, 98:1989–1994.

[Jaroszynski et al., 1992] Jaroszynski, M., Wambsganss, J., and Paczynski, B. (1992). Microlensed light curves for thin accretion disks around Schwarzschild and Kerr black holes. ApJ, 396:L65–L68.

[Kayser et al., 1986] Kayser, R., Refsdal, S., and Stabell, R. (1986). Astrophysical applications of gravitational micro-lensing. A&A, 166:36–52.

[Ledvina, 2011] Ledvina, L. (2011). Měření vlastností akrečního disku kvasarovým mikročočkováním. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

[Morgan et al., 2008] Morgan, C. W., Kochanek, C. S., Dai, X., Morgan, N. D., and Falco, E. E. (2008). X-Ray and Optical Microlensing in the Lensed Quasar PG 1115+080. ApJ, 689:755–761.

[Mortonson et al., 2005] Mortonson, M. J., Schechter, P. L., and Wambsganss, J. (2005). Size Is Everything: Universal Features of Quasar Microlensing with Extended Sources. ApJ, 628:594–603.

[Mosquera et al., 2013] Mosquera, A. M., Kochanek, C. S., Chen, B., Dai, X., Blackburne, J. A., and Chartas, G. (2013). The Structure of the X-Ray and Optical Emitting Regions of the Lensed Quasar Q 2237+0305. ApJ, 769:53.

[Paczynski, 1986] Paczynski, B. (1986). Gravitational microlensing by the galactic halo. ApJ, 304:1–5.

[Popović et al., 2003] Popović, L. Č., Mediavilla, E. G., Jovanović, P., and Muñoz, J. A. (2003). The influence of microlensing on the shape of the AGN Fe K_{alpha} line. A&A, 398:975–982.

[Reeves and Turner, 2000] Reeves, J. N. and Turner, M. J. L. (2000). X-ray spectra of a large sample of quasars with ASCA. MNRAS, 316:234–248.

[Reynolds, 1996] Reynolds, C. S. (1996). PhD thesis, University of Cambridge.

[Salpeter, 1955] Salpeter, E. E. (1955). The Luminosity Function and Stellar Evolution. ApJ, 121:161.

[Schneider, 1992] Schneider, P. (1992). Gravitational Lensing Statistics. In Kayser, R., Schramm, T., and Nieser, L., editors, *Gravitational Lenses*, volume 406 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 196.

[Schneider et al., 1992] Schneider, P., Ehlers, J., and Falco, E. E. (1992). *Gravitational Lenses*. Springer, New York.

[Schneider et al., 2006] Schneider, P., Kochanek, C., and Wambsganss, J. (2006). *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[Schneider and Weiss, 1986] Schneider, P. and Weiss, A. (1986). The two-point-mass lens - Detailed investigation of a special asymmetric gravitational lens. A&A, 164:237–259.

[Walsh et al., 1979] Walsh, D., Carswell, R. F., and Weymann, R. J. (1979). 0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens. Nature, 279:381–384.

[Witt et al., 1993] Witt, H. J., Kayser, R., and Refsdal, S. (1993). Microlensing predictions for the Einstein Cross 2237+0305. A&A, 268:501–510.

[Wyithe et al., 2000] Wyithe, J. S. B., Webster, R. L., and Turner, E. L. (2000). The rate of caustic crossing microlensing events for Q2237+0305. MNRAS, 315:337–344.