MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kristýna Šmídová

Mountain climbing theorem

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych poděkovala Mgr. Benjaminu Vejnarovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky k práci, za trpělivé naslouchání a za důvěru, s jakou ke mně přistupoval při vzniku této práce. Dále bych chtěla poděkovat Vojtěchu Nižňanskému za zapůjčení počítače a pomoc při práci se softwarem AutoCAD a Magdaléně Tydrichové za pročtení práce a zpětnou vazbu, která mi velmi pomohla se včasným dokončením práce.

Název práce: Mountain climbing theorem

Autor: Kristýna Šmídová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Předmětem této práce je tzv. Mountain climbers' problem. Práce se zabývá otázkou, kdy pro dvojici spojitých funkcí f, $g : [0,1] \to [0,1]$, splňujících $f(0) = g(0) = 0$ a $f(1) = g(1) = 1$, existuje dvojice funkcí k, h se stejnými vlastnostmi taková, že $f(k(x)) = g(h(x))$ pro všechna x z intervalu [0,1]. Pro po částech prosté funkce je existence dokázána za pomoci vhodné grafové reprezentace a principu sudosti, pro lokálně nekonstantní funkce je existence dokázána konstrukčně za pomoci stejnoměrné konvergence. Dále je uveden příklad dvojice funkcí, pro které vyhovující dvojice funkcí neexistuje. Cílem práce je s použitím vhodných ilustrací názorně a srozumitelně vysvětlit příslušné matematické konstrukce.

Klíčová slova: spojitá funkce, mountain climber, stejnoměrná konvergence, princip sudosti

Title: Mountain climbing theorem

Author: Kristýna Šmídová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The subject of this theses is the so-called Muntain Climbers' Problem. We ask for which pairs of continuous functions f, $g : [0,1] \to [0,1]$ such that $f(0) = g(0) = 0$ and $f(1) = g(1) = 1$ there exist some functions k, h with the same properties such that $f(k(x)) = g(h(x))$ for all x in the interval of [0,1]. For piecewise injective functions we prove the existence using a convenient graph model and handshaking lemma. For locally non-constant functions we provide a constructive proof using uniform convergence. There is also an example of pair of continuons functions for which there exists no suitable pair of functions that solve the problem. The aim is to provide a clear and visual explanation of all the mathematical constructions included.

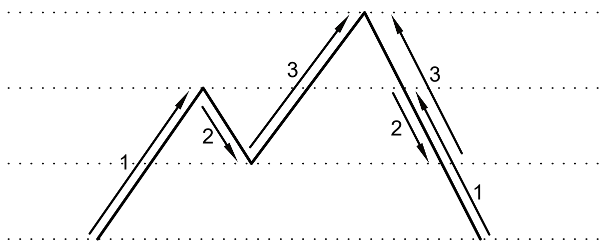
Keywords: continuous function, mountain climber, uniform convergence, handshaking lemma

Obsah

Úvod

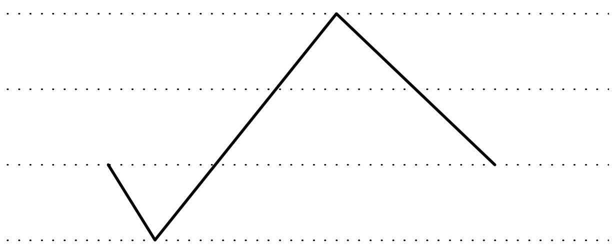
Slovní formulace úlohy známé pod názvy Mountain climbing problem [4] a Mountain climbers' problem [1], [2] je následující:

> Dvojici horolezců od sebe dělí horská stezka, jejíž výškový profil je daný. Oba horolezci se nachází ve stejné nadmořské výšce a rádi by se setkali. Zároveň by chtěli postupovat tak, aby se jeden z nich neustále nacházel ve stejné nadmořské výšce jako druhý. Může se jim povést k sobě takto dojít?



Obrázek 1: Příklad postupu horolezců.

Chceme zkoumat, pro jaké výškové profily má úloha řešení. Úloha nemá řešení například v případě, že z jedné strany nejvyššího vrcholu stezka klesne pod počáteční nadmořskou výšku a z druhé ne (viz Obrázek 2).



Obrázek 2: Neřešitelný výškový profil.

Proto budeme uvažovat pouze ty stezky, které mají v každém bodě minimálně takovou nadmořskou výšku, jako na obou koncích. Je zřejmé, že obecně se horolezci mohou setkat jedině na nejvyšším vrcholu. Je-li vrcholů s maximální nadmořskou výškou více, pak se horolezci předem domluví, na kterém z nich se setkají. Obě části stezky pak můžeme reprezentovat spojitými funkcemi. Odtud dostáváme následující matematickou formulaci problému, kterou se budeme zabývat.

> Nechť funkce $f_1, f_2 : [0,1] \to [0,1]$ jsou spojité takové, že $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(1) = f_2(1) = 1$. Existují spojité funkce $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1]$ takové, že $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $g_1(1) = g_2(1) = 1$ a zároveň $(f_1 \circ g_1)(x) = (f_2 \circ g_2)(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$?

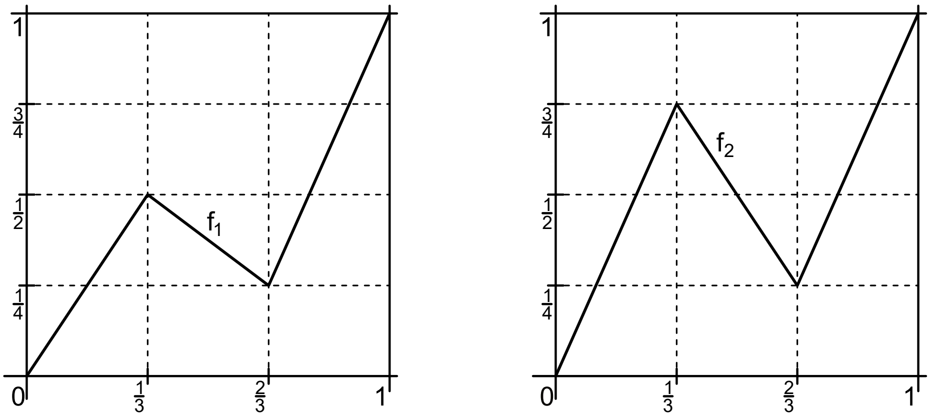
(MCP)

Dvojici funkcí f_1, f_2 budeme nazývat zadáním MCP. Můžeme je chápat jako funkce nadmořské výšky stezky v závislosti na vzdálenosti od počátku. Funkce g_1, g_2 reprezentují horizontální polohu horolezců v závislosti na čase. Příslušným složením získáme funkce $f_1 \circ g_1$, $f_2 \circ g_2$ nadmořské výšky v závislosti na čase, ty mají být shodné. Pokud pro zadání f_1, f_2 existují funkce g_1, g_2 s požadovanými vlastnostmi, pak řekneme že MCP je pro ně řešitelný a dvojice g_1, g_2 je jeho řešením. Mluvíme také o řešitelném zadání MCP. Budeme zkoumat, pro jaká zadání je problém řešitelný.

V první kapitole se budeme zabývat řešitelností po částech prostých zadání, ve druhé kapitole pomocí vhodného protipříkladu ukážeme, že MCP není řešitelný pro všechna spojitá zadání a ve třetí kapitole uvedeme důkaz řešitelnosti MCP pro všechna lokálně nekonstantní zadání. Cílem práce je s použitím vhodných ilustrací názorně a srozumitelně objasnit všechny použité matematické konstrukce.

1. Řešitelnost po částech prostého zadání

Nejprve (MCP) vyřešíme pro následující dvojici po částech afinních funkcí f_1, f_2 (viz Obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Příklad po částech afinního zadání MCP.

Ukážeme, že stačí *nalézt pořadí, ve kterém horolezci projdou jednotlivými rozhodujícími stavy, kdy se alespoň jeden z horolezců nachází v lokálním extrému*, tj. nalézt n-tici $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^n$ dvojic prvků intervalu $[0, 1]$ splňující

- $(x_1^1, x_2^1) = (0, 0)$, $(x_1^n, x_2^n) = (1, 1)$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : f_1(x_1^i) = f_2(x_2^i)$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_1^i$ je bodem lokálního extrému funkce f_1 nebo x_2^i je bodem lokálního extrému funkce f_2,
- $\forall i \in \{2, \ldots, n\} : f_1$ (resp. f_2) je afinní na $\langle x_1^{i-1}, x_1^i \rangle$ (resp. na $\langle x_2^{i-1}, x_2^i \rangle$),

kde zápis $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$ značí nejmenší interval obsahující a, b (tj. interval $[a, b]$ pro $a < b$, $[b, a]$ pro $b \leq a$).

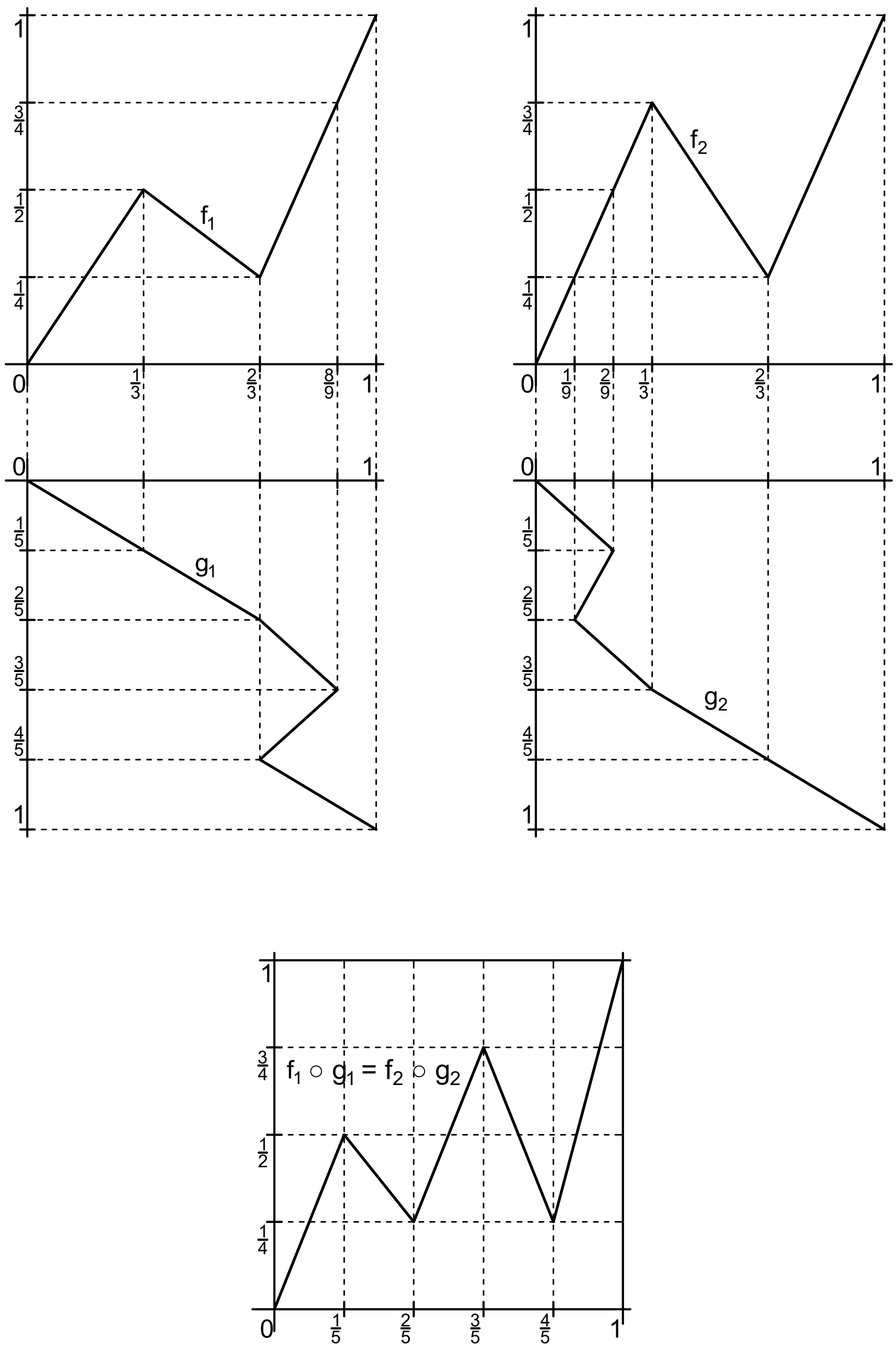
Pro uvažovanou dvojici funkcí f_1, f_2 se jedná o šestici

$$\left[(0{,}0), \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{9}\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{9}\right), \left(\tfrac{8}{9}, \tfrac{1}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right), (1, 1)\right].$$

Funkce g_1, g_2 sestrojíme snadno jako po částech afinní funkce takové, že

- $\forall i \in \{1, \ldots, 6\} : g_1\left(\frac{i-1}{5}\right) = x_1^i$, $g_2\left(\frac{i-1}{5}\right) = x_2^i$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, 5\} : g_1, g_2$ jsou afinní na $\left[\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}\right]$.

Na Obrázku 1.2 jsou znázorněny funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a jejich skládání. Grafy funkcí g_1, g_2 jsou pootočené, aby bylo lépe vidět, jak skládání probíhá. Pro nalezení hodnot, které funkce $f_1 \circ g_1$ (resp. $f_2 \circ g_2$) přiřadí číslům na vertikální ose v grafu funkce g_1 (resp. g_2) stačí sledovat přerušované čáry.



Obrázek 1.2: Funkce f_1, f_2, řešení g_1, g_2 a skládání.

Nyní bude naším cílem ukázat, že podobnou konstrukci můžeme provést pro libovolné zadání MCP, pro které f_1, f_2 jsou po částech afinní takové, že každý maximální interval, na kterém je f_1 (resp. f_2) afinní, má krajní body, které jsou zároveň body ostrých lokálních extrémů. Opět nejprve ukážeme, že existuje vhodná n-tice $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^n \subset [0,1]\times[0,1]$. Podmínku, že alespoň jeden prvek každé dvojice musí být bodem lokálního extrému, jsme zahrnuli pro zjednodušení předchozího příkladu. Pro důkaz obecného tvrzení není nezbytná. Hlavní myšlenka důkazu, totiž řešení problémů za použití vhodné grafové reprezentace a principu sudosti, je převzata z populárně naučného článku [3]. Naším cílem je precizně formulovat a dokázat odpovídající matematické tvrzení.

Tvrzení 1. *Nechť* f_1, $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ *jsou spojité funkce splňující* $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(1) = f_2(1) = 1$, *pro které existují dělení* $D_1 = \{z_1^i\}_{i=0}^{m_1}$, $D_2 = \{z_2^i\}_{i=0}^{m_2}$ *intervalu* $[0,1]$ *taková, že*

- *každý dělící bod dělení* D_1 *(resp. dělení* D_2*) je zároveň bodem ostrého lokálního extrému funkce* f_1 *(resp. funkce* f_2*),*
- *pro všechna* $i \in \{1,\dots,m_1\}$ *je funkce* f_1 *afinní na intervalu* $[z_1^{i-1}, z_1^i]$,
- *pro všechna* $i \in \{1,\dots,m_2\}$ *je funkce* f_2 *afinní na intervalu* $[z_2^{i-1}, z_2^i]$.

Potom existuje n*-tice* $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^n$ *dvojic prvků intervalu* $[0,1]$ *splňující*

- $(x_1^1, x_2^1) = (0,0)$, $(x_1^n, x_2^n) = (1,1)$,
- $f_1(x_1^i) = f_2(x_2^i)$ *pro všechna* $i \in \{1,\dots,n\}$,
- *na každém intervalu* $\langle x_1^{i-1}, x_1^i \rangle$ *(resp.* $\langle x_2^{i-1}, x_2^i \rangle$*),* $i \in \{2,\dots,n\}$ *je funkce* f_1 *(resp. funkce* f_2*) afinní.*

Důkaz. Existenci n-tice $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^n$ dokážeme jako existenci cesty ve vhodně zvoleném grafu. Bude to graf, jehož vrcholy jsou všechny dvojice $(x_1, x_2) \subset [0,1]^2$, pro které $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ a zároveň $f_1(x_1)$ je hodnotou nějakého ostrého lokálního extrému jedné z funkcí f_1, f_2. Hranami jsou spojené ty (a_1, a_2), (b_1, b_2) v grafu, pro které f_1 je afinní na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$, f_2 je afinní na intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ a interval $\langle f_1(a_1), f_1(b_1) \rangle = \langle f_2(a_2), f_2(b_2) \rangle$ obsahuje právě dvě z hodnot ostrých lokálních extrémů funkcí f_1 a f_2, a to v krajních bodech intervalu (viz Obrázek 1.3).

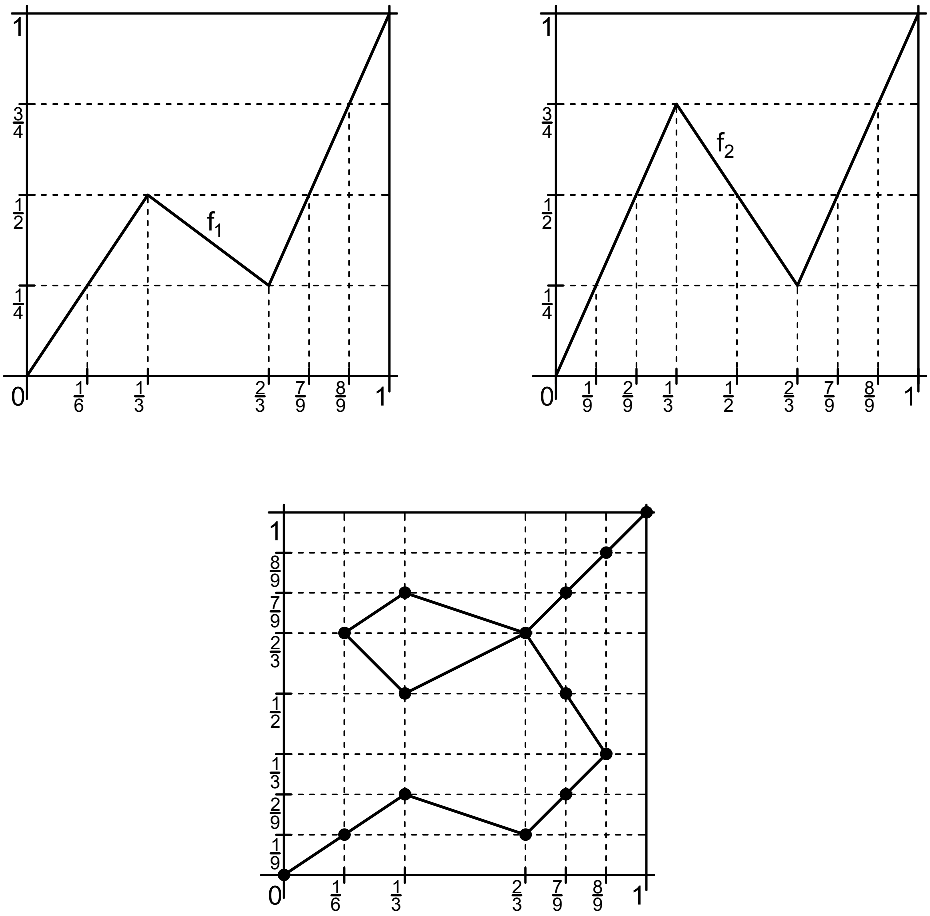
Nechť $0 = y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_k = 1$ jsou všechny lokální extrémy funkcí f_1, f_2. Nechť $0 = q_1^1 < q_1^2 < q_1^3 < \dots < q_1^{k_1} = 1$ jsou všechny prvky množiny $f_1^{-1}\left(\{y_i\}_{i=1}^k\right)$. Nechť $0 = q_2^1 < q_2^2 < q_2^3 < \dots < q_2^{k_2} = 1$ jsou všechny prvky množiny $f_2^{-1}\left(\{y_i\}_{i=1}^k\right)$. Nechť

$$M = \left\{ \{(q_1^i, q_2^j), (q_1^{i+1}, q_2^{j+1})\}, \{(q_1^{i+1}, q_2^j), (q_1^i, q_2^{j+1})\} : \begin{matrix} i \in \{1,\dots,k_1-1\}, \\ j \in \{1,\dots,k_2-1\} \end{matrix} \right\}.$$

Graf $G = (V,E)$ definujeme následujícím způsobem

- $V = \left\{ (x_1, x_2) \in \{q_1^i\}_{i=1}^{k_1} \times \left\{q_2^j\right\}_{j=1}^{k_2} : f_1(x_1) = f_2(x_2) \right\}$,
- $E = \{\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} \in M : (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V\}$

Nechť $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} \in E$. Uvědomme si, že pro nějaké $i \in \{1,\dots,k_1-1\}$ platí $\langle a_1, b_1 \rangle = \left\langle q_1^i, q_1^{i+1} \right\rangle$, takže vnitřek intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ neobsahuje žádný bod ostrého lokálního extrému funkce f_1. Funkce f_1 je tedy afinní na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$. Podobně funkce f_2 je afinní na $\langle a_2, b_2 \rangle$.



Obrázek 1.3: Dvojice funkcí f_1, f_2 a příslušný graf.

Chceme ukázat, že v grafu G existuje nějaká cesta s vrcholy

$$(0,0) =: v_0, v_1, \ldots, v_n := (1{,}1),$$

což je hledaná n-tice z tvrzení. Z definice komponenty stačí ukázat, že v_0, v_n jsou v téže komponentě grafu G. Platí $\deg_G(v_0) = \deg_G(v_n) = 1$. Komponenta grafu je podgraf, tedy je to graf, tedy pro ni musí platit princip sudosti. Máme dva vrcholy lichého stupně, takže stačí dokázat, že v grafu G již žádné další vrcholy lichého stupně nejsou. Potom v_0, v_n musí být ve stejné komponentě.

Nechť $(q_1^i, q_2^j) \in V$. Zkoumejme $\deg_G(q_1^i, q_2^j)$. Pro (q_1^i, q_2^j) platí právě jedna z následujících možností.

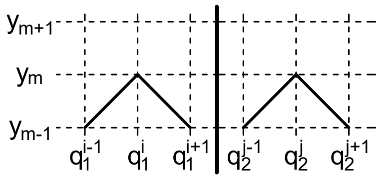
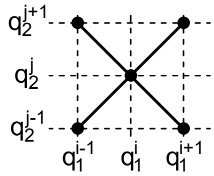
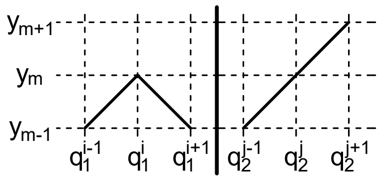
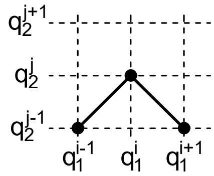
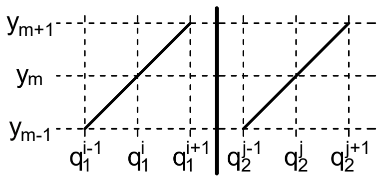
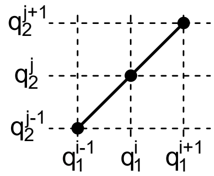
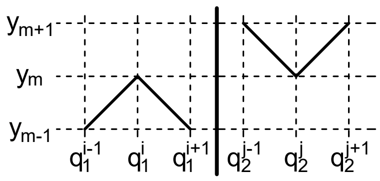
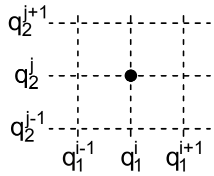
I. Oba prvky q_1^i, q_2^j jsou body ostrých lokálních minim (resp. maxim).

II. Právě jeden z prvků q_1^i, q_2^j je bodem ostrého lokálního extrému (v tom druhém není lokální extrém).

III. Oba prvky q_1^i, q_2^j nejsou body lokálních extrémů.

IV. Prvek q_1^i je bodem ostrého lokálního maxima (resp. minima) a prvek q_2^j je bodem ostrého lokálního minima (resp. maxima).

V Tabulce 1.1 jsou znázorněny všechny typy vrcholů grafu G spolu s příslušnou dvojicí úseků funkcí f_1, f_2. Stupně vrcholů jsou zjevné z obrázku.

typ	obrázek f_1, f_2	obrázek G	$\deg_G((x_1,x_2))$
I.			4
II.			2
III.			2
IV.			0

Tabulka 1.1: Typy vrcholů v grafu G.

Tedy opravdu v_0 a v_n jsou jediné dva vrcholy grafu G, které mají lichý stupeň, tedy musí ležet ve stejné komponentě grafu G, tedy existuje cesta která tyto dva vrcholy spojuje, tedy máme hledanou n-tici.

□

Důsledek 1. *Nechť f_1, f_2 jsou jako v předchozím tvrzení. Pak (MCP) je řešitelný.*

Důkaz. Stačí vzít n-tici z předchozího tvrzení a definovat funkce g_1, g_2 po částech afinní takové, že

1. platí $g_1\left(\frac{i-1}{n-1}\right) = x_1^i$, $g_2\left(\frac{i-1}{n-1}\right) = x_2^i$ pro všechna $i \in \{1,\ldots,n\}$,
2. g_1, g_2 jsou afinní na $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$ pro všechna $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Zřejmě platí $g_1(0) = g_2(0) = 0$ a $g_1(1) = g_2(1) = 1$. Z afinity máme spojitost funkcí g_1, g_2 na intervalech $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$ pro všechna $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, tedy i na celém intervalu $[0,1]$. Dále pro všechna $i \in \{1,\ldots,n\}$ platí

$$(f_1 \circ g_1)\left(\frac{i-1}{n-1}\right) \overset{1.}{=} f_1\left(x_1^i\right) \overset{\text{Tvrzení 1}}{=} f_2\left(x_2^i\right) \overset{1.}{=} (f_2 \circ g_2)\left(\frac{i-1}{n-1}\right).$$

Z Tvrzení 1 víme, že pro všechna $i \in \{1,\ldots n-1\}$, $j \in \{1,2\}$ je f_j afinní na $\langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle = g_j\left(\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]\right)$, tedy díky 2. je $(f_j \circ g_j)$ afinní na $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$. Funkce $(f_1 \circ g_1)$, $(f_2 \circ g_2)$ jsou tedy jednoznačně určené hodnotami v bodech $\frac{i}{n-1}$, $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Odtud $(f_1 \circ g_1)(x) = (f_2 \circ g_2)(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$. □

Definice 1. *Nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $[a,b]$ je interval. Řekneme, že spojitá funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je **po částech prostá**, jestliže existuje dělení $D = \{z^i\}_{i=0}^m$ intervalu $[a,b]$ takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ je f prostá na intervalu $[z^{i-1}, z^i]$.*

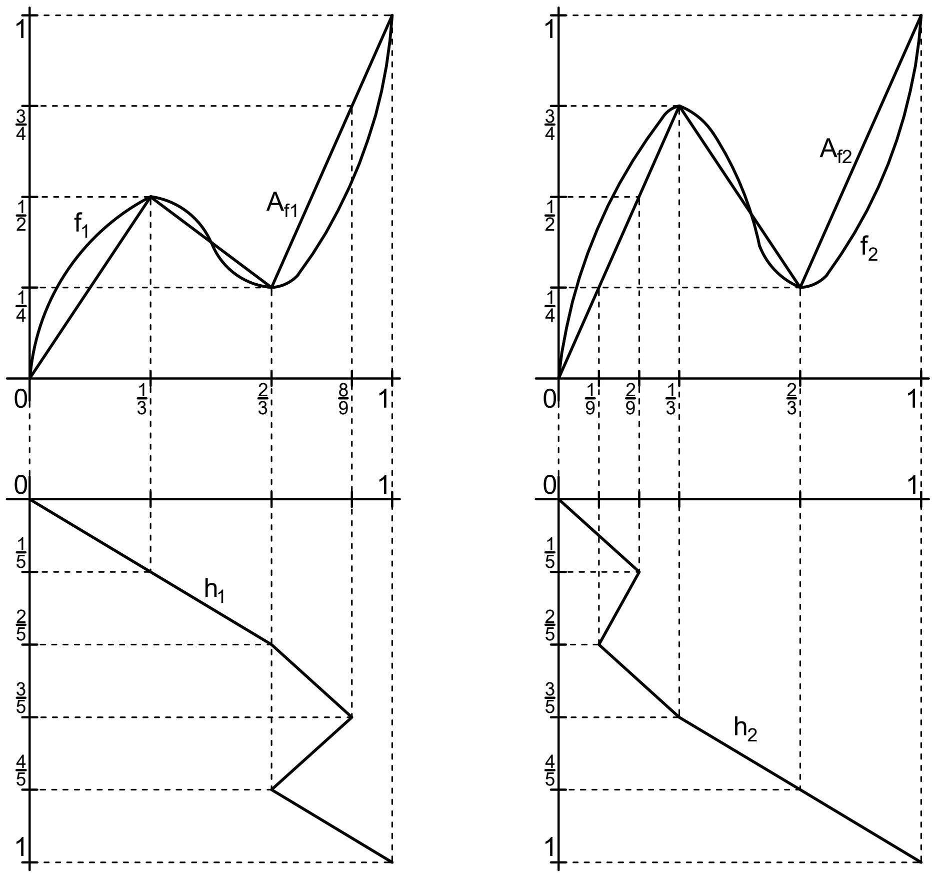
Důsledek 2. *Nechť f_1, f_2 jsou po částech prosté funkce. Pak (MCP) je řešitelný.*

Důkaz. Nechť $D_1\{z_1^i\}_{i=0}^{m_1}$, $D_2\{z_2^i\}_{i=0}^{m_2}$ jsou dělení intervalu [0,1] taková, že

- každý dělící bod dělení D_1 (resp. dělení D_2) je zároveň bodem ostrého lokálního extrému funkce f_1 (resp. funkce f_2),
- pro všechna $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ je funkce f_1 prostá na intervalu $\left[z_1^{i-1}, z_1^i\right]$,
- pro všechna $i \in \{1, \ldots, m_2\}$ je funkce f_2 prostá na intervalu $\left[z_2^{i-1}, z_2^i\right]$.

Taková dělení existují, neboť f_1 a f_2 jsou po částech prosté. Definujeme funkce A_{f_1}, A_{f_2} (viz Obrázek 1.4) takové, že

- $A_{f_j}(z) = f_j(z)$ pro všechna $z \in D_j$, $j \in \{1, 2\}$,
- pro všechna $i \in \{1, \ldots, m_j\}$, $j \in \{1, 2\}$ je funkce A_{f_j} afinní na $\left[z_j^{i-1}, z_j^i\right]$.



Obrázek 1.4: Funkce f_1, f_2, A_{f_1}, A_{f_2}, h_1, h_2.

A_{f_1}, A_{f_2} jsou spojité, a navíc $A_{f_1}(0) = f_1(0) = 0 = f_2(0) = A_{f_2}(0)$, $A_{f_1}(1) = f_1(1) = 1 = f_2(1) = A_{f_2}(1)$, což spolu s definicí A_{f_1}, A_{f_2} dává předpoklady Tvrzení 1, tedy existuje n-tice $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^n \subset [0,1]^2$ taková, že A_{f_j} je afinní na $\langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle$ pro všechna $i \in \{2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$. Navíc dle důkazu Důsledku 1 existují funkce h_1, h_2, které řeší MCP pro zadání A_{f_1}, A_{f_2}, jsou afinní na $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ a splňují $h_j\left(\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]\right) = \langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, 2\}$. Pro všechna $j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \ldots, m_j\}$, $x \in \left[z_j^{i-1}, z_j^i\right]$ platí $A_{f_j}(x) = \left(f_j \circ f_j^{-1} \circ A_{f_j}\right)(x)$. Dokážeme, že funkce

$$g_j(x) = \left(f_j^{-1} \circ A_{f_j} \circ h_j\right)(x), \quad x \in \left[\tfrac{i-1}{n-1}, \tfrac{i}{n-1}\right],\ i \in \{1, \ldots, n-1\},\ j \in \{1, 2\},$$

definované na intervalu $[0,1]$ řeší (MCP) pro zadání f_1, f_2. Nejprve dokážeme spojitost funkcí g_1, g_2 na intervalu $[0,1]$. Zvolme $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, 2\}$ libovolná pevná. Funkce h_j je afinní a tedy i spojitá na intervalu $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$. Totéž platí pro funkce A_{f_j} na intervalu $h_j\left(\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]\right) = \langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle$, tedy z definice A_{f_j} máme $\langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle \subset \left[z_j^{k-1}, z_j^k\right]$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, m_j\}$, takže f_j^{-1} je spojitá na $A_{f_j}\left(\langle x_j^{i-1}, x_j^i\rangle\right) \subset A_{f_j}\left(\left[z_j^{k-1}, z_j^k\right]\right) = \langle A_{f_j}\left(z_j^{k-1}\right), A_{f_j}\left(z_j^k\right)\rangle = \langle f_j\left(z_j^{k-1}\right), f_j\left(z_j^k\right)\rangle$, neboť je inverzní k funkcí f_j, která je prostá na intervalu $\left[z_j^{k-1}, z_j^k\right]$. Celkem tedy dostáváme spojitost složení $\underbrace{\left(f_j^{-1} \circ A_{f_j} \circ h_j\right)}_{g_j}$ na intervalu $\left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$. Protože i, j byly libovolné, dostáváme spojitost funkcí g_1, g_2 na celém intervalu $[0,1]$. Dále pro $j \in \{1, 2\}$ platí

- $g_j(0) = \left(f_j^{-1} \circ A_{f_j}\right)(h_j(0)) = f_j^{-1}\left(A_{f_j}(0)\right) = f_j^{-1}(f_j(0)) = 0$,
- $g_j(1) = \left(f_j^{-1} \circ A_{f_j}\right)(h_j(1)) = f_j^{-1}\left(A_{f_j}(1)\right) = f_j^{-1}(f_j(1)) = 1$,

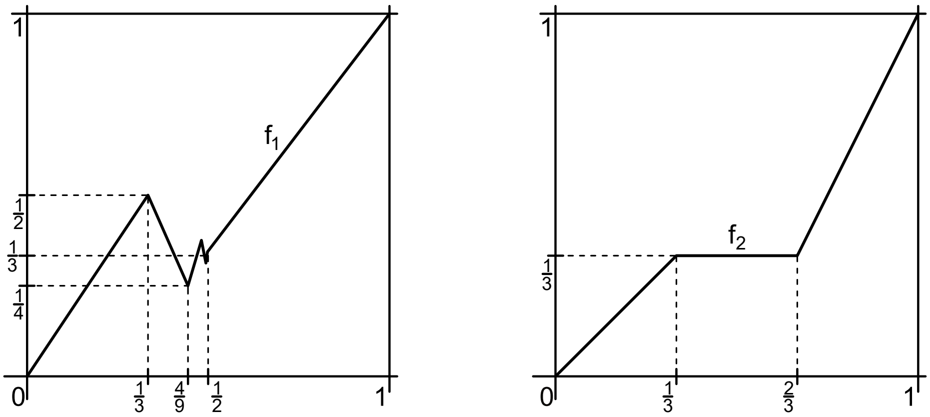
a konečně pro všechna $x \in \left[\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right]$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned}(f_1 \circ g_1)(x) &= \Bigg(\underbrace{f_1 \circ f_1^{-1}}_{\mathrm{id}} \circ A_{f_1} \circ h_1\Bigg)(x) = (A_{f_1} \circ h_1)(x) = \\ &= (A_{f_2} \circ h_2)(x) = \Bigg(\underbrace{f_2 \circ f_2^{-1}}_{\mathrm{id}} \circ A_{f_2} \circ h_2\Bigg)(x) = (f_2 \circ g_2)(x).\end{aligned}$$

Tedy $(f_1 \circ g_1)(x) = (f_2 \circ g_2)(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$. Tedy g_1, g_2 řeší MCP pro po částech prosté zadání f_1, f_2. □

2. Příklad neřešitelné dvojice spojitých funkcí

V předchozí kapitole jsme dokázali, že MCP je řešitelný pro libovolné zadání, kde funkce f_1, f_2 jsou po částech prosté, tedy mají pouze ostré lokální extrémy (tj. jsou lokálně nekonstantní), kterých je navíc jen konečně mnoho. V následujícím zadání (viz Obrázek 2.1) má funkce f_1 nekonečně mnoho ostrých lokálních extrémů a funkce f_2 není lokálně nekonstantní. Dokážeme, že pro toto konkrétní zadání není MCP řešitelný.



Obrázek 2.1: Příklad neřešitelného zadání MCP.

Funkce f_1, $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ definujeme následujícím způsobem

- $f_1(0) = 0,\ f_1(1) = 1$,
- $f_1\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- f_1 je lineární na intervalech $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ a $\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k}\right]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{3}, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ 2x - 1, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$

Nejprve se na zadání podívejme intuitivně z pohledu horolezců. První horolezec potřebuje nekonečněkrát vystoupat nad a pak zase klesnout pod nadmořskou výšku $\frac{1}{3}$. Druhý horolezec by tak měl nekonečněkrát projít konstantním úsekem v této nadmořské výšce. To by samo o sobě nevadilo, pokud by dostatečně zrychloval nade všechny meze. Kde by se však druhý horolezec nacházel v momentě, ve kterém by první horolezec byl právě v polovině své cesty na vrchol? Neřešitelnost problému nyní dokážeme formálně.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existují $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1]$ spojité splňující $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $g_1(1) = g_2(1) = 1$ takové, že $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.

Induktivně zkonstruujeme konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ takovou, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $g_1(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$. Funkce g_1 je spojitá na intervalu [0,1] a platí $g_1(0) = 0 < 1 = g_1(1)$, tedy z věty o nabývání mezihodnot dostáváme existenci $x_1 \in (0,1)$ takového, že $g_1(x_1) = \frac{1}{3}$. Předpokládejme, že jsme již zkonstruovali prvních n členů posloupnosti. Máme $g_1(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k} < 1 = g_1(1)$ a g_1 je spojitá na intervalu $[x_n,1]$, tedy opět z věty o nabývání mezihodnot dostáváme existenci $x_{n+1} \in (x_n, 1)$ splňujícího $g_1(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k}$. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a rostoucí, tedy existuje nějaké $x \in [0,1]$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f_2\left(g_2(x_n)\right) = f_1\left(g_1(x_n)\right) = f_1\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $y_n \in [0,1]$ takové, že $f_2(y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$. Pro každé n přirozené sudé platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} < \frac{1}{3}$, tedy z definice funkce f_2 je y_n určeno jednoznačně, tedy $g_2(x_n) = y_n$ a platí

$$y_n = f_2(y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} < \frac{1}{3}.$$

Pro každé n přirozené liché platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} > \frac{1}{3}$, tedy y_n je určeno jednoznačně, tedy $g_2(x_n) = y_n$ a platí

$$2y_n - 1 = f_2(y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} > \frac{1}{3},$$

$$2y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} > 1 + \frac{1}{3},$$

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} > \frac{2}{3}.$$

Pro $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a g_2 spojité tedy máme $\lim_{n\to\infty} g_2(x_{2n}) \leq \frac{1}{3}$ a zároveň $\lim_{n\to\infty} g_2(x_{2n+1}) \geq \frac{2}{3}$, což je spor.

□

3. Mountain climbing theorem

Jak jsme ukázali v předchozí kapitole, pro obecné spojité zadání nemusí být (MCP) řešitelný. Nyní dokážeme, že stačí předpokládat, že obě funkce v zadání jsou lokálně nekonstantní. Níže uvedený důkaz byl volně přeložen podle článku [2] a upraven tak, aby byl srozumitelný pro studenty bakalářského studia, kteří již byli seznámeni se stejnoměrnou konvergencí. Důkaz byl pozměněn, přeuspořádán a doplněn o potřebná vysvětlení. Přehled vlastních příspěvků je uveden v závěru.

Věta 2. ***(Mountain climbing theorem)*** *Nechť f_1, $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ jsou lokálně nekonstantní spojité funkce splňující $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(1) = f_2(1) = 1$. Pak existují lokálně nekonstantní spojité funkce g_1, $g_2 : [0,1] \to [0,1]$ splňující $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $g_1(1) = g_2(1) = 1$ takové, že $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.*

Jak větu dokážeme? Připomeňme si, jak jsme postupovali v první kapitole. Pro po částech afinní zadání f_1, f_2 z Tvrzení 1 na straně 6 jsme po částech afinní řešení g_1, g_2 definovali hodnotami v konečně mnoha bodech $\frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ tak, aby $f_1\left(g_1\left(\frac{i}{n}\right)\right) = f_2\left(g_2\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ a navíc aby funkce f_1 (resp. funkce f_2) byla afinní na intervalu $g_1\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right)$ (resp. na intervalu $g_2\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right)$) pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Tak jsme dostali funkce g_1, g_2 splňující $(f_1 \circ g_1)(x) = (f_2 \circ g_2)(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$. Pro po částech prosté funkce stačilo problém převést na předchozí případ.

Pro obecné lokálně nekonstantní zadání je potřeba postupovat jinak, protože lokálně nekonstantní spojitá funkce nemusí být prostá vůbec na žádném intervalu. Větu dokážeme přímo tak, že řešení g_1, g_2 získáme jako limity vhodně zkonstruovaných stejnoměrně konvergentních posloupností $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_{2,n}\}_{n=0}^{\infty}$. Konstrukce funkcí $g_{i,n}$, $i \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ se bude podobat postupu z první kapitoly. Funkce $g_{i,n}$ budou po částech afinní, definované hodnotami v konečně mnoha bodech $\frac{k}{3^n}$, $k \in \{0, \dots, 3^n\}$ tak, aby splňovaly $f_1\left(g_{1,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right) = f_2\left(g_{2,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right)$. Podobně jako v předchozí konstrukci budeme chtít, aby funkce f_i měla na intervalu $g_{i,n}\left(\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right)$ nějakou pěknou vlastnost. Afinitu ani prostotu požadovat nemůžeme, ale můžeme chtít, aby platilo alespoň $f_i\left(g_{i,n}\left(\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right)\right) = \left\langle f_i\left(g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right), f_i\left(g_{i,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right)\right\rangle$, což je podmínka, kterou všechny afinní i prosté funkce splňují.

Limitním přechodem od $g_{1,n}$, $g_{2,n}$ ke g_1, g_2 chceme dostat takové funkce, že $(f_1 \circ g_1)\left(\frac{k}{3^n}\right) = (f_2 \circ g_2)\left(\frac{k}{3^n}\right)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 3^n\}$. Odtud díky spojitosti dostaneme $(f_1 \circ g_1)(x) = (f_2 \circ g_2)(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$.

Důkaz bude mít tři části:

1. Konstrukce posloupností $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_{2,n}\}_{n=0}^{\infty}$.

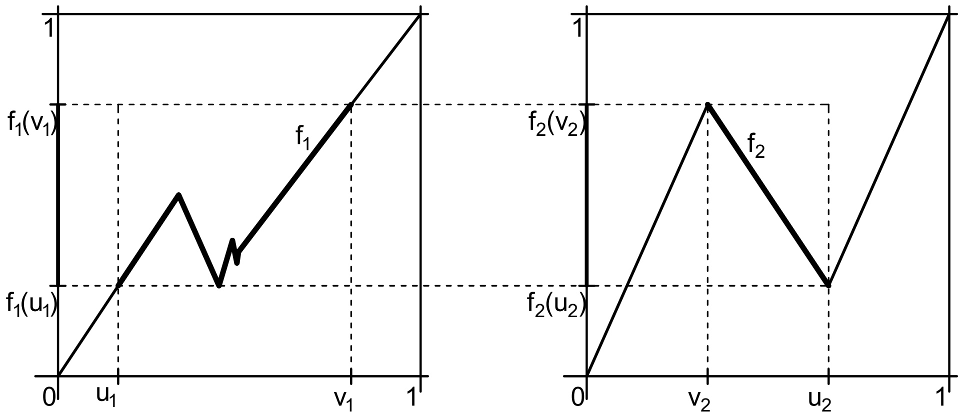
2. Důkaz stejnoměrné konvergence posloupností $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_{2,n}\}_{n=0}^{\infty}$.

3. Důkaz, že funkce $g_1 = \lim_{n\to\infty} g_{1,n}$ a $g_2 = \lim_{n\to\infty} g_{2,n}$ řeší (MCP) pro zadání f_1, f_2.

Označení 1. *Nechť body u_i, v_i splňují $f_i(u_i) \neq f_i(v_i)$ pro $i = 1, 2$. Jestliže platí*

- $f_1(u_1) = f_2(u_2)$,
- $f_1(v_1) = f_2(v_2)$,
- $f_1(\langle u_1, v_1 \rangle) = f_2(\langle u_2, v_2 \rangle) = \langle f_1(u_1), f_1(v_1) \rangle$,

píšeme $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$.



Obrázek 3.1: Příklad $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$.

Důkaz. **Chceme zkonstruovat** posloupnosti $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_{2,n}\}_{n=0}^{\infty}$ lokálně nekonstantních spojitých funkcí takové, že pro každé $i \in \{1, 2\}$ a $n \in \mathbb{N}$ je funkce $g_{i,n} : [0,1] \to [0,1]$, $g_{i,n}(0) = 0$, $g_{i,n}(1) = 1$ pro každé $k \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ afinní na intervalu $J_{k,n} := \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ a navíc

$$\left(g_{1,n}\left(\frac{k}{3^n}\right), g_{1,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right) \sim \left(g_{2,n}\left(\frac{k}{3^n}\right), g_{2,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right). \tag{1}$$

To znamená, že platí

- $f_1\left(g_{1,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right) = f_2\left(g_{2,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right)$,
- $f_1\left(g_{1,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right) = f_2\left(g_{2,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right)$,
- a navíc

$$\begin{aligned} f_1\left(\left\langle g_{1,n}\left(\frac{k}{3^n}\right), g_{1,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right\rangle\right) &= f_2\left(\left\langle g_{2,n}\left(\frac{k}{3^n}\right), g_{2,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right\rangle\right) \\ &= \left\langle f_1\left(g_{1,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right), f_1\left(g_{1,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

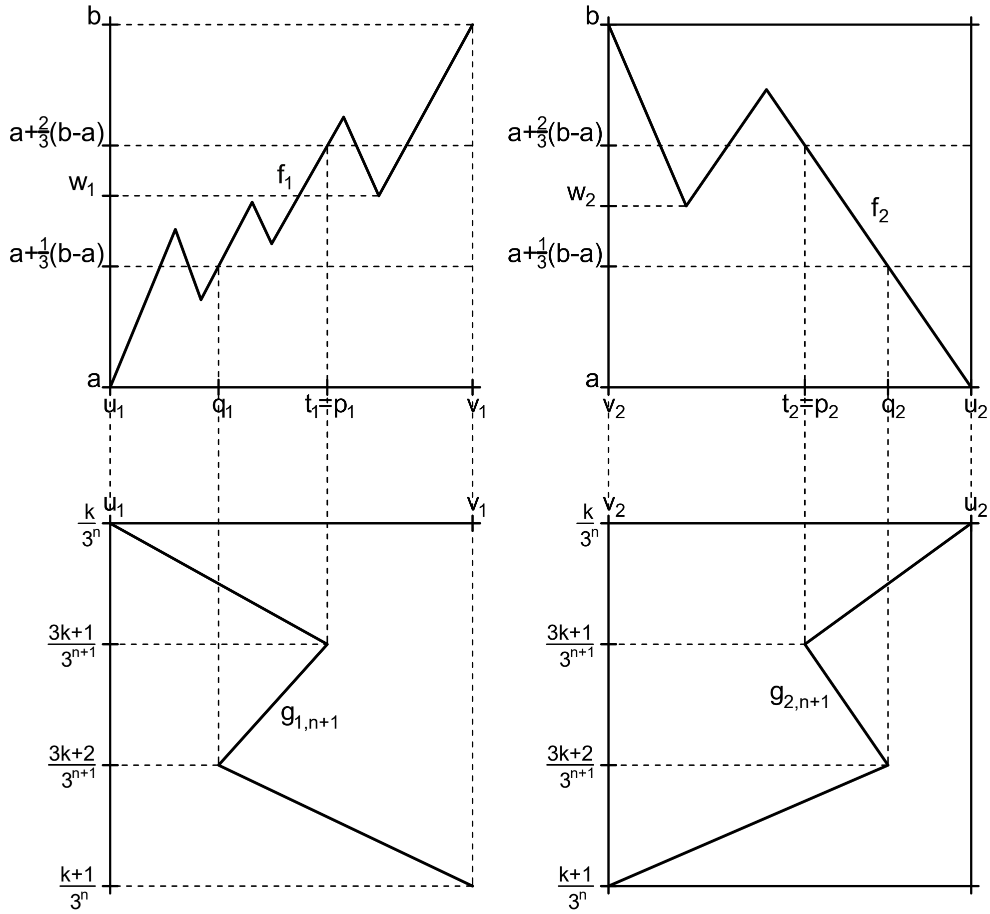
Posloupnosti zkonstruujeme induktivně. Položme $g_{i,0} = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ jsme již zkonstruovali vyhovující $g_{i,n}$. Nyní chceme zkonstruovat funkce $g_{i,n+1}$. Pro každé $j \in \{0, \ldots, 3^{n+1} - 1\}$ mají být $g_{i,n+1}$ afinní na $J_{j,n+1}$, tedy stačí, když tyto funkce definujeme v bodech $\frac{j}{3^{n+1}}$, $j \in \{0, \ldots, 3^{n+1}\}$.

Pro $k \in \{0, \ldots, 3^n\}$ položme $g_{i,n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)$. Nyní zafixujeme libovolné $k \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ a označme $t_i := g_{i,n+1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right)$, $q_i := g_{i,n+1}\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$. Budeme chtít určit hodnoty t_i, q_i tak, aby pro $g_{i,n+1}$ platilo (1).

Označme $u_i = g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)$, $v_i = g_{i,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)$, $a = f_i(u_i)$, $b = f_i(v_i)$. Nechť $p_i \in \langle u_i, v_i\rangle$ je takový bod, že $f_i(p_i) = a + \frac{2}{3}(b-a)$ a zároveň $f_i(x) \neq a + \frac{2}{3}(b-a)$ pro všechna $x \in \langle u_i, p_i\rangle$, $x \neq p_i$.[1] Z platnosti (1) pro $g_{i,n}$ plyne, že $f_i(\langle u_i, v_i\rangle) \overset{(1)}{=} \langle a, b\rangle$, tedy b musí být jedním z krajních bodů intervalu $f_i(\langle p_i, v_i\rangle)$. Druhý krajní bod označíme w_i.

Způsob definice t_i, q_i závisí na tom, jestli platí $|w_1 - a| \geq \frac{1}{3}|b-a|$ a zároveň $|w_2 - a| \geq \frac{1}{3}|b-a|$. Pokud ano, řekneme, že *interval* $J_{k,n}$ *je typu A*, v opačném případě řekneme že *interval* $J_{k,n}$ *je typu B*.

Jestliže $J_{k,n}$ *je typu A*, pak $t_i = p_i$ a $q_i \in \langle u_i, p_i\rangle$ je takový bod, že $f_i(q_i) = a + \frac{1}{3}(b-a)$ a zároveň $f_i(x) \neq a + \frac{1}{3}(b-a)$ pro všechna $x \in \langle q_i, p_i\rangle$, $x \neq q_i$.



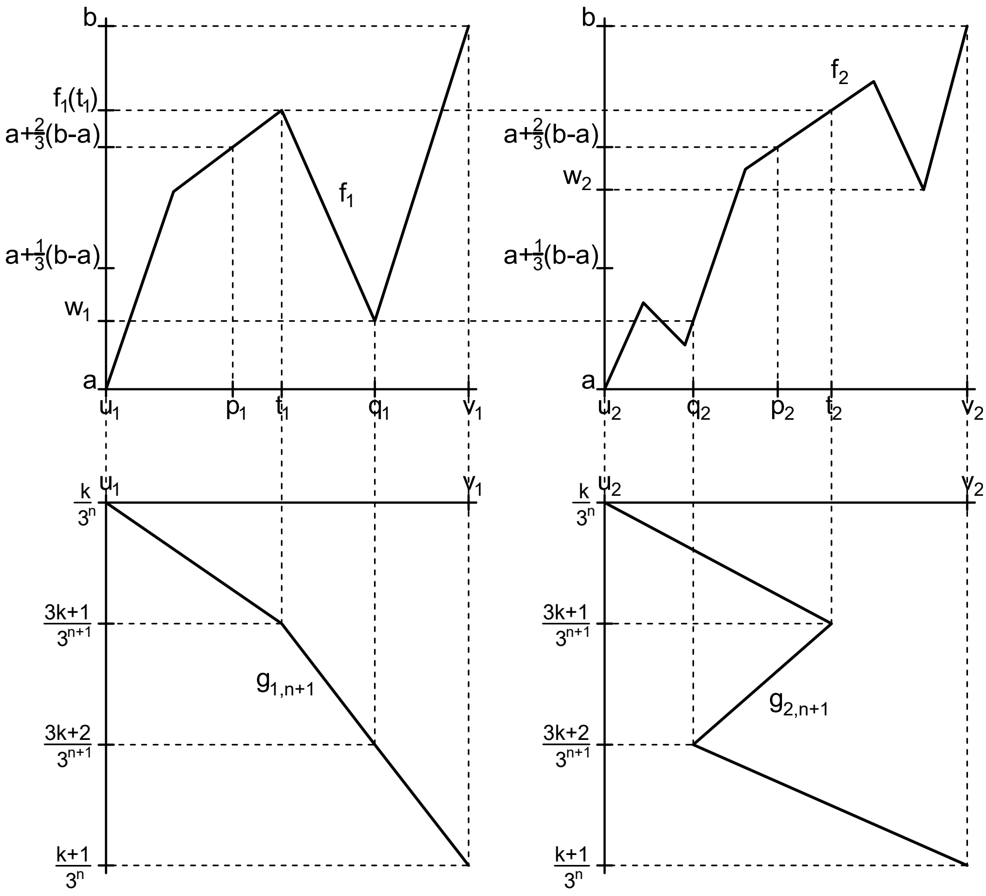
Obrázek 3.2: Typ A.

[1]Tedy pro $u_i < v_i$ je p_i minimem a pro $u_i > v_i$ maximem množiny $\{x \in \langle u_i, v_i\rangle : f_i(x) = a + \frac{2}{3}(b-a)\}$, která je omezená, jako vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení uzavřená a z věty o nabývání mezihodnot i neprázdná.

Ověřme že pro typ A platí ([1]). Potřebujeme dokázat, že platí $(u_1,t_1) \sim (u_2,t_2)$, $(t_1,q_1) \sim (t_2,q_2)$ a $(q_1,v_1) \sim (q_2,v_2)$.

- Platí $f_i(u_i) = a$, $f_i(t_i) = a + \frac{2}{3}(b-a)$ a zároveň pro všechna $x \in \langle u_i, t_i\rangle$, $x \neq t_i$ je $f(x) \neq a + \frac{2}{3}(b-a)$, tedy díky spojitosti funkce f_i a větě o nabývání mezihodnot musí platit $f_i(\langle u_i, t_i\rangle) = \langle f_i(u_i), f_i(t_i)\rangle$. Celkem $(u_1,t_1) \sim (u_2,t_2)$.
- Platí $f_i(t_i) = a + \frac{2}{3}(b-a)$, $f_i(q_i) = a + \frac{1}{3}(b-a)$ a zároveň pro všechna $x \in \langle q_i, t_i\rangle \subset \langle u_i, t_i\rangle$, $x \neq q_i, t_i$ je $f_i(x) \neq a + \frac{1}{3}(b-a)$ a $f_i(x) \neq a + \frac{2}{3}(b-a)$, tedy díky spojitosti funkce f_i a větě o nabývání mezihodnot je $f_i(\langle q_i, t_i\rangle) = \langle f_i(q_i), f_i(t_i)\rangle$. Celkem $(t_1,q_1) \sim (t_2,q_2)$.
- Platí $f_i(q_i) = a + \frac{1}{3}(b-a)$, $f_i(v_i) = b$ a $\frac{1}{3}|b-a| \leq |w_i - a| \leq \frac{2}{3}|b-a|$, tedy $f_i(\langle q_i, v_i\rangle) = f_i(\langle q_i, t_i\rangle) \cup f_i(\langle p_i, v_i\rangle) = \langle f_i(q_i), f_i(t_i)\rangle \cup \langle w_i, b\rangle = \left\langle a + \frac{1}{3}(b-a), a + \frac{2}{3}(b-a)\right\rangle \cup \langle w_i, b\rangle = \left\langle a + \frac{1}{3}(b-a), b\right\rangle = \langle f_i(q_i), f_i(v_i)\rangle$. Celkem $(q_1,v_1) \sim (q_2,v_2)$.

Nechť $J_{k,n}$ je typu B. Nechť indexy $l, m \in \{1,2\}$, $l \neq m$ jsou takové, aby $|w_l - a| \leq |w_m - a|$. Víme, že $|w_l - a| < \frac{1}{3}|b-a|$. Vybereme nejprve $q_l \in \langle p_l, v_l\rangle$ takové, že $f_l(q_l) = w_l$. Nutně w_l musí být jedním z koncových bodů intervalu $f_l(\langle p_l, q_l\rangle)$; nalezneme $t_l \in \langle p_l, q_l\rangle$ takové, že $f_l(t_l)$ je druhým koncovým bodem intervalu $f_l(\langle p_l, q_l\rangle)$. Bod $t_m \in \langle u_m, v_m\rangle$ buď takový, že $f_m(t_m) = f_l(t_l)$ a zároveň $f_m(x) \neq f_l(t_l)$ pro všechna $x \in \langle u_m, t_m\rangle$, $x \neq t_m$. Bod $q_m \in \langle u_m, t_m\rangle$ buď takový, že $f_m(q_m) = f_l(q_l) = w_l$ a zároveň $f_m(x) \neq w_l$ pro všechna $x \in \langle q_m, t_m\rangle$, $x \neq q_m$.



Obrázek 3.3: Typ B.

Ověřme že pro typ B platí (1). Potřebujeme dokázat, že platí $(u_1, t_1) \sim (u_2, t_2)$, $(t_1, q_1) \sim (t_2, q_2)$ a $(q_1, v_1) \sim (q_2, v_2)$.

- Platí $f_l(u_l) = a = f_m(u_m)$, a navíc z definice t_m i $f_m(t_m) = f_l(t_l)$ a $f_m(\langle u_m, t_m\rangle) = \langle f_m(u_m), f_m(t_m)\rangle$. Dále platí

$$\langle f_l(u_l), f_l(t_l)\rangle \subset f_l(\langle u_l, t_l\rangle) \subset f_l(\langle u_l, q_l\rangle) = f_l(\langle u_l, p_l\rangle) \cup f_l(\langle p_l, q_l\rangle) =$$

$$= \left\langle a, a + \tfrac{2}{3}(b-a)\right\rangle \cup \langle w_l, f_l(t_l)\rangle = \langle a, f_l(t_l)\rangle = \langle f_l(u_l), f_l(t_l)\rangle,$$

  tedy $f_l(\langle u_l, t_l\rangle) = \langle f_l(u_l), f_l(t_l)\rangle$. Celkem $(u_l, t_l) \sim (u_m, t_m)$.

- Z definice t_m, q_m máme $f_m(t_m) = f_l(t_l)$, $f_m(q_m) = f_l(q_l)$ a navíc pro všechna $x \in \langle q_m, t_m\rangle \subset \langle u_m, t_m\rangle$, $x \neq t_m, q_m$ také $f_m(x) \neq f_l(t_l)$ a $f_m(x) \neq f_l(q_l) = w_l$, tedy $f_m(\langle q_m, t_m\rangle) = \langle f_m(q_m), f_m(t_m)\rangle$. Dále platí

$$\langle f_l(t_l), f_l(q_l)\rangle \subset f_l(\langle t_l, q_l\rangle) \subset f_l(\langle p_l, q_l\rangle) = \langle w_l, f_l(t_l)\rangle = \langle f_l(q_l), f_l(t_l)\rangle,$$

  tedy $f_l(\langle t_l, q_l\rangle) = \langle f_l(t_l), f_l(q_l)\rangle$. Celkem $(t_l, q_l) \sim (t_m, q_m)$.

- Platí $f_m(q_m) = f_l(q_l)$ a $f_m(v_m) = f_l(v_l) = b$. Dále platí

$$\langle f_l(q_l), f_l(v_l)\rangle \subset f_l(\langle q_l, v_l\rangle) \subset f_l(\langle p_l, v_l\rangle) = \langle w_l, b\rangle = \langle f_l(q_l), f_l(v_l)\rangle,$$

  tedy $f_l(\langle q_l, v_l\rangle) = \langle f_l(q_l), f_l(v_l)\rangle$. Navíc také

$$\langle f_m(q_m), f_m(v_m)\rangle \subset f_m(\langle q_m, v_m\rangle) = f_m(\langle q_m, t_m\rangle) \cup f_m(\langle p_m, v_m\rangle) =$$

$$= \langle w_l, f_m(t_m)\rangle \cup \langle w_m, b\rangle = \langle w_l, b\rangle = \langle f_m(q_m), f_m(v_m)\rangle,$$

  tedy $f_m(\langle q_m, v_m\rangle) = \langle f_m(q_m), f_m(v_m)\rangle$. Celkem $(q_l, v_l) \sim q_m, v_m)$.

Tím je úspěšně dokončena požadovaná konstrukce. Všimněme si, že pro $J_{k,n}$ obou typů platí

$$|\langle f_i(u_i), f_i(t_i)\rangle|, |\langle f_i(q_i), f_i(t_i)\rangle|, |\langle f_i(q_i), f_i(v_i)\rangle| \geq \frac{1}{3}|b-a|$$

a pro $J_{k,n}$ typu A platí navíc

$$|\langle f_i(u_i), f_i(t_i)\rangle|, |\langle f_i(q_i), f_i(t_i)\rangle|, |\langle f_i(q_i), f_i(v_i)\rangle| \leq \frac{2}{3}|b-a|.$$

Pro $J_{k,n}$ typu B dále platí, že intervaly $\langle u_l, t_l\rangle$, $\langle t_l, q_l\rangle$, $\langle q_l, v_l\rangle$ mají po dvou disjunktní vnitřky.

Nyní chceme ukázat, že výše zkonstruované posloupnosti $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_{2,n}\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejnoměrně konvergentní. K důkazu budeme potřebovat následující tvrzení, která plynou z konstrukce.

$$g_{i,n}(J_{k,n}) = g_{i,m}(J_{k,n}) \text{ pro všechna } m,n \in \mathbb{N}, m \geq n, k \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}, \tag{2}$$

$$|f_i(g_{i,n+1}(J_{3k+j,n+1}))| \geq \tfrac{1}{3}|f_i(g_{i,n}(J_{k,n}))| \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, 3^n - 1\},\ j \in \{0, 1, 2\}. \tag{3}$$

jestliže $J_{k,n}$ je typu A, pak $|f_i(g_{i,n+1}(J_{3k+j,n+1}))| \leq \frac{2}{3}|f_i(g_{i,n}(J_{k,n}))|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}, k \in \{0,\ldots,3^n-1\}, j \in \{0,1,2\}$., (4)

jestliže $J_{k,n}$ je typu B, pak existuje $l \in \{1,2\}$ takové, že intervaly $g_{l,n+1}(J_{3k+j,n+1})$, $j \in \{0,1,2\}$ mají po dvou disjunktní vnitřky. (5)

Stejnoměrnou konvergenci $\{g_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dokážeme **sporem**. Pro spor předpokládejme, že například $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ není stejnoměrně konvergentní. Pak $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ není stejnoměrně cauchyovská, tedy

$$\exists \alpha \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists m_r > n_r \geq r \quad \exists x_r \in [0,1]: \; |g_{1,n_r}(x_r) - g_{1,m_r}(x_r)| \geq \alpha.$$

Řekněme, že $x_r \in J_{k_r,n_r}$. Protože ze (2) máme $g_{1,n_r}(x_r), g_{1,m_r}(x_r) \in g_{1,n_r}(J_{k_r,n_r})$, dostáváme $|g_{1,n_r}(J_{k,n_r})| \geq \alpha$ pro libovolné r. Všimněme si, že každý interval J_{k_r,n_r} musí být obsažen v jednom ze tří intervalů $J_{0,1}$, $J_{1,1}$, $J_{2,1}$, proto jeden z nich (budeme psát $J_{s_1,1}$, $s_1 \in \{0,1,2\}$) nutně musí obsahovat nekonečně mnoho intervalů J_{k_r,n_r}. Podobně nalezneme interval $J_{s_2,2} \subset J_{s_1,1}$, který také obsahuje nekonečně mnoho intervalů J_{k_r,n_r}. Podobně zkonstruujeme posloupnost vnořených intervalů $J_n := J_{s_n,n}$, z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho intervalů J_{k_r,n_r}.[2] Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje $n_r > n$ takové, že $J_{k_r,n_r} \subset J_n$, tedy díky (2) platí $|g_{1,n}(J_n)| \overset{(2)}{=} |g_{1,n_r}(J_n)| \geq |g_{1,n_r}(J_{k_r,n_r})| \geq \alpha$. Z (2) také vyplývá, že intervaly $g_{1,n}(J_n)$ jsou vnořené, tedy (díky nerovností $|g_{1,n}(J_n)| \geq \alpha$) je interval $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} g_{1,n}(J_n)$ nedegenerovaný a tedy lokálně nekonstantní funkce f_1 na něm nemůže být konstantní. Pišme $|f_1(I)| = \beta > 0$. Pak $|f_1(g_{1,n}(J_n))| \geq \beta$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ze vztahu (4) je tedy zřejmé, že od nějakého $z \in \mathbb{N}$ počínaje musí být všechny intervaly J_n typu B (jinak by $|f_1(g_{1,n}(J_n))| \xrightarrow{n\to\infty} 0 < \beta$).

Z (1) dostáváme $|f_2(g_{2,n}(J_n))| = |f_1(g_{1,n}(J_n))| \geq \beta$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_1, f_2 jsou spojité na uzavřeném intervalu $[0,1]$, tedy jsou stejnoměrně spojité a můžeme tedy zvolit $\epsilon > 0$ dost malé, aby pro libovolný interval K, $|K| < \epsilon$ platilo $|f_i(K)| < \frac{\beta}{3}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq z$. Interval J_n je typu B, tedy díky (5) existuje $l_n \in \{1,2\}$ takové, že intervaly $I_j = g_{l_n,n+1}(J_{3s_n+j,n+1})$, $j \in \{0,1,2\}$ mají po dvou disjunktní vnitřky. Navíc $|f_{l_n}(I_j)| \overset{(3)}{\geq} \frac{\beta}{3}$, takže $|I_j| \geq \epsilon$ pro každé $j \in \{0,1,2\}$. Protože $g_{l_n,n}(J_n)$ je sjednocením intervalů I_j a tyto intervaly mají po dvou disjunktní vnitřky, dostáváme $|I_j| \leq |g_{l_n,n}(J_n)| - 2\epsilon$ pro každé $j \in \{0,1,2\}$. Jeden z intervalů I_j je právě $g_{l_n,n+1}(J_{n+1})$, takže $|g_{l_n,n+1}(J_{n+1})| \leq |g_{l_n,n}(J_n)| - 2\epsilon$. Pro $m_n \in \{1,2\}$, $m_n \neq l_n$ platí $|g_{m_n,n+1}(J_{n+1})| \leq |g_{m_n,n+1}(J_n)| \overset{(2)}{=} |g_{m_n,n}(J_n)|$. Předpokládejme, že $l_m = 1$ (resp. $l_m = 2$) pro nekonečně mnoho $m \in \mathbb{N}$. Nechť $L \in \mathbb{N}$, $L > \frac{|g_{1,n}(J_n)|}{2\epsilon}$ (resp. $L > \frac{|g_{2,n}(J_n)|}{2\epsilon}$). Pak můžeme nalézt $k \in \mathbb{N}$, $k > n$ dostatečně velké, aby $|g_{1,k}(J_k)| \leq |g_{1,n}(J_n)| - 2L\epsilon$ (resp. $|g_{2,k}(J_k)| \leq |g_{2,n}(J_n)| - 2L\epsilon$), tedy $|g_{1,k}(J_k)| < 0$ (resp. $|g_{2,k}(J_k)| < 0$), což je spor.

Pro $i \in \{1,2\}$ označme $g_i := \lim_{n\to\infty} g_{i,n}$. **Zbývá dokázat, že g_1, g_2 mají požadované vlastnosti.** Funkce g_1, g_2 jsou spojité, neboť jsou limitami stejnoměrně konvergentních posloupností spojitých funkcí. Připomeňme, že jsme definovali $g_{i,n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,\ldots,3^n\}$, tedy navíc také

[2] O posloupnosti vnořených intervalů mluvíme v případě, že $J_{n+1} \subset J_n$ pro každé n. V našem případě existují čísla $j_n \in \{0,1,2\}$ taková, že $J_{n+1} = J_{3s_n+j_n,n+1}$.

$g_{i,m}\left(\frac{k}{3^n}\right) = g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Odtud

$$g_i\left(\frac{k}{3^n}\right) = \lim_{m\to\infty} g_{i,m}\left(\frac{k}{3^n}\right) = g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right), \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}, k \in \{0,\dots,3^n\}, \tag{6}$$

tedy speciálně $g_i(0) = g_{i,0}(0) = \mathrm{id}_{[0,1]}(0) = 0$ a podobně $g_i(1) = 1$. Ukážeme, že g_i jsou lokálně nekonstantní. Nechť $J \subset [0,1]$ je libovolný interval. Pak existuje $J_{k,n}$ takové, že $J_{k,n} \subset J$. Platí (1), tedy z definice "$\sim$"nutně $f_i\left(g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right)\right) \neq f_i\left(g_{i,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right)$, tedy $g_{i,n}\left(\frac{k}{3^n}\right) \neq g_{i,n}\left(\frac{k+1}{3^n}\right)$, tedy z (6) také $g_i\left(\frac{k}{3^n}\right) \neq g_i\left(\frac{k+1}{3^n}\right)$. Funkce g_i je tedy nekonstantní na $J_{k,n}$, tedy i na J. Interval J byl zvolen libovolně, takže funkce g_i je lokálně nekonstantní.

Nakonec dokážeme, že $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$. Díky (1) a (6) platí $f_1\left(g_1\left(\frac{k}{3^n}\right)\right) = f_2\left(g_2\left(\frac{k}{3^n}\right)\right)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{0,\dots,3^n\}$. Nechť $x \in [0,1]$. Množina $M = \left\{\frac{k}{3^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{0,\dots,3^n\}\right\}$ je hustá v intervalu $[0,1]$, tedy existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Díky spojitosti $f_i \circ g_i$ jako složení spojitých funkcí máme

$$(f_1 \circ g_1)(x) = \lim_{n\to\infty} (f_1 \circ g_1)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f_2 \circ g_2)(x_n) = (f_2 \circ g_2)(x).$$

$\square$

Závěr

Dokázali jsme řešitelnost MCP pro po částech prosté zadání, ukázali jsme, že (MCP) není řešitelný pro všechny spojité funkce f_1, f_2 a také jsme uvedli důkaz řešitelnosti pro lokálně nekonstantní zadání. Stěžejní myšlenky byly v první kapitole motivovány příkladem, ve druhé kapitole intuitivním pohledem z hlediska horolezců a ve třetí kapitole porovnáním s předchozími částmi. Práce tak tvoří smysluplně provázaný celek, kde pochopení prvních dvou kapitol výrazně napomáhá k pochopení kapitoly třetí, která obsahuje nejobtížnější konstrukci. V motivacích a logické provázanosti tak spolu s názornými ilustracemi vidíme hlavní přínos práce. Všechny obrázky jsou originální, rámec výchozích zdrojů přesahují především obrázky 1.2 (str. 5), 1.4 (str. 9), 3.2 (str. 15) a 3.3 (str. 16), kde jsou kromě vnějších funkcí f_1, f_2 znázorněny i vnitřní funkce g_1, g_2 v grafech pootočených a umístěných tak, aby bylo možné snadno sledovat skládání funkcí.

Mountain climbers' problem má atraktivní slovní formulaci a při jeho zkoumání jsme použili matematický aparát, který je vyučován v rámci bakalářského studia. Práce by tedy mohla sloužit jako zdroj rozšiřující látky do některého z volitelných seminářů.

V návaznosti na tuto práci bychom si mohli klást například následující otázky:

- Jak zkonstruovat řešení (MCP) pro zadání, které obsahuje konečně mnoho ostrých lokálních extrémů a konečně mnoho maximálních netriviálních intervalů, na kterých je alespoň jedna z funkcí f_1, f_2 konstantní?

- Jak zkonstruovat řešení pro zadání, které obsahuje konečně mnoho ostrých lokálních extrémů a libovolný počet intervalů, na kterých je alespoň jedna z funkcí f_1, f_2 konstantní? (Například bychom mohli uvážit různé variace funkce známé jako *ďáblovo schodiště*.)

- Existuje nějaké zadání f_1, f_2, pro které je (MCP) řešitelný, takové, že $f_1(x) = C \in [0,1]$ na nějakém netriviálním intervalu $I \subset [0,1]$ a zároveň množina $f_2^{-1}(\{C\})$ je spočetná?

- Je možné charakterizovat, pro která zadání je MCP řešitelný?

Stručný přehled vlastní práce:

1. kapitola: Vzorový příklad, formulace Tvrzení 1 a jeho důkazu založeném na myšlence ze článku [3], formulace a důkaz Důsledku 1, formulace definice po částech prosté funkce, formulace a důkaz Důsledku 2.

2. kapitola: Konstrukce příkladu neřešitelného zadání, jeho intuitivní interpretace a důkaz jeho neřešitelnosti.

3. kapitola: Úvodní vysvětlení myšlenky důkazu a jeho rozčlenění, oproti článku [2] podrobnější ověření požadovaných vlastností pro $J_{k,n}$ typu A i B, zjednodušení sporu v důkazu stejnoměrné konvergence, podrobné zpracování závěrečné části důkazu, která byla v článku [2] naznačena jen velmi stručně na pěti řádcích.

Seznam použité literatury

[1] KELETI, T. (1993). The mountain climbers' problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **117**(1), 89–97.

[2] LÓPEZ, V. J. (1999). An elementary solution to the mountain climbers' problem. *aequationes mathematicae*, **57**(1), 45–49.

[3] TUCKER, A. (1995). The parallel climbers puzzle. *Math Horizons*, **3**(2), 22–24.

[4] WHITTAKER, J. V. (1966). A mountain-climbing problem. *Canad. J. Math*, **18**(873-882), 4.