MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lenka Goduľová

Dvouúrovňové optimalizační modely a jejich využití v úlohách optimalizace portfólia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravdepodobnosť, matematická štatistika a ekonometrie

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Hlavné poďakovanie patrí RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D., za trpezlivosť, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri vypracovaní diplomovej práce. Ďakujem mojej rodine za morálnu podporu. Taktiež ďakujem môjmu tatikovi za všetko, čo pre mňa urobil. V poslednom rade sa chcem poďakovať môjmu priateľovi za morálnu a finančnú podporu.

Název práce: Dvouúrovňové optimalizační modely a jejich využití v úlohách optimalizace portfólia

Autor: Lenka Goduľová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt:

Tato práce se zabývá problémem dvouúrovňových úloh. Připomíná základné poznatky o mean-risk modelech, mírách rizika v jednoúrovňových problémech a stochastické dominanci druhého řádu. Následně představuje základní poznatky o dvouúrovňových úlohách. Dvouúrovňové problémy mají několik výhod oproti jednoúrovňové. V jednom procesu je možné analyzovat dvě různé nebo dokonce i konfliktní situace. Dvouúrovňová úloha umí lépe podchytit vzájemný vztah mezi dvěma objekty. Hlavním těžištěm práce je formulace různých dvouúrovňových úloh a jejich přepis do nejjednodušího tvaru. V numerické části jsou řešeny tři typy formulovaných dvojúrových problémů na vybraných mírach rizik.

Klíčová slova: Dvouúrovňové problémy, Stochastická dominance druhého řádu, Míry rizika

Title: Bilevel optimization problems and their applications to portfolio selection

Author: Lenka Goduľová

Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstract: This work deals with the problem of bilevel tasks. First, it recalls the basic knowledge of mean-risk models, risk measure in singlelevel problems, and second degree stochastic dominance. Then it presents basic knowledge of bilevel tasks. bilevel problems have several advantages over singlelevel. In one process, it is possible to analyze two different or even conflicting situations. The bilevel role can better capture the relationship between the two objects. The main focus of the thesis is the formulation of various bilevel tasks and their reformulation into the simplest form. The numerical part deals with three types of formulated bilevel problems at selected risk measures.

Keywords: Bilevel problems, Second degree stochastic dominance, Risk measures

Název práce: Dvojúrovňové optimalizačné modely a ich využitie v úlohách optimalizácie portfólia

Autor: Lenka Goduľová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt:

Táto práca sa zaoberá problémom dvojúrovňových úloh. Naprv pripomína základné poznatky o mean-risk modeloch, mierach rizika v jednoúrovňových problémoch a stochastickej dominancii druhého rádu. Potom predstavuje základné poznatky o dvojúrovňových úlohách. Dvojúrovňové problémy majú niekoľko výhod oproti jednoúrovňovým. V jednom procese je možné analyzovať dve rôzne alebo dokonca aj konfliktné situácie. Dvojúrovňová úloha vie lepšie podchytiť vzájomný vzťah medzi dvoma objektami. Hlavným ťažiskom práce je formulácia rôznych dvojúrovňových úloh a ich prepis do najjednoduchšieho tvaru. V numerickej časti sú riešené tri typy formulovaných dvojúrových problémov na vybraných mierach rizika.

Klúčové slová: Dvojúrovňové problémy, Stochastická dominancia druhého rádu, Miery rizika

Hlavné poďakovanie patrí RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D., za trpezlivosť, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri vypracovaní diplomovej práce. Ďakujem mojej rodine za morálnu podporu. Taktiež ďakujem môjmu tatikovi za všetko, čo pre mňa urobil. V poslednom rade sa chcem poďakovať môjmu priateľovi za morálnu a finančnú podporu.

Obsah

Úvod

V tejto práci sa budeme venovať dvojúrovňovým optimalizačným problé-mom. V rôznych odvetviach ekonómie, či priemyslu je tento typ úloh aplikovaný na problémy s hierarchickým usporiadaním. Dvojúrovňové optimalizačné modely sú optimalizačné úlohy s dvoma optimalizačnými požiadavkami. Rozhodnutia medzi optimalizačnými požiadavkami sú nezávislé a rozhodujeme sa postupne. Názorným príkladom je vzťah investora a sprostredkovateľov, kde sprostredkovateľ sa snaží maximalizovať celkový poplatok za sprostredkovanie a investor nemusí byť ochotný zaplatiť viac ako určité percento investície. V tomto prípade sa jednotlivé strany dostanú do konfliktu. Pri dvojúrovňovom probléme sprostredkovateľ najprv stanoví poplatky a investor ako následník investuje samozrejme tak, aby dostal eficientné portfólio. V prípade logistiky môžeme pomocou dvojúrovňového problému nájsť optimálnu polohu pre logistické centrá. V hornej úrovni budeme hľadať optimálne umiestnenie centier, pričom minimalizujeme náklady firmy, a na dolnej úrovni nás zaujíma rovnomerné rozdelenie dopytu, kde minimalizujeme náklady zákazníkov.

Dvojúrovňový problém bol prvýkrát sformulovaný J. Brackenom a J. McGillom [6] v roku 1973. Až W. Candler a R. Norton [7] v roku 1977 prvýkrát použili termín dvojúrovňové resp. viacúrovňové programovanie. Opätovne sa dvojúrovňové programovanie dostalo dopopredia v osemdesiatych rokoch vďaka teórii hier vytvorenej H. Stackelbergom. My sa budeme venovať len dvojúrovňovým modelom. Prehľad teórie dvojúrovňových úloh aj s aplikáciou na jednoduchých príkladoch lineárneho alebo kvadratického dvojúrovňového programovania je mož-né nájsť v [4]. V dvojúrovňových úlohách sa stretávame s parametrickým programovaním. Na porozumenie teórie doporučujeme [16]. Úlohy sa komlikujú, ak v dvojúrovňovom probléme je celočíselná úloha. V [15] nájdeme dvojúrovňový problém s celočíselnou úlohou a kvadratickou účelovou funkciou. Klasické metódy na zvládnutie týchto typov úloh vyžadujú podmienky linearity či konvexity. Zá-kladnými prístupmi sú: hľadanie extremálnych bodov, transformačný prístup alebo využitie penalizačných funkcii, či heuristiky. Evolučné prístupy alebo prístup vnútorného bodu sú založené na novších vývojoch. V prípade väčšieho záujmu o viacúrovňové modely a pre objasnenie základných princípov doporučujeme pozrieť [7]. V našej práci budeme pracovať s mierami rizika. Prehľad známych formulácii mier rizika v jednoúrovňovom prípade nájdeme v [25]. Podrobnejšie popísané vlastnosti môžeme nájsť v [1, 14, 18, 20, 33]. Najmodernejším prístupom k miere rizika je stochastická dominancia. V našom prípade používame stochastickú dominanciu druhého rádu, avšak v praxi nie je vylučené použiť aj stochastickú dominanciu prvého rádu. Teóriou stochastickej dominancie sa zaoberá H. Levy [19]. Táto teória je vyvýjaná prostredníctvom úžitkových funckií. Základy teórie úžitkových funkcií rozoberá M.Černý, M.Vlach a K. Zimmernann [10]. Spôsob využitia stochastickej dominancie druhého rádu je možné nájsť v [22, 23, 24].

V prvej kapitole sa budeme venovať mieram rizika. Formulujeme jednoúrovňové mean-risk modely a definujeme pojem stochastická dominancia druhého rádu. V druhej kapitole definujeme dvojúrovňové optimalizačné problémy. Celkovo budeme pracovať s troma rôznymi dvojúrovňovými problémami. Prvý typ dvojúrovňového problému formulujeme pomocou mean-risk modelov. Použijeme práve dva mean-risk modely. Prvá formulácia bude s obmedzením na očakávaný výnos a v druhom prípade budeme pracovať s agregáciou očakávaného výnosu a rizika. V treťom type dvojúrovňového problému budeme maximalizovať out of sample výnos. V poslednej formulácii dvojúrovňového problému použijeme stochastickú dominanciu druhého rádu a mean-risk model. Následne dané problémy prepíšeme do čo najjednoduchších tvarov. V poslednej kapitole sa budeme venovať výpočtovej časti. Na dáta aplikujeme vybrané dvojúrovňové problémy a budeme diskutovať o výsledkoch.

Kapitola 1

Mean-risk modely

V práci budeme uvažovať náhodné veličiny na merateľnom priestore $(\Omega, \mathcal{A})$ s hodnotami v $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Náhodná veličina $L(\omega)$ bude reprezentovať straty pre $\omega \in \Omega$. Pre jednoduchosť bude argument ω vynechávaný. Ďalej budeme predpokladať len zprava spojité distribučné funkcie. Uvedieme rôzne miery rizika. Rovnako predstavíme najmodernejší prístup k riziku, konkrétne prostredníctvom stochastickej domnancie. Jednotlivé rizikové miery popíšeme a uvedieme ich základné vlastnosti. Tieto miery rizika nakoniec využijeme pri formulovaní matematických problémov.

1.1 Rizikové miery

Základnou mierou rizika je rozptyl. Túto mieru rizika využíval aj Harry Markowitz v jeho inovatívnej práci [29] kvôli výpočtovej jednoduchosti. Jej nevýhodou je symetria, tj. rovnako penalizované rizikové aktívum s veľkou potenciálnou stratou aj s veľkým potenciálnym ziskom. Uvedieme štyri ďalšie miery. Prvou je semivariancia, ktorú už v tom čase navrhoval Harry Markowitz ako vhodnejšiu mieru rizika než rozptyl. Druhá je stredná absolútna odchýlka (pre jednoduchosť budeme ďalej používať označenie absolútna odchýlka) a posledné dve hodnota v riziku (VaR) a podmienená hodnota v riziku (CVaR).

Definícia 1. *[1] Mierou rizika je zobrazenie $r : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{V}$ je množina reálnych náhodných veličín s konečnými druhými momentami.*

Definícia 2. *[25] Nech $\alpha \in (0,1)$ je hladina spoľahlivosti a náhodná veličina $L \in \mathcal{V}$ vyjadruje stratu portfólia. Potom definujeme 4 miery rizika následovne:*
Hodnota semivariancie je

$$r_s(L) = E[\max(0, L - EL)^2],$$

Hodnota absolútnej odchýlky je

$$r_a(L) = E \mid L - EL \mid,$$

Hodnota VaR je

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R}, P(L > l) \leq 1 - \alpha\},$$

Hodnota podmienenej CVaR je

$$CVaR_\alpha(L) = \inf\{a \in \mathbb{R}, a + \frac{1}{1-\alpha} E[\max(0, L-a)]\}.$$

Poznámka. *V Definícii 2 sme VaR zaviedli pomocou doplnku k distribučnej funkcii. Vychádzali sme z [33], kde R. Tyrrel Rockafellar a Stanislav Uryasev definovali VaR pomocou distribučnej funkcie. Tieto definície sú samozrejme ekvivalentné. V [33] navyše nájdeme aj definíciu horného VaRu. Od VaR sa líši tým, že namiesto neostrej nerovnosti sa v definícii nachádza ostrá.*

Hodnotu v riziku (VaR) možeme interpretovať ako maximálnu možnú stratu portfólia za dané obdobie pri zvolenej konfidenčnej hladine α. Konfidenčnú hladinu volíme blízko 1, tj. doporučuje sa 0,95 alebo 0,99. Hodnota v riziku má ale nedostatok. Nezohľadňuje výšky strat, ktoré sú väčšie ako VaR. Tento nedostatok VaR motivuje zavedenie podmienenej hodnoty v riziku. Pod pojmom podmienená hodnota v riziku rozumieme priemernú stratu z 100(1- α)% najvyšších strat portfólia. Túto mieru je možné pre absolutne spojité rozdelenie vyjadriť následovne:

$$CVaR_\alpha(L) = E[L \mid L > VaR_\alpha(L)]. \tag{1.1}$$

Odvodenie vzťahu (1.1) môžeme nájsť v [33].

1.2 Koherentná miera rizika

Najprv uvedieme podmienky, za ktorých budeme mieru považovať za koherentnú.

Definícia 3. *[1] Mieru rizika r nazveme koherentnou, ak sú splnené 4 podmienky:*
(P1) Pre každú náhodnú veličinu L a $\forall\ c \in \mathbb{R}$ platí

$$r(L+c) = r(L) + c$$

(P2) Pre každé dve náhodné veličiny L_1 a L_2 platí

$$r(L_1 + L_2) \leq r(L_1) + r(L_2)$$

(P3) Pre každú náhodnú veličinu L a $\forall\ \lambda \geq 0$ platí

$$r(\lambda L) = \lambda r(L)$$

(P4) Pre každé dve náhodné veličiny L_1 a L_2 také, že $L_1(\omega) \leq L_2(\omega)$ $\forall\ \omega \in \Omega$ platí

$$r(L_1) \leq r(L_2)$$

Poznámka. *V podmienke (P1) môžeme $c \in \mathbb{R}$ interpretovať ako pridáný deterministický náklad. O túto hodnotu sa potom zvýši miera rizika resp. množstvo* *peňazí potrebných na pokrytie straty. (P2) je podmienka subaditivity, tj. diverzifikáciu portfólia sa zníži riziko. V prípade (P3) ide o pozitívnu homogenitu. Ak investujeme λ-krát väčšiu čiastku, tak strata bude λ-krát väčšia. V poslednom prípade pracujeme s podmienkou (P4), kde strata portfólia L_2 je väčšia alebo rovná ako strata portfólia L_1. L_2 je teda rizikovejšie alebo rovnako rizikové.*

[32] Nech r je pozitívne homogénna riziková miera. Potom miera r je konvexná práve vtedy keď spĺňa podmienku subaditivity.

Dôkaz je jednoduchý. Plynie z definície subaditivity a pozitívnej homogenity. Teda podmienená hodnota v riziku a hodnota v riziku pre eliptické rozdelenia sú konvexné rizikové miery.

1.3 Jednoúrovňové modely

Vychádzame z klasického modelu podľa Markowitza. Poznatky budeme čerpať z [13]. Predpokladajme, že máme portfólio s J akciami, ktoré je charakterizované váhami $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_J)^T$, kde $x_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{J} x_i = 1$. Predpoklad nezápornosti znamená, že krátke pozície sú zakázané. Tento predpoklad zakázaných predajov uvažujeme v celej práci. Náhodný výnos danej akcie je ρ_j a $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_J)^T$. Výnos portfólia potom je:

$$R(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{x}).$$

Riziko portfólia vyjadríme ako mieru rizika. Ak budeme predpokladať rozptyl, riziko porfólia uvažujeme vo forme:

$$r(\boldsymbol{x}) = var(\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{x}).$$

Tieto dve kritériá budeme skúmať simultánne. Existujú rôzne prítupy na riešenie takýchto úloh. Jednou z možností je špeciálny prípad úlohy viackriteriálnej optimalizácie. Konkrétne ide o dvojkriteriálnu úlohu, ktorá je známa ako mean-risk model. Riešením takejto úlohy dostaneme eficientné portfólia.

Definícia 4. *[13] Portfólio s J akciami a váhami x_i pre $i = 1, \ldots, J$ nazveme eficientným vzhľadom k výnosu a riziku, ak neexistujú iné váhy $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_J^*)$ také, že $\sum_{i=1}^{J} x_i^* = 1$ pre $x_i^* \geq 0$ a súčastne platí, že $R(\boldsymbol{x}^*) \geq R(\boldsymbol{x})$ a $r(\boldsymbol{x}^*) \leq r(\boldsymbol{x})$, kde aspoň jedna z nerozností je ostrá.*

Poznámka. *Ak existuje také $\boldsymbol{x}^*$, tak potom hovoríme, že $\boldsymbol{x}^*$ dominuje $\boldsymbol{x}$.*

Eficientné portfólia je možné nájsť viacerými spôsobmi. Prvou a najčastejšie používanou formuláciou je minimalizácia rizika s obmedzením na požadovaný očakávaný výnos. V druhom prípade môžeme maximalizovať očakávaný výnos a pracovať s rizikom v obmedzení. Poslednou uvažovanou možnosťou je agregovaný prístup. Formulácia, kde minimalizujeme riziko a obmedzenie kladieme na požadovaný očakávaný výnos, vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & r(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & R(\boldsymbol{x}) \geq \mu, \\ & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ďalšou možnosťou definovania mean-risk modelu, ktorý budeme používať, je agregovaný prístup. Zavedieme parameter λ. Nech je $\lambda \in (0{,}1)$, potom agregovanou úlohou bude:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & \lambda R(\boldsymbol{x}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{1.3}$$

Úlohu (1.3) je možné riešiť aj pre λ v krajných bodoch 0 a 1. V tomto prípade sa ale musí navyše predpokladať jednoznačnosť riešenia. Inak nie je garantované, že optimálne portfólio úlohy (1.3) bude eficientné.

Tieto dve formulácie budeme používať pri riešení v praktickej časti tejto práce. Pre úplnosť uvedieme aj poslednú alternatívu definovania mean-risk modelu. Týmto prístupom sa v našej práci zaoberať nebudeme, takže oboznámime čitateľa len so všeobecnou definíciou. Ide znova o úlohu s obmedzením, kde teraz maximalizujeme výnos a obmedzenie kladieme na riziko. Matematicky túto úlohu môžeme napísať takto:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & R(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & r(\boldsymbol{x}) \leq \sigma^2, \\ & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J, \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde σ^2 je maximálna hodnota, ktorú môže riziko nadobúdať.
[26] Ak R($\boldsymbol{x}$) je konkávna, r($\boldsymbol{x}$) je konvexná na konvexnej prípustnej množine, tak tri úlohy 1.2, 1.3 a 1.4 generujú rovnakú eficientnú množinu optimál-nych riešení.

Dôkaz tohto tvrdenia môžeme nájsť v [26]. Uvedieme ešte jedno Lemma, ktoré je využité pri dôkaze Tvrdenia 1.3. [26] Nech $\boldsymbol{x}^*$ je optimálne riešenie úlohy 1.3, potom $\boldsymbol{x}^*$ je optimálne riešenie úlohy 1.2 s parametrom $\mu_{min} = R(\boldsymbol{x}^*)$.

Ďalšou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V úlohe (1.3) sme používali len jeden dátový súbor. Pozrieme sa na všeobecnejší prístup. Predpokladajme, že máme k dispozícii K datových súborov. Teda budeme pracovať s K rôznymi náhodnými vektormi výnosov. Musíme vyriešiť K úloh a tým sa snažíme nájsť K optimálnych riešení. Nech x_j^k je váha j-tej akcie v k-tej úlohe pre $k = 1, \dots, K$ a $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, \dots, x_J^k)^T$. Ďalej nech $\boldsymbol{\rho}^k = (\rho_1^k, \dots, \rho_J^k)^T$ je vektor náhodných výnosov prislúchajúcich k-tej úlohe. Rovnako ako na začiatku tejto podkapitoly analogicky dostaneme výnos a riziko portfólia prisluchajúce k-tej úlohe. Označíme ich R($\boldsymbol{x}^k$) a r($\boldsymbol{x}^k$). Výnos portfólia prislúchajúci k-tej úlohe pre $k = 1, \dots, K$ potom je:

$$R(\boldsymbol{x}^k) = E((\boldsymbol{\rho}^k)^T \boldsymbol{x}^k)$$

a riziko portfólia prislúchajúce k-tej úlohe pre $k = 1, \dots, K$, ak predpokladáme podmienenú hodnotu v riziku uvažujeme vo forme:

$$r(\boldsymbol{x}^k) = CVaR(-(\boldsymbol{\rho}^k)^T \boldsymbol{x}^k).$$

Všeobecne môžeme túto úlohu napísať nasledovne:

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{x^k} & \lambda R(\boldsymbol{x}^k) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^k) \\ \text{za podmienok} & \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\ & x_j^k \geq 0,\ j = 1, \dots, J, \end{array}\right\} \quad k = 1, \dots, K \tag{1.5}$$

Nech vektor $\boldsymbol{\rho}^n$ pre $n \in \{1, \dots, N\}$ je J-rozmerný náhodný vektor. Jeho zložky budeme značiť ρ_j^n pre $j \in \{1, \dots, J\}$ a $n \in \{1, \dots, N\}$. Predpokladajme, že vektory náhodných výnosov majú diskretne rozdelenie a to je dané realizáciami, ktoré nazveme scenáre. Potom s_j^n je n-tý scenár výnosu j-tej akcie. Tieto scenáre sa budú nadobúdať s rovnakou pravdepodobnosťou. Ďalej nech $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ je J-rozmerný výberový priemer scenárov, ktorý označíme nasledovne:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}^n, \tag{1.6}$$

kde $\boldsymbol{s}^n = (s_1^n, \dots, s_J^n)$ a $\hat{V}$ je výberová kovariančná matica scenárov:

$$\hat{V} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (\boldsymbol{s}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\boldsymbol{s}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \tag{1.7}$$

Teraz formulujeme jednoúrovňové modely pre jednotlivé miery rizika v prípade vybraných typov formulácii mean-risk modelov. Podrobný popis vytvárania modelov popíšeme len pri semivariancii. Za predpokladu diskrétneho rozdelenia s rovnako pravdepodobnými scenármi dostaneme ostatné modely analogicky a uvedieme už len ich finálnu verziu.

1.3.1 Rozptyl

Najprv analogicky na základe (1.6) a (1.7) vypočítame $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ a $\hat{V}$, kde $\hat{V}$ je regulárna matica. μ_{min} je minimálny požadovaný očakávaný výnos. Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\ \text{za podmienok} & \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\ & \sum\limits_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J \end{array} \tag{1.8}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}} & \lambda \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\ \text{za podmienok} & \sum\limits_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J \end{array} \tag{1.9}$$

1.3.2 Semivariancia

Nech miera rizika $r(\boldsymbol{x})$ je semivariancia. V mean-risk modele s obmedzením na požadovaný očakávaný výnos minimalizujeme funkciu:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\max(0,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n)^2)$$

Úlohu so semivarianciou v účelovej funkcii vieme prepísať na úlohu kvadratického programovania. N-tú zložku výrazu v sume nahradíme premennou z^n. Dostaneme zospodu obmedzenú účelovú funkciu. Výraz za sumou, ktorú nám vytvára funkcia maximum, zohľadníme v množine prípustných riešení. Očakávaný výnos $R(\boldsymbol{x})$ je:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n$$

Celkovo úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n=1,\dots,N \\
& z^n \geq 0, \quad n=1,\dots,N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J}x_j=1 \\
& x_j \geq 0,\ j=1,\dots,J.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

V agregovanom mean-risk modele vystupuje miera rizika a očakávaný výnos v účelovej funkcii. Obe veličiny $R(\boldsymbol{x})$ a $r(\boldsymbol{x})$ prepíšeme rovnako ako v úlohe 1.10 a pripomíname, že λ je parameter. Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n-(1-\lambda)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n=1,\dots,N \\
& z^n \geq 0, \quad n=1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J}x_j=1 \\
& x_j \geq 0,\ j=1,\dots,J.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Teraz modifikujeme úlohu (1.3). Zmena voči úlohe (1.3) je v spôsobe prístupu k dátam. Budeme pracovať so skupinami dát, ktoré nazveme dátové súbory. Nech máme K dátových súborov a v každom dátovom súbore je M výnosov. Dátové súbory sú vytvorené posunom okna veľkosti M o jedno pozorovanie. Budeme hľadať K optimálnych riešení. $R(\boldsymbol{x}^k)$ a $r(\boldsymbol{x}^k)$ budú vypočítané pre každý dátový súbor $k = 1, \ldots, K$ ako v úlohe (1.3). Úlohu (1.4) resp. posuvné okno, kde sa posúvame stále o jedno pozorovanie vieme matematicky vyjadriť nasledovne:

$$\left.\begin{array}{l}
\max\limits_{\boldsymbol{x}^k, z_k^n} \quad \lambda \frac{1}{M} \sum\limits_{j=1}^{J} \sum\limits_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{M} \sum\limits_{n=k}^{k+M-1} (z_k^n)^2 \\
\text{za podmienok} \\
\qquad z_k^n \geq -\sum\limits_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{M} \sum\limits_{t=k}^{k+M-1} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
\qquad z_k^n \geq 0, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
\qquad \sum\limits_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
\qquad x_j^k \geq 0, \; j = 1, \ldots, J.
\end{array}\right\} \quad k = 1, \ldots, K$$

Poznámka. *Predchádzajúci optimalizačný problém je základom pre out-of sample model. Out-of sample modelom sa budeme zaoberať v naledujúcej kapitole.*

1.3.3 Absolútna odchýlka

Ďalšou mierou rizika je absolútna odchýlka. V tomto prípade minimalizujeme nasledujúci výraz:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \right|$$

Úlohu s absolútnou odchýlkou v účelovej funkcii vieme prepísať na úlohu lineárneho programovania. N-tú zložku výrazu v absolútnej hodnote nahradíme n-tou premennou z^n. Ďalej taktiež využijeme tento prepis výrazu v absolútnej hodnote:

$$\begin{aligned} |z| &\geq z \qquad (1.12) \\ |z| &\geq -z \end{aligned}$$

Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z^n \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z^n \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$
\left.
\begin{aligned}
& \max_{\boldsymbol{x}^k,z^n} \quad \lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{M}\sum_{n=k}^{k+M-1} z_k^n \\
& \text{za podmienok} \\
& \qquad z_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{M}\sum_{t=k}^{k+M-1}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{s}^t, \quad n = k,\dots,k+M-1 \\
& \qquad z_k^n \geq \sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - \frac{1}{M}\sum_{t=k}^{k+M-1}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{s}^t, \quad n = k,\dots,k+M-1 \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
& \qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1,\dots,K
$$

1.3.4 Hodnota v riziku

V prípade hodnoty v riziku pri formulácii s obmedzením minimalizujeme $\mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})$. Úlohu vieme prepísať na úlohu lineárneho celočíselného programovania. Túto formuláciu môžeme nájsť napríklad v [22].

Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & a \\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \leq a + Wz^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} z^n = (1-\alpha)N \\
& z^n \in \{0,1\}, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

kde x je dolná celá časť čísla x a W je dostatočne veľká konštanta, tj.

$$W \geq \max_{j,n} \quad s_j^n - \min_{j,n} \quad s_j^n.$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)a \\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \leq a + Wz^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} z^n = (1-\alpha)N \\
& z^n \in \{0,1\}, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad \lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)a_k \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n \leq a_k + W z_k^n, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
&\qquad \sum_{n=1}^{k} z_k^n = (1-\alpha)M \\
&\qquad z_k^n \in \{0,1\}, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, K$$

1.3.5 Podmienená hodnota v riziku

V prípade podmienej hodnoty v riziku pri formulácii s obmedzením budeme postupovať podobne ako v hodnote v riziku. Úlohu vieme prepísať na úlohu lineárneho programovania. Túto formuláciu môžeme nájsť napríklad v [34].

Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} z^n \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \ldots, N \\
& z^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} z^n) \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \ldots, N \\
& z^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad \lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)(a_k + \frac{1}{(1-\alpha)M}\sum_{n=k}^{k+M-1} z_k^n) \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad z_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - a_k, \quad n = k,\dots,k+M-1 \\
&\qquad z_k^n \geq 0, \quad n = k,\dots,k+M-1 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad x_j^k \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1,\dots,K$$

1.4 Stochastická dominancia druhého rádu

Ďalšou možnosťou popísania rizika je prístup pomocou stochastickej dominancie využitím úžitkových funkcii. Táto teória je založená na porovnnaní náhodnych veličín za určitých preferencií. V tomto prípade prevedieme dvojkriteriálnu úlohu na jednokriteriálnu, kde maximalizujeme úžitok. Základné informácie o úžitkových funkciách môžeme nájsť v [10]. Teraz sa pozrieme bližšie na stochasticku dominanciu. Ide o najmodernejší prístup k teórii úžitku. Všeobecne má stochastická dominancia určitý rád. V našej práci sme sa rozhodli používať dominanciu druhého rádu. Bližšie informácie o stochastickej dominancii iných rádov je možné nájsť v [19]. V tejto podkapitole budeme pracovať s kardinálnou úžitkovou funkciou za rizika a náhodné veličiny A a B budú výnosy.

Definícia 5. *[22] Povieme, že u: $I \to \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ je kardinálna úžitková funkcia, pokiaľ je spojitá a neklesajúca.*

Poznámka. *Namiesto spojitej funkcie môžeme uvažovať taktiež po častiach skokovitú. Predpoklad neklesajúcej funkcie vyjadruje predpoklad nenasýtenosti investora.*

Definícia 6. *[22] Nech A a B sú náhodné veličiny, potom A strikne dominuje B vzhľadom k stochastickej dominancii 2. rádu (SSD), ak Eu(A) $\geq$ Eu(B) pre všetky konkávne úžitkové funkcie také, že existujú stredné hodnoty a existuje konkávna úžitková funkcia u_0 taká, že Eu$_0$(A) $>$ Eu$_0$(B). Túto striktnú dominanciu označíme $A \succ_{SSD} B$.*

Poznámka. *Existuje aj slabá verzia definície 6(A $_{SSD}$ B), kde dominancia druhého radu nie je striktná. V tomto prípade predpoklad o existencii úžitkovej funkcie u_0 splňujúci ostrú nerovnosť nie je vyžadovaný. Skratka SSD je z anglického termínu "second-order stochastic dominance".*

Poznámka. *Nech $A \succ_{SSD} B$ potom žiadni rizikovo averzní investori nepreferujú B pred A.*

Poznámka. *Množina všetkých konkávnych úžitkových funkcii je jeden z mnoha typov generátorov. Iným príkladom môže byť množina všetkých úžitkových funkcii.*

Príklad. [19] Uvedieme príklad stochastickej dominancie druhého rádu pre normálne a diskrétne rozdelenie náhodných veličín A a B.

- Nech máme náhodné veličiny $A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$, $B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$, kde stredné hodnoty $(\mu_A, \mu_B) \in (-\infty, \infty)$ a $(\sigma_A^2, \sigma_B^2) \in (0, \infty)$. Potom platí:

$$\text{A}_{\ SSD}\ \text{B} \Leftrightarrow \mu_A \geq \mu_B \ \&\ \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$$

- Nech náhodná veličina A nadobúda hodnoty $a_1, \ldots, a_N$ s rovnakou pravdepodobnosťou 1/N a $a_1 \leq \ldots \leq a_N$. Nech náhodná veličina B nadobúda hodnoty $b_1, \ldots, b_N$ s rovnakou pravdepodobnosťou 1/N a $b_1 \leq \ldots \leq b_N$. Potom platí:

$$\text{A}_{\ SSD}\ \text{B} \Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i \quad pre \quad n = 1, \ldots, N$$

Definícia 7. *[12] Funkciu $F_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú vzťahom $F_A(s) = P[A \leq s]$ nazveme distribučnou funkciou náhodnej veličiny A.*

Definícia 8. *[12] Nech F_A je distribučná funkcia náhodnej veličiny A. Funkcia $F_A^{(-1)}(v) = inf\{s : F_A(s) \geq v\}$, $v \in (0,1)$ nazývame kvantilovou funkciou náhodnej veličiny A.*

Definícia 9. *[23] Hovoríme, že kumulovaná distribučná funkcia je plocha pod distribučnou funkciou $F_A(s)$ do bodu t*

$$F_A^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_A(s) ds,$$

a kumulovaná kvantilová funkcia

$$\begin{aligned} F_A^{(-2)}(p) &= \int_0^p F_A^{(-1)}(q) dq, \quad p \in (0,1] \\ &= 0, \quad p = 0 \\ &= \infty, \quad inak. \end{aligned}$$

Veta 1. *[23] Nutná a postačujúca podmienka pre SSD*

- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow F_A^{(2)}(t) \leq F_B^{(2)}(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ *a existuje* $t_0 \in \mathbb{R}$ *také, že* $F_A^{(2)}(t_0) \ < \ F_B^{(2)}(t_0)$
- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow F_A^{(-2)}(p) \geq F_B^{(-2)}(p)\ \forall\ p \in$ *(0,1] a existuje* $p_0 \in$ *(0,1] také, že* $F_A^{(2)}(p_0) \ > \ F_B^{(2)}(p_0)$
- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow CVaR_\alpha$ *(-A)* $\leq CVaR_\alpha$ *(-B)* $\forall \alpha \in$ *[0,1] a existuje* $\alpha_0 \in$ *[0,1] také, že* $CVaR_{\alpha_0}$ *(-A)* $< CVaR_{\alpha_0}$ *(-B) kde A a B sú nahodné výnosy s konečnými absolútnymi prvými momentmi.*

Uvedieme, kedy je portfólio SSD eficientné.

Definícia 10. *[23] Hovoríme, že portfólio $\boldsymbol{x}$ je SSD neeficientné, keď existuje portfólio $\boldsymbol{y}$ také, že $\boldsymbol{y}^T\rho$ striktne dominuje $\boldsymbol{x}^T\rho$ v zmysle SSD. Inak je portfólio $\boldsymbol{x}$ SSD eficientné.*

Nutnou a postačujúcou podmienkou na posúdenie portfólia, či je SSD eficientné je nasledujúce tvrdenie. [24] Dané portfólio $\boldsymbol{y}$ je SSD eficientné vtedy a len vtedy keď $\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) = 0$, kde $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}^T$ a

$$\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r$$

$$\begin{aligned}
\text{za podmienok} \quad & -N^{-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1}d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \leq -N^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j^k \geq 0, \; j = 1,\dots,J \\
& - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& - d_r \leq 0, \quad r = 1,\dots,N.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Ak $\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) > 0$ potom optimálne riešenie $\boldsymbol{x}^*$ úlohy 1.19 je SSD eficientné a striktne dominuje $\boldsymbol{y}$ v zmysle SSD.

Kapitola 2

Dvojúrovňové optimalizačné problémy

V rôznych odvetiach je tento typ úlohy aplikovaný na problémy s hierarchickým usporiadaním do dvoch rozhodovacích úrovní. Bežne je využívaný v manažmente, energetike, či v ekonomickom planovaní. My sa budeme zaoberať optimalizáciou portfólií. V tejto kapitole sa budeme venovať formulovaniu rôznych dvojúrovňových modelov. Využijeme štyri definované miery rizika a taktiež aj stochastickú dominanciu druhého rádu. Najprv uvedieme všeobecné formulácie a v jednotlivých podkapitolách rozpíšeme dané modely podrobnejšie.

2.1 Všeobecná formulácia

Dvojúrovňové optimalizačné problémy tvoria podmnožinu optimalizačných úloh s dvoma optimalizačnými požiadavkami. Od klasickej optimalizačnej úlohy sa líši tým, že v podmienkach riešeného problému sa nachádza optimalizačný problém inej úlohy. Ide o takzvanú vnorenú úlohu. Hlavným (vonkajším) riešeným problémom rozumieme hornú úroveň úlohy a vnorený problém tvorí dolnú úroveň úlohy. Vychádzali sme z definície v [4] a [9].

Definícia 11. *Všeobecnou formuláciou dvojúrovňového optimalizačného problému rozumieme*

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}\boldsymbol{y}\in\mathbb{Y}}{min} \quad & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
\textit{za podmienok} \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0, \\
& \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \\
& f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{z}\in Y}{min} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \\
& \textit{za podmienok} \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq \; 0, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad\; \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \; 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset R^{n_1}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *sú premenné hornej úrovne a* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *dolnej úrovne. Podobne funkcia* $F\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *je účelová funkcia hornej úrovne a* $f\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *je účelová funkcia dolnej úrovne. Vektorové funkcie* $\boldsymbol{G}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$ *a* $\boldsymbol{H}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_1}$ *sú podmienky hornej úrovne. Poslednými vektorovými funkciami* $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ *a* $\boldsymbol{h}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l2}$ *sú podmienky dolnej úrovne.*

Poznámka. *V prípade, že budeme pracovať v dolnej úrovni s I optimalizačnými úlohami, tak formulácia 2.1 sa zmení nasledovne*

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}\boldsymbol{y_i}\in\mathbb{Y}} \quad & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) \\
\textit{za podmienok} \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) \leq 0, \\
& \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) = 0 \\
& \left.\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) = \min_{\boldsymbol{z_i}\in\mathbb{Y}} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) \\ \textit{za podmienok} \quad \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) \leq 0, \\ \boldsymbol{h_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \textit{pre} \quad i = 1,\ldots,I
\end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset R^{n_1}$*,* $\boldsymbol{y_i} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *sú premenné hornej úrovne a* $\boldsymbol{z_i} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *dolnej úrovne. Podobne funkcia* $F\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *je účelová funkcia hornej úrovne a* $f_i\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *pre* $i = 1,\ldots,I$ *sú účelové funkcie dolnej úrovne. Vektorové funkcie* $\boldsymbol{G}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$ *a* $\boldsymbol{H}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_1}$ *sú podmienky hornej úrovne. Poslednými vektorovými funkciami* $\boldsymbol{g_i}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ *a* $\boldsymbol{h_i}\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_2}$ *pre* $i = 1,\ldots,I$ *sú podmienky dolnej úrovne.*

Budeme pracovať s nasledujúcimi množinami.
Množiny prípustných riešení :

$$S(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq 0, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\}$$
$$S_U = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\}$$

Množina optimálnych riešení dolnej úrovne :

$$P(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in argmin(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})\}$$

Indukovaná oblasť je posledná množina, ktorú budeme využívať. Ide o množinu prípustných riešení pre dvojúrovňovú optimalizačnú úlohu. Matematicky ju môžeme vyjadriť takto:

$$IR = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \text{ je prípusté riešenie hornej úrovne}, \boldsymbol{y} \in P(\boldsymbol{x})\}$$

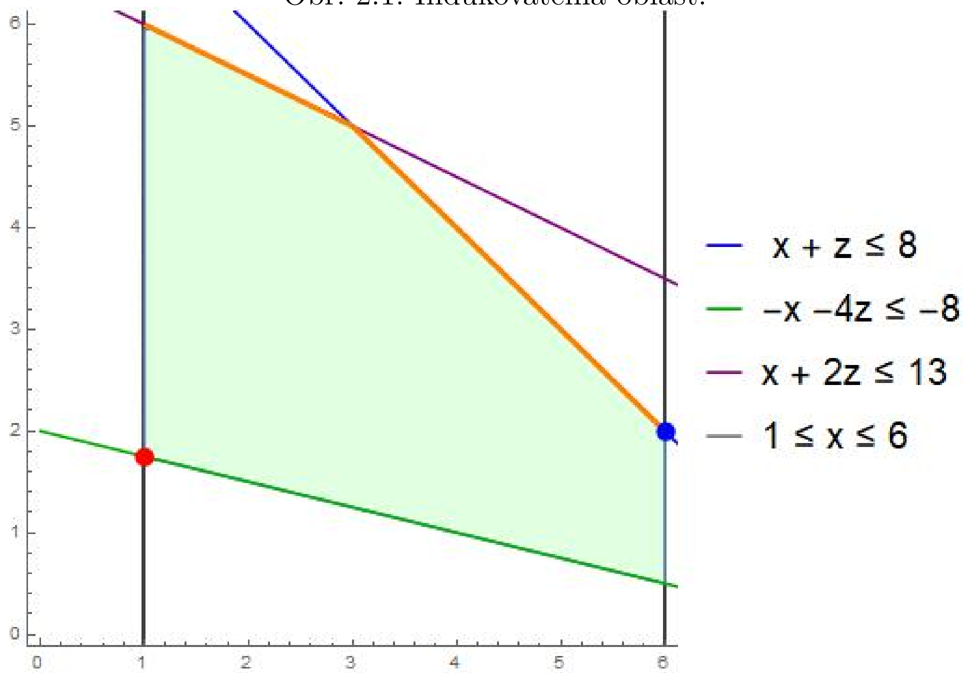
Ďalej budeme predpokladať, že aspoň pre nejaké $\boldsymbol{x} : S(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ a $P(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$.

Príklad. Uvedieme elementárny príklad dvojúrovňovej úlohy. Pre jednoduchosť predpokladajme, že riešime lineárny dvojúrovňový problém so spojitými premennými, tj. $x \in R^1$, $y \in R^1$, $z \in R^1$ a $\mathbb{X} = \{x \geq 0\}$, $\mathbb{Y} = \{z \geq 0\}$

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{X}} \quad & x + 3y \\
\text{za podmienky} \quad & -y = \min_{z\in\mathbb{Y}} \quad -z \\
& \quad \text{za podmienky} \qquad \begin{aligned} -x - 4z &\leq -8 \\ x + z &\leq 8 \\ x + 2z &\leq 13 \\ 1 \leq x &\leq 6 \end{aligned}
\end{aligned}$$

$P(x)$ je množina optimálnych riešení pre dolnú úroveň. V našom príklade vyzerá nasledovne: $P(x) = \{(x-13)/2, x-8\}$ a keďže nemáme žiadne podmienky v hornej úrovni, tak je to zároveň aj indukovateľná oblasť, ktorú môžeme vidieť na Obrázku (2.1) naznačenou oranžovou farbou. Červenou farbou je naznačený bod, ktorý by bol optimom, ak by šlo len o jednoúrovňový problém a modrou farbou je naznačené optimum dvojúrovňovej úlohy.

Obr. 2.1: Indukovateľná oblasť.



Využitím piatich mier rizika a stochastickej dominancie druhého rádu uvedieme všeobecné formulácie modelov. Stále budeme pracovať s J akciami, kde budeme mať k dispozícii N scenárov. V prvých dvoch formuláciách bude naším cieľom nájsť portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k mean-risk modelu. Tieto dve formulácie sa líšia spôsobom formulácie podmienky eficiencie. Na dolnej úrovni budeme pracovať s premennou $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^J$. Optimálne riešenia $\boldsymbol{x}$ dolnej úrovne označíme ako $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^J$. Tieto riešenia sa stanú premennými hornej úrovne, ak ležia v prípustnej množine riešení hornej úrovne. Prvým skúmaným modelom bude dvojúrovňová úloha, kde na dolnej úrovni budeme pracovať s úlohou (1.2). Teraz upriamime poroznosť na značenie μ_{min}, ktoré v dolnej a hornej úrovni má inú funkciu. Pre jednoduchosť sme ponechali rovnaké značenie. V dolnej úrovni μ_{min} vystupuje ako parameter. Do množiny prípustných riešení hornej úrovne sa posunú len tie hodnoty parametra μ_{min}, pre ktoré existuje optimálne riešenie $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^J$. V hornej úrovni μ_{min} už vystupuje ako rozhodovacia premenná. Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min},\boldsymbol{x}^*} \quad & \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\| \\
\text{za podmienok} \quad & \mu_{min} \geq 0 \\
& r(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x}} r(\boldsymbol{x}) \\
& \text{za podmienok} \quad R(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0,\ j=1,\dots,J.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Druhým skúmaným modelom bude dvojúrovňová úloha, kde na dolnej úrovni budeme pracovať s úlohou (1.3). Značenie λ v tomto type úlohy vystupuje analogicky ako μ_{min}. V dolnej úlohe je λ parameter a v hornej úlohe premenná. Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda,\boldsymbol{x}^*} \quad & \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\| \\
\text{za podmienok} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda R(\boldsymbol{x}^*) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^*) = \max_{\boldsymbol{x}} \lambda R(\boldsymbol{x}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}) \\
& \text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0,\ j=1,\dots,J.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

V druhom type modelu využijeme úlohu (1.5). V dolnej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení pre $k = 1,\dots,K$. Nech $\boldsymbol{x}^{*k} \in \mathbb{R}^J$ sú optimálne riešenia dolnej úrovne premennej $\boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^J$. Na dolnej úrovni v praktickej časti budeme pracovať s desiatimi skupinami výnosov, tj. $K = 10$. V jednej skupine bude M výnosov. V praktickej časti budeme uvažovať $M = 20$. Tieto skupiny tvoria in-sample. V hornej úrovni sa zameráme na maximum out-of sample výnosov. Out-of-sample výnos pre k-tu skupinu je $\boldsymbol{s}^{k+M}$. Pripomíname, že dátové súbory vznikajú posunom okna o jedno pozorovanie. Teda pracujeme s posuvným oknom vytvoreným z M výnosov a okno sa posunie K-krát stále o jedno pozorovanie. Celkovo v tomto type úlohy potrebujeme mať k dispozícii $K + M$ výnosov. Značenie λ vystupuje analogicky ako μ_{min}. V dolnej úlohe je λ parameter a v hornej úlohe premenná. Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\max_{\lambda, \boldsymbol{x}^{*k}} \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{s}^{k+M})^T \boldsymbol{x}^{*k} \tag{2.5}
$$

za podmienok

$$
\left.
\begin{aligned}
&0 \leq \lambda \leq 1 \\
&\lambda R(\boldsymbol{x}^{*k}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^{*k}) = \max_{\boldsymbol{x}^k} \lambda R(\boldsymbol{x}^k) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^k) \\
&\text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_i^k = 1, \\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_j^k \geq 0, \; j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \dots, K
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Podľa Tvrdenia 1.3 môžeme využiť akýkoľvek mean-risk model. Vyberieme práve jeden. Budeme pracovať s agregovaným typom mean-risk modelu. Teraz najprv nájdeme SSD množinu eficientných riešeni a na tejto množine budeme hľadať optimálne riešenie mean-risk modelu pre dané riziko. Túto úlohu dostaneme kombináciou úloh 2.1 a jednoúrovňových modelov, ktoré sme definovali v prvej kapitole. Na dolnej úrovni hľadáme SSD eficientnú množinu, teda chceme množinu takých $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_J)^T$, ktoré žiadne $\boldsymbol{x}$ nedominuje. Podľa Tvrdenia 1.4 dané portfólio je eficientné, ak účelová funkcia je rovná 0. V hornej úlohe je λ parameter, no my sa obmedzíme len na $\lambda = 1/2$. Ďalej nech d_r^* je optimálne riešenie úlohy 1.19, tak úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}} \quad & \lambda R(\boldsymbol{\xi}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{\xi}) \\
\text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1, \\
& \xi_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad - N^{-1} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad - d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

2.2 Lineárna dvojúrovňová optimalizačná úloha

Úpravou všeobecnej definície uvedieme explicitne ako lineárna dvojúrovňová úloha (BLPP) vyzerá.

Definícia 12. *Predpokladajme, že* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$, $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$, $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{b_1} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{b_2} \in \mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{A_1} \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$, $\boldsymbol{B_1} \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$, $\boldsymbol{A_2} \in \mathbb{R}^{q\times n_1}, \boldsymbol{B_2} \in \mathbb{R}^{q\times n_2}$. *Potom dvojúrovňovú lineárnu úlohu môžeme napísať nasledovne:*

$$\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X},\boldsymbol{y}\in\mathbb{Y}}{min} \quad & \boldsymbol{c_1x} + \boldsymbol{d_1y} \\
\textit{za podmienok} \quad & \boldsymbol{A_1x} + \boldsymbol{B_1y} \leq \boldsymbol{b_1}, \\
& \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{d_2y} = \min_{\boldsymbol{z}\in Y} \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{d_2z} \\
& \textit{za podmienok} \quad \boldsymbol{A_2x} + \boldsymbol{B_2z} \leq \boldsymbol{b_2},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Poznámka. *Definícia 12 je definovaná pre spojité premenné (L-BLPP). Nech a* $B^n = \{0{,}1\}^n$ *resp.* $B^m = \{0{,}1\}^m$. *Ak predpokladáme* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ *a* $\mathbb{Y} \subset B^{n_2}$ *resp.* $\mathbb{X} \subset B^{n_1}$ *a* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *tak ide o spojito-dikrétnu resp. diskrétno-spojitú lineárnu dvojúrovňovú úlohu (CDL-BLPP resp. (DCL-BLPP)). Ak budeme pracovať s* $X \subset B^{n_1}$ *a* $Y \subset B^{n_2}$, *tak ide o diskrétnu lineárnu dvojúrovňovú úlohu (D-BLPP).*

Teraz podrobne popíšeme mean-risk modely s obmedzením na očakávaný výnos (1.2) a agregované modely (1.3). Pomocou nich budeme formulovať dvojúrovňový problém. Ako sme už popísali vyššie, naším cieľom je nájsť portfólio, ktoré bude najbližšie k známemu portfóliu y a zároveň maen-risk eficientné vzhľadom k danej miere rizika. Na lineárnu dvojúrovňovú úlohu vieme prepísať tri zo skúmaných rizikových mier, tj. hodnota v riziku, podmienená hodnota z riziku a absolútnu odchýlku. Kde v prípade hodnoty v riziku ide o spojito-diskrétnu lineárnu dvojúrovovú úlohu a vo zvyšných dvoch budeme pracovať so spojitou lineárnou dvojúrovňovou úlohou. Budeme pracovať s J akciami, kde budeme mať k dispozícii N scerárov. Optimálne riešenia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^J$ dolnej úrovne označíme ako $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^J$.

2.2.1 Podmienená hodnota v riziku

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je podmienená hodnota v riziku. Potom dvojúrovňová úloha (2.3) bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min_{\mu_{min},\boldsymbol{x}^*} \quad & \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\| \\
\text{za podmienok} \quad & \mu_{min} \geq 0 \\
& CVaR(-\boldsymbol{\rho^T x}^*) = \min_{\boldsymbol{x}} CVaR(-\boldsymbol{\rho^T x}) \\
& \text{za podmienok} \quad R(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Normou v účelovej funkcii budeme v celej práci rozumieť absolútnu hodnotu:

$$\sum_{j=1}^{J} \left| y_j - x_j^* \right| \tag{2.9}$$

Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.17). Absolútnu hodnotu v účelovej funkcii hornej úlohy prepíšeme pomocou (1.12). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& a^* + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \min_{\boldsymbol{x}, a, l^n} a + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, J.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je podmienená hodnota v riziku. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.18). Absolútnu hodnotu v účelovej funkcii hornej úlohy prepíšeme pomocou (1.12). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy

(2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a^* + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n}) = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, a, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^n) \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade podmienenej hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, x^{*k}} \quad \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{s}^{k+M})^T\boldsymbol{x}^{*k} \\
&\quad \text{za podmienok} \\
&\quad\ 0 \le \lambda \le 1
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x^{*_j k} s_j^n - (1-\lambda)(a_k^* + \frac{1}{(1-\alpha)M}\sum_{n=k}^{k+M-1} l^{*_k n}) = \\
&\quad = \max_{\boldsymbol{x}^k, a_k, l_k^n} \quad \lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)(a_k + \frac{1}{(1-\alpha)M}\sum_{n=k}^{k+M-1} l_k^n) \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad\qquad l_k^n \ge -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - a_k, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad l_k^n \ge 0, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad\qquad x_j^k \ge 0,\ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \dots, K
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade podmienenej hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi},a,l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - (a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} l^n) \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - a,\ n = 1,\dots,N \\
& l^n \geq 0,\ n = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & - N^{-1} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j^k \geq 0 \\
& - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& - d_r \leq 0, \quad r = 1,\dots,N. \end{aligned}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

2.2.2 Absolútna odchýlka

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je absolútna odchýlka. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.13). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \min_{\boldsymbol{x}, l^n} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je absolútna odchýlka. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.14). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.4).

Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade absolútnej odchýlky je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda, x^{*k}} \quad & \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{s}^{k+M})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
& \text{za podmienok} \\
& \quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& \lambda \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{M} \sum_{n=k}^{k+M-1} l_k^{*n} = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}^k, l_k^n} \quad \lambda \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{M} \sum_{n=k}^{k+M-1} l_k^n \\
& \text{za podmienok} \\
& \qquad l_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{M} \sum_{t=k}^{k+M-1} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
& \qquad l_k^n \geq \sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - \frac{1}{M} \sum_{t=k}^{k+M-1} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+M-1 \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
& \qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \ldots, K
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade absolútnej odchýlky je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}, l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} l^n \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \dots, N \\
& l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & -N^{-1} \boldsymbol{x^T} \boldsymbol{s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T} \boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j^k \geq 0 \\
& -v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& -d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

2.2.3 Hodnota v riziku

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je hodnota v riziku. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na celočíselnú lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.15). Celkovo dostaneme formuláciu úlohy (2.3), ktorá je lineárna a celočíselná. Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& a^* = \min_{\boldsymbol{x}, a, l^n} a \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t]
& -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \leq a + W l^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = (1-\alpha) N \\
& l^n \in \{0{,}1\}, \quad n = 1, \ldots, N, \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

kde x je dolná celá časť čísla x a W je dostatočne veľká konštanta.

Po využití znalostí z (1.16) a (1.12), ak predpokladáme, že v dolnej úrovni je úloha (1.3) bude formulácia pre hodnotu v riziku nasledovná:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) a^* = \max_{\boldsymbol{x}, a, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) a \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t]
& -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \leq a + W l^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = (1-\alpha) N \\
& l^n \in \{0{,}1\}, \quad n = 1, \ldots, N, \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, x^{*k}} \quad \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{s}^{k+M})^T\boldsymbol{x}^{*k} \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad 0 \le \lambda \le 1 \\
&\left.\begin{aligned}
&\lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^{*k}s_j^n - (1-\lambda)a_k^* = \\
&\quad = \max_{\boldsymbol{x}^k, a_k, z_k^n} \quad \lambda\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)a_k \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad\qquad -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n \le a_k + W z_k^n, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad \sum_{n=1}^{k} z_k^n = (1-\alpha)M \\
&\qquad\qquad z_k^n \in \{0{,}1\}, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad\qquad x_j^k \ge 0,\ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi},a,l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - a \\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n \leq a + Wl^n,\ n = 1,\dots,N \\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = (1-\alpha)N \\
& l^n \in \{0,1\}, \quad n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad -N^{-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1}d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad\qquad\qquad \leq -N^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad -v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \qquad\qquad\qquad -d_r \leq 0, \quad r = 1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

2.3 Konvexná dvojúrovňová optimalizačná úloha

Konvexnú verziu dvojúrovňovej úlohy definovanej v 2.1 dostaneme, ak budeme predpokladať F, f , $\boldsymbol{G}$ resp. $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{g}$ resp. $\boldsymbol{f}$ sú spojité a dvakrát diferencovateľné a konvexné funkcie. Aj napriek označeniu konvexná dvojúrovňová optimalizačná úloha, táto úloha môže mať nekonvexnú indukovanú množinu, ktorá môže byť dokonca aj prázdna kvôli prítomnosti podmienok horného levelu. Mean-risk model, ak za riziko budeme predpokladať rozptylu alebo semivariancie, je možné prepísať na úlohu konvexného programovania.

2.3.1 Semivariancia

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je semivariancia. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.10). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^{*n})^2 = \min_{\boldsymbol{x}, l^n} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je semivariancia. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.11). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^{*n})^2 = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade semivariancie je:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, x^{*k}} \quad \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{s}^{k+M})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
&\text{za podmienok} \\
&\quad 0 \le \lambda \le 1 \\
&\left.
\begin{aligned}
&\lambda \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{M}\sum_{n=k}^{k+M-1}(l_k^{*n})^2 = \\
&\quad \max_{\boldsymbol{x}^k, l_k^n} \quad \lambda \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+M-1} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{M}\sum_{n=k}^{k+M-1}(l_k^n)^2 \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad\qquad l_k^n \ge -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{M}\sum_{t=k}^{k+M-1}(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad l_k^n \ge 0, \quad n = k, \dots, k+M-1 \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad\qquad x_j^k \ge 0, \ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade semivariancie je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}, l^n} \quad & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \dots, N \\
& l^n \geq 0, \ n = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \ j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & - N^{-1} \boldsymbol{x^T} \boldsymbol{s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T} \boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j^k \geq 0 \\
& - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& - d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

2.3.2 Rozptyl

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je rozptyl. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.8). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \boldsymbol{x}^{*T} \hat{V} \boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\
& \text{za podmienok} \quad \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je rozptyl. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.9). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \boldsymbol{x}^{*T} \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^{*T} \hat{V} \boldsymbol{x}^* = \max_{\boldsymbol{x}} \lambda \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\
& \text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade rozptyl je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}} \quad & \boldsymbol{\xi}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\xi}^T \hat{V} \boldsymbol{\xi} \\
\text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t]
& - N^{-1} \boldsymbol{x^T} \boldsymbol{s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T} \boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j^k \geq 0 \\
& - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \ldots, N \\
& - d_r \leq 0, \quad r = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

2.4 Dvojúrovňový problému v softvéri GAMS

Vnorená štruktúra problému si vyžaduje existenciu optimálneho riešenia dolnej úrovne a potrebujeme pracovať s rozumnou indukovanou oblasťou. Kvôli týmto podmienkam sú dvojúrovňové optimalizačné problémy ťažšie riešiteľné. Úlohy dvojúrovňového problému môžeme tak ako v prípade jednoúrovňových problémov riešiť globálne, lokálne alebo môžeme použiť stacionárne body respektíve heuristiky. Prehľad článkov, kde sa tieto jednotlivé algoritmy nachádzajú, môžeme nájsť v [11]. Obsiahle metódy riešenia dvojúrovňových problémov nájdeme v [4]. Najrozšírenejšou teóriou v tejto oblasti je konvexný prípad dvojúrovňových problémov. V literatúre nájdeme rôzne reformulačné techniky, ktoré sa snažia dostať k stacionárnemu bodu a overiť KKT podmienky optimality. Výhodou konvexnej dvojúrovňovej úlohy je, že je možné prepísať dolnú úroveň pomocou KKT podmienok optimality, čím dostaneme jednoúrovňový problém. Zavedenie pojmu konvexná dvojúrovňová úloha je ale mätúca. Aj napriek tomu, že pracujeme s konvexnými problémami v dolnej aj hornej úrovni, celkovo dvojúrovňový problém konvexný nemusí byť a aj keď nájdeme riešenie, tak zvyčajne ide o lokálne a nie globálne optimum. Všeobecne sú tieto problémy ťažko riešiteľné pretože ide o NP-hard problémy, tj. problémy, ktoré sa nedajú riešiť v polynomickom čase a ani algoritmus riešenia nie je možné preformulovať na problém riešiteľný v polynomickom čase.

Vyššie definované úlohy obsahujú parameter resp. premennú μ_{min} a λ . V dolnej úrovni vystupujú ako parametre a v hornej ako premenné. Do hornej úrovne sa posunú len tie hodnoty μ_{min}, λ, pre ktoré existuje optimálne riešenie dolnej úlohy. Ide o parametrickú optimalizačnú úlohu. Základné princípy a vlastnosti spojené s parametrickým programovaním je možné najsť v [16]. V programe Gams sme využívali solver Jams. Tento reformulačný nástroj používa EMP (extended mathematical programing), tj. rozšírené matematické programovanie. Nové typy modelov, ktoré nie je možné spoľahlivo vyriešiť sú preformulované na matematický problém riešiteľný pomocov riešiteľov zabudovaných v Gamse. Aktuálne EMP je schopný vyriešiť okrem dvojúrovňových úloh aj variačné nerovnosti, či rozšírené nelineárne programovanie. V tomto prípade EMP reformuluje úlohu definovanú v definícii 11 na jednoúrovňový problém. Dolnú úroveň nahradí KKT podmienkami optimality, tj.

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}} \quad & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
\text{za podmienok} \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{y}) \leq 0 \\
& \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\mathbf{y}) = 0 \\
& \nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}^T \nabla_y \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{l}^T \nabla_y \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\
& \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\
& \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0 \\
& \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\
& \boldsymbol{u} \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

,

kde $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m_2}$ a $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{l_2}$ sú vektory KKT multiplikátorov s podproblémom pre fixované $\boldsymbol{x}$.

Dvojúrovňový problém s obmedzením v prípade, ak za riziko považujeme rozptyl, môžeme prepísať na jednoúrovňový problém použitím KKT podmienok optimality. V takomto tvare úloha 2.26 bola počítaná v použitom softvére GAMS.

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{z}} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j \\
& m^j \geq x_j - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \nabla_x \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}^T \nabla_x (\mathbf{1}^T \boldsymbol{x} - 1) + \boldsymbol{u}^T \nabla_x (\mu_{min} - \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \\
& \boldsymbol{u}^T (\mu_{min} - \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \\
& \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1 \\
& \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\
& \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \\
& x_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Kapitola 3

Praktická časť

V praktickej časti sa budeme zaoberať niekoľkými typmi úloh. Najprv naším cieľom bude nájsť portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k mean-risk modelu. Použijeme dve formulácie mean-risk modelu a to agregovaný prístup (1.3) a formulaciu s obmedzenim na očakávaný výnos (1.2). V druhom type úloh využijeme úlohu (1.5). V dolnej úlohe budeme hľadať K optimálnych riešení. V hornej úrovni sa zameráme na maximum out-of sample očakávaných výnosov. V poslednom type úlohy budeme hľadať optimáne portfólio, ktoré bude stochasticky dominantné druhého rádu. Podľa Tvrdenia 1.3 nezávisí na použitom mean-risk modele, takže si vyberieme práve jeden. Budeme pracovať s agregovaným typom mean-risk modelu. Najprv na dolnej úrovni nájdeme SSD množinu eficientných riešeni a na tejto množine budeme na hornej úrovni hľadať optimálne riešenie mean-risk modelu pre dané riziko. Túto úlohu dostaneme kombináciou úloh 2.1 a jednoúrovňových modelov, ktoré sme definovali v prvej kapitole. Úlohy sú počítané v softvéri GAMS a Wolfram Mathematica.

3.1 Všeobecná formulácia

Vybrali sme päť akcií spoločností, ktoré sú voľne dostupné na internete. My sme použili https://finance.yahoo.com. Budeme pracovať už s upravenými cenami. Tieto úpravy zohľadňujú všetky uplatniteľné rozdelenia a rozdelenia dividend. Údaje na tejto stránke sa upravujú pomocou vhodných multiplikátorov rozdelených a dividend, ktoré sú v súlade s normami CRSP (Center for Research on Security Prices).

- Apple Inc. (AAPL) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD
- Amazon.com, Inc. (AMZN) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD
- Caterpillar Inc. (CAT) New York Stock Exchange Consolidated Issue - New York Stock Exchange Consolidated Issue Delayed Price. Currency in USD
- The Coca-Cola Company (KO) New York Stock Exchange Consolidated Issue - New York Stock Exchange Consolidated

- Tesla, Inc. (TSLA) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD

Budeme pracovať s mesačnými cenami od augusta 2010 do júna 2017. Mesačné ceny akcii sme prepočítali pomocou vzorca:

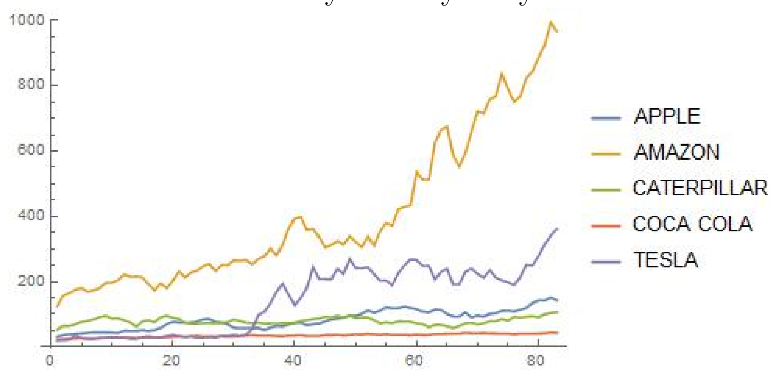
$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

kde P_t je cena v čase t a R_t je výnos v čase t. Tento vzorec nájdeme napríklad v [8]. Prehľad popisných štatistík výnosov sú popísané v Tabuľke 3.1. Ak by sme sa rozhodovali len na základe očakávaného výnosu, tak by sme mohli všetko investovať do Tesly alebo v opatrnejšom prípade by sme mohli investíciu rozdeliť v nejakom pomere medzi Amazon a Teslu.

Tabuľka 3.1: Popisná štatistika výnosov vybraných firiem.

Firma	**1Q**	**3Q**	**Medián**	**Priemer**	**var**	**SD**
AAPL	-0.0188	0.0653	0.0169	0.0212	0.0050	0.0704
AMZN	-0.0327	0.0753	0.0253	0.0283	0.0062	0.0790
CAT	-0.0386	0.0513	0.0094	0.0115	0.0064	0.0797
KO	-0.0136	0.0388	0.0117	0.0090	0.0014	0.0375
TSLA	-0.0642	0.1147	0.0147	0.0479	0.0277	0.1663

Obr. 3.1: Ceny akcií vybraných firiem



Pripomenieme si premenné, s ktorými budeme pracovať v praktickej časti. λ nadobúda hodnoty od [0,1], $\mu \geq 0$ a $\boldsymbol{y}$ je známe portfólio. V rámci praktickej časti sme predpokladali, že $\boldsymbol{y}$ je rovnomerne rozdelené, tj. $\boldsymbol{y} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. V praxi je napríklad možné uvažovať, že známe porfólio je to, čo bolo použité v minulom období. Hodnotu α sme pri podmienej hodnote v riziku nestavili na 0.95. Ďalej nech $r(\boldsymbol{x})$ búdu postupne všetky rizikové miery podľa toho ako sme ich definovali v prvej kapitole.

3.1.1 Riešenie dvojúrovňovej optimalizačnej úlohy

Teraz uvedieme výsledky formulácii dvojúrovňových problémov, ak v dolnej úrovni dvojúrovňovej úlohy pracujeme s obmedzením na očakávaný výnos resp.

agregáciu očakávaného výnosu a rizika. Všeobecné formulácie sú (2.3) a (2.4). Najprv sa pozrieme na dvojúrovňovú úlohu, kde v množine prípustných riešení v dolnej úrovni je obmedzenie na očakávaný výnos. Tu nastáva otázka akým spôsobom obmedziť očakávaný výnos. V praxi sa bežne používa buď celkový priemer očakávaných výnosov alebo benchmark. My sa v tejto práci ale pozrieme na najnižší očakávaný výnos, ktorý môžeme dostať v sledovanom portfóliu. Druhou formuláciou dvojúrovňovej úlohy je formulácia s agregovaným prístupom v dolnej úrovni. Parameter lambda v tomto prípade vyjadruje vzťah investora k riziku a očakávanému výnosu. Ak parameter bude nulový, tak investora extrémne zaujíma maximálny výnos. V ostatných prípadoch je to už jasné.

Uvedieme prehľadnú tabuľku výsledkov zo softvéru GAMS problémov, ktoré sme definovali v druhej kapitole. H1 je hodnota účelovej funkcie hornej úrovne. Hodnota účelovej funcie v dolnej úrovni v oboch prípadoch je rovnaká, čo je dôsledok Tvrdenia 1.3. Hodnotu účelovej funkcie v dolnej úrovni pri formulácii s obmedzením na očávaný výnos označíme $H2_{OB}$. Hodnotu účelovej funkcie v dolnej úrovni v agregovanom prípade označíme $H2_{AG}$.

Tabuľka 3.2: Hodnoty účelových funkcií a parametrov úloh (2.3) a (2.4).

Riziko	**H1**	$H2_{OB}$	$H2_{AG}$	μ_{min}	λ
Rozptyl	0.547	0.002	0.001	0.021	0.122
Semivariancia	0.400	0.001	0.001	0.024	0.085
Absolútna odchýlka	0.983	0.028	-0.023	0.013	0.121
Podmienená hodnota v riziku	0.678	0.060	-0.010	0.021	0.619

V druhej tabuľke ukážeme váhy, do ktorých by sme mali investovať, aby sme dostali portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k daným mean-risk modelom.

Tabuľka 3.3: Rozdelenie portfólia pre dané miery rizika.

Riziko	**AAPL**	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
Rozptyl	0.200	0.225	0.003	0.449	0.123
Semivariancia	0.224	0.200	0.000	0.362	0.214
Absolútna odchýlka	0.066	0.048	0.148	0.692	0.046
Pod. hod. v riziku	0.115	0.270	0.000	0.469	0.146

Momentálne je už len na rozhodnutí investora. Ak mu nevadí, že rovnakou váhou sa pristupuje k akcii s velkou potenciálnou stratou resp. ziskom, tak vyberie rozdelenie investovania portfólia pomocou rozptylu. Ak chce klient zohľadniť výšky strát, ktoré sú väčšie ako hodnota v riziku na určitej hladine, tak sa prikloní k riziku definovanom pomocou podmienenej hodnoty v riziku. Chýbajúcim výstupom v tabuľkách je hodnota v riziku, kde v jednoúrovňvom prípade sa softvér bez problémov dopracoval k riešeniu. V dvojúrovňovom prípade sme nedostali optimálne riešenie. Pri riešení dvojúrovňových úloh je kľúčová duálna úloha. V prípade celočíselných úloh nefunguje silná veta o dualite a tým pádom sa Gams nedopracoval k riešeniu. Bola vyhľadaná teória ohľadom prepisu celočíselného programovania, kde sa používali relaxované formulácie a niekde dokonca sa aj dopracovalo k výsledku [15], no to platí len za určitých podmienok.

Teraz si priblížime formuláciu (2.5). Podľa popisu na začiatku tejto kapitoly budeme pracovať s desiatimi dátovými súbormi. Z našich dát vytvoríme 10 skupín. V každej skupine bude 20 výnosov. Celkovo budeme pracovať s tridsiatimi výnosmi. Z našej vzorky vezmeme posledných 30 výnosov, teda od indexu 53 do indexu 82. Do hornej úrovne posunieme desať optimálnych riešení.

Uvedieme prehľadnú tabuľku výsledkov pre rozšírenú formuláciu s agregáciou v dolnej úlohe zo softvéru GAMS pre podmienenú hodnotu v riziku a semivarianciu. $H1$ je znova účelová funkcia hornej úrovne. Tentokrát budeme mať 10 hodnôt pre účelovú funkciu dolnej úrovne $H2$.

Tabuľka 3.4: Hodnoty daných účelových funkcií dvojúrovňových úloh (2.12) a (2.24) s daným použitým rizikom na dolnej úrovni.

Riziko	**CVAR**	**SEMI**
$H1$	0.024	0.018
$H2_1$	0.036	0.003
$H2_2$	0.033	0.003
$H2_3$	0.028	0.002
$H2_4$	0.038	0.003
$H2_5$	0.037	0.002
$H2_6$	0.034	0.001
$H2_7$	0.040	0.002
$H2_8$	0.041	0.002
$H2_9$	0.047	0.002
$H2_{10}$	0.050	0.003

Tabuľka 3.5: Hodnoty hľadaných parametrov λ dvojúrovňových úloh (2.12) a (2.24) s daným použitým rizikom na dolnej úrovni.

λ	λ_{CVAR}	λ_{SEMI}
	1.000	0.125

V tabuľke (3.5) si môžeme všimnúť ako pridávanie nového pozorovania a odoberanie posledného mení optimálne riešenie. V prípade podmienenej hodnoty v riziku sme sa dopracovali k parametru λ rovnej 1. Teda v mean-risk modeli zanedbávame riziko a pozeráme sa len na očakávanú hodnotu výnosu. V nasledujúcich dvoch tabuľkách ukážeme váhy, desiatich optimálnych portfólii ak použijeme mieru rizik podmienenú hodnotu v riziku a semivarianciu. Indexy optimálnych riešenií v tabuľkách (3.7) a (3.6) hovoria o tom, koľko bolo vynechaných pozorovaní z dátového súboru.

Tabuľka 3.6: Rozdelenie portfólia pre podmienenú hodnotu v riziku.

	AAPL	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
x^1	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^3	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^4	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^6	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^7	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^8	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^9	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^{10}	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000

Tabuľka 3.7: Rozdelenie portfólia pre semivarianciu.

	AAPL	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
x^1	0.000	0.581	0.273	0.000	0.146
x^2	0.000	0.000	0.015	0.963	0.023
x^3	0.000	0.000	0.047	0.920	0.033
x^4	0.000	0.000	0.118	0.829	0.053
x^5	0.000	0.627	0.224	0.000	0.149
x^6	0.000	0.612	0.208	0.000	0.180
x^7	0.000	0.611	0.330	0.000	0.059
x^8	0.000	0.797	0.020	0.000	0.185
x^9	0.000	0.839	0.030	0.000	0.113
x^{10}	0.000	0.860	0.000	0.000	0.140

Posledný typ príkladu, ktorému sa budeme venovať bude kombinácia úlohy stochastickej dominancie druhého rádu a zároveň mean-risk modelu. Uvedieme výsledky dvoch úloh. Využijeme mieru rizika CVar a absolútnu odchýlku. Znova H1 bude reprezentovať hodnotu účelovej funkcie hornej úrovne. Hodnota účelovej funcie v dolnej úrovni bude značená H2.

Tabuľka 3.8: Hodnoty účelových funkciíúloh (2.13) a (2.28).

Riziko	**H1**	**H2**
Absolútna odchýlka	-0.027	0.000
Podmienená hodnota v riziku	-0.037	0.000

V tabuľke (3.9) nájdeme výsledky pre riziká podmienenú hodnotu a pre absolútnu odchýlku.

V poslednom type úlohy 2.6 sme predpokladali, že λ je $\frac{1}{2}$. Teraz sa pozrieme ako sa mení optimálne riešenie, ak $\lambda = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\}$. Za rizikovú mieru budeme uvažovať podmienenú hodnotu v riziku. H2 je vo všetkých prípadoch nulová. Zvyšné výsledky nájdeme v tabuľke (3.10) a na obrázku (3.2).

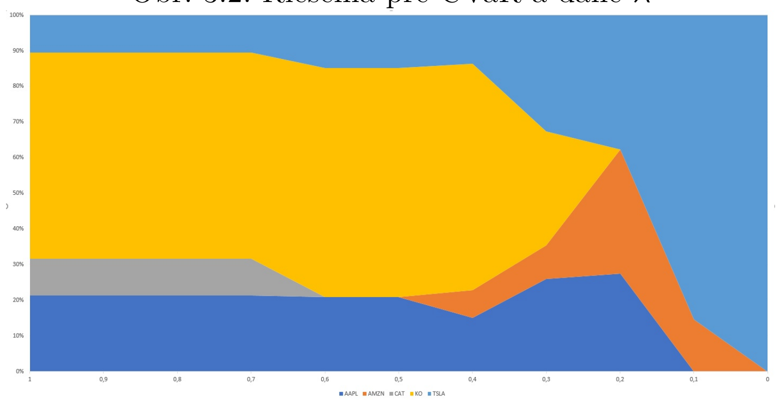
Tabuľka 3.9: Rozdelenie portfólia pre dané miery rizika.

Riziko	**AAPL**	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
Absolútna odchýlka	0.045	0.039	0.131	0.743	0.041
Pod. hod. v riziku	0.209	0.000	0.000	0.643	0.148

Tabuľka 3.10: Rozdelenie portfólia pre CVaR a dané λ.

λ	**H1**	**AAPL**	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
0	-0.053	0.213	0	0.103	0.579	0.105
$\frac{1}{10}$	-0.046	0.213	0	0.103	0.579	0.105
$\frac{2}{10}$	-0.039	0.213	0	0.103	0.579	0.105
$\frac{3}{10}$	-0.032	0.213	0	0.103	0.579	0.105
$\frac{4}{10}$	-0.025	0.209	0	0	0.643	0.148
$\frac{5}{10}$	-0.037	0.209	0	0	0.643	0.148
$\frac{6}{10}$	-0.011	0.15	0.078	0	0.637	0.136
$\frac{7}{10}$	-0.002	0.26	0.094	0	0.32	0.326
$\frac{8}{10}$	0.008	0.274	0.349	0	0	0.377
$\frac{9}{10}$	0.023	0	0.146	0	0	0.854
1	0.048	0	0	0	0	1

Obr. 3.2: Riešenia pre CVaR a dané λ



Záver

V diplomovej práci sme sa venovali dvojúrovňovým optimalizačným problémom. V porovnaní s jednoúrovňovou úlohou má dvojúrovňová niekoľko výhod. Jednou z najväčších výhod je, že v jednom procese vieme analyzovať dve rôzne alebo dokonca aj konfliktné situácie. Dvojúrovňová úloha vie zároveň lepšie podchytiť vzájomný vzťah medzi objektami napríklad medzi manažmentom podniku a jeho zákazníkmi. My sme sa zaoberali optimalizáciou portfólia pomocou mean-risk modelov, kde sme použili rôzne miery rizika. V prvej úrovni sme hľadali najbližšie riešenie k danému portfóliu a v druhej úrovni sme pracovali s mean-risk modelom s obmedzením, kde do obmedzenia sme zaradili očakávaný výnos. Na miesto celkového priemeru alebo benchmarku, co nám určuje dolnú hranicu očakávaného výnosu sme zaradili do úlohy parameter. Druhý spôsob použitého mean-risk modelu bol pomocou agregácii funkcií. Z toho vyplýva, že pri splnení určitých podmienok nezávisí aký mean risk model použijeme, keďže dostaneme rovnakú množinu eficientných riešení. Nakoniec sme sa zaoberali stochastickou dominanciu druhého rádu. V práci boli použité dva softvéry, tj. GAMS a Wolfram Mathematica. Na výpočet dvojúrovňových úloh sme použili GAMS, konkrétne experimentálne operačné prostredie EMP. Toto prostredie má niekoľko solverov a najpoužívanejším je JAMS. Konštatuleme, že nie všetky nami definované úlohy bol tento softvér schopný vypočítať. Problém sa vyskytol v úlohách, kde v dolnej úrovni minimalizujeme hodnotu v riziku. Tu sme sa teda nedopracovali k výsledku, keďže duálne riešenie dolnej úrovne zohráva dôležitú úlohu v dvoúrovňovom programovaní pri rozhodovaní hornej úrovne a neexistuje žiaden jednoznačný koncept, ak využívame duálnu úlohu a sú prítomné diskrétne premenné. V [9] bola prepísaná jednoúrovňová celočíselná úloha do dvojúrovňovej. Toto sme do diplomovej práce nezahrnuli, keďže by to už bolo nad rámec zadanej úlohy. Týmto krokom dostaneme trojúrovňový problém. V druhom type úlohy sme hľadali na dolnej úrovni K optimálnych riešení, ktoré sme posunuli do hornej úrovne a zaujímali sme sa o maximálny out-of-sample výnos. V poslednom type úlohy sme sa zaoberali stochastickou dominanciou druhého rádu. Na dolnej úrovni sme vytvorili množinu eficientných riešení. Na tejto množine sme následne našli eficietné riešenie vzhľadom k mean-risk modelu, ktorý bol v hornej úrovni. Ďalšou zaujímavou analýzou bolo, ak sme v poslednom type dvojúrovňového problému 2.6 ponechali v účelovej funkcii hornej úrovne parameter λ. Pre parameter λ z intervalu [0,1] boli vytvorené ekvidistantné hodnoty. Pre tieto hodnoty sme postupne vypočítali očakávanú hodnotu a riziko. Výsledky sme zobrazili do grafu.

Samozrejeme, že je možné vytvoriť aj iné formulácie pomocou definovaných mier rizika. Ďalšou a nie jedinou možnou formuláciou úlohy by mohlo byť hľadanie SSD aj CVaR eficientného portfólia v dolnej úrovni a v hornej úrovni by sme minimalizovali transakčné náklady. Rovnako aj generátorov stochastickej dominancie je mnoho. Bolo by teda napr. možné pozorovať zmeny vo výsledkoch, ak by sme použili stochastickú dominanciu prvého rádu. Taktiež sme v celej práci počítali s diskrétnymi scenármi. Bolo by možné uvažovať o tom, že výnosy akcií majú združené mnohorozmerné normálne rozdelenie alebo aj iné eliptické rozdelenie.

Literatúra

[1] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eben, J.M. and Heath, D. (1999): *Cohorent measures of risk.* Mathematical Finance, Vol. 9, No.3, pp. 203-228.

[2] Axehill, D. (2008): *Integer Quadratic Programming for Control and Communication.* PhD thesis, Linkoping University, Sweden.

[3] Aryanezhad, M.B. and Roghanian, E. (2008):*A bi-level linear multi-objective decision making model with interval coefficients for supply chain coordination.* IUST International Journal of Engineering Science, Vol. 19, No.1-2, pp. 67-74.

[4] Bard, J.F.(1998): *Practical Bilevel Optimization:Algorithm and Application.* Kluwer, ISBN 978-1-4419-4807-6.

[5] Bard, J.F. and Falk, J.E. (1982): *An Explicit Solution to the Multi-Level Programming Problem*, Computers and Operations Research, Vol. 9, No. 1, pp. 77-100.

[6] Bracken, J. and McGill, J.(1973): *An Mathematical programs with optimalization problems in the constrains*, Operations Research, Vol. 22, pp. 37-44.

[7] Candler, W. and Norton, R (1977); : *Multilevel programing.* Technical report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C.

[8] Cipra, T.(2008): *Finanční ekonometrie.* Ekopress, ISBN 978-80-86929-43-9.

[9] Colson, B.; Marcotte, P. and Savard, G. (2007): *An overview of bilevel optimization*, Annals Operations Research, Vol. 153, pp. 235-256.

[10] Černý, M.; Vlach, M. and Zimmermann, K. (1975): *Axiomatická teória úžitku.* Státní pedagogické nakladateľství, n.p., Praha 1, číslo publikace: 1014-9295.

[11] Dempe, S. (2003): *Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints* A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, Vol. 52, pp. 333-359.

[12] Dupač, V. and Hušková, M.(1999): *Pravdepodobnosť a matematická štatistika* Karolinum, Praha, ISBN 978-8-0246-2208-8.

[13] Dupačová, J.; Hurt, J. and Štěpán, L. (2002): *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer, ISBN 1-4020-0840-6.

[14] Embrechts, P.; McNeil, A. and Straumann, D. (2002): *Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. In: Dempster, M. et al. (Eds.), Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176-223.

[15] Faísca, N.P.; Dua, V.; Rustem, B.; Saraiva P.M. and Pistikopoulos E.N. (2007): *An Parametric global optimisation for bilevel programing*, Global Optimization, Vol. 38, pp. 609 - 623.

[16] Fiacco, A.V.(1983): *An Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming*, Operations Research Department,Vol. 165, ISBN 0-12-254450-1.

[17] Flegel, M. L. and Kanzow, C.(2002): *Optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints: Fritz John and Abadie-type approaches*, Technical report, Universitat Wurzburg, Germany.

[18] Gaivoronski, A.A. and Pflug G.(2004): *Value at Risk in Portfolio Optimilization:file:Properties and Computational Approach*. Journal of Risk, Vol. 7, No. 2, pp. 1-31.

[19] Levy, H. (2006): *Stochastic Dominance Investment Decision Making under Uncertainty Second Edition*. Springer, ISBN-10: 0-387-29302-7.

[20] Huang, A. (2006): *A Comparison of Value at Risk Approaches and a New Method with Extreme Value Theory and Kernel Estimator*. City University of New York, working paper.

[21] Jeroslow, R.G. (1985): *The Polynomial Hierarchy and a Simple Model for Competitive Analysis* Mathematical Programming, Vol. 32, pp. 146–164.

[22] Kopa, M.(2006): *Utility functions in portfolio optimization* Disertační práce, Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

[23] Kopa, M. and Chovanec, P.(2008): *A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure* Kybernetika, Vol. 44, No. 2, pp. 243-258.

[24] Kopa, M. and Post, T.(2015): *A general test for SSD portfolio efficiency* OR Spectrum, Vol. 37, No. 3, pp. 703-734.

[25] Kozmík, V.(2010): *Eficience portfolií při spojitém rozdělení výnosu*. Diplomová práce, Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

[26] Krokhmal, P.; Palmquist, J. and Uryasev, S. (2001): *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*. Journal of risk, Vol.4, Num.2, p.p. 43-68.

[27] Kulich, M (2016): *Základy teorie pravděpodobnosti* skriptá.

[28] Levy, H.(2006): *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*. Springer Science+Business Media, inc., ISBN-10 : 0-387-29302-8.

[29] Markowitz, H.(1952): *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

[30] Outrata, J.; Kočvara, M. and Zowe, J. (1998).: *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 978-1-4757-2825-5.

[31] Pflug, G. Ch. and Romisch, W.(2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific Publishing Company, ISBN 978-9812707406.

[32] Rockafellar, R. T. (1970): Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey. ISBN: 978-0691015866.

[33] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S.(2002): *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*. Journal of Banking and Finance, Vol. 26, No. 7, pp. 1443-1471.

[34] Uryasev, S. (2002): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-6644-1.

[35] Vincente, L. and Calamai, P. (1994): *Geometry And Local Optimality Conditions For Bilevel Programs With Quadratic Strictly Convex Lower Levels*. Technical report #198-O-150294, Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo.

[36] Vincente, L.; Savard, G. and Judice, J. (1994): *Gescent Approaches for Quadratic Bilevel Programming*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 81, pp. 379–399.

[37] Ye, J. J. (2005): *Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 307, pp. 350-369.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek